Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Е. А. Малашевская, А. В. Еськова, Г. А. Щербатюк

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Часть 1

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2014

УДК 330.4(07)
ББК 65в6.я7
М182

Рецензенты:
Кафедра «Информатика» ФГБОУ ВПО «АмГПГУ»,
зав. кафедрой д-р техн. наук, профессор О. С. Амосов;
Ю. А. Раевский, канд. экон. наук, зав. кафедрой информационных технологий
ФГБОУ ВПО «Хабаровская государственная академия экономики и права»

Малашевская, Е. А.
М182 Численные методы и их экономические приложения : в 2 ч. : учеб. пособие / Е. А. Малашевская, А. В. Еськова, Г. А. Щербатюк. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ».
ISBN 978-5-7765-1022-9
Ч. 1. – 2014. – 114 с.
ISBN 978-5-7765-1096-0

Первая часть учебного пособия содержит необходимую информацию о математическом моделировании в экономике, классификации математических моделей, основные сведения и примеры решения задач по теории погрешности, теоретические аспекты и примеры практического использования численных методов для решения нелинейных уравнений, систем линейных уравнений.

Пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная информатика в экономике», направлений «Прикладная информатика», «Бизнес-информатика» всех форм обучения.

УДК 330.4(07)
ББК 65в6.я7

ISBN 978-5-7765-1096-0 (Ч. 1)
ISBN 978-5-7765-1022-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Специалисты в области экономики и управления сталкиваются со сложными теоретическими и прикладными задачами, решение которых невозможно без математического моделирования. Расчет математической модели решаемой задачи зачастую производится с использованием численных методов. Современные математические пакеты позволяют реализовать множество разнообразных вычислительных алгоритмов, поэтому каждый специалист в области экономики и управления должен знать основы численных методов решения основных классов задач вычислительной математики и уметь использовать для этих целей специализированное программное обеспечение.

Данное пособие содержит необходимый минимум численных методов, применяемых для математического моделирования типичных задач экономики и управления, а также различные варианты реализующих их вычислительных алгоритмов. В пособии рассмотрены общие вопросы математического моделирования, классификация математических моделей, последовательность решения исследовательских задач с использованием математического моделирования. Очень подробно рассмотрена теория погрешности, так как именно с ее помощью можно ответить на очень важный в исследовании вопрос: «А насколько можно доверять полученным числовым значениям?». Изложен необходимый минимум теоретических сведений о методах решения нелинейных уравнений, рассмотрены прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений, вопросы аппроксимации и интерполяции таблично заданных данных, вопросы численного дифференцирования и интегрирования. Затронуты вопросы решения дифференциальных уравнений. Теоретическое изложение каждой из тем подкреплено примерами реализации соответствующих вычислительных алгоритмов, заданиями и методическими примерами к лабораторным работам. Завершают пособие расчетно-графические задания, в которых студентам предоставляется возможность применить изученный материал для решения конкретных задач экономики.

В качестве среды реализации используется пакет MathCad. MathCad является средой визуального программирования, для использования пакета не требуется изучать какую-либо систему команд. Главными причинами выбора именно этого пакета для обучения численным методам стали дружественный интерфейс, простота освоения, привычная форма записи математических выражений, хорошая визуализация, широкие вычислительные возможности.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. Общие положения

В настоящее время математическое моделирование и вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ стали составными частями общих подходов, характерных для современных информационных технологий. Математическое моделирование позволило сочетать способность ЭВМ быстрее, точнее и лучше человека делать формальные, арифметические операции, отслеживать логические цепочки с удивительными свойствами человеческого интеллекта - интуицией, способностью к ассоциациям. Современные средства отображения информации дают возможность вести с ЭВМ диалог – анализировать альтернативы, проверять предположения, экспериментировать с математическими моделями [1].

Обоснование управленческих решений – одна из актуальных задач исследования социально-экономических процессов. Существенное усложнение проблем управления способствовало развитию методов их анализа. В результате обобщения накопленного опыта и естественной эволюции науки сложилась современная методология исследования социально-экономических проблем как на микро-, так и на макроуровнях, опирающаяся на системный подход. Использование принципа системности, без которого невозможно эффективное управление, включает, наряду с содержательным анализом изучаемых процессов, применение метода математического моделирования [2].

Понятие модели относится к основным понятиям науки, представляя собой некоторое отражение объектов (процессов) исследования. Простейшими примерами моделей являются географические карты, фотографии, игрушечные автомобили.

Если модель и объект моделирования имеют некоторые общие свойства, то возникает вопрос о возможности изучения объекта на основании исследования свойств соответствующей модели. При этом в зависимости от конкретной цели модель может быть более или менее точной. Например, при анализе аэродинамических свойств автомобиля существенно, чтобы форма модели соответствовала форме этого автомобиля, а при проектировании гаража в качестве модели автомобиля достаточно использовать параллелепипед, т.к. в этом случае достаточно знать лишь его геометрические размеры – длину, ширину и высоту.

При исследовании социально-экономических процессов также возможно применение натурных моделей. Так, поток денег и товаров в реальной экономике можно моделировать при помощи сложной системы труб и резервуаров, в которой потоки воды имитируют движение этих объектов, но такое моделирование не может отразить принципиальные особенности изучаемого процесса и носит демонстрационный характер [2].

Частным видом моделей являются математические модели, которые отражают объект (процесс) с помощью математической символики.

Совокупность понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта, и называют математической моделью этого объекта [1].

Модель – объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях, гипотезах) одной системы (оригинала) другой системой для лучшего изучения оригинала или воспроизведения каких-либо его свойств. Математические модели представляются в виде совокупности математических соотношений, уравнений, неравенств.

1.2. Выбор модели. Классификация математических моделей

Экономико-математические модели представляют собой математическое описание социально-экономических систем и процессов в них. Основное назначение математических моделей состоит в том, что с их помощью осуществляется ***анализ, прогнозирование, поиск и выбор оптимальных решений*** в различных областях экономики. Классификация моделей позволяет выделить в них наиболее общие признаки и свойства реальных систем. В табл. 1.1 приведена одна из возможных классификаций.

По степени агрегирования объектов математические модели подразделяются на *модели микроуровня, макроуровня и метауровня. Математические модели микроуровня* описывают процессы в системах с распределенными параметрами (в *континуальных системах),* а *математические модели макроуровня* – в системах с сосредоточенными параметрами (в *дискретных системах).* В первых из них *фазовые переменные (внутренние, внешние* и *выходные параметры объекта)* могут зависеть как от времени, так и от пространственных координат, а во вторых – только от времени.

В математических моделях макроуровня число фазовых переменных имеет порядок 10^4-10^5, количественный анализ такой модели становится громоздким и требует значительных затрат вычислительных ресурсов. При столь большом числе фазовых переменных трудно выделить существенные характеристики объекта и особенности его поведения. В таком случае путем объединения и укрупнения элементов сложного объекта стремятся уменьшить число фазовых переменных за счет исключения из рассмотрения *внутренних параметров* элементов, ограничиваясь лишь описанием взаимных связей между укрупненными элементами. Такой подход характерен для *математических моделей метауровня.*

Математические модели метауровня обычно относят к высшему уровню иерархии, модели макроуровня – к среднему, а модели микроуровня – к низшему.

Применительно к экономической сфере модели делятся на ***макроэкономические*** **и** ***микроэкономические. Макроэкономические модели*** описывают функционирование экономики как единого целого, связывая между собой материальные и финансовые показатели: ВВП, потребление, инвестиции, бюджет, ценообразование, занятость и др. ***Микроэкономические модели*** описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, таких как предприятия и фирмы [3, 4].

Таблица 1.1

Классификация математических моделей

Признак классификации	**Виды математических моделей**
По степени агрегирования объектов	Модели микроуровня Модели макроуровня Модели метауровня
По характеру взаимоотношений со средой	Открытые (непрерывный обмен) Закрытые (слабая связь)
По характеру отображаемых свойств объекта	Структурные Функциональные
По фактору неопределенности	Детерминированные Стохастические (вероятностные) Модели с элементами неопределенности
По типу уравнений	Линейные Нелинейные
По способу представления свойств объекта	Аналитические Алгоритмические Имитационные
По способу получения модели	Теоретические Эмпирические
По отношению к времени	Динамические Статические
По множеству значений переменных	Непрерывные Дискретные Дискретно-непрерывные

По характеру взаимоотношений со средой модели делятся на открытые и закрытые.

Открытая модель предполагает динамическое взаимодействие с окружающим миром, соответственно, в *закрытых моделях* это взаимодействие отсутствует.

По характеру отображаемых свойств объекта модели делятся на *структурные* и *функциональные*. *Структурные* модели отображают устройство объекта и связи между составляющими его элементами. Если информация о внутренних параметрах отсутствует или же внутреннее устройство объекта слишком сложно, то модель объекта строят по принципу *черного ящика* – устанавливают соотношение между внешними и выходными параметрами путем исследования реакции объекта на внешние воздействия, таким образом, получая *функциональную* модель. Если обозначить входы и выходы моделируемого объекта через X и Y соответственно, то построить функциональную модель – это значит отыскать оператор F, связывающий X и Y, т. е. $Y=F(X)$. Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика». Структурные модели делят на *топологические* и *геометрические,* составляющие два уровня иерархии моделей этого типа. Первые отображают состав объекта и связи между его элементами и имеют форму графов, таблиц, матриц, списков. Геометрическая модель дополнительно к информации, представленной в топологической модели, содержит сведения о форме и размерах объекта и его элементах, об их взаимном расположении. В геометрическую модель обычно входят совокупность уравнений линий и поверхностей и алгебраические соотношения, определяющие принадлежность областей пространства телу объекта или его элементам.

По фактору неопределенности модели подразделяются на детерминированные, стохастические (вероятностные) и модели с элементами неопределенности**.** Одной из характерных особенностей *функциональной математической модели* является наличие или отсутствие среди ее параметров случайных величин.

Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах. В качестве инструментария в них используется математический аппарат теории вероятностей и математической статистики (математические ожидания, дисперсии, среднеквадратические отклонения и т. д.). Если изучаемый объект является изделием массового производства и его *внутренние параметры* могут принимать случайные значения в пределах допусков, установленных относительно номинальных значений**,** то и *выходные параметры объекта* будут случайными величинами. Стохастические модели подразделяются на модели эконометрики и модели теории массового обслуживания. Модели эконометрики основываются на корреляционно-регрессионном анализе, математической статистике и дисперсионном анализе. Модели теории массового обслуживания описывают многоканальные системы, занятые обслуживанием требований.

В *детерминированных* моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установлены, следовательно, поведение системы можно точно определить. При построении детерминированных моделей чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра. Детерминированные модели наиболее распространены. К ним сводится большинство экономических задач.

Модели с элементами неопределенности описывают ситуации, в которых часть величин не имеет статистических данных и остается неизвестными (типичная ситуация для теории игр).

По типу уравнений (по степени математической идеализации) детерминированные модели подразделяются на ***линейные*** и ***нелинейные.*** В *линейной математической модели* объекта его параметры связаны линейными соотношениями. Это означает, что при изменении какого-либо внешнего (или внутреннего) параметра объекта линейная модель предсказывает линейное изменение зависящего от него выходного параметра, а при изменении двух или более параметров – сложение их влияний, т. е. такая модель обладает свойством *суперпозиции*. Если модель не обладает свойством суперпозиции, то ее называют *нелинейной.* Линейные модели описывают исследуемые явления в сильно упрощенном виде, но с сохранением основных закономерностей. Основным достижением линейных моделей является относительная простота их реализации.

Нелинейные модели более адекватны реальным процессам, но используют, как правило, сложный математический аппарат. Возможности анализа нелинейных моделей связаны в основном с методами вычислительной математики. Чтобы для исследования нелинейной математической модели объекта можно было использовать аналитические методы, ее обычно линеаризуют, т.е. нелинейные соотношения между параметрами заменяют приближенными линейными и получают так называемую *линеаризованную математическую модель.* Так как линеаризация связана с внесением дополнительных погрешностей, то к результатам анализа линеаризованной модели следует относиться с определенной осторожностью. Линеаризация модели может привести к утрате или существенному искажению реальных свойств объекта. Учет в модели нелинейных эффектов особенно важен, когда малые изменения входных параметров модели могут вызвать качественные изменения в состоянии объекта.

По способу представления свойств объекта модели делятся на *аналитические, алгоритмические, имитационные* [1].

Аналитические модели – математические модели, которые можно представить в виде явно выраженных аналитических зависимостей выходных параметров от параметров внутренних и внешних. При аналитическом моделировании процессы функционирования элементов системы записываются в виде алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностных и других соотношений и логических условий. При построении иерархии моделей одного и того же объекта обычно стремятся к тому, чтобы упрощенный вариант модели был представлен в аналитической форме, допускающей точное решение, которое можно было бы использовать для сравнения при тестировании результатов, полученных при помощи более полных и поэтому более сложных вариантов математических моделей. В процессе математического моделирования аналитическую модель преобразуют в алгоритмическую модель.

Алгоритмические математические модели выражают связи между выходными параметрами и параметрами входными и внутренними в виде алгоритма.

При *имитационном* моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени и в пространстве, причем имитируются составляющие процесс элементарные явления с сохранением его логической и временной структуры. Имитационное моделирование не имеет ограничений на класс решаемых задач.

Имитационные математические модели – это алгоритмические модели, отражающие развитие процесса (поведение исследуемого объекта) во времени при задании внешних воздействий на процесс (объект). Например, это модели систем массового обслуживания, заданные в алгоритмической форме.

По способу получения модели могут быть подразделены на теоретические и эмпирические.

Теоретические математические модели создаются в результате исследования объектов (процессов) на теоретическом уровне с использованием известных фундаментальных законов сохранения таких субстанций, как масса, энергия, электрический заряд и др. Кроме того, привлекают определяющие соотношения, называемые также уравнениями состояния. *Эмпирические математические модели* создаются в результате проведения экспериментов (изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения его параметров на входе и выходе) и обработки их результатов методами математической статистики. Построение эмпирической модели сводится к решению *задачи идентификации.*

По отношению к фактору времени модели подразделяются на *статические и динамические.*

Статические модели описывают состояния экономического объекта в конкретный текущий момент, не учитывая изменение во времени параметров.

Динамические модели учитывают взаимосвязи и изменение переменных во времени, тем самым описывая взаимодействие процессов в экономике. *Стационарные математические модели* описывают объекты, в которых протекают так называемые *установившиеся процессы,* в которых выходные параметры постоянны во времени. К установившимся относят и *периодические процессы,* в которых некоторые выходные параметры остаются неизменными, а остальные претерпевают колебания. Если интересующие нас выходные параметры объекта изменяются медленно и в рассматриваемый фиксированный момент времени таким изменением можно пренебречь, то говорят о *квазистационарной математической модели.*

По множеству значений переменных математические модели подразделяются на *непрерывные, дискретные, дискретно-непрерывные*.

Каждый параметр объекта может быть трех типов – непрерывно изменяющимся в некотором промежутке своих значений, принимающим только некоторые дискретные значения и, смешанный тип, когда в одной области параметр принимает все возможные значения, а в другой – только дискретные. В связи с этим выделяют *непрерывные, дискретные* и *смешанные математические модели.*

1.3. Общая схема математического моделирования

Основу математического моделирования социально-экономических процессов составляют математические модели экономических объектов, методы их решения, анализ и интерпретация полученных результатов.

Разработка экономико-математических моделей представляет собой сложный, трудоемкий процесс, состоящий из нескольких этапов, базирующихся на системном подходе и определяющий последовательность проведения общей процедуры *вычислительного эксперимента* (рис. 1.1) [4]. Исходной позицией данной схемы служит *объект*, под которым будем понимать процесс, явление или отдельную ситуацию в какой-либо исследуемой системе.

Этап 1. Содержательная постановка задачи. На данном этапе осуществляется определение основной цели моделирования объекта, формулируются условия, при которых решается задача. Данный этап начинается с изучения объекта моделирования, оценки различных точек зрения на проблему, ради которой строится модель, и заканчивается подробным содержательным описанием объекта моделирования.

Этап 2. Построение концептуальной модели. Аргументируются допущения и упрощения, позволяющие не учитывать в модели те качества объекта, влияние которых предполагают в рассматриваемом случае несущественным. Учитывая, что идеализация, т.е. упрощение исходного явления, является началом всякого научного исследования, построение экономической модели начинается с выявления существенных факторов и отклонений, второстепенных и несущественных для данной проблемы.

Полнота экономической модели определяется количеством информации о свойствах структурных и функциональных элементов исследуемого объекта. Информация может носить как теоретический, так и эмпирический характер. Проблема определения качественных и количественных взаимосвязей между элементами экономического объекта может быть предметом самостоятельного математического моделирования.

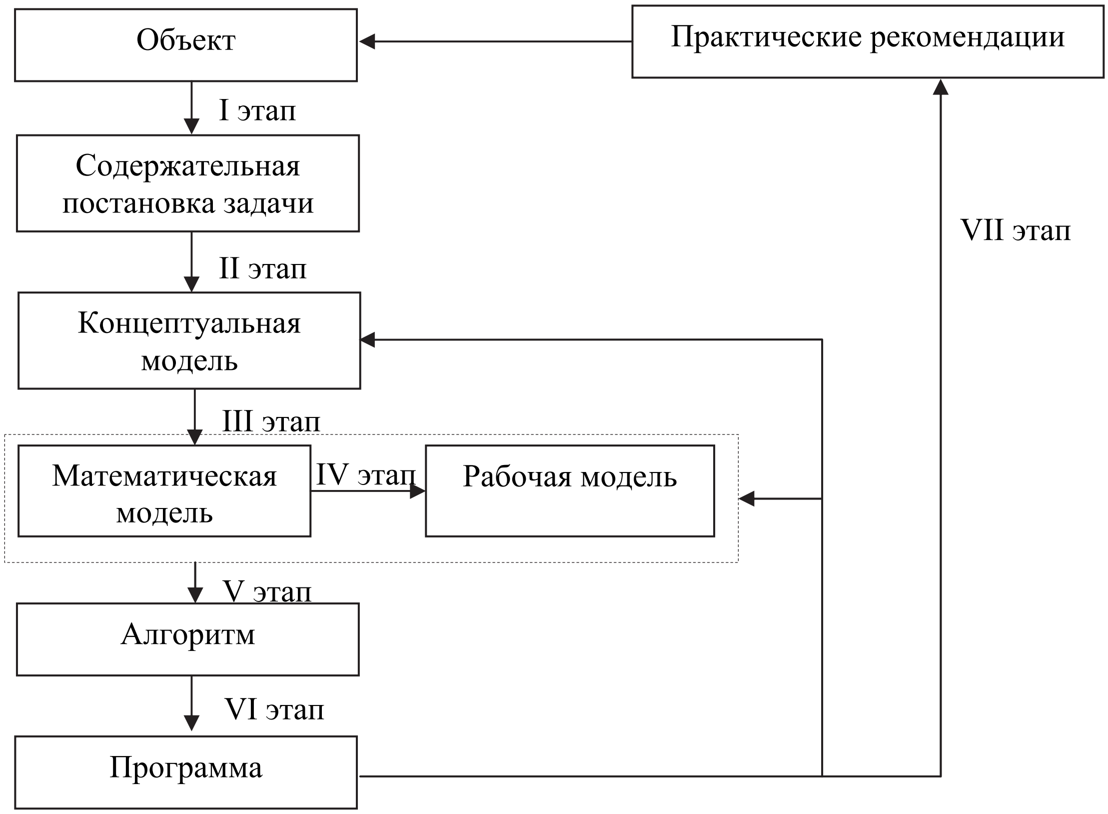


Рис. 1.1. Схема математического моделирования

Законченная экономическая модель должна описывать особенности функционирования экономического объекта в широком диапазоне его параметров. Все модели в экономике можно подразделить на два класса: макро- и микроэкономические. Макроэкономические модели описывают экономику в целом, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели. Микроэкономические модели занимают основную часть экономической теории и описывают функциональные и структурные составляющие экономики, определяя количественные соотношения между ними.

Результатом данного этапа является построение концептуальной модели исследуемого процесса или объекта.

Этап 3. Формализация задачи. Построение математической модели. Содержательную постановку задачи формулируют на языке математики: вводят в содержательное описание математические символы и обозначения, определяют исходные и результирующие данные и дают им имена, математически представляют цель моделирования. Таким образом, формируется математическая модель. На данном этапе прообраз освобождается от «случайных черт», из всех характеризующих его связей выделяются наиболее существенные и значимые. Эти связи, как правило, записываются в виде уравнений, которые выражают фундаментальные законы развития данного объекта.

Классическая математика имела дело с линейными задачами и добилась на этом пути выдающихся результатов. В математическом плане линейность означает, что сумма (суперпозиций) любых частных решений данной задачи также является решением. В более широком смысле линейность подразумевает схожесть части и целого, возможность предсказывать поведение объекта по поведению его фрагментов. Это свойство (принцип суперпозиции) широко используется для построения общей теории.

Однако практика показывает, что мы вступили в пору изучения *нелинейных явлений в экономике.* Нелинейные объекты заметно усложняются по мере своего развития. В результате неизмеримо возрастают математические проблемы, ибо непонятно, как создать общую теорию, используя классические подходы.

Но это не главная трудность. Зачастую внутренним свойством нелинейных систем оказывается не плавное, а скачкообразное изменение их поведения. При этом внешние условия могут изменяться непрерывно, и, казалось бы, в «разумную сторону». В итоге, как правило, невозможно прогнозировать поведение нелинейных объектов, опираясь только на предшествующий опыт.

Тем самым необходима *разработка методов исследования нелинейных задач.* Основными из них *являются численные методы.* Они применяются и при изучении линейных объектов, имеющих сложную пространственную структуру, зависящих от большого числа параметров и т.д. Однако наиболее естественное поле их действия – именно нелинейные задачи.

Этап 4. Построение рабочей математической модели. На третьем этапе проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной математической модели. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра концептуальной модели (штриховая линия на рис. 1.1). Количественные оценки могут дать основания упростить модель, исключив из рассмотрения некоторые параметры, соотношения или их отдельные составляющие, несмотря на то, что влияние описываемых ими факторов уже учтено. В большинстве случаев, принимая дополнительные по отношению к концептуальной модели допущения, полезно построить такой упрощенный вариант математической модели, который позволял бы получить или привлечь известное точное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах. Такое сравнение позволяет оценить достоверность результатов последующего вычислительного эксперимента: если более простая модель правильно отражает некоторые свойства объекта, то результаты исследования этих свойств должны быть близки к результатам, полученным при использовании более полной и сложной математической модели. В некоторых случаях удается построить несколько моделей для одного и того же объекта, отличающихся различным уровнем упрощения. В этом случае говорят об иерархии.

Итог анализа на рассматриваемом этапе – это обоснованный выбор рабочей математической модели объекта.

Этап 5. Алгоритм решения. Создание математической модели – лишь первый шаг. Необходимо изучить ее поведение, т.е. решить входящие в нее уравнения при различных значениях параметров, управляющих процессом. Для этого используется *основной теоретический аппарат вычислительной математики – численные методы (вычислительные алгоритмы).* Они позволяют с нужной точностью получать приближенные решения весьма сложных задач за конечное число арифметических действий. Хотя первые численные методы решения некоторых задач были разработаны еще Ньютоном и Эйлером, их эффективность была полностью осознана лишь с развитием современной вычислительной техники. Применение численных методов снимает ограничение на сложность изучаемых математических моделей. Таким образом, *выбор вычислительного алгоритма является важнейшим этапом математического моделирования.*

Этап 6. Программная реализация. На этом этапе на одном из алгоритмических языков составляется программа для компьютера, реализующая выбранный вычислительный алгоритм, т.е. переводящая его на понятный для компьютера язык.

Получаемые в итоге работы программы результаты вычислений должны прежде всего пройти тестирование путем сопоставления с данными количественного анализа упрощенного варианта математической модели рассматриваемого объекта. Тестирование может выявить недочеты как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации и алгоритма, и программы. Анализ результатов вычислений может вызвать необходимость в корректировке концептуальной модели и соответствующей математической модели. После устранения всех выявленных недочетов триаду «модель – алгоритм – программа» можно использовать в качестве рабочего инструмента для проведения вычислительного эксперимента и выработки на основе получаемой количественной информации практических рекомендаций, направленных на совершенствование объекта, что составляет содержание седьмого, завершающего «технологический цикл» этапа математического моделирования.

Этап 7. Завершающий. На завершающем этапе проводится анализ результатов, сопоставление их с теоретическими прогнозами и данными практики. Становится ясно, насколько удачно выбраны экономическая, математическая модели и вычислительный алгоритм. При необходимости они уточняются на более совершенной основе.

Результаты математического моделирования теперь можно использовать для проведения ***анализа, прогнозирования, поиска и выбора оптимальных решений.***

1.4. Численные методы (вычислительные алгоритмы)

Вычислительная математика – это раздел математики, в котором разрабатываются методы доведения до числового результата решений основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств.

Вычислительная математика как часть математики имеет древнюю и богатую историю, но в самостоятельную область вычислительная математика превратилась относительно недавно – в середине двадцатого века. Связано это как с необходимостью решения большого количества прикладных задач, так и с появлением вычислительной техники [5].

В вычислительной математике применяются различные методы, которые условно можно разбить на четыре группы: качественные, аналитические, методы возмущений и численные методы.

Численные методы – это такие методы решения задач вычислительной математики, которые сводятся или могут быть сведены к арифметическим действиям над числами.

С использованием численных методов решаются такие классы задач как: аппроксимация и интерполяция функций, решение нелинейных уравнений, решение систем линейных уравнений, интегрирование и дифференцирование, решение обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.

Для решения задачи необходимо построить вычислительный алгоритм, который в дальнейшем реализовывается на ЭВМ.

Под ***вычислительным алгоритмом*** обычно понимается последовательность операций (логических и арифметических), при помощи которых находится решение задачи вычислительной математики.

Сложность вычислительного алгоритма – это ресурсы ЭВМ, необходимые для реализации алгоритма. ***Ресурсы*** – это время счета и используемая память ЭВМ.

Время работы программы пропорционально числу арифметических действий, поэтому сложность вычислительного алгоритма по времени оценивается числом арифметических действий, необходимых для реализации алгоритма.

Вычислительный алгоритм называется ***устойчивым***, если ошибки округления на ЭВМ при реализации этого алгоритма будут сказываться незначительно. В противоположном случае (когда ошибки округления могут неограниченно возрастать) вычислительный алгоритм называется ***неустойчивым***.

Корректно поставленными (корректными) задачами называются задачи, для которых одновременно выполняются следующие условия:

1) решение задачи существует в некотором классе функций;
2) решение задачи единственно в некотором классе функций;
3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных, то есть малые изменения входных данных приводят к малым изменениям решения.

Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то задача называется ***некорректно поставленной (некорректной)***.

До решения задачи необходимо убедиться в ее корректности.

Основные требования к вычислительному алгоритму:

1) вычислительный алгоритм должен давать единственное решение задачи с заданной точностью за конечное число шагов либо вывод о невозможности получения решения;
2) вычислительный алгоритм должен быть устойчивым;
3) сложность вычислительного алгоритма должна быть минимально возможной.

2. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТИ

2.1. Структура погрешности численного решения задачи

2.1.1. Абсолютная и относительная погрешности

Точность решения задачи [5, 1] оценивается ***абсолютной*** или ***относительной погрешностью***.

Абсолютная погрешность

Абсолютной погрешностью приближенного числа называется величина, равная модулю разности точного значения данного числа и приближенного значения данного числа

$$\Delta x = x^* - x\ ,$$

где Δx – абсолютная погрешность, x^* – точное значение числа, x – приближенное значение числа.

Абсолютная погрешность приближенной величины оценивается в тех же единицах измерения, что и сама величина.

Пример. Масса сахара m^* равна 5 кг. Результат взвешивания m = 5.1 кг, значит, $\Delta m = \left|m^* - m\right| = \left|5 - 5.1\right|$, $\Delta m = 0.1$ кг.

Относительная погрешность

Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа к абсолютной величине приближенного числа

$$\partial x = \frac{\Delta x}{|x|}, \qquad x \neq 0 .$$

Относительная погрешность выражается в долях или процентах. Для того чтобы перевести относительную погрешность в проценты, следует домножить ее на 100 %:

$$\delta \boldsymbol{x} \cdot 100\ \%.$$

Абсолютная погрешность указывается в записи чисел следующим образом:

$$x = x^{*} \pm \Delta x.$$

Пример. $x = 3.14 \pm 0.005$.

2.1.2. Значащие и верные цифры числа

Значащие цифры десятичного числа – это все его цифры, начиная с первой ненулевой слева.

Пример.

$\boldsymbol{x} = 0.00050850$, цифры 5, 0, 8, 5, 0 являются значащими;

$\boldsymbol{x} = 2.14 \cdot 10^{6}$, значащими цифрами являются цифры 2, 1, 4;

$\boldsymbol{x} = 705004000$, все цифры этого числа являются значащими.

Значащая цифра в записи числа ***верна***, если абсолютная погрешность числа меньше или равна пяти единицам разряда, следующего за этой цифрой.

Пример. Определить, сколько верных значащих цифр содержит число x = 0.045026 ± 0.0001.

Решение:

Для определения числа верных значащих цифр запишем $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\Delta x}$ таким образом, чтобы легко было сравнить разряды этих чисел:

$\boldsymbol{x}$ = 0.0*45026*, абсолютная погрешность $\boldsymbol{\Delta x}$ = 0.00001.

$\boldsymbol{x}$ = 0.0*45026*,

$\boldsymbol{\Delta x}$= 0.00001.

Четвертая значащая цифра (2) (а значит и пятая) не может быть верной, так как она одного порядка с погрешностью. Верными могут быть цифры, которые стоят перед ней (4, 5, 0). Цифра 0 будет верной, если $\boldsymbol{\Delta x} \le 0.00005$. В нашем случае это условие выполнено, следовательно, 4, 5, 0 – верные значащие цифры.

Ответ: Число содержит 3 верные цифры (4, 5, 0).

Цифры в записи числа, следующие за верными, называются ***сомнительными***.

Пример. Определить верные и сомнительные цифры числа

$\boldsymbol{x} = 1.234 \pm 0.003$.

Решение:

$\boldsymbol{x} = 1.234$;

Значащие цифры числа: 1, 2, 3, 4.

$\boldsymbol{\Delta x} = 0.003$.

$0.0005 < \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 4 – сомнительная,

$0.005 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 3 – верная,

$0.05 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 2 – верная,

$0.5 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 1 – верная.

Ответ: В числе $\boldsymbol{x} = 1.234$ три верные значащие цифры (1, 2, 3) и одна сомнительная (4).

Пример. Определить сколько верных цифр содержит число

$\boldsymbol{x} = 0.005070 \pm 0.00007$.

Решение:

$\boldsymbol{x} = 0.005070$;

Значащие цифры в записи числа: 5, 0, 7, 0.

$\boldsymbol{\Delta x} = 0.00007$.

$0.0000005 < \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 0 – сомнительная,

$0.000005 < \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 7 – сомнительная,

$0.00005 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 0 – верная,

$0.0005 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 5 – верная.

Ответ: В числе $\boldsymbol{x} = 0.005070$ две верные значащие цифры (5, 0), две сомнительные (7, 0).

Пример. Определить верные и сомнительные цифры числа

$\boldsymbol{x} = 85.3 \pm 0.8$.

Решение:

$\boldsymbol{x} = 85.3$;

$\boldsymbol{\Delta x} = 0.8$.

Значащие цифры: 8, 5, 3.

$0.05 < \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 3 – сомнительная,

$0.5 < \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 5 – сомнительная,

$5 > \boldsymbol{\Delta x}$, ***значит*** цифра 8 – верная.

Ответ: В числе $\boldsymbol{x} = 85.3$ одна верная значащая цифра (8), две сомнительные (5, 3).

При записи абсолютной и относительной погрешностей используют, как правило, одну-две значащие цифры. Приближенные числа принято записывать следующим образом: сначала записывают все верные значащие цифры, затем одну-две сомнительные. То есть в записи приближенного числа, как правило, число значащих цифр на одну-две больше, чем число верных значащих цифр.

Пример. Число x = 12.371 содержит 3 верные значащие цифры. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

Решение:

По определению верной значащей цифры

$\underline{12.3}71$,

$\Delta x = 0.05$,

$$\delta x = \frac{0.05}{|12.371|} = 0.004\,.$$

Ответ: $\delta x = 0.004$ (либо $\delta x = 0.4\ \%$).

Пример. Определить, сколько верных значащих цифр содержит число x = 54.03, если относительная погрешность этого числа составляет 1 %.

Решение:

Сначала, зная ***x*** и его относительную погрешность, найдём абсолютную погрешность.

$\boldsymbol{x}$= 54.03, $\boldsymbol{\partial x} = 1\%$,

следовательно,

$$\text{Дх} = {}^{\text{дх}\cdot|\text{x}|}\!\big/_{100\,\%}\,,\ \boldsymbol{\Delta x} = 0.55.$$

а затем по определению верных значащих цифр найдём их количество:

0.005 < ***Δx, значит*** цифра 3 – сомнительная,

0.05 < ***Δx, значит*** цифра 0 – сомнительная,

0.5 < ***Δx, значит*** цифра 4 – сомнительная,

5 > ***Δx, значит*** цифра 5 – верная.

Ответ: число ***x*** содержит одну верную значащую цифру (5).

2.1.3. Источники погрешности численного решения задачи

Погрешность математической модели возникает в результате допущений, принятых при получении модели. ***Реальность всегда сложнее любой модели,*** поэтому этот источник погрешности всегда влияет на численное решение. Величина этой погрешности определяется сравнением экспериментальных данных с результатами расчетов по модели (оценивается ***адекватность модели объекту***) [4, 5].

Погрешность исходных данных зависит от точности измерения параметров, используемых в модели. Любые измерения приближенны, поэтому и этот источник всегда влияет на решение.

В вычислительной математике эти два вида погрешности (погрешность математической модели и погрешность исходных данных) принято называть ***неустранимой погрешностью***, т.к. она не зависит от метода решения задачи и всегда влияет на ее решение, и ее обязательно нужно учитывать при анализе полученного решения.

Погрешность метода решения задачи возникает в результате применения итерационного или вероятностного метода решения. Эти методы позволяют получить точное решение только в результате бесконечной последовательности действий, поэтому для получения приближенного решения бесконечный процесс прерывают при достижении требуемой точности решения.

Погрешность округления возникает в результате проведения вычислений с конечным числом значащих цифр.

Погрешность элементарных арифметических действий изучается в теории погрешности. ***Учесть погрешность округления при большом количестве арифметических действий практически невозможно.***

Есть случайные и систематические источники погрешности округления.

Случайные источники обычно компенсируют друг друга. Например:

$$c = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ,$$

$$\Delta c \le \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n .$$

Знаки $\Delta x_i, i = \overline{1,n}$ случайны и компенсируют друг друга при большом n.

Систематические источники вызывают накопление погрешности округления. Они являются дефектом структуры вычислений (алгоритма).

Пример. Требуется вычислить:

$$c = 0{,}476 + 0{,}411 + 1{,}47 + 26{,}2 + 83.$$

Сложим эти числа столбиком и, округлив результат до 3-х значащих цифр, получим значение c:

$$\begin{array}{r} 0{,}476 \\ 0{,}411 \\ +\quad 1{,}47 \\ 26{,}2 \\ \underline{83} \\ 111{,}557 \approx 112 \end{array}$$

ЭВМ выполняет действия поочередно (складывает пару чисел) и округляет результат после каждого действия.

Выполним суммирование слева направо в порядке записи (как ЭВМ):

$$\begin{array}{llll} 0{,}476 & 0{,}887 & 2{,}36 & 28{,}6 \\ \underline{0{,}411} & \underline{1{,}47} & \underline{26{,}2} & \underline{83} \\ 0{,}887 \approx 0{,}887 & 2{,}357 \approx 2{,}36 & 28{,}56 \approx 28{,}6 & 111{,}6 \approx 112 \end{array}$$

Пусть теперь выражение записано в обратном порядке:

$$c = 83 + 26{,}2 + 1{,}47 + 0{,}411 + 0{,}476.$$

Выполним суммирование как ЭВМ:

83,6	109	110	110
26,2	1,47	0,411	0,476
109,2≈109	110,47≈110	110,411≈110	110,476≈110

От перестановки слагаемых сумма изменилась.

Пример. Требуется перемножить 1000 чисел, причем первая половина из них равна 0,1, вторая 10 (числа упорядочены по возрастанию значений).

Если последовательно перемножать числа, начиная с первого, то результат будет равен 0.

Если же последовательно перемножать с конца, то произойдет переполнение.

Если же эти значения чередуются, то независимо от порядка умножения результат будет равен 1,0.

Следовательно, от перестановки мест сомножителей значение произведения в рассмотренном случае меняется.

В машинной арифметике законы коммутативности (переместительный) ***и дистрибутивности*** (распределительный) ***не всегда соблюдаются.***

2.1.4. Рекомендации для снижения ошибок округления

При сложении и вычитании последовательности чисел действия необходимо начинать с наименьших по абсолютной величине значений.

Следует избегать вычитания двух близких чисел, преобразуя выражения.

Количество арифметических действий для решения задачи нужно сводить к минимуму.

Для уменьшения ошибки округления расчеты следует проводить с повышенной разрядностью.

При выборе численного метода решения задачи необходимо учитывать следующее: погрешность метода должна быть на порядок меньше неустранимой погрешности. Увеличение погрешности метода снижает точность, уменьшение – увеличивает время решения задачи.

Погрешность округления должна быть значительно меньше (на два порядка) погрешности метода и неустранимой погрешности.

Для оценки погрешности решения на практике можно использовать следующие приемы: решить задачу различными численными методами и результаты сравнить, незначительно изменить исходные данные и повторно решить задачу, результаты сравнить. Если они различаются сильно, задача или метод ее решения являются неустойчивыми, то необходимо выбрать другой метод.

2.2. Вычислительная погрешность

1) Погрешность суммирования чисел $x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y$

Абсолютная погрешность:

$$(x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y) = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y).$$

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y.$$

Относительная погрешность:

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x + y|} = \frac{\Delta x}{|x + y|} \cdot \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta y}{|x + y|} \cdot \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \cdot \delta x + \frac{|y|}{|x + y|} \cdot \delta y$$

$$\delta(x + y) = \Delta(x + y) / |x + y|.$$

2) Погрешность вычитания чисел $x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y$

Абсолютная погрешность:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y) = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y).$$

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$$

Относительная погрешность:

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x + y|} = \frac{\Delta x}{|x + y|} \cdot \frac{|x|}{|x|} + \frac{\Delta y}{|x + y|} \cdot \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \cdot \delta x + \frac{|y|}{|x + y|} \cdot \delta y,$$

$$\delta(x - y) = \Delta(x - y) / |x - y|.$$

3) Погрешность умножения чисел $x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y$

$$(x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y) = x \cdot y \pm y \cdot \Delta x \pm x \cdot \Delta y \pm \Delta x \cdot \Delta y = x \cdot y \pm y \cdot \Delta x \pm x \cdot \Delta y.$$

Относительная погрешность:

$$\delta(x \cdot y) = \frac{|y| \cdot \Delta x + |x| \cdot \Delta y}{|x \cdot y|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} = \delta x + \delta y.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(x + y) = |x \cdot y| \cdot \delta(x \cdot y) = |x \cdot y| \cdot (\delta x + \delta y).$$

4) Погрешность деления чисел $x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y$

$$\frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y} = \frac{(x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y)}{(y \pm \Delta y) \cdot (y \pm \Delta y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y}{y^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\delta(\frac{x}{y}) = \frac{\Delta(\frac{x}{y})}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{|y| \cdot \Delta x + |x| \cdot \Delta y}{y^2 \cdot \left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} = \delta x + \delta y.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(\frac{x}{y}) = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot \delta(\frac{x}{y}) = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot (\delta x + \delta y).$$

5) Погрешность функции, зависящей от одной переменной

Абсолютная погрешность:

$$f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm f'(x) \cdot \Delta x,$$
$$\Delta f = f(x \pm \Delta x) - f(x) = |f'(x)| \cdot \Delta x.$$

Относительная погрешность:

$$\delta f = \left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \cdot \Delta x.$$

Формулы для вычисления погрешностей значений элементарных функций приведены в табл. 2.1.

Пример. Дано число $a = 2$ с абсолютной погрешностью $\Delta a = 0.01$. Найти относительную и абсолютную погрешности $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3 \cdot \mathrm{x}^2$ в точке $x = a$.

Решение:

Абсолютная погрешность функции $\Delta f(a)$:

$$f(a) = 12,$$
$$f'(x) = 6 \cdot x,$$
$$\Delta f(a) = |f'(a)| \cdot \Delta a = 12 \cdot 0.01 = 0.12,$$

Относительная погрешность функции $\delta f(a)$:

$$\delta \mathrm{f}(\mathrm{a}) = \frac{\Delta \mathrm{f}(\mathrm{a})}{|\mathrm{f}(\mathrm{a})|} = \frac{0.12}{12} = 0.01 = 1\,\%.$$

Ответ: $\mathrm{f}(\mathrm{a}) = 12, \Delta \mathrm{f}(\mathrm{a}) = 0.12, \delta \mathrm{f}(\mathrm{a}) = 1\,\%$.

6) Погрешность функции, зависящей от n переменных

Абсолютная погрешность:

$$\Delta f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot \Delta x_n$$

Относительная погрешность:

$$\delta f = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \right) / |f|.$$

Таблица 2.1

Погрешности значений элементарных функций

Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2}\delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	$\frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$
$\sin(x)$	$\lvert\cos(x)\rvert \cdot \Delta x$	$\lvert ctg(x)\rvert \cdot \Delta x$
$\cos(x)$	$\lvert\sin(x)\rvert \cdot \Delta x$	$\lvert tg(x)\rvert \cdot \Delta x$
$tg(x)$	$\frac{\Delta x}{\cos^2(x)}$	$\frac{2\Delta x}{\lvert\sin(2x)\rvert}$
$\ln(x)$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{\lvert\ln(x)\rvert}$
$\lg(x)$	$\frac{\Delta x}{x \cdot \ln(10)}$	$\frac{\delta x}{\lvert\lg(x)\rvert \cdot \ln(10)}$
e^x	$e^x \cdot \Delta x$	$x \cdot \delta x$
10^x	$10^x \cdot \ln(10) \cdot \Delta x$	$\ln(10) \cdot \Delta x$
x^y	$x^y\left(\lvert y\rvert \cdot \frac{\Delta x}{x} + \lvert\ln(x)\rvert \cdot \Delta y\right)$	$\lvert y\ln(x)\rvert \cdot \delta y + \lvert y\rvert \cdot \delta x$
$\arcsin(x)$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\Delta x}{\lvert\arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2}\rvert}$
$\arccos(x)$	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\Delta x}{\lvert\arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2}\rvert}$
$arctg(x)$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{\Delta x}{\lvert arctg(x) \cdot (1+x^2)\rvert}$

Пример. Даны числа **a** = 2.3, **b** = 3.41 с абсолютными погрешностями **Δa** = 0.01*;* **Δb** = 0.02. Найти относительные погрешности суммы, разности, частного и произведения этих чисел.

Решение:

Относительная погрешность суммы:

$$a + b = 2.3 + 3.41 = 5.71,$$

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b = 0.01 + 0.02 = 0.03,$$

$$\delta(a + b) = \Delta(a + b)/|a + b| = 0.03/5.71 \approx 0.0053,$$

$$\delta(a + b) \approx 0.53 \ \%.$$

Относительная погрешность разности:

$$a - b = 2.3 - 3.41 = -1.11,$$

$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b = 0.01 + 0.02 = 0.03,$$

$$\delta(a - b) = \Delta(a - b)/|a - b| = 0.03/|-1.11| = 0{,}027,$$

$$\delta(a - b) \approx 2{,}7\ \%.$$

Относительная погрешность произведения:

$$a \cdot b = 2.3 \cdot 3.41 = 7.8430,$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b = \frac{0.01}{|2.3|} + \frac{0.02}{|3.41|} \approx 0.0101,$$

$$\delta(a \cdot b) \approx 1.1\ \%.$$

Относительная погрешность частного:

$$\frac{a}{b} = \frac{2.3}{3.41} \approx 0.6744,$$

$$\delta(\frac{a}{b}) = \delta a + \delta b = \frac{0.01}{|2.3|} + \frac{0.02}{|3.41|} \approx 0.0101,$$

$$\delta(a / b) \approx 1{,}1\ \%.$$

Ответ: $\delta(a + b) \approx 17.5\ \%, \delta(a - b) \approx 3.4\ \%, \delta(a \cdot b) \approx 1.1\ \%, \delta(\frac{a}{b}) \approx 1.1\ \%.$

Пример. Найти абсолютную и относительную погрешность вычисления значения функции $f = \frac{xy^2}{\sqrt[3]{z}}$, при $x = 1.14 \pm 0.01$; $y = 2.13 \pm 0.02$; $z = 3.12 \pm 0.01$.

Решение:

$x = 1.14 \pm 0.01$, следовательно, $Дx = 0.01$;

$y = 2.13 \pm 0.02$, следовательно, $Дy = 0.02$;

$z = 3.12 \pm 0.01$, следовательно, $Дz = 0.01$.

Сначала найдем относительную погрешность вычисления значения ***f***, а затем абсолютную погрешность. Функция ***f*** положительна и дифференцируема, поэтому воспользуемся формулой:

$$\delta f = \sum_1^n \frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \sum_1^n \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i;$$

$$\ln f = \ln x + 2\ln y - \frac{1}{3}\ln z; \qquad n = 3; \qquad \begin{array}{l} x_1 = x; \\ x_2 = y; \\ x_3 = z; \end{array}$$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| = \frac{1}{|x|}; \quad \left|\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right| = \frac{2}{|y|}; \quad \left|\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right| = \frac{1}{3|z|};$$

$$\delta f = \frac{1}{|x|}\Delta x + \frac{2}{|y|}\Delta y + \frac{1}{3|z|}\Delta z = \delta x + 2\delta y + \frac{1}{3}\delta z;$$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = 0.0088; \quad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = 0.0094; \quad \delta z = \frac{\Delta z}{|z|} = 0.0032;$$

$$\delta f = 0.0088 + 2 \cdot 0.0094 + \frac{1}{3} \cdot 0.0032 \approx 0.029;$$

$$\delta f \approx 2.9\ \%;$$

$$\Delta f = \delta f \cdot |f| \text{ или } \Delta f = \frac{\delta f \cdot |f|}{100\%}.$$

Так как $\delta f = 2.9\,\%$, то значение функции ***f*** содержит 2 верных знака. Вычисляем $f = 3.5400862$ и записываем $f = 3.54$ (число содержит две верные значащие цифры и одну сомнительную).

$$\Delta f = \delta f \cdot |f| = 0.029 \cdot 3.54 \approx 0.1.$$

Ответ: $\delta f \approx 2.9\ \%$; $\Delta f \approx 0.1$.

2.2.1. Метод строгого пооперационного учета границ абсолютных погрешностей

Данный метод рассмотрим на примере [5].

Пример. Вычислить значение величины A с помощью метода строгого учета границ абсолютных погрешностей после каждой операции $A = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b+\ln(a)}$, *если* $a = 12{,}34$, $b = 14{,}3$.

Решение:

При пооперационном строгом учете ошибок промежуточные результаты после округления до одной запасной цифры (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности) и их погрешности заносятся в таблицу (табл. 2.2).

Предположим, что в исходных данных цифры в записи чисел даны верными в строгом смысле, поэтому $\Delta a = 0{,}005$, $\Delta b = 0{,}05$.

При расчетах значения погрешностей для удобства будем округлять до двух значащих цифр по избытку и тоже заносить в таблицу (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Расчетная таблица для вычисления погрешности выражения $A = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b+ln(a)}$

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\ln(a)$	$b+\ln(a)$	A
12,34	14,3	3,513	3,78	7,30	2,5129	16,81	0,434
Δa	Δb	$\Delta\sqrt{a}$	$\Delta\sqrt{b}$	$\Delta\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\Delta\ln(a)$	$\Delta b+\ln(a)$	ΔA
0,005	0,05	0,00071	0,0066	0,0073	0,0004	0,05041	0,0017

Найдем $\sqrt{12{,}34} = 3{,}51283$.

Абсолютная погрешность равна (воспользуемся табл. 2.1):

$$\Delta\sqrt{\mathrm{a}} = \frac{0{,}005}{2\cdot\sqrt{12{,}34}} = 0{,}0007117 \approx 0{,}00072 .$$

Из полученного значения погрешности видно, что в результате верны две значащие цифры после запятой, т.е. $\sqrt{12{,}34} = 3{,}51283 \approx 3{,}513$.

Это число внесем в таблицу.

Найдем $\sqrt{14,3} = 3,781534$.

Найдем абсолютную погрешность $\sqrt{14,3}$. Она будет равна

$$\Delta\sqrt{\mathrm{b}} = \frac{0,05}{2\sqrt{14,3}} = 0,0066107 \approx 0,0067.$$

Значит, в этом числе будет одна верная цифра после запятой.

$\sqrt{14,3} = 3,781534 \approx 3.78.$

Аналогично находим значения всех остальных действий и функции:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3.513 + 3.78 = 7.293,$

$\Delta(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0.00072 + 0.0067 = 0.00731 \approx 0.0074,$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \approx 7.29.$

$\ln(a) = \ln(12.34) = 2.51284602,$

$$\Delta \ln(a) = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{0.005}{12.34} = 0.000405 \approx 0.0005,$$

$\ln(a) \approx 2.51285.$

$b + \ln(a) = 14.3 + 2.51285 = 16.8128,$

$\Delta(b + \ln(a)) = \Delta b + \Delta \ln(a) = 0.05 + 0.0005 \approx 0.0505,$

$b + \ln(a) \approx 16.8.$

$\mathrm{A} = 7.30/16.8 = 0.4345,$

$\delta\mathrm{A} = \delta(\mathrm{b} + \Delta\ln(\mathrm{a}) = 0.05 + 0.0005 \approx 0.0505,$

$\Delta\mathrm{A} = |\mathrm{A}| \cdot \delta\mathrm{A} = 0.0505 \cdot 0.4345 = 0.0219 \approx 0.022,$

$\mathrm{A} \approx 0.43.$

Округляя результат *A* до одной сомнительной цифры, получаем окончательный ответ.

Ответ: $A = 0,43 \pm 0,022.$.

2.2.2. Способ границ

Способ границ используется для точного определения границ искомого значения функции, если известны границы измерения ее аргументов. Способ границ рассмотрим на примере [5].

Пример. Алюминиевый цилиндр с диаметром основания $d = (3 \pm 0,001)$ см и высотой $h = (10 \pm 0,002)$ см весит $p = (95,5 \pm 0,001)$ г.

Определить удельный вес γ алюминия и оценить предельную абсолютную погрешность найденного удельного веса.

Решение:

1 способ

Объем цилиндра равен:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

отсюда

$$\gamma = \frac{p}{V} = \frac{4p}{\pi d^2 h}.$$

Из полученной формулы вытекает, что в области $p > 0,\ d > 0,\ h > 0$ функция γ – возрастающая по аргументу p и убывающая по аргументам d *и* h.

Имеем:

$2.999 < d < 3.001;$

$9.998 < h < 10.002;$

$95.499 < p < 95.501;$

$3.14159 < \pi < 3.1416.$

$d_н = 2{,}999$ см, $d_в = 3.001$ см;

$h_н = 9{,}998$ см $h_в = 10.002$ см;

$p_н = 95{,}499$ г $p_в = 95.501$ г;

$\pi_н = 3{,}14159$ $\pi_в = 3.1416.$

Тогда получим:

$$\gamma_н = \frac{4 \cdot 95{,}499}{3{,}1416 \cdot 3{,}001^2 \cdot 10{,}002} = 1{,}3498 \text{ г/см}^3 \text{ (нижняя граница);}$$

$$\gamma_в = \frac{4 \cdot 95{,}501}{3{,}14159 \cdot 2{,}999^2 \cdot 9{,}998} = 1{,}3522 \text{ г/см}^3 \text{ (верхняя граница).}$$

Взяв среднее арифметическое, получим значение γ, равное

$$\gamma = \frac{\gamma_н + \gamma_в}{2} 1{,}3510 \quad \text{г/см}^3.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\gamma = \frac{\gamma_н - \gamma_в}{2} = 0{,}0012 \text{ г/см}^3.$$

Имеем:

$\gamma = (1{,}351+0{,}0012)$ г/см^3.

Ответ: $\gamma = (1{,}351+0{,}0012)$ г/см^3.

2 способ. Используя среднее значения аргументов, получим:

$$\gamma = \frac{4 \cdot 95,5}{3,1416 \cdot 3^2 \cdot 10} = 1,351 \text{ г/см}^3.$$

Логарифмируя формулу для вычисления объема цилиндра, имеем:

$$\ln \gamma = \ln 4 + \ln p - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h.$$

Взяв полный дифференциал, получим:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta\pi}{\pi} - \frac{2\Delta d}{d} - \frac{\Delta h}{h};$$

$$\delta\gamma = \delta p + \delta\pi + 2\delta d + \delta h = \frac{0,001}{95,5} + \frac{0,00001}{3,1416} + \frac{2 \cdot 0,001}{3} + \frac{0,002}{10} = 8,803 \cdot 10^{-4}.$$

Далее находим:

$$\Delta\gamma = \delta\gamma \cdot \gamma = 8,803 \cdot 10^{-4} \cdot 1,351 = 1,2 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, имеем:

$$\gamma = \left(1,351 \pm 0,0012\right) \text{г / см}^3,$$

что очень близко совпадает с точной оценкой, найденной по способу границ.

Ответ: $\gamma = (1,351 \pm 0,002)$ г / см^3.

2.2.3. Обратная задача теории погрешностей

На практике очень часто необходимо уметь решать обратную задачу: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины [5].

Пусть величина предельной абсолютной погрешности Δu задана.

Тогда

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Предполагая, что все слагаемые равны между собой, будем иметь:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 = \ldots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \Delta x_n = \frac{\Delta u}{n}.$$

Отсюда

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}.$$

В случае, когда предельная абсолютная погрешность всех аргументов x_i одна и та же, имеем

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}, \quad \Delta x_i = \frac{|x_i|\Delta u}{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|}.$$

Пример. Радиус основания цилиндра $R \approx 2$ *м*; высота цилиндра $H \approx 3$ *м*. С какими абсолютными погрешностями нужно определить R и H, чтобы объем цилиндра V можно было вычислить с точностью до 0,1 м^3?

Решение:

Объем вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$ и $\Delta V = 0{,}1$ м^3. Подставляя все исходные данные, приближенно получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12;$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH = 37{,}7;$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12{,}6.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой для вычисления погрешности функции, зависящей от трех переменных (при $n = 3$), будем иметь:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z,$$

$$\Delta \pi = \frac{0{,}1}{3 \cdot 12} < 0{,}003;$$

$$\Delta R = \frac{0{,}1}{3 \cdot 37{,}7} < 0{,}001 \text{ м};$$

$$\Delta H = \frac{0{,}1}{3 \cdot 12{,}6} < 0{,}003 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta R = 1$ мм, $\Delta H = 3$ мм, $\pi \approx 3{,}14$.

2.3. Лабораторная работа 1

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТИ

Цель работы: научиться использовать на практике знания по теме «Теория погрешности».

Задание 1

Вычислить значение величины z (табл. 2.3) при заданных a, b и c (в записи чисел a, b и c все значащие цифры верные). Используя метод строгого пооперационного учета границ абсолютных погрешностей найти абсолютную и относительную погрешности z. Погрешности округлять до двух значащих цифр, результаты вычислений – до двух сомнительных цифр.

Таблица 2.3

Исходные данные

Вариант	Задание	Исходные данные	Вариант	Задание	Исходные данные
1	$z=\dfrac{4\sqrt{a+b}}{ab-c}$	a = 0.317 b = 3.27 c = 4.7561	8	$z=\dfrac{b^2+\ln(c)}{\sqrt{c-a}}$	a = 0.038 b = 3.9353 c = 5.75
2	$z=\dfrac{\ln(b+c)}{b-ac}$	a = 0.0399 b = 4.83 c = 0.0721	9	$z=\dfrac{\ln(a)+3b}{ab-c}$	a = 7.345 b = 0.31 c = 0.09871
3	$z=\dfrac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	a = 1.0574 b = 1.40 c = 1.1236	10	$z=\dfrac{2tg(a-b)}{a^2c+b}$	a = 0.2471 b = 0.0948 c = 4.378
4	$z=\dfrac{ab-4c}{\ln(a)+3b}$	a = 12.72 b = 0.34 c = 0.0290	11	$z=\dfrac{4\sqrt{a+c}}{ab-c}$	a = 1.284 b = 4.009 c = 3.2175
5	$z=\dfrac{a-tg(b)}{13c+b}$	a = 3.49 b = 0.845 c = 0.0037	12	$z=\dfrac{\sin\left(a-\sqrt{b}\right)}{c+\ln(b)}$	a = 18.407 b = 149.12 c = 2.3078
6	$z=\dfrac{ac+3b}{\sqrt{b-c}}$	a = 0.0976 b = 2.371 c = 1.15887	13	$z=\dfrac{a\ln(b)}{\sin\left(\sqrt{a}+c\right)}$	a = 29.49 b = 87.878 c = 4.403
7	$z=\dfrac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}}$	a = 82.3574 b = 34.12 c = 7.00493	14	$z=\dfrac{0.8\ln(b)}{\sqrt{a+bc}}$	a = 74.079 b = 5.3091 c = 6.234

Задание 2

1 Длину воздушной трассы между двумя пунктами S км самолет преодолевает за t ч. Определить границы средней скорости самолета, если $4950 \le S \le 5050$; $5.9 \le t \le 6.1$.

2 Электроплитка рассчитана на напряжение 220±10 В. Найти сопротивление спирали электроплитки, если известно, что через нее должен пройти ток 5±0,1 А.

3 Медный брусок имеет объем V м^3 ($0.0064 \le V \le 0.0065$). Найти его массу, если плотность материала p кг/м^3 составляет $8899 \le p \le 8901$.

4 Удельное электрическое сопротивление ρ металла круглого провода длиной l м с поперечным сечением d мм и сопротивлением R Ом определяется по формуле $\rho = \frac{\pi d^2 R}{4l}$. Найти ρ, если l = 12,50±0,01 м, d = 2,00±0,01 мм, R = 0,068±0,0005 Ом, π = 3,141±0,0001. Определить относительную погрешность ρ.

5 Найти $\log_{10}2$, используя формулу $\log_{10}2=1/10*\log_{10}1024$, и определить относительную и абсолютную погрешности.

6 Электроплитка рассчитана на напряжение 220±10 В. Найти ток, проходящий через нее, если известно сопротивление спирали электроплитки R = 300±15 Ом.

7 Радиус круга R = 30,5 см измерен с точностью до 1 %, найдите абсолютную и относительную погрешности площади круга, если число π округлить до двух десятичных знаков.

8 Стороны прямоугольника $a \approx 5$ м, $b \approx 200$ м. Абсолютная погрешность измерения этих сторон равна 0,5 мм. Определить абсолютную и относительную погрешности площади S прямоугольника.

9 Найти $\log_5 2$, используя формулу $\log_5 2=1/7*\log_5 128$, определить относительную и абсолютную погрешности полученного результата.

10 Высота треугольника h = 15,51 см измерена с точностью до 0,005 см, основание треугольника a = 45,05±0,001 см. Найдите абсолютную и относительную погрешности площади треугольника.

11 Расстояние между городами равно S км. Определить интервал времени, пройденный автомобилем, если его скорость менялась от 80 до 100 км/ч, а расстояние между городами составляет 398±25 км.

12 Рабочее напряжение электробритвы составляет 110±20 В. Определить сопротивление электробритвы, если известен проходящий через нее ток, равный 10±10 А.

13 Длина стороны равностороннего треугольника l = 83,4 мм измерена с точностью 0,003 мм. Определите абсолютную и относительную погрешности периметра треугольника.

14 Масса тела m = 25 кг измерена с точностью до 0,1 %, скорость движения тела составляет 5±3 м/с. Определить абсолютную и относительную погрешности импульса тела p.

15 Вертикальный цилиндрический резервуар наполнен жидкостью. Определить время, необходимое для опорожнения резервуара через круг-

лое отверстие в дне. Диаметр резервуара D = 1±0,01 м, высота уровня жидкости Y = 2±0,02 м, диаметр отверстия дна d = 0.03±0,001 м, коэффициент расхода μ = 0,61±0,02. Расчет (в секундах) ведется по формуле $\tau = \frac{D^2\sqrt{H}}{\mu d^2\sqrt{2g}}$.

Задание 3

1 С какой точностью надо измерить радиус круга R = 30,5 см и со сколькими знаками взять π, чтобы площадь круга была известна с точностью до 0,1 %?

2 Стороны прямоугольника $a \approx 5$ м, $b \approx 200$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении этих сторон, одинаковая для обеих сторон, чтобы площадь S прямоугольника можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta S = 1\,\text{м}^2$?

3 С какой точностью надо измерить высоту $h \approx 25$ см и основание $a \approx 150$ см треугольника, чтобы площадь треугольника можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta S = 3\,\text{см}^2$?

4 Высота и диаметр цилиндра равны $a \approx 1$ м, $b \approx 2.5$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при их измерении, чтобы объем V цилиндра можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.1\,\text{м}^3$?

5 Ребра прямоугольного параллелепипеда $a \approx 5$ м, $b \approx 200$ м, $c \approx 20$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при их измерении, одинаковая для всех, чтобы объем V прямоугольного параллелепипеда можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.1\,\text{м}^3$?

6 Масса тела равна $m \approx 5$ кг, его импульс – $p \approx 3$ м/с. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при их измерении, чтобы скорость тела можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.5$ м/с?

7 Высота и диаметр основания конуса равны $a \approx 1$ м, $b \approx 2.5$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при их измерении, чтобы объем V конуса можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.1\,\text{м}^3$?

8 Диаметр шара равен $a \approx 1$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при его измерении, чтобы объем V шара можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.1\,\text{м}^3$?

9 Сторона куба равна $a \approx 1$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при ее измерении, чтобы объем V куба можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.1\,\text{м}^3$?

10 Скорость товарного поезда составляет 70 км/ч, время в пути – 4 ч. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении скорости и времени, чтобы расстояние между остановками можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta S = 10$ м ?

11 Масса тела равна $m \approx 10$ кг. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при ее измерении, чтобы вес тела можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta P = 0.1$ Н ?

12 Электроплитка рассчитана на напряжение $U \approx 220$ *В*. Через нее проходит ток $Y \approx 5$ А. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении напряжения и силы тока, чтобы сопротивление спирали электроплитки можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta R = 1$ Ом ?

13 Стороны прямоугольника $a \approx 7$ м, $b \approx 28$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении этих сторон, одинаковая для обеих сторон, чтобы площадь S прямоугольника можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta S = 1$ м^2 ?

14 Плотность свинцовой пластины равна $\rho \approx 11$ г/см^3, ее масса $m \approx 598$ г. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при их измерении, чтобы объем пластины V можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta V = 0.01$ см^3 ?

15 С какой точностью надо измерить радиус окружности $R = 30{,}5$ см и со сколькими знаками взять π, чтобы длина окружности была известна с точностью до 0,5 %?

2.4. Пример выполнения лабораторной работы 1

Задание 1

Вычислить значение величины $z = \dfrac{0.8\ln(b)}{\sqrt{a + b \cdot c}}$ при $a = 74.079$, $b = 5.3091$ и $c = 6.234$ (в записи чисел a, b и c все значащие цифры верные). Используя метод строгого пооперационного учета границ абсолютных погрешностей, найти абсолютную и относительную погрешности z. Погрешности округлять до двух значащих цифр, результаты вычислений – до двух сомнительных цифр.

Решение:

Так как в записи чисел a, b и c все значащие цифры верные, можно определить абсолютные погрешности этих чисел

$\Delta a = 0.0005$,

$\Delta b = 0.00005$,

$\Delta c = 0.0005$.

Необходимо составить расчетную таблицу (табл. 2.4) и занести в нее исходные данные.

Таблица 2.4

Расчетная таблица

Выражение	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
a	74.079	0.0005	
b	5.3091	0.00005	0.0000095
c	6.234	0.0005	0.000081
$\ln(b)$	1.669422	0.0000095	
$0.8\ln(b)$	1.338538	0.0000077	0.0000057
bc	33.0969	0.0030	0.0000905
$a + bc$	107.1759	0.0035	
$\sqrt{a+b\cdot c}$	10.35258	0.00017	0.000017
$\dfrac{0.8\ln(b)}{\sqrt{a+b\cdot c}}$	0.1292951	0.0000030	0.0000027

1 действие:

$\ln(b) = 1.6694223294,$

$$\Delta\ln(b) = \left|\frac{\partial\ln(b)}{\partial b}\right|\cdot\Delta b,$$

$$\Delta\ln(b) = \left|\frac{1}{b}\right|\cdot\Delta b,$$

$$\Delta\ln(b) = \frac{1}{5.3091}\cdot 0.00005 = 0.0000094178 \approx 0.0000095 .$$

$\ln(b) \approx 1.669422$.

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

2 действие:

$0.8\ln(b) = 1.33853786,$

$$\Delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})) = |0.8\cdot\ln(\mathrm{b})|\cdot\delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})),$$

$$\delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})) = \delta(0.8) + \delta(\ln(\mathrm{b})),$$

$$\delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})) = \frac{0.0000095}{1.669422} = 0.0000056906 ,$$

$$\Delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})) = 1.33853786 \cdot 0.0000056903 = 0.000007617 ,$$

$$\Delta(0.8\cdot\ln(\mathrm{b})) \approx 0.0000077 ,$$

$$0.8\cdot\ln(\mathrm{b}) \approx 1.338538 .$$

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

3 действие:

$bc = 5.3091 \cdot 6.234 = 33.0969$,

$$\Delta bc = |bc| \cdot \delta(bc),$$

$$\delta(bc) = \delta b + \delta c = 0.0000095 + 0.000081 = 0.0000905 ,$$

$$\Delta(bc) = 0.0000905 \cdot 33.0969 \approx 0.0030 .$$

$$bc \approx 33.0969 .$$

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

4 действие:

$a + bc = 74.079 + 33.0969 = 107.1759$,

$$\Delta(a + bc) = \Delta a + \Delta(bc),$$

$$\Delta(a + bc) = 0.0005 + 0.0030 = 0.0035 ,$$

$$a + bc \approx 107.1759 .$$

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

5 действие:

$$\sqrt{a + bc} = \sqrt{107.1759} = 10.352579389 ,$$

$$\Delta(\sqrt{a + bc}) = \left| \frac{\partial(\sqrt{a + bc})}{\partial(a + bc)} \right| \cdot \Delta(a + bc),$$

$$\Delta(\sqrt{a + bc}) = \frac{\Delta(a + bc)}{2 \cdot \sqrt{a + bc}} = \frac{0.0035}{2 \cdot 10.352579389} \approx 0.00017 ,$$

$$\sqrt{a + bc} \approx 10.35258 .$$

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

6 действие:

$$\frac{0.8 \ln(b)}{\sqrt{a + b \cdot c}} = \frac{1.338538}{10.35258} = 0.129295113 ,$$

$$\Delta\left(\frac{0.8 \cdot \ln(b)}{\sqrt{a + bc}}\right) = \left| \frac{0.8 \cdot \ln(b)}{\sqrt{a + bc}} \right| \cdot \delta\left(\frac{0.8 \cdot \ln(b)}{\sqrt{a + bc}}\right),$$

$$\delta\left(\frac{0.8 \cdot \ln(b)}{\sqrt{a + bc}}\right) = \delta(0.8 \cdot \ln(b)) + \delta(\sqrt{a + bc}) =$$

$$= 0.0000057 + 0.0000017 \approx 0.000023 ,$$

$$\Delta\left(\frac{0.8 \cdot \ln(b)}{\sqrt{a + bc}}\right) = 0.129295 \cdot 0.000023 \approx 0.0000030 ,$$

$$\frac{0.8 \ln(b)}{\sqrt{a + b \cdot c}} \approx 0.1292951 .$$

Занесем это значение в таблицу (см. табл. 2.4).

$$z \approx 0.1292951,$$

Ответ: $\Delta z = 0.0000030,$

$$\delta z = 0.00027\%.$$

Задание 2

Вертикальный цилиндрический резервуар наполнен жидкостью. Определить время, необходимое для опорожнения резервуара через круглое отверстие в дне. Диаметр резервуара D = 1±0,01 м, высота уровня жидкости Y = 2±0,02 м, диаметр отверстия дна d = 0.03±0,001 м, коэффициент расхода μ = 0,61±0,02. Расчет (в секундах) ведется по формуле $\tau = \dfrac{D^2\sqrt{Y}}{\mu d^2 \sqrt{2g}}$.

Решение:

В среде MathCad зададим исходные данные (рис. 2.1).

	Значение	Абсолютная погрешность
Диаметр	$D := 1$	$\Delta D := 0.01$
Высота уровня жидкости	$Y := 2$	$\Delta Y := 0.02$
Диаметр отверстия дна	$d := 0.03$	$\Delta d := 0.001$
Коэффициент расхода	$\mu := 0.61$	$\Delta \mu := 0.02$
	$g := 9.8$	

Рис. 2.1. Исходные данные

Определение верхней (рис. 2.2) и нижней (рис. 2.3) границ времени опорожнения резервуара начинается с определения верхних и нижних границ исходных данных. По расчетной формуле видно, что для определения верхней границы времени потребуются верхние границы диаметра и высоты уровня жидкости и нижние границы коэффициента расхода и диаметра отверстия дна. Для определения нижней границы времени потребуются нижние границы диаметра и высоты уровня жидкости и верхние границы коэффициента расхода и диаметра отверстия дна.

Для Tv

$$Dv := 1 + 0.01 = 1.01 \qquad \mu n := 0.61 - 0.02 = 0.59$$

$$Yv := 2 + 0.02 = 2.02 \qquad dn := 0.03 - 0.001 = 0.029$$

$$Tv := \frac{Dv^2 \cdot \sqrt{Yv}}{\mu n \cdot dn^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \qquad Tv = 659.998$$

Рис. 2.2. Определение верхней границы времени

Для Tn

$$Dn := 1 - 0.01 = 0.99 \qquad \mu v := 0.61 + 0.02 = 0.63$$

$$Yn := 2 - 0.02 = 1.98 \qquad dv := 0.03 + 0.001 = 0.031$$

$$Tn := \frac{Dn^2 \cdot \sqrt{Yn}}{\mu v \cdot dv^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \qquad Tn = 514.53$$

Рис. 2.3. Определение нижней границы времени

Далее следует определить среднее значение искомого времени и его абсолютную погрешность (рис. 2.4), для удобства значение времени можно перевести из секунд в минуты (см. рис. 2.4).

$$T := \frac{Tv + Tn}{2} = 587.264 \qquad T1 := \frac{T}{60}$$

$$\Delta T := \frac{Tv - Tn}{2} = 72.734 \qquad T1 = 9.788$$

Рис. 2.4. Определение среднего значения
и абсолютной погрешности
по известным верхней и нижней границе

Ответ: для опорожнения резервуара необходимо 9.8 мин±73 с.

Задание 3

С какой точностью надо измерить радиус окружности R = 30,5 см и со сколькими знаками взять π, чтобы длина окружности была известна с точностью до 0,5 %?

Решение:

Длина окружности

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R.$$

Абсолютная погрешность длины окружности

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial \pi}\right| \cdot \Delta \pi + \left|\frac{\partial L}{\partial R}\right| \cdot \Delta R,$$

где $\Delta\pi$ – абсолютная погрешность π; ΔR – абсолютная погрешность радиуса окружности.

Допустим, что $\Delta\pi$=0.005, тогда

$$\Delta L = \left|\frac{\partial L}{\partial \pi}\right| \cdot 0.005 + \left|\frac{\partial L}{\partial R}\right| \cdot \Delta R.$$

Вычислим частные производные

$$\left|\frac{\partial L}{\partial \pi}\right| = 2 \cdot R,$$

$$\left|\frac{\partial L}{\partial R}\right| = 2 \cdot \pi.$$

Относительная погрешность длины окружности

$$\delta L = \frac{\Delta L}{|L|} \cdot 100\,\%,$$

$$\delta L = \frac{\left|\frac{\partial L}{\partial \pi}\right| \cdot 0.005 + \left|\frac{\partial L}{\partial R}\right| \cdot \Delta R}{|L|},$$

$$\delta L = \frac{2 \cdot R \cdot 0.005 + 2 \cdot \pi \cdot \Delta R}{2 \cdot \pi \cdot R},$$

$$\delta L = \frac{0.005}{\pi} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Отсюда

$$\Delta R = \left(\frac{\delta L}{100\,\%} - \frac{0.005}{\pi}\right) \cdot R.$$

После подстановки исходных числовых данных получено

$$\Delta R = \left(\frac{0.5\%}{100\,\%} - \frac{0.005}{3.14}\right) \cdot 30.5 = 0.104\,см.$$

Ответ: радиус необходимо измерить с точностью до 0.1 см, число π взять с двумя знаками после десятичной точки.

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы мы научились использовать на практике знания по теме «Теория погрешности».

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Постановка задачи

Дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

требуется найти корни этого уравнения.

В общем случае решение нелинейных уравнений типа (3.1) разбивается на два этапа [5, 13]:

1) Локализация (отделение) корней.

На этом этапе графически или аналитически определяются малые непересекающиеся отрезки, каждый из которых содержит ровно один корень уравнения.

2) Вычисление корней на каждом из отрезков.

На этом этапе происходит уточнение корня, содержащегося на заданном отрезке, одним из итерационных методов.

3.2. Локализация корней

Локализация корней, как правило, осуществляется графически. Рассмотрим процедуру локализации корней уравнения на примере решения следующей задачи.

Задача 1. Дано нелинейное алгебраическое уравнение 4-й степени

$$x^4 - x - 1 = 0. \tag{3.2}$$

Решение:

Локализуем действительные корни уравнения.

1 способ. Построим график функции $f(x) = x^4 - x - 1$ (рис. 3.1), точки пересечения кривой *f(x)* с осью *ox* будут корнями уравнения (3.2).

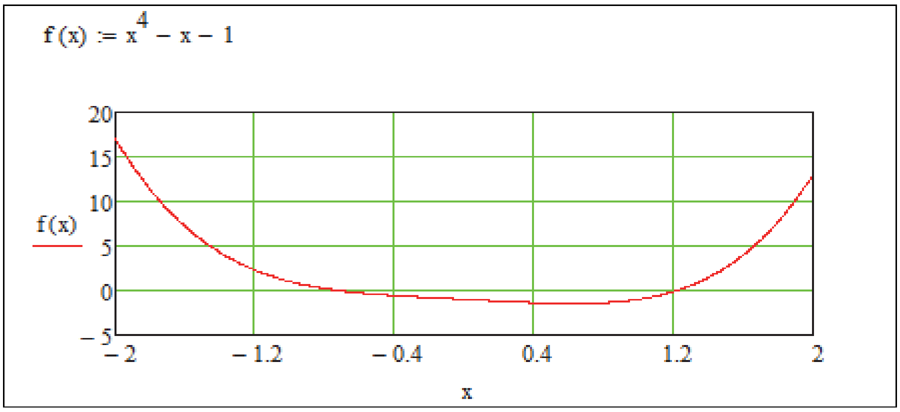


Рис. 3.1. Графическое отделение корней (1 способ)

Отрезки, содержащие корни: [-1.2; 0], [1; 1.5].

Ответ: [-1.2; 0], [1; 1.5].

2 способ. Перепишем исходное уравнение в виде $x^4 = x + 1$. Построим графики функций $h(x) = x^4$; $g(x) = x + 1$ (рис. 3.2).

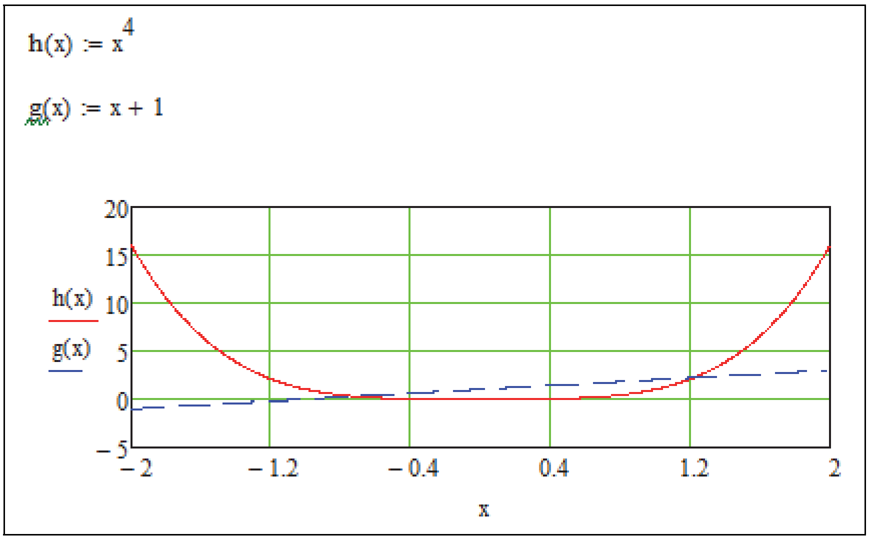


Рис. 3.2. Графическое отделение корней (2 способ)

Точки пересечения кривых *h(x)* и *g(x)* будут корнями уравнения (3.2).

Отрезки, содержащие корни: [-1.2; 0], [1; 1.5].

Ответ: [-1.2; 0], [1; 1.5].

3.3. Итерационные методы решения нелинейных уравнений

3.3.1. Общие вопросы

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение (3.1), определенное на отрезке $x \in [a,b]$. Известно, что внутри $[a,b]$ уравнение (3.1) имеет единственный корень *C*. Найти решение уравнения (3.1) $x_{np} \in [a,b]$ с заданной точностью ε.

Общие вопросы.

Каждый итерационный метод решения нелинейного уравнения накладывает на уравнение (3.1) определенные ограничения. Такие ограничения называются условиями сходимости метода.

При решении нелинейных уравнений итерационными методами выполняется следующая последовательность действий:

1 задание начального приближения;

2 определение условия прекращения итерационных вычислений;

3 определение формулы итерационного процесса;

4 вычисления по формуле итерационного процесса до выполнения условия остановки вычислений;

5 интерпретация полученного результата.

Условием прекращения вычислений может служить выражение

$$\left|x_{np} - C\right| \le \varepsilon ,$$

которое в силу неизвестности значения *C* может быть заменено условием

$$\left|x_{np}^{(k)} - x_{np}^{(k-1)}\right| \le \varepsilon . \quad (3.3)$$

3.3.2. Метод бисекции (половинного деления)

Алгоритм метода половинного деления имеет вид:

Шаг 1. Задание начального приближения (отрезка на нулевой итерации), нахождение середины отрезка:

$$a_0 = a , \; b_0 = b ,$$

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} .$$

Шаг 2. Сужение отрезка (1 итерация). Сужение отрезка $[a_0, b_0]$ происходит за счет переноса его правой или левой границы (3.3).

$$\text{Если} \quad f(a_0) \cdot f(c_0) \begin{cases} < 0, & \text{то} \quad a_1 = a_0, \quad b_1 = c_0 \\ = 0, & \text{то} \quad c_1 = c_0 \\ > 0, & \text{то} \quad a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0. \end{cases}$$

Шаг 3. Расчет середины отрезка $[a_1, b_1]$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} .$$

Шаг 4. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$\left|c_1 - c_0\right| \le \varepsilon .$$

Если условие выполнено, то c_1 – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода бисекции. Иначе переход к шагу 5.

Шаг 5. Данный шаг (*k*-итерация) аналогичен шагу 2. Сужение отрезка $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ происходит за счет переноса его правой или левой границы (3.4).

$$\text{Если}\quad f(a_{k-1})\cdot f(c_{k-1})\begin{cases} <0, & \text{то}\quad a_k = a_{k-1},\quad b_k = c_{k-1} \\ =0, & \text{то}\quad c_k = c_{k-1} \\ >0, & \text{то}\quad a_k = c_{k-1},\quad b_k = b_{k-1}, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $k = 2,3,4,...$

Шаг 6. Расчет середины отрезка $[a_k, b_k]$

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Шаг 7. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$|c_k - c_{k-1}| \le \varepsilon.$$

Если условие выполнено, то c_k – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода бисекции. Иначе переход к шагу 5. Рис. 3.3 иллюстрирует применение метода бисекции.

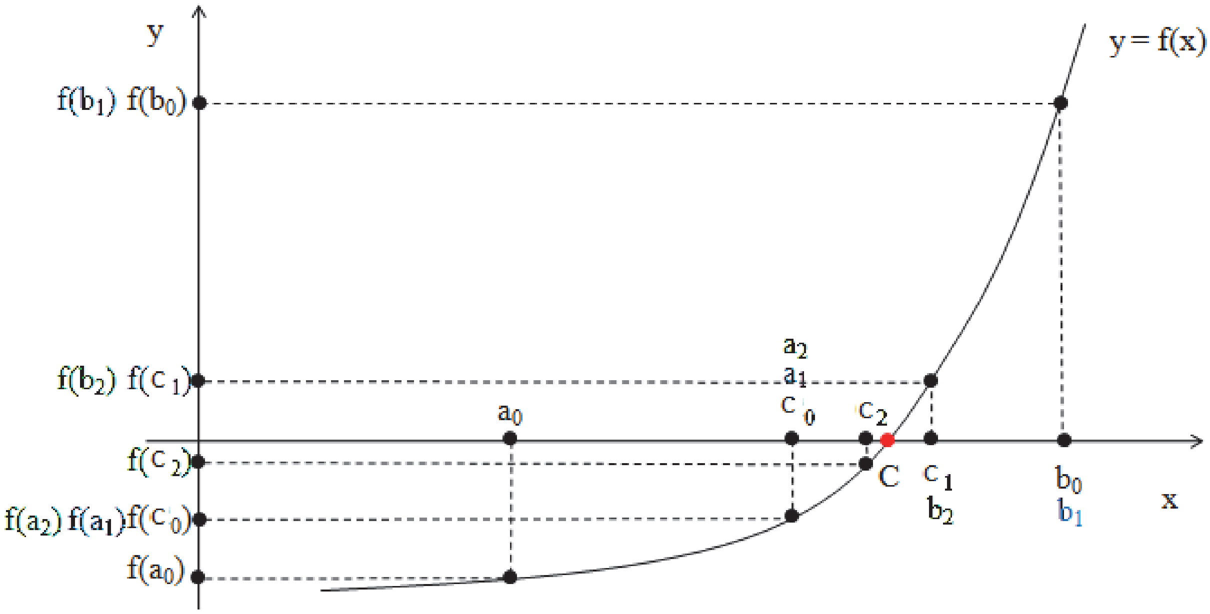
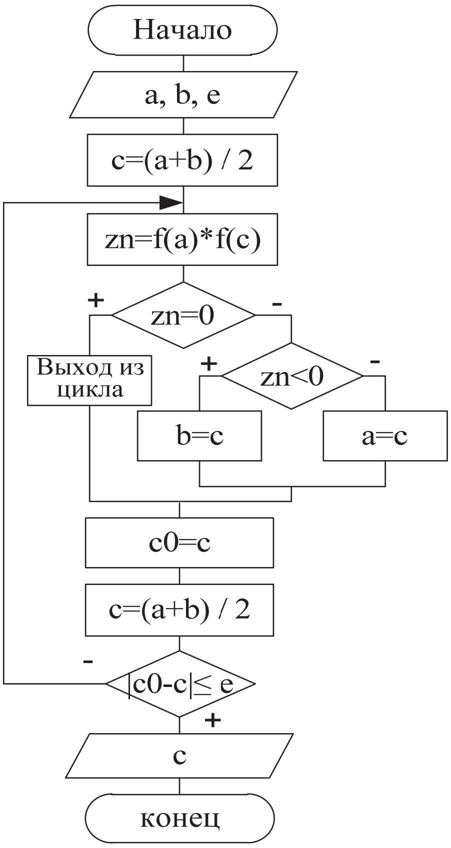


Рис. 3.3. Решение нелинейного уравнения методом половинного деления

Условие сходимости метода бисекции. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает разные знаки, то метод половинного деления сходится к точному решению уравнения $x = C$. При этом его погрешность оценивается неравенствами

$$|c_k - C| \le (b-a)/2^{k+1};\ |c_k - C| \le (b_k - a_k)/2.$$

Алгоритм решения нелинейного уравнения (3.1) с использованием метода бисекции может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 3.4) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (см. рис. 3.4). Рис. 3.5 иллюстрирует применение этой функции пользователя для решения конкретного нелинейного уравнения методом половинного деления [5-7].




```
bin(f, a, b, e) := | c ← (a + b)/2
                   | while 1
                   |   | zn ← f(a)·f(c)
                   |   | return c  if  zn = 0
                   |   | otherwise
                   |   |   | b ← c  if  zn < 0
                   |   |   | a ← c  otherwise
                   |   | c0 ← c
                   |   | c ← (a + b)/2
                   |   | return c  if  |c0 − c| ≤ e
```

Рис. 3.4. Блок-схема алгоритма решения нелинейного уравнения (3.1) методом бисекции и реализация алгоритма в MathCad

$f(x) := x^4 - x - 1$

$\mathrm{bin}(f, -1.5, 0, 0.0001) = -0.724$

$\mathrm{bin}(f, 1, 3, 0.0001) = 1.221$

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-0.724\\-0.248+1.034i\\-0.248-1.034i\\1.221\end{pmatrix}$$

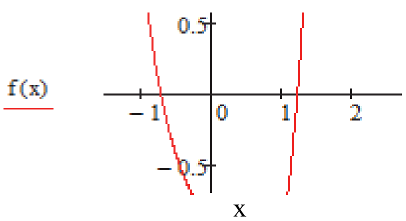


Рис. 3.5. Пример решения нелинейного уравнения методом бисекции в MathCad

3.3.3. Метод простых итераций

Преобразуем уравнение (3.1) к виду (3.5):

$$x = \varphi(x). \tag{3.5}$$

Алгоритм метода простых итераций имеет вид:

Шаг 1. Задание начального приближения (нулевая итерация)

$$x_0 = a \quad \text{или} \quad x_0 = b.$$

Шаг 2. Расчет значения функции в точке x_0 $\varphi(x_0)$.

Шаг 3. $x_1 = \varphi(x_0)$,

где x_1 – приближение корня уравнения на первой итерации.

Шаг 4. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$|x_1 - x_0| \le \varepsilon.$$

Если условие выполнено, то x_1 – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода простых итераций.

Иначе переход к шагу 5.

Шаг 5. Данный шаг (k-итерация) аналогичен шагу 3. Расчет приближения корня на k-й итерации

$$x_k = \varphi(x_{k-1}),$$

где $k = 2,3,4,...$

Шаг 6. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon.$$

Если условие выполнено, то x_k – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода простых итераций. Иначе переход к шагу 5. Рис. 3.6 иллюстрирует применение метода простых итераций.

Условия сходимости метода простых итераций:

1 $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на [a, b];

2 максимальное абсолютное значение производной итерирующей функции на отрезке [a, b] строго меньше единицы

$$\max_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| \prec 1.$$

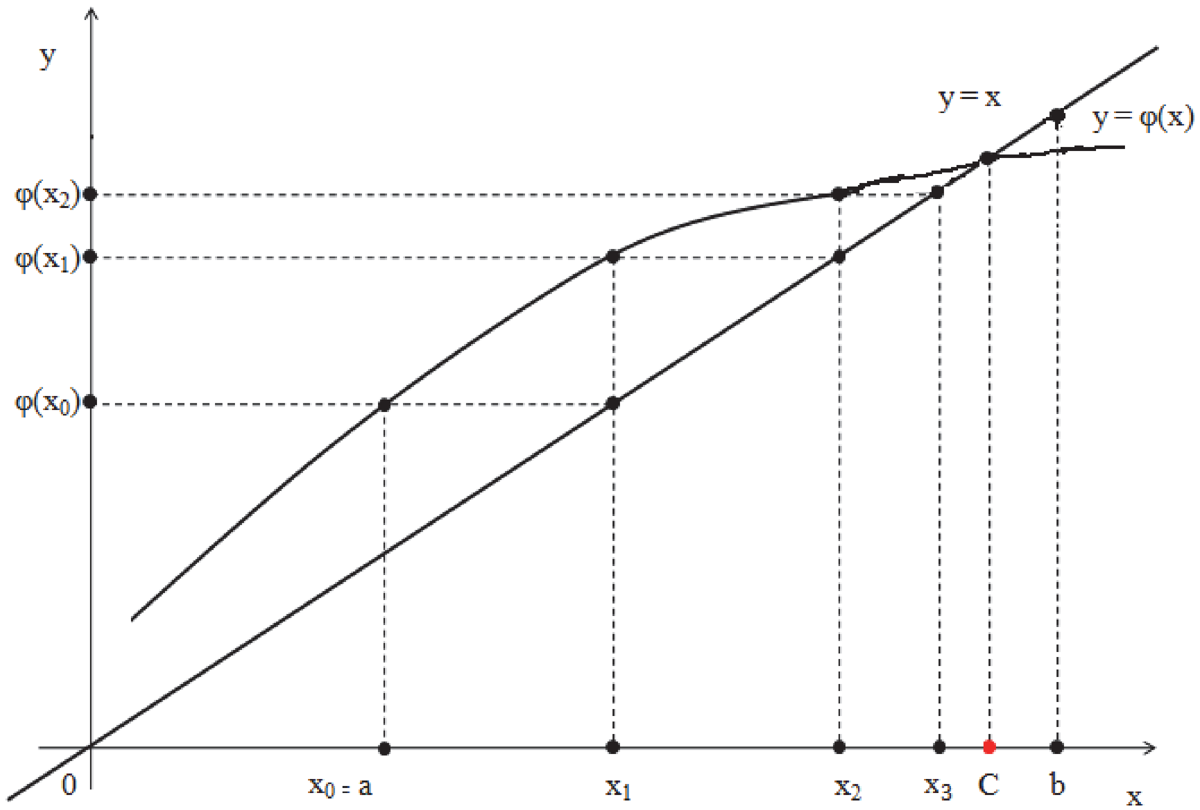


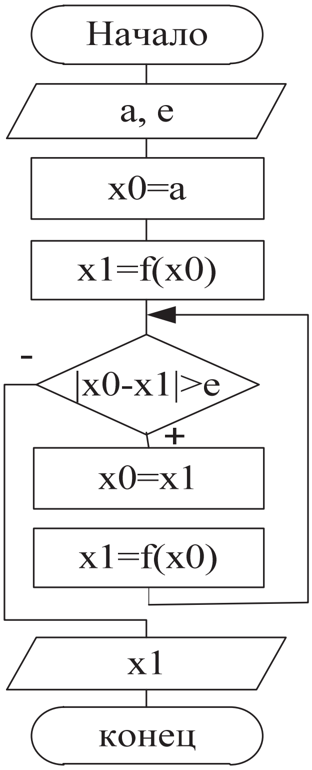
Рис. 3.6. Решение нелинейного уравнения методом простых итераций

Условие остановки итерационного процесса. В численном анализе доказывается, что в методе простых итераций наряду с условием $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$ в качестве условия остановки итерационных вычислений может использоваться условие

$$|x_k - x_{k-1}| \le \frac{\varepsilon \cdot (1-q)}{q},$$

где $q = \max\limits_{x \in [a;b]} |\varphi'(x)|$.

Алгоритм решения нелинейного уравнения (3.1) с использованием метода простых итераций может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 3.6) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (рис. 3.7). Рис. 3.8 иллюстрирует применение этой функции пользователя для решения конкретного нелинейного уравнения методом простых итераций. Если необходимо вывести получаемое на каждой итерации приближение, то рассматриваемая функция может быть дополнена (рис. 3.9).




```
pr_it(f, a, e) := | x0 ← a
                  | x1 ← f(x0)
                  | while |x0 − x1| > e
                  |   | x0 ← x1
                  |   | x1 ← f(x0)
                  | x1
```

Рис. 3.7. Блок-схема алгоритма решения нелинейного уравнения (3.1) методом простых итераций и реализация алгоритма в MathCad

```
f(x) := sin(x) + 0.25 − x

ϕ(x) := sin(x) + 0.25

pr_it(f, a, e) := | x0 ← a
                  | x1 ← f(x0)
                  | while |x0 − x1| > e
                  |   | x0 ← x1
                  |   | x1 ← f(x0)
                  | x1

pr_it(ϕ, 1, 0.001) = 1.171
```

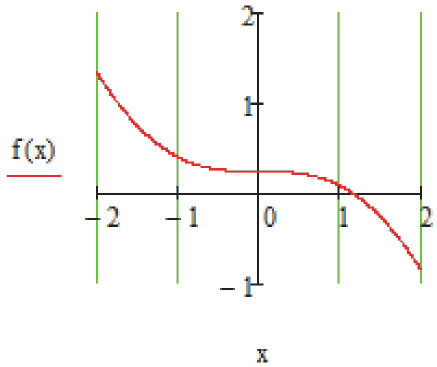
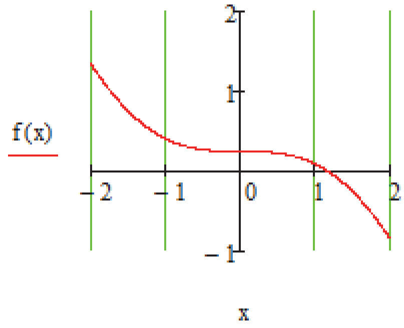


Рис. 3.8. Пример решения нелинейного уравнения методом простых итераций в MathCad

$f(x) := \sin(x) + 0.25 - x$

$\phi(x) := \sin(x) + 0.25$




```
pr_it2(f, a, e) := | (rez)^<0> ← ("iter"; "x")
                   | x0 ← a
                   | x1 ← f(x0)
                   | k ← 1
                   | (rez)^<k> ← (k; x1)
                   | while |x0 − x1| > e
                   |     | x0 ← x1
                   |     | x1 ← f(x0)
                   |     | k ← k + 1
                   |     | (rez)^<k> ← (k; x1)
                   | rez
```

$$pr\_it2(\phi, 1.25, 0.001) = \begin{pmatrix} \text{"iter"} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{"x"} & 1.198985 & 1.181671 & 1.175241 & 1.172783 & 1.171833 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.9. Пример решения нелинейного уравнения методом простых итераций в MathCad с выводом получаемых на каждой итерации приближений

Пример. С точностью $\varepsilon = 0.001$ найти корень уравнения $x - \sin(x) = 0{,}25$, $C \in [1;1{,}5]$.

Решение:

Преобразуем исходное уравнение к виду (3.5):

$$x = \sin(x) + 0{,}25 .$$

Проверим условия сходимости:

1 $\varphi'(x) = \cos(x)$, значит $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на [1; 1.5];

2 $\max\limits_{[1;1.5]} |\varphi'(x)| = |\cos(x)| \le 0.54$.

Условия сходимости выполнены, следовательно, приближенные решения можно получать по формуле

$$x_{k+1} = \sin(x_k) + 0{,}25 .$$

Найдем их: $x_0 = 1{,}25$; $x_1 = 1{,}199$; $x_2 = 1{,}1817$; $x_3 = 1{,}1752$; $x_4 = 1{,}1728$; $x_5 = 1{,}1718$; $x_6 = 1{,}1714$.

После выполнения каждой итерации проверяем условие окончания вычислений:

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| \le 10^{-3}.$$

После выполнения 6-й итерации заданная точность обеспечена, так как

$$\left|1{,}1714 - 1{,}1718\right| = 0{,}0004 < 10^{-3}.$$

Следовательно, $x \approx 1.1718$.

Ответ: $x \approx 1.1718$.

Способы преобразования исходного уравнения.

Общий подход состоит в том, что исходное уравнение $f(x) = 0$ (3.1) преобразуется к виду

$$x = x + \alpha \cdot f(x), \tag{3.6}$$

а итерационный процесс записывается как

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot f(x_k). \tag{3.7}$$

Сходимость процесса обеспечивается подходящим выбором параметра α.

В численном анализе доказывается, что если $\alpha = \dfrac{-2}{m+M}$, где $m = \min\limits_{[a,b]}(f'(x))$, $M = \max\limits_{[a,b]}(f'(x))$, то метод простых итераций сходится к точному решению уравнения $x = C$.

Пример. С помощью метода простых итераций найти с точностью $\varepsilon = 0.0005$ корни уравнения (3.2).

Решение:

1) Для вычисления первого корня $C_1 \in [1;1.5]$ уравнения (3.2) преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$, выразив *x* через x^4

$$\varphi(x) = \sqrt[4]{x_k + 1}. \tag{3.8}$$

Условия сходимости итерационного процесса выполнены, так как $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на заданном отрезке (рис. 3.10) и

$$\max_{[a,b]}|\varphi'(x)| = \max_{[1;1,5]}\frac{1}{4}\cdot\sqrt[-4]{(x+1)^3} \approx 0{,}15 < 1.$$

Тогда расчетная формула для метода простых итераций запишется в виде

$$x_{k+1} = \sqrt[4]{x_k + 1}.$$

В качестве начального приближения выберем середину отрезка $x_0 = 1{,}25$.

Вычислим первое приближение

$$x_1 = \sqrt[4]{x_0 + 1} = \sqrt[4]{2{,}25} = 1{,}22474.$$

Критерий окончания итераций

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon.$$

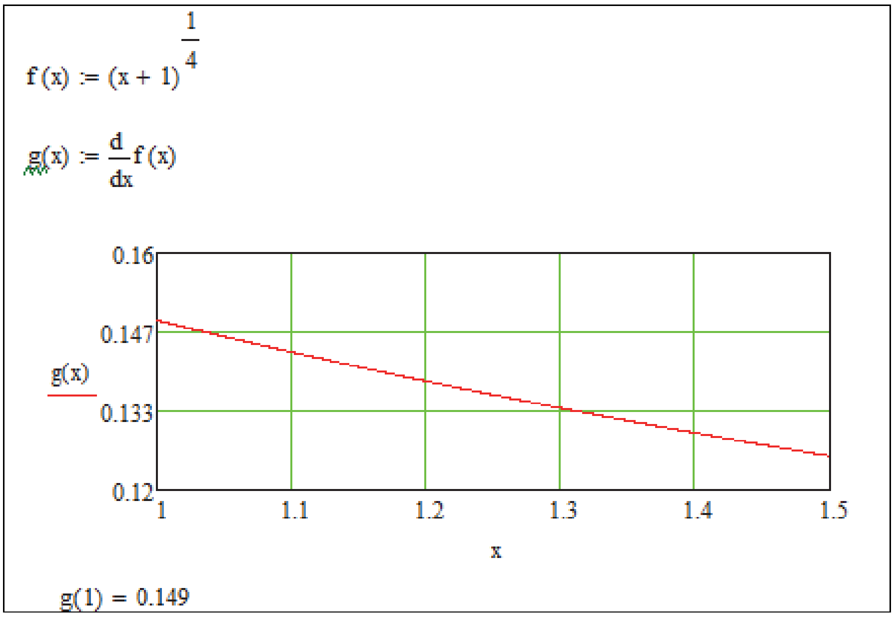


Рис. 3.10. Проверка условий сходимости метода простых итераций для (3.8)

Критерий окончания итерационного процесса при этом не выполнен, поэтому необходимо вычисление второго приближения x_2

$$x_2 = \sqrt[4]{1.22474 + 1} = 1.22129,$$

$|x_2 - x_1| = 0.003 > 0.0005$ – тем самым точность не достигнута и необходимо вычислить третье приближение $x_3 = \sqrt[4]{1.22129 + 1} = 1.2208$;

$|x_3 - x_2| = 0.00048 < 0.0005$ – тем самым точность достигнута, искомое решение $x \approx C_1 \approx 1.2208 \pm 0.0005$.

2) Вычисление второго корня $C_2 \in [-1;0]$.

Для вычисления второго корня $C_2 \in [-1.2;0]$ уравнения (3.2) преобразуем уравнение к виду $x = \varphi(x)$, выразив x через x^4 (3.8).

Проверим выполнение условий сходимости итерационного процесса.

Первое условие сходимости итерационного процесса не выполнено, так как $\varphi'(x)$ на заданном отрезке имеет разрыв (в точке x = -1).

Значит, для данного отрезка необходимо использовать другие виды преобразования. Например,

$$x(x^3 - 1) = 1,\ x = 1/(x^3 - 1). \tag{3.9}$$

Условие сходимости для этого случая будет выполнено (рис. 3.11), $\max\limits_{[-1.2;0]} (1/(x^3 - 1))' < 1$.

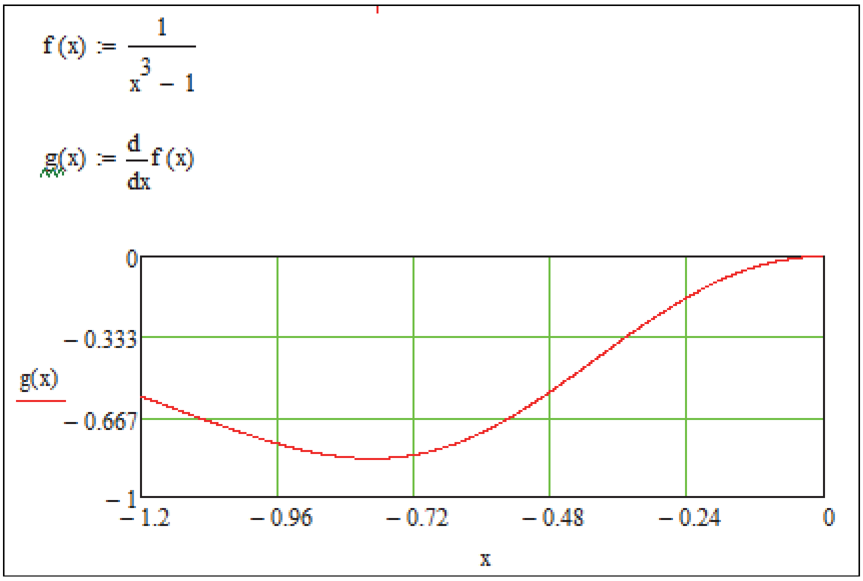


Рис. 3.11. Проверка условий сходимости метода простых итераций для (3.9)

Однако здесь целесообразнее использовать общий подход, при котором исходное уравнение (3.1) $f(x) = 0$ преобразуется к виду (3.6), а сходимость обеспечивается подбором параметра α. Для данной задачи имеем: $f'(x) = 4x^3 - 1 < 0$, производная знакопостоянна на $[-1.2;0]$ (рис. 3.12).

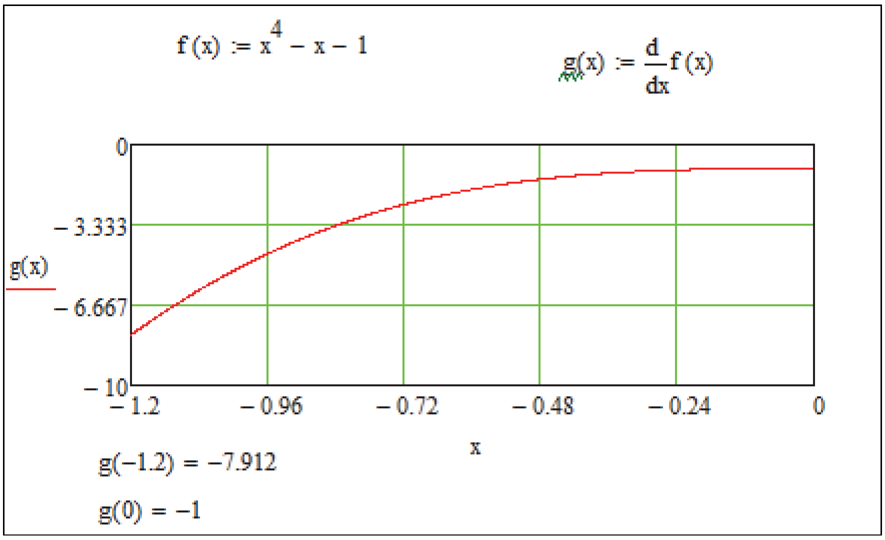


Рис. 3.12. Определение параметра α

Поэтому можем взять

$$\alpha = \frac{-2}{m + M},$$

где $m = \min f'(x) = -7.912$, $M = \max\limits_{[-1.2;0]} f'(x) = -1$.

Таким образом, $\alpha = \dfrac{-2}{-7.912 - 1} = 0.224$, расчетная формула (3.7) принимает вид

$$x_{k+1} = x_k + 0.224 \cdot (x_k^4 - x_k - 1),$$

Начальное приближение $x_0 = -1$.

Критерий окончания вычислений

$$|x_{k+1} - x_k| \le 5 \cdot 10^{-4}.$$

Реализация итерационных вычислений показана на рис. 3.13 [8, 9 12, 13].

$x_0 := -1$

$k := 0..8$

$x_{k+1} := x_k + 0.224\left[\left(x_k\right)^4 - x_k - 1\right]$

$x =$

	0
0	-1
1	-0.776
2	-0.74495
3	-0.733096
4	-0.728184
5	-0.72609
6	-0.725186
7	-0.724794
8	-0.724623
9	-0.724549

$\left|x_{k+1} - x_k\right| =$

0.224
0.031
0.012
$4.912 \cdot 10^{-3}$
$2.095 \cdot 10^{-3}$
$9.04 \cdot 10^{-4}$
$3.92 \cdot 10^{-4}$
$1.704 \cdot 10^{-4}$
$7.41 \cdot 10^{-5}$

Рис. 3.13. Итерационный процесс

Результаты вычислений дают $x \approx C_2 \approx x_7 \pm 0.0004$.

Ответ: $C_1 = 1{,}2208 \pm 0{,}0005$, $C_2 = -0.7248 \pm 0{,}0005$.

3.3.4. Метод Ньютона (метод касательных)

Рассмотрим решение уравнения (3.1) еще одним способом. Требуется найти решение уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью ε, если известно, что внутри $[a,b]$ существует единственный корень.

Из $[a,b]$ выберем некоторое начальное приближение, разложим функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора, удержав линейную часть в разложении:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.10}$$

Выражение (3.10) – уравнение касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной через точку с координатами x_0, $f(x_0)$ (рис. 3.9).

В качестве следующего приближения к решению выберем точку пересечения касательной с осью ox, т.е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Дальнейшие приближения получим по этому же принципу:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3.11}$$

Формула (3.11) – расчетная формула метода Ньютона. Благодаря геометрической интерпретации (рис. 3.14) метод Ньютона получил название ***метода касательных.***

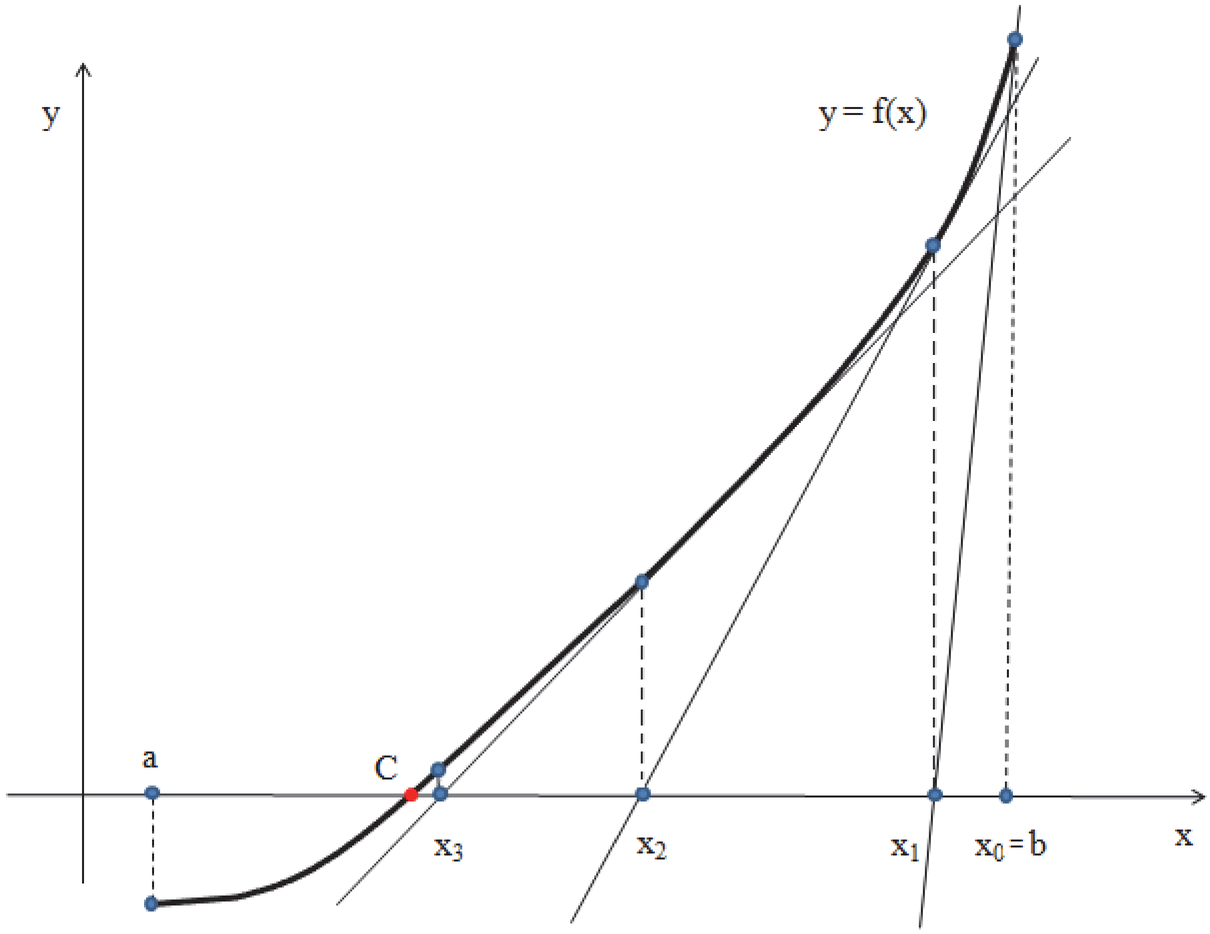


Рис. 3.14. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Алгоритм метода Ньютона имеет вид:

Шаг 1. Задание начального приближения (нулевая итерация).

$$x_0 = a \quad \text{или} \quad x_0 = b.$$

Шаг 2. Расчет приближения (итерация 1)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

где x_1 – приближение корня уравнения на первой итерации.

Шаг 3. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$|x_1 - x_0| \le \varepsilon .$$

Если условие выполнено, то x_1 – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода Ньютона. Иначе переход к шагу 4.

Шаг 4. Данный шаг (*k*-итерация) аналогичен шагу 2. Расчет приближения корня на *k*-й итерации

$$\mathrm{x_k} = \mathrm{x_{k-1}} - \frac{\mathrm{f(x_{k-1})}}{\mathrm{f'(x_{k-1})}},$$

где $k = 2,3,4,...$

Шаг 5. Проверка условия остановки итерационного процесса

$$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon .$$

Если условие выполнено, то x_k – корень уравнения (3.1), найденный с точностью ε с использованием метода Ньютона. Иначе переход к шагу 4. Рис. 3.15 иллюстрирует применение метода касательных.

Условие остановки итерационного процесса. В численном анализе доказывается, что в методе Ньютона наряду с условием $|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon$ в качестве условия остановки итерационных вычислений может использоваться условие

$$|f(x_k)| \le m \cdot \varepsilon,$$

где $m = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)|$.

Условия сходимости метода Ньютона:

1 f(x) дважды непрерывно дифференцируема на [a, b];

2 на концах отрезка f(x) принимает значения разных знаков:

$$f(\mathrm{a}) \cdot f(\mathrm{b}) < 0;$$

3 на концах отрезка [a, b] первая и вторая производные функции f(x) не обращаются в ноль:

$$f'(\mathrm{a}) \ne 0,\ f''(\mathrm{a}) \ne 0;\ f'(\mathrm{b}) \ne 0,\ f''(\mathrm{b}) \ne 0.$$

Алгоритм решения нелинейного уравнения (3.1) с использованием метода касательных может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 3.15) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (см. рис. 3.15).

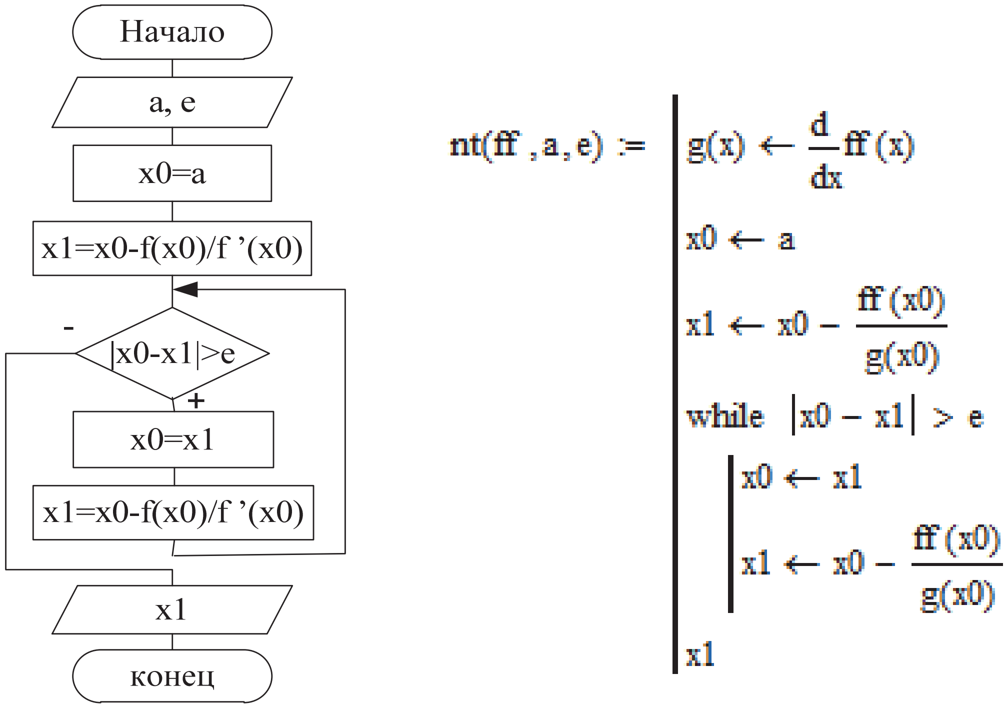


Рис. 3.15. Блок-схема алгоритма решения нелинейного уравнения (3.1) методом Ньютона и реализация алгоритма в MathCad [5, 11]

Пример. С точностью $\varepsilon = 0.001$ на отрезке [1; 1.5] найти корень уравнения

$$x - \sin x = 0.25.$$

Решение:

Проверка условий сходимости метода Ньютона – условия сходимости выполняются (рис. 3.16).

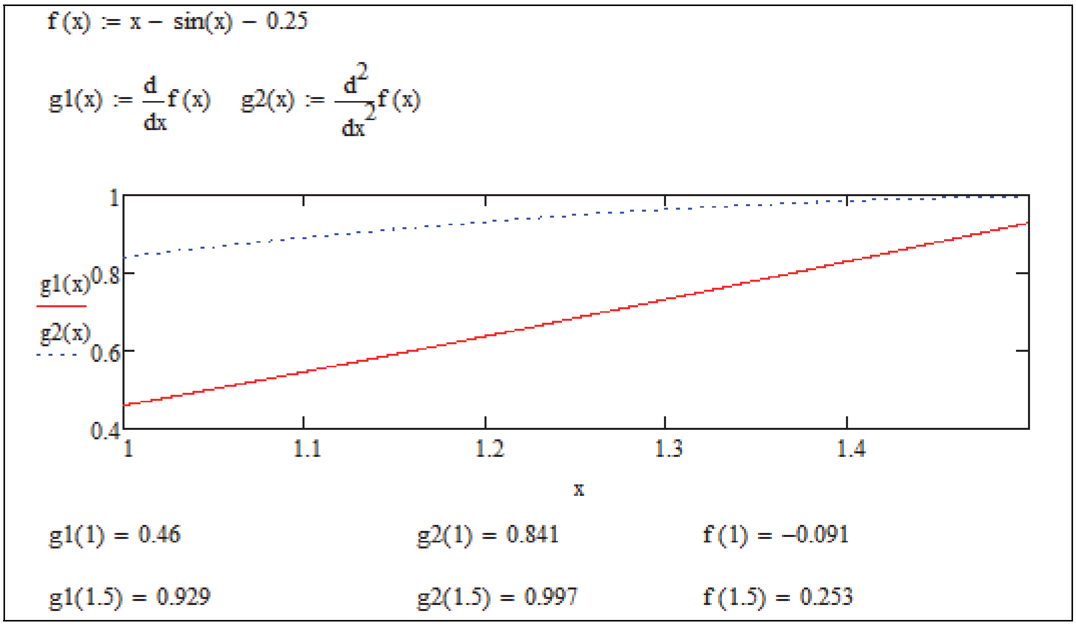


Рис. 3.16. Проверка условий сходимости метода

Рис. 3.17 иллюстрирует применение функции пользователя (см. рис. 3.15) для решения данного уравнения методом касательных.

$$f(x) := x - \sin(x) - 0.25$$

$$nt(f, 1, 0.01) = 1.171$$

Рис. 3.17. Решение уравнения
методом Ньютона

```
nt(f,a,b,e) := | return "f(a)f(b)>=0"  if f(a)·f(b) ≥ 0
               | g(x) ← d/dx f(x)
               | return "ff(a)ff(b)=0"  if g(a)·g(b) = 0
               | (rez)<0> ← ("iter"  "x")
               | x0 ← a
               | x1 ← x0 − f(x0)/g(x0)
               | k ← 1
               | (rez)<k> ← (k  x1)
               | while |x0 − x1| > e
               |    | x0 ← x1
               |    | x1 ← x0 − f(x0)/g(x0)
               |    | k ← k + 1
               |    | (rez)<k> ← (k  x1)
               | rez
```

$$nt(f, 1, 2, 0.001) = \begin{pmatrix} \text{"iter"} & 1 & 2 & 3 \\ \text{"x"} & 1.19898 & 1.17179 & 1.17123 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.18. Решение уравнения методом Ньютона
с проверкой условий сходимости метода
и выводом результатов каждой итерации

Ответ: $x \approx 1.1712 \pm 0.001$.

3.3.5. Метод хорд

В ряде случаев определение производной $f'(x)$ затруднено, тогда вместо касательных можно использовать хорды (рис. 3.19).

Итерационный процесс метода хорд рассчитывается по формуле

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(d)} \cdot (x_{k-1} - d),\ k \geq 1.$$

Выбор начального приближения:

если $f(a) \cdot f''(x) > 0$, *то* $d = a$,

если $f(b) \cdot f''(x) > 0$, *то* $d = b$,

если $d = a$, *то* $x_0 = b$,

если $d = b$, *то* $x_0 = a$.

Условия сходимости метода хорд такие же, как метода касательных.

Условия остановки итерационного процесса в методе хорд такие же, как в методе касательных.

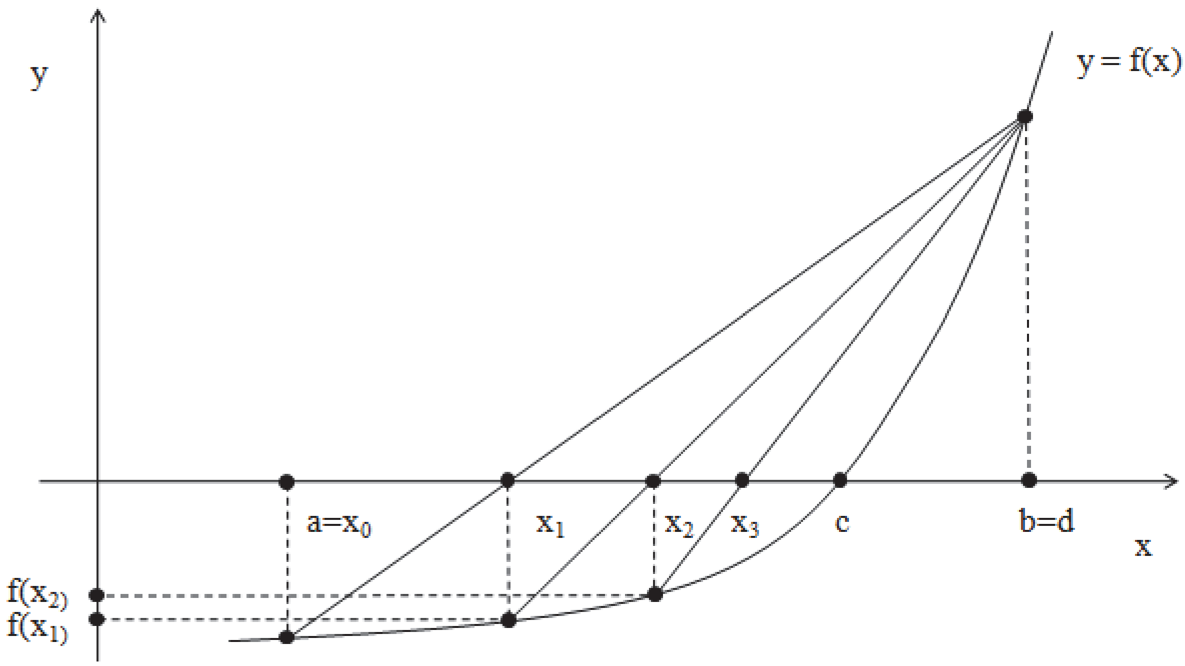


Рис. 3.19. Геометрическая интерпретация метода хорд

Алгоритм решения нелинейного уравнения (3.1) с использованием метода хорд может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 3.20) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (рис. 3.21). Использование этой функции для решения уравнения из последнего примера показано на рис. 3.22 [10, 14, 15].

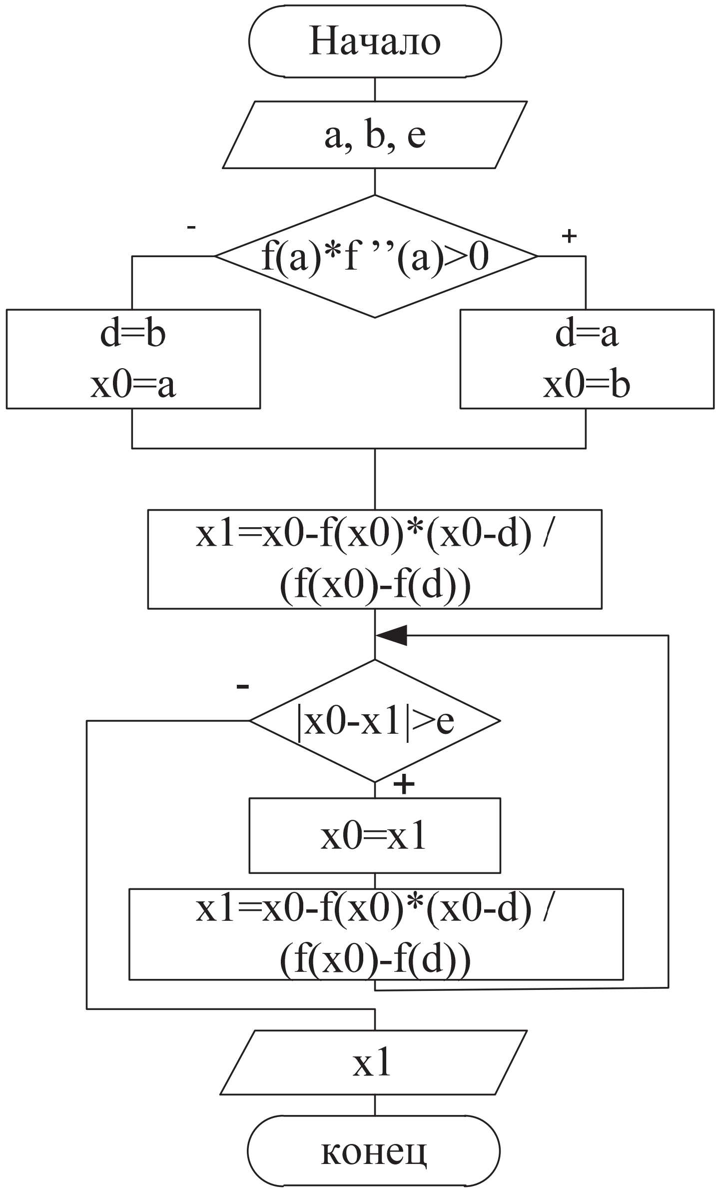


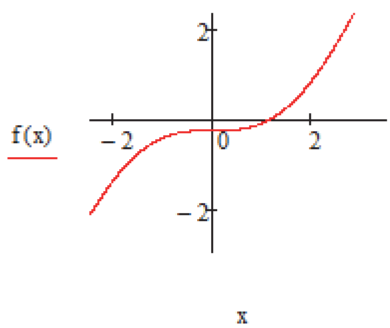
Рис. 3.20. Блок схема алгоритма метода хорд

При реализации в MathCad (см. рис. 3.21) данный алгоритм дополнен проверкой условий сходимости метода, выбором начального приближения и выводом результатов вычислений на каждой итерации.

```
hord(f, a, b, e) := | return "f(a)f(b)>=0"  if  f(a)·f(b) ≥ 0        проверка условий
                    |                                                сходимости метода
                    | g(x) ← d/dx f(x)
                    | ff(x) ← d²/dx² f(x)
                    | return "ff(a)ff(b)=0"  if  g(a)·g(b) = 0        проверка условий
                    |                                                сходимости метода
                    | (rez)^<0> ← ("iter", "x")
                    | if  f(a)·ff(a) > 0                              выбор начальной точки
                    |    | d ← a
                    |    | x0 ← b
                    | otherwise
                    |    | d ← b
                    |    | x0 ← a
                    | x1 ← x0 − f(x0)/(f(x0) − f(d))·(x0 − d)        итерационная
                    |                                                формула метода
                    | k ← 1
                    | (rez)^<k> ← (k, x1)
                    | while  |x0 − x1| > e
                    |    | x0 ← x1
                    |    | x1 ← x0 − f(x0)/(f(x0) − f(d))·(x0 − d)
                    |    | k ← k + 1
                    |    | (rez)^<k> ← (k, x1)
                    | rez
```

Рис. 3.21. Реализация алгоритма метода хорд в MathCad

$f(x) := x - \sin(x) - 0.25$



$$hord(f, 1, 2, 0.001) = \begin{pmatrix} \text{"iter"} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \text{"x"} & 1.09813 & 1.14126 & 1.15916 & 1.16641 & 1.16931 & 1.17046 & 1.17093 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.22. Решение уравнения методом хорд

3.3.6. Метод секущих

В ряде случаев определение производной $f'(x)$ затруднено, её можно заменить разностным приближением

$$\frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k},$$

которое приводит к итерационному методу секущих

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f(x^{k-1}) - f(x^k)} \cdot (x^{k-1} - x^k),\ k \geq 1. \qquad (3.12)$$

Секущая $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k} \cdot (x - x_0)$.

Из формулы (3.12) следует, что метод секущих является двухшаговым, так как, в отличие от метода Ньютона и метода хорд, для нахождения очередного приближения x^{k+1} требуется знание двух предыдущих приближений x^{k-1}, x^k. В частности, для того чтобы начать вычисления, необходимо иметь два начальных приближения x^0 и x^1.

3.4. Лабораторная работа 2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться решать нелинейные уравнения в MathCad, используя вычислительные алгоритмы метода простых итераций, метода бисекции, метода Ньютона.

Задание 1

Графически локализовать корни нелинейного уравнения (табл. 3.1), один из корней уточнить методом простых итераций.

Таблица 3.1

Варианты заданий

Вариант	Уравнение	Абсолютная погрешность
1	$2^x + 5x - 3 = 0$	ε=0.001
2	$arctgx - \dfrac{1}{3x^3} = 0$	ε=0.001
3	$x^2 \cdot 2^x = 1$	ε=0.009
4	$2e^x = 5x + 2$	ε=0.001

Продолжение табл. 3.1

Вариант	Уравнение	Абсолютная погрешность
5	$3^{x-1}-2-x=0$	ε=0.001
6	$5^{x}+3x=0$	ε=0.0001
7	$e^{-2x}-2x+1=0$	ε=0.001
8	$5^{x}-6x-3=0$	ε=0.001
9	$arctg(x-1)+2x=0$	ε=0.0001
10	$2arcctgx-x+3=0$	ε=0.001
11	$x^4-5x+10=0$	ε=0.004
12	$x^2\cos 2x=-1$	ε=0.0001
13	$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$	ε=0.005
14	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	ε=0.003
15	$2\sin(x+\frac{\pi}{3})=0{,}5x^2-1$	ε=0.0001

Задание 2

Графически локализовать корни нелинейного уравнения (табл. 3.2), один из корней найти с заданной точностью методом половинного деления.

Таблица 3.2

Варианты заданий

Вариант	Уравнение	Абсолютная погрешность
1	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	ε=0.01
2	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	ε=0.005
3	$\mathrm{tgx}=\mathrm{x}+1, -\pi/2\le \mathrm{x}\le \pi/2$	ε=0.001
4	$2x^4-x^2-10=0$	ε=0.0001
5	$(x-4)^2\cdot\log_{0,5}(x-3)=-1$	ε=0.005
6	$x^4-5x+10=0$	ε=0.0005
7	$x^2\cos 2x=-1$	ε=0.0001
8	$x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$	ε=0.000001
9	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	ε=0.001
10	$2\sin(x+\frac{\pi}{3})=0{,}5x^2-1$	ε=0.001
11	$2^{\mathrm{x}}+5x-3=0$	ε=0.001

Продолжение табл. 3.2

Вариант	Уравнение	Абсолютная погрешность
12	$arctgx - \frac{1}{3x^3} = 0$	ε=0.001
13	$x^2 \cdot 2^x = 1$	ε=0.009
14	$2e^x = 5x + 2$	ε=0.001
15	$3^{x-1} - 2 - x = 0$	ε=0.001

Задание 3

Графически локализовать корни нелинейного уравнения (табл. 3.3), один из них найти с заданной точностью методом Ньютона.

Таблица 3.3

Варианты заданий

Вариант	Уравнение	Абсолютная погрешность
1	$3x + x^3 - 4^x + 1 = 0$	ε=0.0001
2	$2x^2 - 0{,}5^x - 2 = 0$	ε=0.01
3	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	ε=0.001
4	$2^x - 3x - 2 = 0$	ε=0.00001
5	$x^2 - 4 + 0{,}5^x = 0$	ε=0.0001
6	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	ε=0.001
7	$x^2 \cos 2x = -1$	ε=0.0001
8	$3^x + 2x - 2 = 0$	ε=0.0001
9	$(x-1)^2 2^x = 1$	ε=0.0005
10	$(x-4)^2 \log_{0,5}(x-3) = -1$	ε=0.0001
11	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	ε=0.01
12	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	ε=0.005
13	$\mathrm{tgx} = \mathrm{x} + 1, -\pi/2 \le \mathrm{x} \le \pi/2$	ε=0.001
14	$2x^4 - x^2 - 10 = 0$	ε=0.0001
15	$(x-4)^2 \cdot \log_{0,5}(x-3) = -1$	ε=0.005

3.5. Пример выполнения лабораторной работы 2

Задание 1

Используя метод простых итераций, найти действительные корни уравнения $x - \sin(x) = 0.25$ с точностью ε=0.001.

Решение:

1 Установим формат чисел так, чтобы результаты вычислений отображались с нужным количеством знаков после десятичной точки (запятой).

2 Для получения приближенного значения корня данного уравнения запишем его следующим образом:

f(x) :sin{x) + 0.25

g{x): x

3 Заметим, что функция *f(x)* является итерирующей функцией метода простых итераций.

4 Построим графики функций *f(x)* и *g(x)* (рис. 3.23), точка пересечения которых и даст приближенное значение корня исходного уравнения. Этим значением будет X_0 = 1.2. Данное уравнение имеет только один действительный корень.

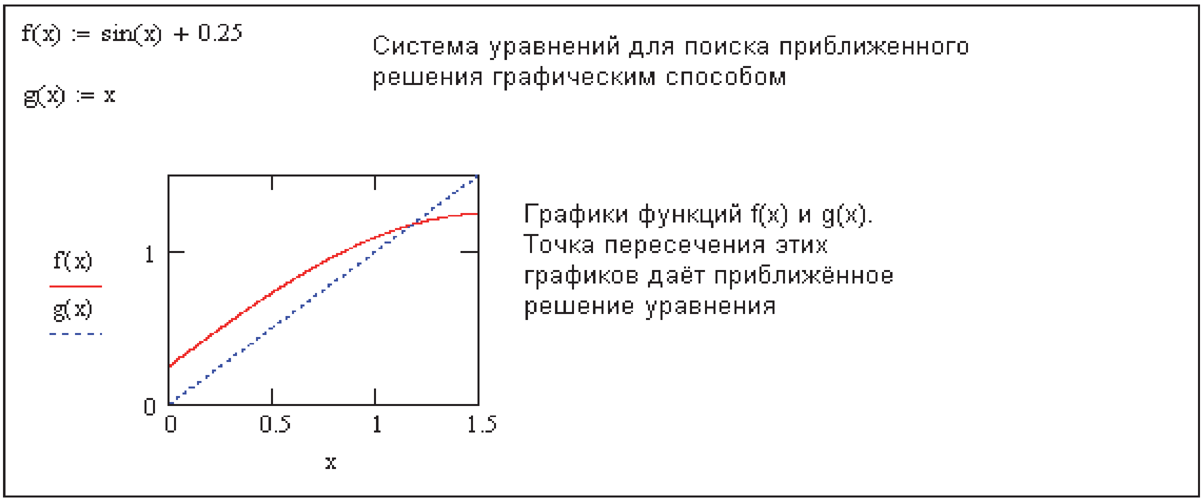


Рис. 3.23. Определение уравнения и графическое отделение корня

5 Определим начальное значение для вычислений следующим образом: X_0 : 1.2.

6 Определим функцию первой производной итерирующей функции *f(x)* для проверки условия сходимости, вызвав оператор дифференцирования из палитры вычислений: *d(x): d/dx(f(x))* (рис. 3.24).

Вычислим значение функции *d(x)* в точке x_0 = 1.2. Так как *d(1.2)* = 0.3624 < 1, можно продолжать вычисления.

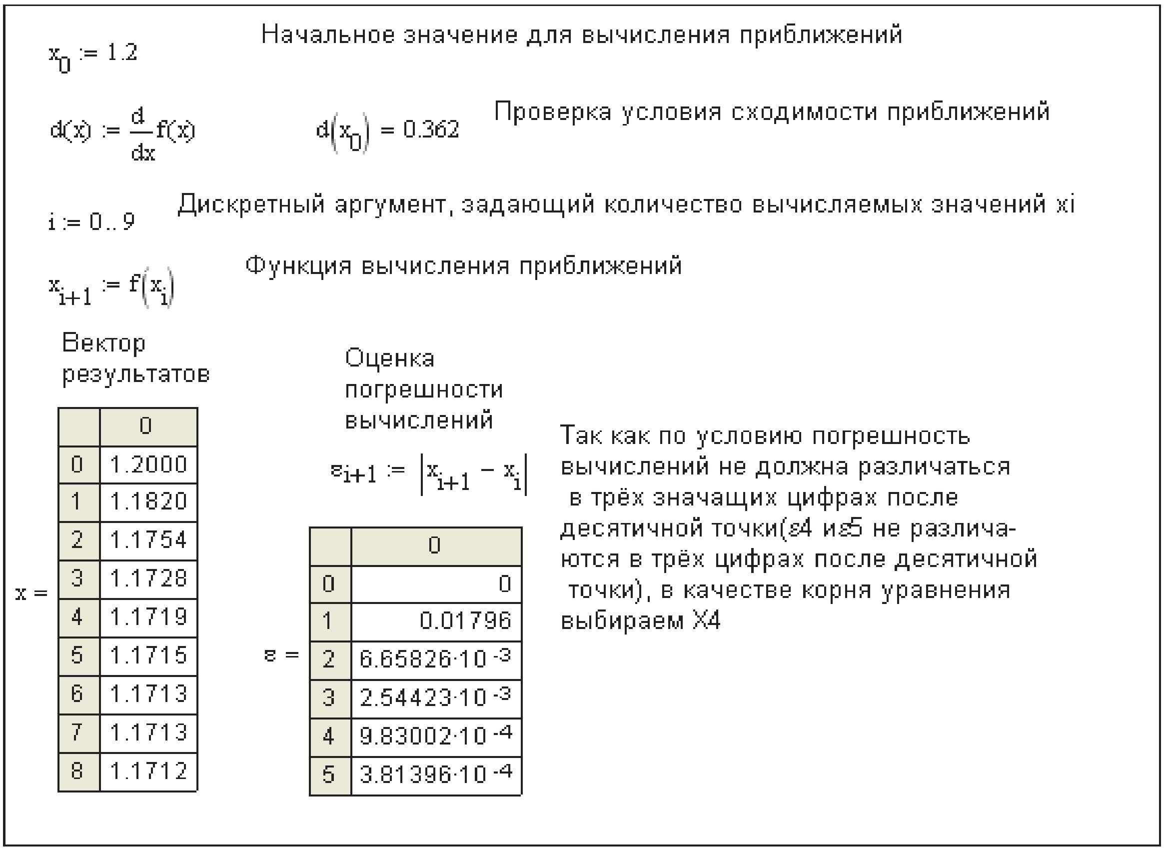
7 Определим дискретный аргумент *i:* 0 ... 9, задающий количество вычисляемых значений x_i (см. рис. 3.24).

8 Определим функцию вычисления приближений в векторной форме: x_{i+1} : $f(x_i)$. Для получения вектора результатов в свободном месте рабочего пространства Mathcad напишем *x*= (см. рис. 3.24).

9 Определим условие оценки погрешности вычислений

$$\varepsilon = \left| x_{i+1} - x_i \right|.$$

Обратим внимание на то, что погрешность вычислений становится не больше заданной уже на четвертой итерации. Корнем уравнения, найденным с точностью до 0.001, будет x_4 = 1,1719.



x =

	0
0	1.2000
1	1.1820
2	1.1754
3	1.1728
4	1.1719
5	1.1715
6	1.1713
7	1.1713
8	1.1712

ε =

	0
0	0
1	0.01796
2	$6.65826 \cdot 10^{-3}$
3	$2.54423 \cdot 10^{-3}$
4	$9.83002 \cdot 10^{-4}$
5	$3.81396 \cdot 10^{-4}$

Рис. 3.24. Решение уравнения методом простых итераций

Ответ: x = 1.1719±0.001.

Задание 2

Найти действительный корень уравнения $2 \cdot x^4 - x^2 - 10 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0.0001$.

Решение:

1 Определим левую часть нелинейного уравнения как функцию *f(x).*

2 Построим график функции *f(x),* точка пересечения которого с осью абсцисс и даст приближенное значение корня исходного уравнения

(рис. 3.25). Определим по графику значения концов отрезка, содержащего корень уравнения: a = -2, b = -1.

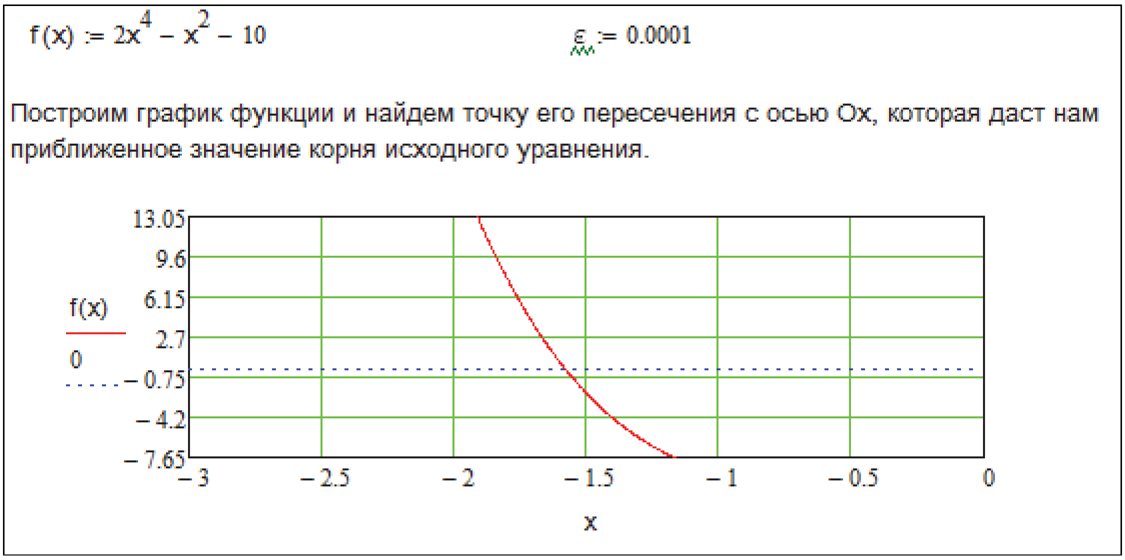


Рис. 3.25. Определение начального приближения отрезка

3 Зададим значения концов отрезка [a, b] в векторной форме. Для этого, используя палитру векторов и матриц, получим оператор вектора на два элемента и заполним его идентификаторами концов отрезка a_o и b_o. При помощи клавиши пробела выведем курсор за знак оператора, нажмем клавишу «:», введем еще один оператор вектора на два элемента и заполним его значениями концов отрезка: 0 и 1 (рис. 3.26).

4 Зададим дискретную переменную i (от 0 до 9), определяющую количество этапов деления отрезка [a, b], за которое мы рассчитываем получить решение уравнения. Определим формулы вычисления концов отрезка на каждом этапе деления его пополам. На отрезке [a_i, b_i], серединой будет точка $(a_i+b_i)/2$ (рис. 3.26).

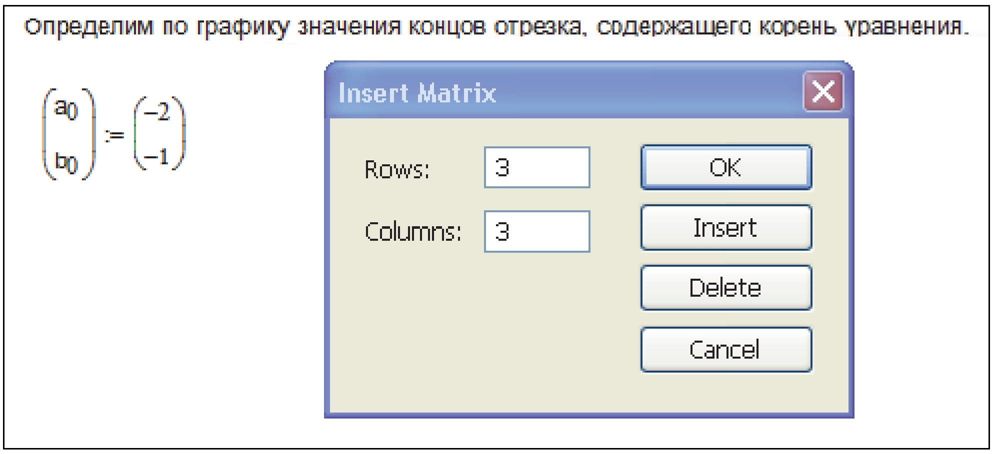


Рис. 3.26. Задание начального приближения в виде вектора

5 Если f((a_i+b_i)/2)* f(a_i) < 0 (знаки функции в начале и середине отрезка разные), то начало нового отрезка для вычислений a_{i+1} совпадет с a_i, т. е. $a_{i+1}=a_i$. В противном случае (знаки функции в начале и середине отрезка одинаковые, при этом функция имеет разные знаки в середине и в конце отрезка) a_{i+1} совпадет с точкой половинного деления отрезка, т. е. $a_{i+1} = (a_i+b_i)/2$.

Подобная операция необходима и для другого конца отрезка [a_i, b_i] – для b_i. Если f((a_i+b_i)/2)* f(a_i) < 0, то конец нового отрезка для вычислений b_{i+1} совпадет с точкой половинного деления отрезка, т. е. $b_{i+1} = (a_i+b_i)/2$ в противном случае b_{i+1} совпадет с концом отрезка [a_i, b_i], т. е. $b_{i+1} = b_i$. Если же $f(x_i) \approx 0$, то точка $x=(a_i+b_i)/2$ будет являться корнем нелинейного уравнения.

$$c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad i := 1..15$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \text{if}\left[\left(f\left(a_{i-1}\right)\cdot f\left(c_{i-1}\right)\right) < 0, a_{i-1}, \dfrac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}\right] \\ \text{if}\left[\left(f\left(a_{i-1}\right)\cdot f\left(c_{i-1}\right)\right) < 0, \dfrac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}, b_{i-1}\right] \\ \dfrac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_i := \left|c_i - c_{i-1}\right|$$

i	a =	b =	c =	ε =
0	-2	-1.5	-1.75	0
1	-1.75	-1.5	-1.75	0
2	-1.625	-1.5	-1.625	0.125
3	-1.5625	-1.5	-1.5625	0.063
4	-1.53125	-1.5	-1.53125	0.031
5	-1.515625	-1.5	-1.515625	0.016
6	-1.5078125	-1.5	-1.5078125	$7.813\cdot10^{-3}$
7	-1.5039063	-1.5	-1.5039063	$3.906\cdot10^{-3}$
8	-1.5019531	-1.5	-1.5019531	$1.953\cdot10^{-3}$
9	-1.5009766	-1.5	-1.5009766	$9.766\cdot10^{-4}$
10	-1.5004883	-1.5	-1.5004883	$4.883\cdot10^{-4}$
11	-1.5002441	-1.5	-1.5002441	$2.441\cdot10^{-4}$
12	-1.5001221	-1.5	-1.5001221	$1.221\cdot10^{-4}$
13	-1.500061	-1.5	-1.500061	$6.104\cdot10^{-5}$
14	-1.5000305	-1.5	-1.5000305	$3.052\cdot10^{-5}$
15	-1.5000153	-1.5	-1.5000153	$1.526\cdot10^{-5}$

Рис. 3.27. Решение уравнения методом бисекции

Для реализации описанного процесса в MathCad запишем формулы для определения начала и конца разделенного отрезка, воспользовавшись условным оператором *if* в векторной форме. Такая форма записи позволяет в вычислениях MathCad использовать результаты предыдущих операций. Введем оператор вектора на три элемента и заполним его идентификаторами искомых величин a_{i+1}, b_{i+1}, c_i – для вычисления $((a_i+b_i)/2)$. Введем знак присвоения и еще один оператор вектора на три элемента. Последний оператор заполните формулами (рис. 3.27).

Условный оператор *if* работает следующим образом. Если логическое выражение, записанное в скобках, истинно, то переменная слева от знака «:=» принимает значение выражения или величины, стоящей первой после логического выражения, в противном случае переменной присваивается значение выражения или величины, стоящей на втором месте после логического выражения.

6 Чтобы увидеть результат вычислений, введем последовательно a=, *b*=, *c*=. Вектор *a* покажет начала всех разделенных отрезков, *b* – концы этих отрезков. Вектор *c* содержит середины всех отрезков [a, b].

7 Для оценки точности приближений добавим формулу для расчета погрешности $\varepsilon = |c_i - c_{i-1}|$. Определим корень уравнения следующим образом. Проанализируем значения вектора ε. Найдем самый младший элемент вектора, значение которого меньше заданной точности. В нашем примере это значение элемента $\varepsilon_{13} = 0.00006104$. Значит, корнем уравнения будет значение c_{12}= -1.5001.

Ответ: x=-1.5001±0.0001.

Задание 3

Методом Ньютона найти один из действительных корней уравнения с точностью до 0.001

$$x - \sin(x) = 0.25\,.$$

Решение:

1 Установим формат чисел так, чтобы результаты вычислений отображались с нужным количеством знаков после десятичной точки (запятой) (рис. 3.28).

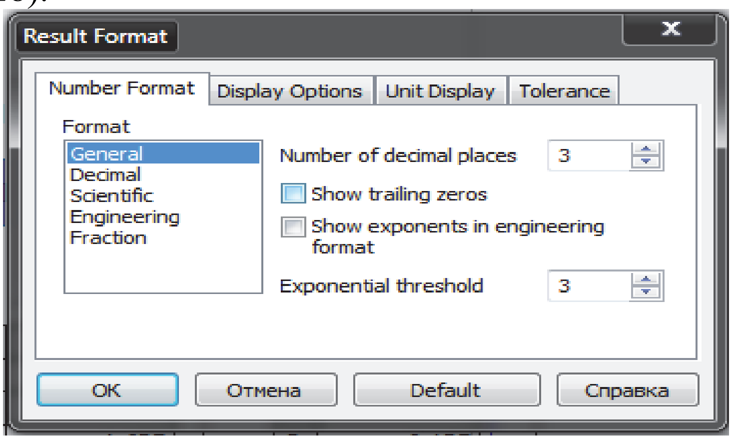
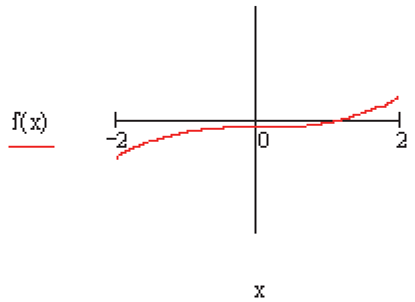


Рис. 3.28. Формат выведения результата

2 Преобразуем заданное уравнение к виду (3.1) и определим его правую часть как функцию *f(x)*.

3 Определим приближенное значение корня уравнения графически. Для этого построим график функции *f(x) = x - sin(x)* - 0,25. Этим значением будет значение *x = a в* точке пересечения графика функции с осью абсцисс (рис. 3.29).

$f(x) := x - \sin(x) - 0.25$ Нелинейное уравнение определено в виде функции.



Локализация корней уравнения графическим способом

$a := 1.2$ Приближенное значение корня уравнения.

$k := 0..10$ Количество итераций

$x_0 := a$ Начальное значение неизвестного для решения уравнения

$$d(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{d(x_k)}$$ Вычислительная формула Ньютона

Результат вычислений

x =

	0
0	1.2
1	1.172
2	1.171
3	1.171
4	1.171
5	1.171
6	1.171

Расчёт погрешности вычислений

$$\varepsilon_{k+1} := |x_{k+1} - x_k|$$

ε =

	0
0	0
1	0.028
2	$6.024 \cdot 10^{-4}$
3	$2.736 \cdot 10^{-7}$
4	$5.64 \cdot 10^{-14}$
5	0

Рис. 3.29. Решение уравнения методом Ньютона

4 Определим начальное значение для вычислений: x_o : a.

5 Определим дискретный аргумент k= 0..10, задающий количество итераций (вычисляемых значений x_k).

6 Определим первую производную функции *f(x)* как функцию *d(x)*:

$$d(x):\frac{d}{dx}f(x)$$

7 Определим вычислительную формулу Ньютона в векторной форме:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{d(x_k)}$$

8 Для получения вектора результатов в свободном месте рабочего пространства MathCad напишем *x*=. Введем условие оценки погрешности вычислений ε_{k+1}:[x_{k+1}-x_k]. Результат вычислений погрешности выведем на экран (рис. 3.18). Погрешность вычислений становится допустимой на второй итерации $\varepsilon < 0{,}001$, поэтому допустимое решение получено на второй итерации x_2 = 1, 171. Корнем уравнения будет x_2 = 1,171.

Ответ: x = 1,171±0.001.

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы мы научились решать нелинейные уравнения в MathCad, используя вычислительные алгоритмы метода простых итераций, метода бисекции, метода Ньютона.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Постановка задачи

Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [5]

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+...+a_{3n}x_n=b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+...+a_{nn}x_n=b_n\ , \end{cases} \tag{4.1}$$

где a_{ij}, b_i – заданные числа, коэффициенты системы, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$; x_j – неизвестные системы.

Требуется найти решение системы уравнений (4.1).

Совокупность чисел, при подстановке которых в уравнения получаем верные тождества, называется решением данной системы.

СЛАУ можно представить в **скалярной** форме:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\,,$$

$$i=\overline{1,n}\,.$$

и в **матричной** (векторной) форме:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных;

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ – вектор-столбец правых частей.

4.2. Корректность задачи решения систем линейных уравнений

Для корректности задачи решения системы линейных уравнений требуется одновременное выполнение двух условий:

1) Матрица *A* системы линейных уравнений является невырожденной (определитель матрицы *A* не равен нулю).

2) Матрица *A* является хорошо обусловленной, (число обусловленности $cond(A) < 1000$).

Если нарушается первое условие, то система линейных уравнений $AX = B$ либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений. Если нарушается второе условие, то решение системы линейных уравнений $AX = B$ является неустойчивым, то есть малые изменения *B* могут привести к большим изменениям *X*.

Таким образом, если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то задача решения системы линейных уравнений не является корректно поставленной. Если нарушается условие два, то для численного решения системы линейных уравнений необходимо использовать специальные методы решения систем линейных уравнений, ориентированные на плохо обусловленные матрицы (например, регуляризацию по Тихонову). Отметим, что значение определителя матрицы *A* не является характеристикой обусловленности матрицы. Такой характеристикой является число обусловленности матрицы $A\, cond(A)$ [12].

4.3. Основные определения

4.3.1. Нормы векторов и матриц

Нормой вектора X называется действительное число $\|X\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|X\| >= 0$, причем $\|X\|=0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$;
2) $\|\alpha X\| = |\alpha| \cdot \|X\|$ для любого действительного числа α;
3) $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$ для любых векторов X, Y.

Наиболее часто используют следующие три нормы:

первая норма вектора $\|X\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$;

вторая норма вектора $\|X\|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

третья норма вектора (Евклидова норма) $\|X\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Под нормой матрицы $A = [a_{ij}]$ (квадратной матрицы $A(n \times n)$) понимается неотрицательное действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$ (A – нулевая матрица, $a_{ij} = 0$);
2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\, \|A\|$ для любого действительного числа α ;
3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ для любых матриц A и B;
4) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ для любых матриц A и B.

Наиболее часто используют следующие три нормы матрицы:

первая норма матрицы $\|A\|_1 = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

вторая норма матрицы $\|A\|_2 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;

третья норма матрицы (Евклидова норма) $\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

4.3.2. Обусловленность задачи решения СЛАУ

Обусловленность задачи решения СЛАУ определяется числом обусловленности матрицы А системы

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.0001 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему линейных уравнений:

$x = 1$, $y = 1$.

А теперь незначительно изменим вектор правой части:

$B_1 = (2, 2.0002)$,

$\|B_1 - B\|_1 = 0.0001$.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 1. & 1.0001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2. \\ 2.0002 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы уравнений:

$x = 0$, $y = 2$.

$\|X_1 - X\|_1 = 1$.

Вектор B изменился незначительно, а вектор X изменился значительно. Это связано со свойствами матрицы A.

Матрица A системы линейных уравнений $AX = B$ называется плохо обусловленной, если малые изменения в векторе B приводят к большим отклонениям в решении X, т.е.:

$Ax = b$, $\quad Ax_1 = b_1$,

$\|B - B_1\| < \varepsilon$, но $\|X - X_1\| >> \varepsilon$.

Решение системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей – это решение некорректно поставленной задачи.

Отметим, что плохая обусловленность – это свойство матрицы и, естественно, оно сказывается при численном решении систем линейных уравнений. Точное решение является неустойчивым, следовательно, и численное решение будет неустойчивым. Для численного решения таких задач используются специальные методы, учитывающие некорректность задачи.

Существует характеристика матрицы A, называемая ***числом обусловленности***, которая указывает, является матрица ***плохо обусловленной*** или нет.

То есть для каждой матрицы до решения системы линейных уравнений мы можем вычислить число, называемое числом обусловленности и обозначаемое $cond(A)$, и определить, хорошо обусловлена матрица или нет. Если $cond(A) > 1000$, то матрица считается плохо обусловленной.

Для вычисления числа обусловленности матрицы A используются значения ее собственных чисел.

Число λ называется ***собственным числом*** квадратной матрицы A, если существует ненулевой вектор X, такой что $AX = \lambda X$.

У симметричной $(a_{ij} = a_{ji})$ матрицы все собственные числа вещественные, $\lambda_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, у симметричной, положительно определенной матрицы все собственные числа больше нуля.

Матрица называется положительно определенной, если для любого ненулевого вектора X справедливо: $(AX, X) > 0$, где (a, b) – скалярное произведение векторов a и b.

Если A – симметричная положительно определенная матрица, то число обусловленности равно:

$$cond(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы A; $\lambda_{\min}$ – минимальное собственное число матрицы A.

Для произвольной квадратной матрицы A число обусловленности равно:

$$cond(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$$

где σ_i – сингулярные числа матрицы A.

Сингулярные числа σ_i матрицы A определяются следующим образом:

$$\sigma_i = +\sqrt{\mu_i},$$

где μ_i – собственные числа матрицы $A^T A$.

Для того чтобы выяснить, является ли матрица A положительно определенной, можно использовать определение положительной определенности, а можно воспользоваться следующим утверждением: если все главные миноры матрицы A больше нуля, то матрица A положительно определенная.

Для того чтобы найти собственные числа матрицы A, можно воспользоваться следующим утверждением: число λ является собственным числом матрицы A с соответствующим ненулевым собственным вектором тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Пример:

Пусть A – матрица системы линейных уравнений $AX = B$ (3.3), $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 1. & 1.0001 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$.

Найти решение $Y = (y_1, y_2)^T$ системы линейных уравнений $AY = C$ при $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{pmatrix}$ и объяснить полученный результат.

Решение:

Решим данные системы уравнений: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Малые изменения в векторе правой части привели к большим изменениям в решении:

$\Delta B = (0,0.0001)$, $\quad \Delta X = X - Y$,

$\Delta B = B - C$, $\quad \Delta X = (1,1)^T$.

$\|\Delta B\|_1 = 0.0001$, $\quad \|B\|_1 = 2.0001$, $\quad \|\Delta X\|_1 = 1$, $\quad \|X\|_1 = 1$,

$\dfrac{\|\Delta B\|}{\|B\|} = \dfrac{0.0001}{2.0001} = 0.00005$, $\quad \dfrac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = 1$.

Вычислим число обусловленности матрицы A:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 1. & 1.0001 \end{pmatrix}$, $\quad A$ – симметричная матрица.

Необходимо определить, является ли A положительно определенной.

В нашем случае $M_1 = 1$ и $M_2 = \det(A) = 1.0001 - 1 = 0.0001 > 0$ (M_1, M_2 – главные миноры матрицы A), следовательно, A – положительно определенная матрица, поэтому можно использовать формулу

$$cond(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Найдем собственные числа матрицы A.

Запишем уравнение:

$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1. - \lambda & 1. \\ 1. & 1.0001 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1.0001 - \lambda) - 1 =$

$= 1.0001 - 2.0001\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2.0001\lambda + 0.0001 = 0$.

$\lambda^2 - 2.0001\lambda + 0.0001 = 0$,

$\lambda_{12} = 1.00005 \pm \sqrt{(1.00005)^2 - 0.0001}$.

$\lambda_1 \approx 2$, $\quad \lambda_2 \approx 0.00005$.

$cond(A) = 40000$, следовательно, матрица A – плохо обусловленная.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, это объясняется плохой обусловленностью матрицы A.

4.4. Виды методов решения СЛАУ

Численные методы решения системы (4.1) подразделяются на две группы: ***прямые*** и ***итерационные***.

Прямые методы (метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса, метод прогонки и др.) позволяют за конечное число действий получить точное решение X, если вектор правых частей B и элементы матрицы A заданы точно и вычисления ведутся без округлений. **Итерационные**

методы (метод простой итерации, метод Зейделя и др.) с помощью последовательных приближений $\{X^0\}\to\{X^1\}\to\{X^2\}\to\ldots\to\{X^k\}$ позволяют получить решение системы X^k с заданной точностью ε.

Выбор метода решения СЛАУ зависит от свойств матрицы A, от числа уравнений, от возможностей компьютера.

Прямые методы используются для решения систем уравнений сравнительно невысокой размерности ($n \approx 5-10$). Выбор того или иного метода определяется свойствами матрицы системы. Например, для слабозаполненных матриц (матриц, содержащих много нулевых элементов), в которых ненулевые элементы располагаются на главной диагонали и на нескольких побочных диагоналях (так называемой ленточной структуры) вместо метода Гаусса можно использовать более эффективный **метод прогонки.**

Итерационные методы применяют в основном для решения задач большой размерности (n > 100), когда применение прямых методов нецелесообразно из-за необходимости выполнения чрезмерно большого числа арифметических операций. При непосредственном раскрытии определителей решение системы с n неизвестными требует порядка $\boldsymbol{n!\cdot n}$ арифметических операций. Таким образом, для решения системы, например, из n = 100 уравнений потребуется совершить 10^{158} вычислительных операций, что не под силу даже самым мощным современным ЭВМ. В прикладных задачах системы уравнений большой размерности, как правило, являются разреженными (содержат много нулевых элементов). В итерационных методах используются свойства разреженных матриц. Существует много различных итерационных методов решения СЛАУ, ориентированных на решение сравнительно узкого класса задач. Их применение к СЛАУ большой размерности требует специальных знаний и опыта.

Масштабирование системы уравнений. В ряде случаев перед началом решения исходную систему уравнений (4.1) целесообразно масштабировать таким образом, чтобы элементы ее матрицы были величинами порядка единицы.

На практике масштабирование обычно производят с помощью деления каждого уравнения на его наибольший по модулю коэффициент.

4.5. Метод Гаусса

Одним из наиболее распространенных прямых методов является *Метод Гаусса* или *метод последовательного исключения неизвестных.* Метод состоит из двух этапов: *прямого хода* и *обратного хода. Прямой ход метода Гаусса* заключается в последовательном исключении неизвестных из системы (4.1) для преобразования ее к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей [13]. Вычисления значений неизвестных производят на этапе *обратного хода.*

Рассмотрим **метод Гаусса без выбора ведущего элемента**.

Прямой ход состоит из *n-1* шагов исключения.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами $i = 2,3,...n$ (4.1).

Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем его называть *ведущим элементом 1-го шага.*

Найдем множители 1-го шага

$$\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \ (i = 2,3,...,n).$$

Вычтем последовательно из второго, третьего, ..., *n*-го уравнений системы (4.1) первое уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{21}, \mu_{31}, ..., \mu_{n1}$. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x_1 во всех уравнениях кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + ... + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \qquad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}, \qquad (4.2)$$

в которой $a_{ij}^{(1)}$ и $b_{ij}^{(1)}$ ($i, j = 2,3,...,n$) вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \mu_{i1}a_{1j}, \ b_i^{(1)} = b_i - \mu_{i1}b_1.$$

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_2 из уравнений с номерами $i = 3,4,...,n$.

Пусть $a_{22}^{(1)} \neq 0$, где $a_{22}^{(1)}$ *– ведущий элемент 2-го шага.*

Вычислим множители 2-го шага

$$\mu_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, (i = 3,...,n)$$

и вычтем последовательно из третьего, четвертого, ..., *n*-го уравнений системы (4.2) второе уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{32}, \mu_{42}, ..., \mu_{n2}$. В результате получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + ... + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad ... \quad ... \quad ... \quad .. \quad ... \quad ... \quad ... \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + ... + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}.$$

Здесь коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ и $b_{ij}^{(2)}$ $(i, j = 3,4,...,n)$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \mu_{i2} a_{2j}^{(1)},\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i2}^{(1)} \cdot b_2 .$$

Аналогично производятся остальные шаги. Опишем очередной k-й шаг.

***k*-й шаг**. Целью этого шага является исключение неизвестного x_k из уравнений с номерами $i = k+1, k+2,...,n$.

В предположении, что *ведущий элемент k-го шага* $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, вычислим *множители k-го шага*

$$\mu_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (i = k+1,...,n)$$

и вычтем последовательно из $(k+1)$-го, ..., n-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-е уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{k+1,k}, \mu_{k+2,k},..., \mu_{nk}$.

После $(n-1)$-го шага исключения получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + ... + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad ... \quad ... \quad ... \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4.3}$$

матрица $A^{(n-1)}$ которой является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы (4.3) находим x_n. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим x_{n-1}. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим $x_{n-2}, x_{n-3},..., x_1$. Вычисления неизвестных здесь производятся по формулам

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - ... - a_{kn}^{(k-1)}x_n}{a_{kk}^{(k-1)}}, (k = n-1,...,1).$$

Пример: Ручной способ

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 17, \\ 2x + y + 5z = 15, \\ 4x + 3y + 5z = 23, \end{cases} \qquad (4.4)$$

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}.$

Решение:

1) Проверяем, что главные миноры отличны от нуля, иначе делаем вывод о недопустимости решения СЛАУ данным способом

$$M_1 = 3, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

Все главные миноры отличны от нуля, следовательно, можно применять метод Гаусса без выбора ведущего элемента.

Прямой ход.

Нам необходимо, используя эквивалентные преобразования, получить верхнюю треугольную матрицу.

1 шаг. Ведущий элемент 1 шага a_{11}=3. Найдем множители первого шага, используя формулу $\mu_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i = 2,3,\ldots,n)$

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad \mu_{21} = 2/3, \qquad \mu_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \mu_{31} = 4/3.$$

Вычтем из второго уравнения системы (4.4) первое уравнение, умноженное на 2/3. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x во втором уравнении $\left(2 - 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot x + \left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot y + \left(5 - 4 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot z = 15 - 17 \cdot \frac{2}{3}$ или, приведя дроби к общему знаменателю, получить **второе уравнение** $-\frac{1}{3}y + \frac{7}{3}z = \frac{11}{3}$.

Вычтем из третьего уравнения системы (4.4) первое уравнение, умноженное на 4/3. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x в третьем уравнении $\left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot x + \left(3 - 2 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot y + \left(5 - 4 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot z = 23 - 17 \cdot \frac{4}{3}$ или, приведя дроби к общему знаменателю, получить **третье уравнение** $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$.

В результате первого шага получили следующую систему, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=17, \\ -\dfrac{1}{3}y+\dfrac{7}{3}z=\dfrac{11}{3}, \\ \dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{3}z=\dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{4.5}$$

2 шаг. Ведущий элемент 2 шага $a_{22}^{(1)}=-\dfrac{1}{3}$. Найдем множители второго шага, используя формулу $\mu_{i2}=\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ $(i=3,...,n)$. Получим $\mu_{32}=\dfrac{a_{32}}{a_{22}^{(1)}}$, $\mu_{32}=-1$.

Вычтем из третьего уравнения системы (4.5) второе уравнение, умноженное на -1. Это позволит обратить в нуль коэффициент при y в третьем уравнении:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot y+\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot z=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}.$$

В результате второго шага получили следующую систему, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=17, \\ -\dfrac{1}{3}y+\dfrac{7}{3}z=\dfrac{11}{3}, \\ 2z=4. \end{cases} \tag{4.6}$$

2) Обратный ход

Из третьего уравнения (4.6) находим, что z=2, подставляем найденное значение z во второе уравнение, получим:

$$-\frac{1}{3}y=\frac{11}{3}-\frac{7}{3}\cdot 2.$$

Находим, что y=3. Подставляем найденные значения y, z в первое уравнение (4.6), получим $3x=17-2\cdot 3-4\cdot 2$. Находим, что x=1. В итоге получили решение (4.4) (x=1, y=3, z=2).

Ответ: x=1, y=3, z=2.

Пример:

Решить систему уравнений (4.4) методом Гаусса с использованием пользовательских функций в MathCad.

Решение:

Зададим в MathCad'е индексацию массивов с единицы (рис. 4.1).

Зададим исходные данные (матрицу А и вектор-столбец В) (см. рис. 4.1).

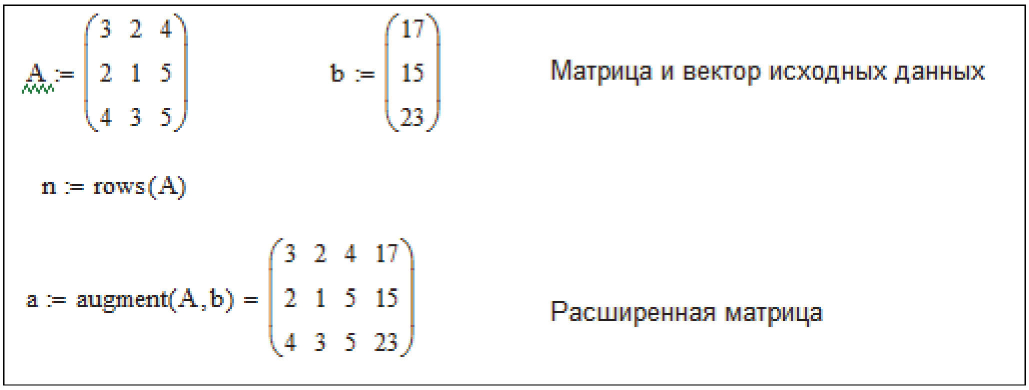


Рис. 4.1. Индексация массивов и исходные данные

Объединим матрицу А и вектор-столбец В (рис. 4.2).
Вычислим количество уравнений в системе n (см. рис. 4.2).

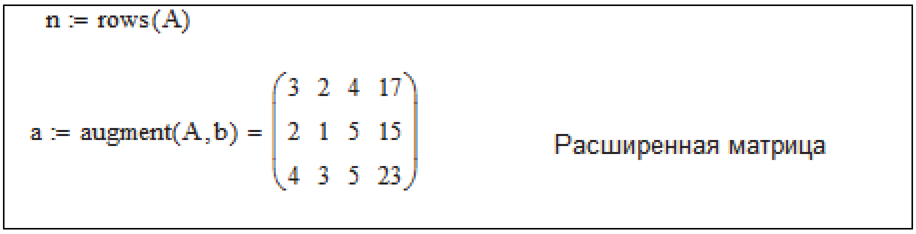


Рис. 4.2. Создание расширенной матрицы

Создадим функцию пользователя *Pr*(*a*,*n*), имеющую два аргумента: *a* – матрица, содержащая в себе матрицу коэффициентов системы уравнений и вектор-столбец правой части системы уравнений, *n* – количество уравнений в системе (рис. 4.3).

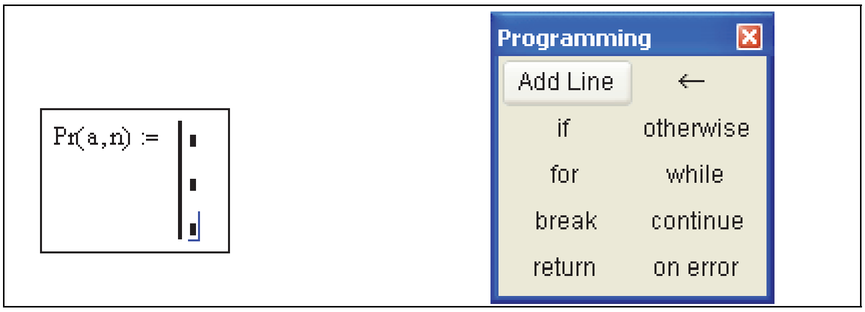


Рис. 4.3. Создание функции пользователя

Алгоритм, реализуемый функцией *Pr*(*a*,*n*), представлен на рис. 4.4, функция *Pr*(*a*,*n*) и результат ее выполнения – на рис. 4.5.

а) б)

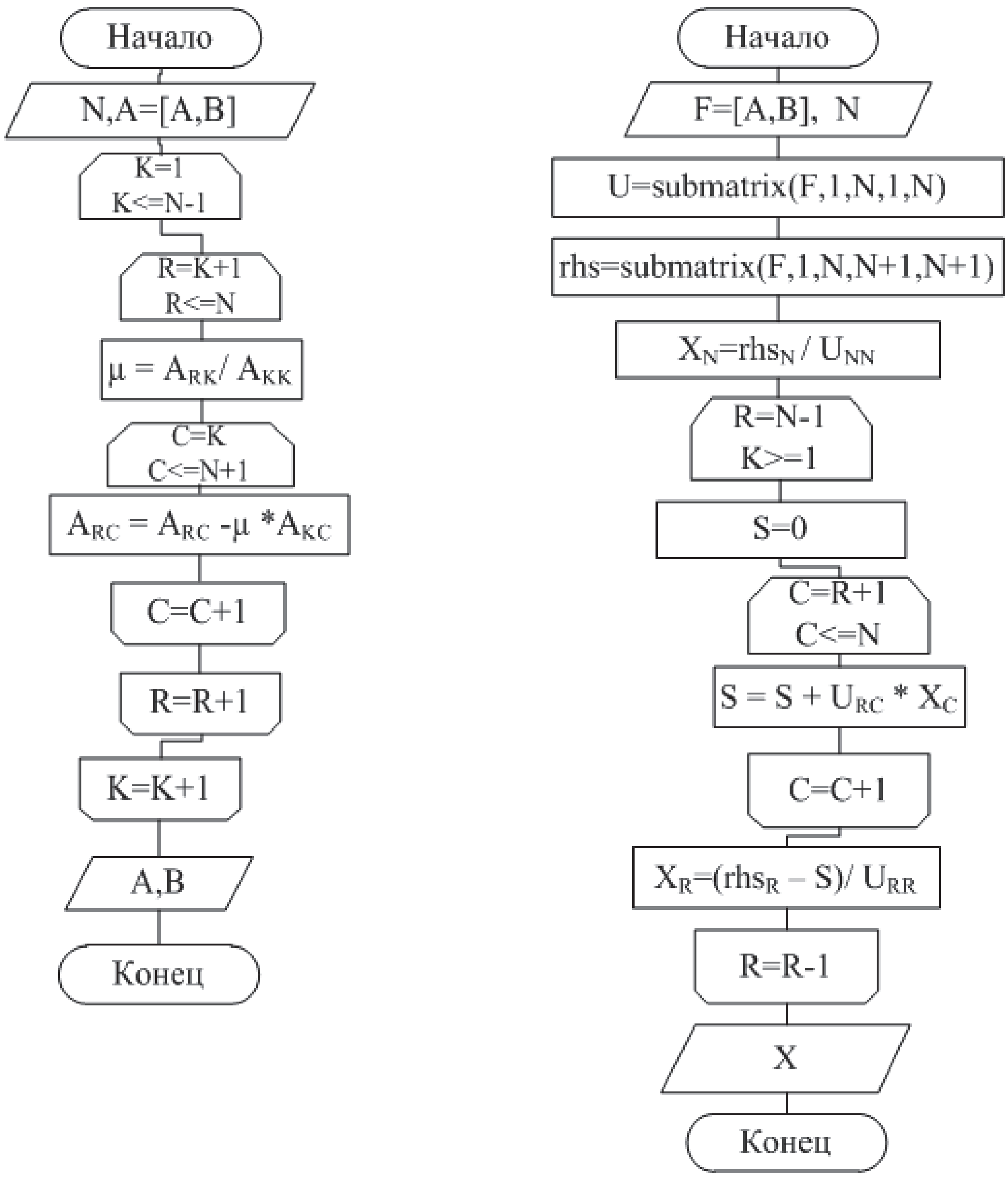


Рис. 4.4. Блок-схемы: а – алгоритма, реализующего прямой ход метода Гаусса без выбора ведущего элемента;
б – алгоритма, реализующего обратный ход метода Гаусса

Создадим функцию пользователя *Op*(*F*,*n*), имеющую два аргумента: *a* – верхнетреугольная матрица, содержащая в себе преобразованные матрицу коэффициентов системы уравнений и вектор-столбец правой части системы уравнений, *n* – количество уравнений в системе. Алгоритм, реализуемый функцией *Op*(*F*,*n*), представлен на рис. 4.4, функция *Op*(*F*,*n*) и результат ее выполнения – на рис. 4.6.

```
Прямой ход

Pr(a,n) := | for k ∈ 1..n − 1
           |   for r ∈ (k + 1)..n              Текущая строка для обработки
           |     | μ ← a_{r,k} / a_{k,k}       Множитель
           |     | for c ∈ k..n + 1            Обработка столбцов
           |     |   a_{r,c} ← a_{r,c} − μ·a_{k,c}
           | V ← a                             Создание строк верхней
                                               треугольной матрицы (U)
```

$F := Pr(a,n)$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & -0.333 & 2.333 & 3.667 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Преобразованная расширенная матрица

Рис. 4.5. Результат прямого хода решения системы уравнений (4.4)

$F := Pr(a,n)$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & -0.333 & 2.333 & 3.667 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Преобразованная расширенная матрица

```
Обратная подстановка

Op(F,n) := | U ← submatrix(F,1,n,1,n)             Верхняя треугольная матрица
           | rhs ← submatrix(F,1,n,n + 1,n + 1)   Преобразованный вектор
           |                                      правой части
           | x_n ← rhs_n / U_{n,n}                Последнее уравнение
           |                                      с одним неизвестным
           | for r ∈ n − 1,n − 2..1               По строкам снизу вверх
           |   | s ← 0
           |   | for c ∈ (r + 1)..n               Суммирование по строке
           |   |   s ← s + U_{r,c}·x_c
           |   | x_r ← (rhs_r − s) / U_{r,r}      Текущее неизвестное
           | x                                    Вектор решения
```

$X := Op(F,n)$ $\qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Рис. 4.6. Результат решения системы уравнений (4.4)

Ответ: x=1, y=3, z=2.

Недостатки данного метода:

1) Исключение по рассматриваемым формулам невозможно, если в ходе расчета на главной диагонали окажется нулевой коэффициент $a_{kk}^{(k)}=0$. Но в первом столбце промежуточной системы (4.3) все элементы не могут быть нулями, так как это означало бы, что $\det A=0$. Перестановкой строк можно переместить ненулевой элемент на главную диагональ и продолжить расчет.

При этом на каждом шаге к обычной схеме добавляется выбор максимального элемента по столбцу следующим образом:

– На k-м шаге исключения в качестве главного элемента выбирается максимальный по модулю коэффициент a^{i}_{kk} при неизвестном x_k в уравнениях с номерами $i = k + 1, \ldots, n$, то есть находится максимальный по модулю элемент в k-м столбце.

– Затем соответствующее выбранному коэффициенту уравнение с номером i меняют местами с k-м уравнением системы для того, чтобы главный элемент занял место коэффициента a^{k-1}_{kk}. После этой перестановки исключение неизвестного x_k производится как описано выше.

Такая модификация метода Гаусса называется **методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу**.

2) Если элемент на главной диагонали $a_{kk}^{(k)}$ мал, то эта строка умножается на большие числа $\mu_{kk}^{(k)}=a_{kj}^{(k)}\Big/a_{kk}^{(k)}$, что приводит к значительным ошибкам округления при вычислениях. В этом случае удобнее применять метод Гаусса с выбором главного элемента.

Существуют следующие модификации метода Гаусса:

- с выбором ведущего элемента по столбцу;
- с выбором ведущего элемента по строке;
- с выбором ведущего элемента по всей матрице.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по строке аналогичен методу Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора).

В этой схеме допускается нарушение естественного порядка исключения неизвестных. В качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы. Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими новые коэффициенты системы и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

На первом шаге метода среди элементов a_{ij} определяют максимальный по модулю элемент $a_{i1,j1}$. Первое уравнение системы и уравнение с номером *i1* меняют местами. Далее стандартным образом производят исключение неизвестного x_{i1} из всех уравнений, кроме первого. На k-м шаге метода среди коэффициентов $a_{i,j}^{(k-1)}$ при неизвестных в уравнениях системы с номерами $i = k, \ldots, n$ выбирают максимальный по модулю коэффициент $a_{ik,jk}^{(k-1)}$. Затем k-е уравнение и уравнение, содержащее найденный коэффициент, меняют местами и исключают неизвестное x_{jk} из уравнений с номерами $i = k + 1, \ldots, n$. На этапе обратного хода неизвестные вычисляют в следующем порядке: $x_{j,n}, x_{j,n-1}, \ldots, x_{j1}$.

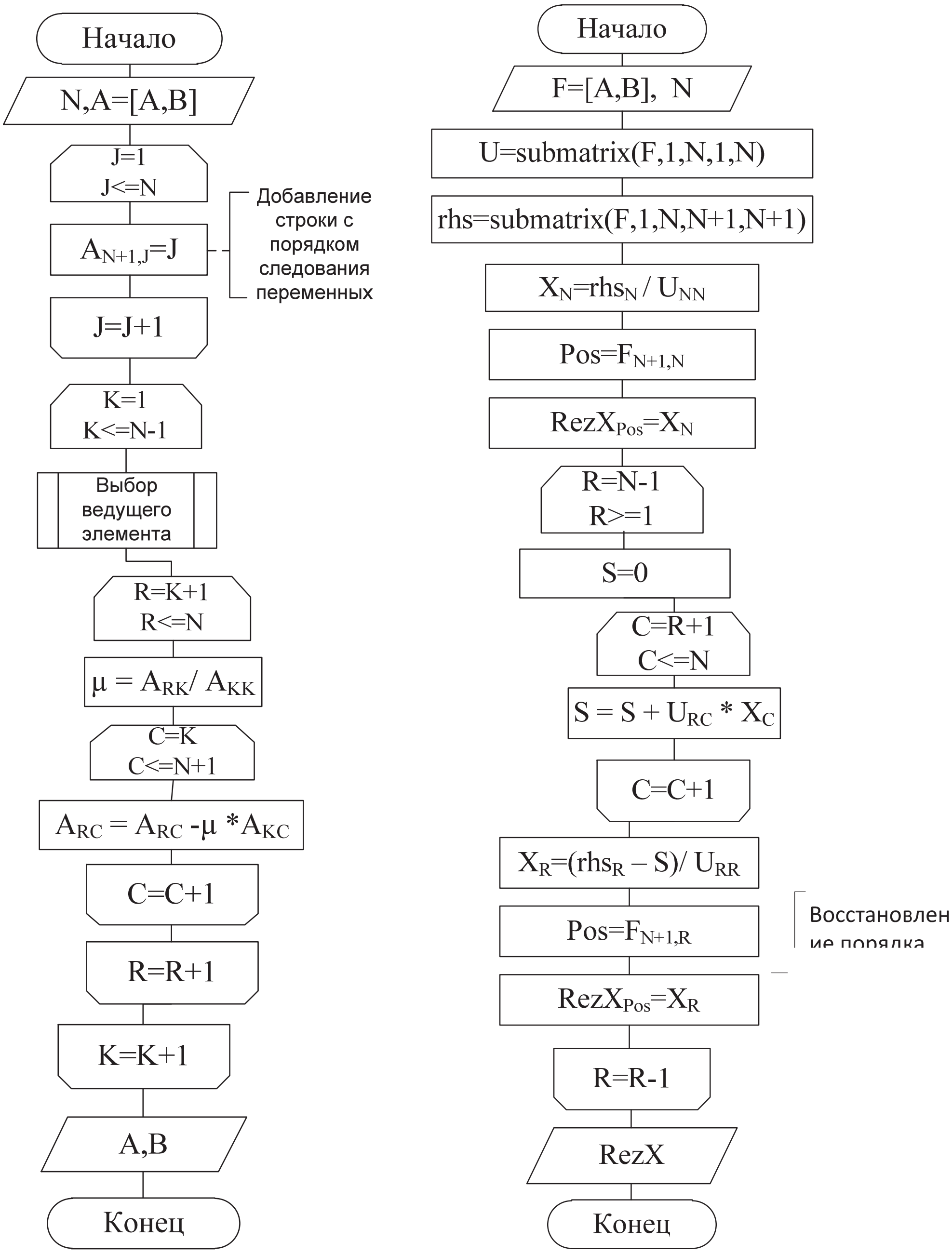


Рис. 4.7. Блок-схемы: а – алгоритма, реализующего прямой ход метода Гаусса с выбором ведущего элемента; б – алгоритма, реализующего обратный ход метода Гаусса с выбором ведущего элемента

Блок-схемы алгоритма метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента представлены на рис. 4.7 и 4.8.

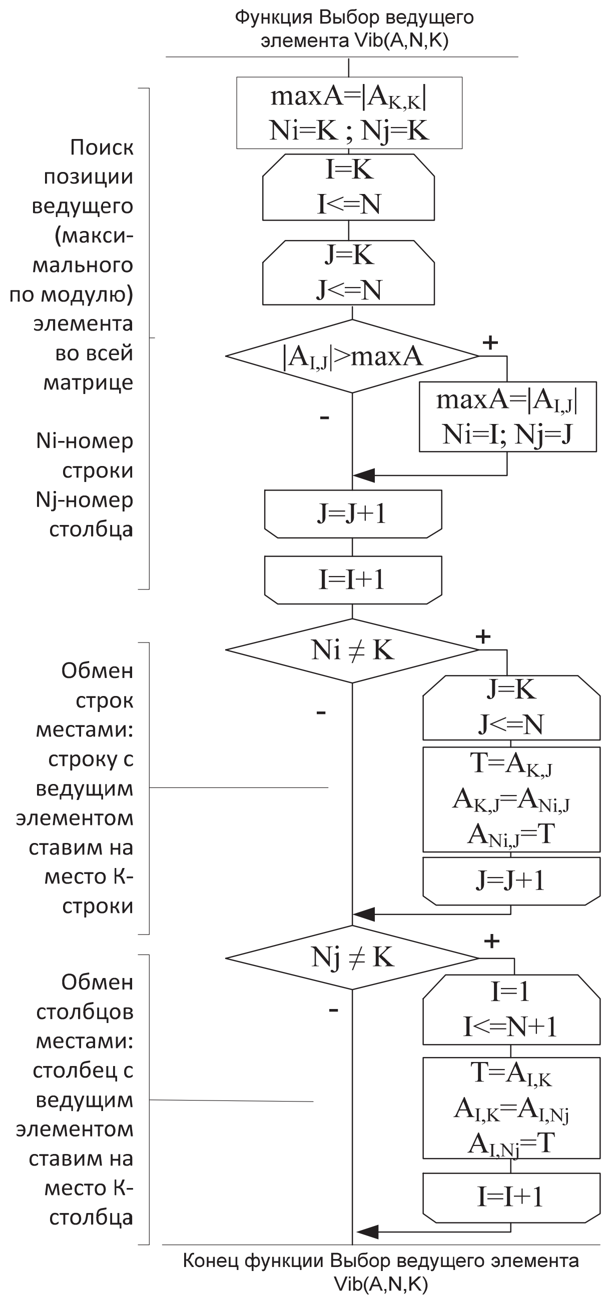


Рис. 4.8. Блок-схема алгоритма выбора ведущего элемента

Реализация алгоритма выбора ведущего элемента по всей матрице с созданием функций пользователя представлена на рис. 4.9.

```
aX(a,n) :=  | aX ← a
            | for j ∈ 1..n
            |   aX[n+1,j] ← j
            | aX
```

Добавление строки с порядком следования неизвестных X

```
Vib(a,n,k) := | maxA ← |a[k,k]|
              | ni ← k
              | nj ← k
              | for i ∈ k..n                           Поиск позиции ведущего
              |   for j ∈ k..n                         (максимального по модулю) элемента
              |     if |a[i,j]| > maxA
              |       | maxA ← |a[i,j]|
              |       | ni ← i
              |       | nj ← j
              | for j ∈ k..n + 1  if ni ≠ k            Если ведущий элемент не на строке элемента
              |   | T ← a[k,j]                         гл.диагонали, то установка строки с ведущим
              |   | a[k,j] ← a[ni,j]                   элементом на К-строку
              |   | a[ni,j] ← T
              | for i ∈ 1..n + 1  if nj ≠ k            Если ведущий элемент не в столбце элемента
              |   | T ← a[i,k]                         гл.диагонали, то установка столбца с ведущим
              |   | a[i,k] ← a[i,nj]                   элементом в К-столбец
              |   | a[i,nj] ← T                        В результате ведущий элемент перемещается
              | a                                      на главную диагональ
```

Рис. 4.9. Создание функции пользователя, реализующей алгоритм выбора ведущего элемента по всей матрице

Функция пользователя, реализующая прямой ход метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента представлена на рис. 4.10.

```
Pr(a,n) := | a ← aX(a,n)
           | for k ∈ 1..n − 1                      Выбор ведущего элемента и
           |   | a ← Vib(a,n,k)                    установка его на главную диагональ
           |   | for r ∈ (k + 1)..n                Текущая строка для обработки
           |   |   | μ ← a[r,k] / a[k,k]           Множитель
           |   |   | for c ∈ k..n + 1              Обработка столбцов
           |   |   |   a[r,c] ← a[r,c] − μ·a[k,c]  Создание строк верхней
           | a                                     треугольной матрицы (U)
```

Рис. 4.10. Создание функции пользователя, реализующей алгоритм прямого хода метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента

Обратный ход метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента реализуется функцией пользователя, представленной на рис. 4.11.

Обратная подстановка

$Op(F,n) := \vert\; U \leftarrow \mathrm{submatrix}(F,1,n,1,n)$	Верхняя треугольная матрица
$rhs \leftarrow \mathrm{submatrix}(F,1,n,n+1,n+1)$	Преобразованный вектор правой части
$x_n \leftarrow \dfrac{rhs_n}{U_{n,n}}$	Последнее уравнение с одним неизвестным
$X_{(F_{n+1,n})} \leftarrow x_n$	
$\text{for } r \in n-1, n-2 .. 1$	По строкам снизу вверх
$\quad s \leftarrow 0$	Суммирование по строке
$\quad \text{for } c \in (r+1) .. n$	
$\quad\quad s \leftarrow s + U_{r,c} \cdot x_c$	
$\quad x_r \leftarrow \dfrac{rhs_r - s}{U_{r,r}}$	Текущее неизвестное
$\quad X_{(F_{n+1,r})} \leftarrow x_r$	Восстановление следования элементов вектора X
X	Вектор решения

Рис. 4.11. Создание функции пользователя, реализующей алгоритм обратного хода метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента

Пример использования созданных функций пользователя для решения системы линейных алгебраических уравнений в MathCad методом Гаусса с полным выбором ведущего элемента приведен на рис. 4.12.

В методе Гаусса с выбором главного элемента погрешность округления обычно невелика.

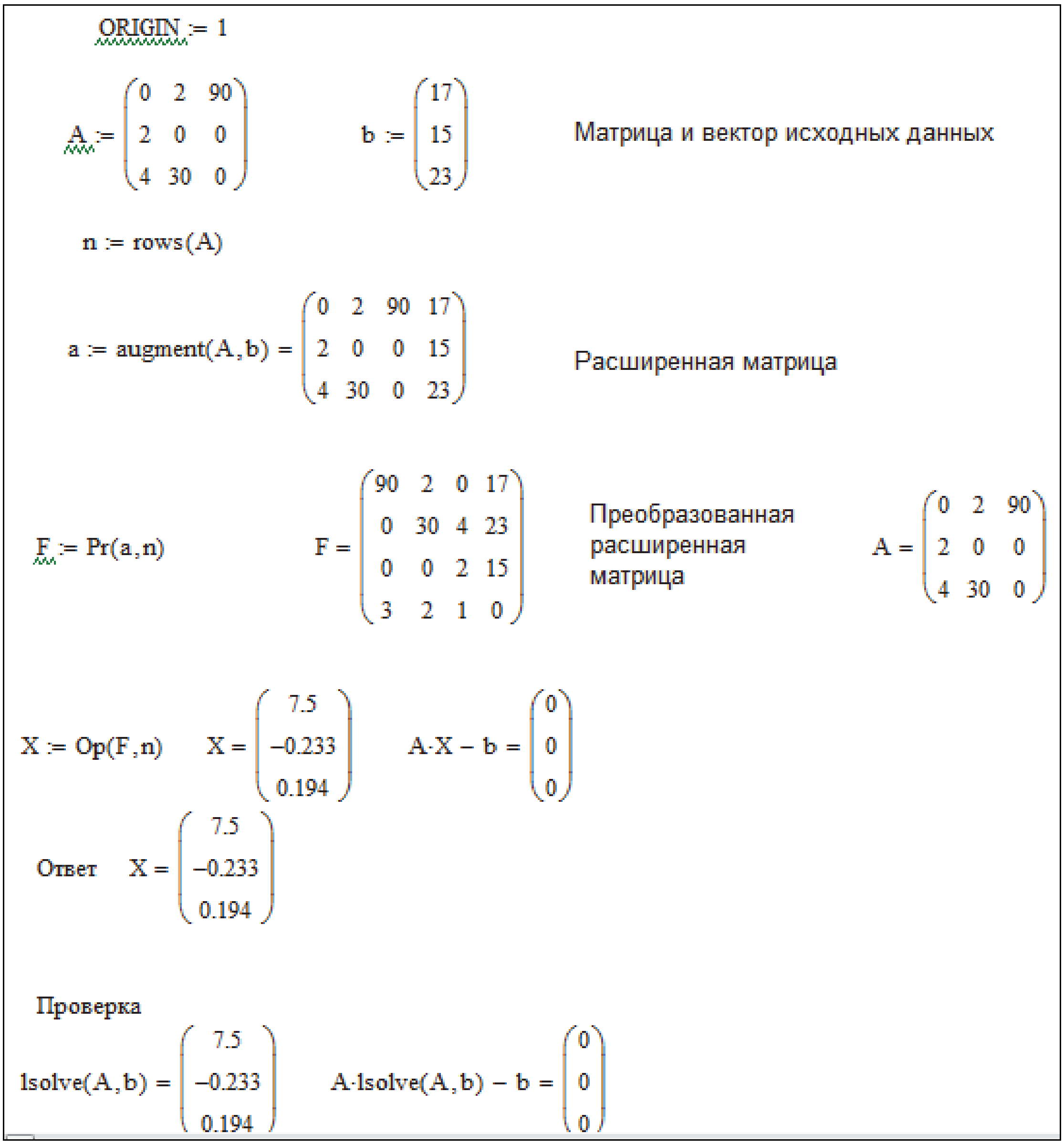


Рис. 4.12. Решение системы уравнений методом Гаусса
с полным выбором ведущего элемента с использованием
ранее написанных функций пользователя

4.6. Итерационные методы

4.6.1. Общие положения

Итерационные методы применяют в основном для решения задач большой размерности $n \geq 100$. Матрицы систем уравнений большой размерности, как правило, являются разреженными, т.е. содержащими большое число нулевых элементов, и в этом случае применение прямых методов нецелесообразно из-за необходимости выполнения большого числа перестановок строк или столбцов. Более высокая эффективность итерационных методов как раз во многом определяется возможностью использования свойства разреженности матриц.

Постановка задачи:

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = B$ с заданной точностью ε.

В **итерационных методах** исходная система $A \cdot X = B$ заменяется равносильной системой $X = C \cdot X + D$ и строится последовательность приближений $X^0, X^1, X^2, ..., X^k$ по формуле $X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + D$, начиная с некоторого приближения $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0)^T$.

Если последовательность $\{X^{(k)}\}$ имеет предел $X^* = \lim\limits_{k \to \infty} \{X^{(k)}\}$, то этот предел является решением системы (4.1).

Существует теорема, что если $\|C\| < 1$, то система уравнений $X = C \cdot X + D$ имеет единственное решение и итерационный процесс $X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + D$ сходится к решению независимо от начального приближения.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| \le \frac{1 - \|C\|}{\|C\|} \cdot \varepsilon ,$$

где ε – заданная точность вычислений.

В качестве решения берется $X^{(k+1)}$.

Общая схема итерационных методов:

1 Преобразование исходной системы уравнений к необходимому виду $X = C \cdot X + D$.

2 Проверка выполнения критерия сходимости итерационного процесса $\|C\| < 1$.

3 Задание начального приближения X^0 .

4 Выполнение рабочих формул метода с проверкой условия окончания итерационного процесса.

Рассмотрим подробнее шаги итерационных методов.

4.6.2. Преобразование исходной системы уравнений

Существуют разные способы преобразования исходной системы уравнений.

1 способ приведения исходной системы уравнений $A \cdot X = B$ к виду $X = C \cdot X + D$.

Предположим, что $a_{ii} \ne 0$. Тогда x_1 можно выразить из первого уравнения (4.1), x_2 – из второго и т.д., x_n – из n-го, по следующему правилу:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_j\right), \ i = \overline{1,n}.$$

В результате получается система

$$\begin{cases} x_1 & = & 0 & + & c_{12}x_2 & + & c_{13}x_3 & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & + & d_1 \\ x_2 & = & c_{21}x_1 & + & 0 & + & c_{23}x_3 & + & \ldots & + & c_{2n}x_n & + & d_2 \\ x_3 & = & c_{31}x_1 & + & c_{32}x_2 & + & 0 & + & \ldots & + & c_{3n}x_n & + & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & c_{n1}x_1 & + & c_{n2}x_2 & + & c_{n3}x_3 & + & \ldots & + & 0 & + & d_n \end{cases},$$

в которой на главной диагонали матрицы C находятся нулевые элементы, а остальные элементы выражаются как

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \ d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i, j = 1,2,\ldots,n, \ i \neq j.$$

В матричном виде правило преобразований будет выглядеть так:

$$X = -Dg^{-1} \cdot A1 \cdot X + Dg^{-1} \cdot B,$$

где Dg – матрица, у которой на главной диагонали стоят диагональные элементы матрицы A, а остальные элементы – нули, $A1$ – матрица коэффициентов системы уравнений A, диагональные элементы которой равны нулю.

При таком способе получения уравнения $X = C \cdot X + D$ условие сходимости итерационного процесса может быть определено как $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1,2,\ldots,n$, то есть в матрице A в каждой строке диагональный элемент по модулю должен быть больше суммы модулей остальных элементов строки.

Если данное условие не выполняется, то необходимо соответствующим образом преобразовать СЛАУ. Это можно сделать, выполнив эквивалентные преобразования системы:

- перестановку строк;
- линейную комбинацию строк.

2 способ приведения исходной системы уравнений $A \cdot X = B$ **к виду** $X = C \cdot X + D$.

Для выполнения условия сходимости $\|C\| < 1$ умножим уравнение $A \cdot X = B$ на матрицу $P = A^{-1} - \Delta$, где Δ – матрица с малыми по модулю элементами. Последовательно получим:

$$\left(A^{-1}-\Delta\right)\cdot A\cdot X = P\cdot B,$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot X - \Delta\cdot A\cdot X = P\cdot B,$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot X = \Delta\cdot A\cdot X + P\cdot B.$$

Обозначим $C = \Delta\cdot A$; $D = P\cdot B$.

В результате получим систему вида $X = C\cdot X + D$.

Если элементы матрицы Δ выбрать достаточно малыми по модулю, то можно обеспечить выполнение условия $\|C\| = \|\Delta\cdot A\| \le \|\Delta\|\cdot\|A\| < 1$, т. е. для сходимости итерационного процесса необходимо выполнение условия $\|\Delta\| < \dfrac{1}{\|A\|}$.

3 способ приведения исходной системы уравнений $A\cdot X = B$ к виду $X = C\cdot X + D$.

Матрицы C и D получают следующим способом $C = E - \alpha\cdot A$; $D = \alpha\cdot B$, где $\alpha > 0$, E – единичная матрица, α выбирают таким образом, чтобы сделать минимальной величину $\|C\|$.

Пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы A. Оптимальным является выбор параметра $\alpha = 2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$. В этом случае $\|B\|_2$ принимает минимальное значение, равное $(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$.

4.6.3. Задание начального приближения

При выполнении условий сходимости итерационный процесс будет сходящимся к решению, независимо от величины начального приближения X^0. Его можно задать произвольно, чаще всего полагают, что $X^0=0$ или $X^0=D$ $x_i^0 = 0$, или $x_i^0 = d_i, i = \overline{1,n}$.

4.6.4. Выполнение рабочих формул итерационного процесса

Итерационный процесс продолжается до выполнения критерия окончания итерационного процесса по формуле

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^k + d_i, i = 1,2,\ldots,n.$$

4.6.5. Проверка критерия окончания итерационного процесса

Окончание итераций определяется либо заданием максимального числа итераций *N,* либо заранее заданной точностью *ε.* Простейший критерий окончания итерационного процесса имеет вид:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| < \varepsilon .$$

Соответственно, приближенное решение получается равным $X \approx X^{k+1}$.

4.7. Метод простых итераций

Применим общую схему метода.

1 шаг. Преобразование системы уравнений

Представим СЛАУ в развернутой форме записи (4.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Используем первый способ приведения исходной системы уравнений. Предположим, что $a_{ii} \neq 0$. Тогда x_1 можно выразить из первого уравнения, x_2 – из второго и т.д., x_n – из n-го, по следующему правилу:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} a_{ij} x_j \right).$$

В результате получается система

$$\begin{cases} x_1 & = & 0 & + & c_{12}x_2 & + & c_{13}x_3 & + & ... & + & c_{1n}x_n & + & d_1 \\ x_2 & = & c_{21}x_1 & + & 0 & + & c_{23}x_3 & + & ... & + & c_{2n}x_n & + & d_2 \\ x_3 & = & c_{31}x_1 & + & c_{32}x_2 & + & 0 & + & ... & + & c_{3n}x_n & + & d_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & ... & ... & ... & ... \\ x_n & = & c_{n1}x_1 & + & c_{n2}x_2 & + & c_{n3}x_3 & + & ... & + & 0 & + & d_n , \end{cases} \qquad (4.7)$$

в которой на главной диагонали матрицы C находятся нулевые элементы, а остальные элементы выражаются как

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i, j = 1,2,...,n,\ i \neq j.$$

2 шаг. Проверка выполнения критерия сходимости итерационного процесса.

Одна из норм матрицы С должна быть меньше 1

$$\|C\| < 1.$$

3 шаг. Задание начального приближения X^0 .

Его можно задать произвольно, чаще всего полагают, что $X^0=0$ или $X^0=D$.

4 шаг. Выполнение рабочих формул метода с проверкой условия окончания итерационного процесса.

В методе простой итерации (k + 1) приближение i-го неизвестного $x_i^{(k+1)}$, $i = 1,2,...,n$ определяется с помощью системы уравнений (4.7), в которых все слагаемые правой части берутся из предыдущей k–й итерации:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} & = & 0 & + & c_{12}x_2^k & + & c_{13}x_3^k & + & ... & + & c_{1n}x_n^k & + & d_1 \\ x_2^{k+1} & = & c_{21}x_1^k & + & 0 & + & c_{23}x_3^k & + & ... & + & c_{2n}x_n^k & + & d_2 \\ x_3^{k+1} & = & c_{31}x_1^k & + & c_{32}x_2^k & + & 0 & + & ... & + & c_{3n}x_n^k & + & d_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & ... & ... & ... & ... \\ x_n^{k+1} & = & c_{n1}x_1^k & + & c_{n2}x_2^k & + & c_{n3}x_3^k & + & ... & + & 0 & + & d_n \end{cases} \quad (4.8)$$

Компактная форма записи метода простой итерации имеет вид:

$$x_i^{s+1} = \sum_{j=1, i\neq j}^{n} c_{ij}x_j^s + d_i,\ i = 1,2,...,n.$$

Простейший критерий окончания итерационного процесса имеет вид:

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| < \varepsilon.$$

Пример. Методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795, \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398. \end{cases}$$

Запишем систему в виде

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 0{,}02x_1 & - & & & 0{,}05x_2 & - & & 0{,}10x_3 & = & 0{,}795 \\ & & -0{,}11x_1 & + & x_2 & + & 0{,}03x_2 & - & & 0{,}05x_3 & = & 0{,}849 \\ & & -0{,}11x_1 & - & & & 0{,}12x_2 & + & x_3 & + \; 0{,}04x_3 & = & 1{,}398\,. \end{array}$$

Преобразуем исходную систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}795, \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}849, \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3 + 1{,}398. \end{cases}$$

Проверим условие сходимости, что $\|C\| < 1$, используя первую норму матрицы С: $\|C\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$:

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1,$$
$$\sum_{j=1}^{3} |c_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1,$$
$$\sum_{j=1}^{3} |c_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1.$$

Условие сходимости выполнено, приближенные решения можно находить по правилам:

$$x_1^{k+1} = -0{,}02x_1^k + 0{,}05x_2^k + 0{,}10x_3^k + 0{,}795,$$
$$x_2^{k+1} = 0{,}11x_1^k - 0{,}03x_2^k + 0{,}05x_3^k + 0{,}849,$$
$$x_3^{k+1} = 0{,}11x_1^k + 0{,}12x_2^k - 0{,}04x_3^k + 1{,}398.$$

Так как начальное приближение можно задать произвольно, положим $x_1^0 = 0;\quad x_2^0 = 0;\quad x_3^0 = 0$.

Получим:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9613 \\ 0.9809 \\ 1.5314 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ 1.0019 \\ 1.5602 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9816 \\ 1.0045 \\ 1.5634 \end{pmatrix}.$$

Проверим условия окончания счета по точности:

$$\left|x_1^4 - x_1^3\right| = 3.597 \cdot 10^{-3} < 10^{-2}$$
$$\left|x_2^4 - x_2^3\right| = 2.636 \cdot 10^{-3} < 10^{-2}$$
$$\left|x_3^4 - x_3^3\right| = 3.197 \cdot 10^{-2} < 10^{-2}.$$

Последние соотношения показывают, что заданная точность $\varepsilon = 10^{-2}$ обеспечена; следовательно, процесс вычислений можно завершить, полагая $x_1 = 0{,}982$; $x_2 = 1{,}005$; $x_3 = 1{,}563$.

Ответ: $x_1 = 0{,}982$; $x_2 = 1{,}005$; $x_3 = 1{,}563$ с точностью до 0.01.

Алгоритм решения системы линейных уравнений (4.1) с использованием метода простых итераций может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 4.12) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (см. рис. 4.12).

```
iter(x0, A, b, τ, e) :=  | r ← 1
                         | y ← x0
                         | while  r ≥ e
                         |     | x ← y − τ·(A·y − b)
                         |     | r ← |x − y|
                         |     | y ← x
                         | y
```

Рис. 4.12. Функция пользователя, реализующая алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений (4.1) методом простых итераций в MathCad

Пример. Решим систему уравнений $\begin{cases} 7{,}6x_1 + 5{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = 10{,}1; \\ 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 + 2{,}7x_3 = 9{,}7; \\ 2{,}9x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 7{,}8 \end{cases}$

с использованием функции пользователя (см. рис. 4.12).

Решение:

Составим матрицу *A* и вектор *B*, вычислим итерационный параметр и проверим условие сходимости (рис. 4.13).

$$A := \begin{pmatrix} 7.6 & 5.8 & 4.7 \\ 3.8 & 4.1 & 2.7 \\ 2.9 & 2.1 & 3.8 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 10.1 \\ 9.7 \\ 7.8 \end{pmatrix}$$

$s := \mathrm{eigenvals}(A)$ –используется встроенная функция для нахождения собственных чисел

Вычислим итерационный параметр и проверим условие сходимости

$$\tau := \frac{2}{\max(s) + \min(s)} \qquad \tau = 0.145 \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{norm2}(E - \tau \cdot A) = 1.085$ -условие сходимости выполнено

Рис. 4.13. Проверка условий сходимости метода

Рис. 4.14 иллюстрирует применение функции пользователя для решения данной системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций.

Ответ: $x_1 \approx -2.47922 \pm 0.0001$,

$x_2 \approx 3.24788 \pm 0.0001$,

$x_3 \approx 2.14967 \pm 0.0001$.

```
x0 := (0, 0, 0)^T

iter(x0, A, b, τ, e) := | r ← 1
                        | y ← x0
                        | while  r ≥ e
                        |     | x ← y − τ·(A·y − b)
                        |     | r ← |x − y|
                        |     | y ← x
                        | y

itnum(x0, A, b, τ, e) := | r ← 1
                         | y ← x0
                         | k ← 1
                         | while  r ≥ e
                         |     | x ← y − τ·(A·y − b)
                         |     | r ← |x − y|
                         |     | y ← x
                         |     | k ← k + 1
                         | k

iter(x0, A, b, τ, 0.0001) = (−2.47915, 3.24788, 2.14967)^T

itnum(x0, A, b, τ, 0.0001) = 79   Число итераций

lsolve(A, b) = (−2.47922, 3.248, 2.14972)^T   решение системы уравнений встроенной функцией, решения совпадают
```

Рис. 4.14. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций

4.8. Итерационный метод Зейделя

Опыт показывает, что скорость сходимости метода простой итерации можно значительно повысить, если при определении в правой части (4.8) для неизвестных с номерами $j < i$ использовать не значения x_i^k, а значения x_i^{k+1}, уже найденные на данной (k + 1)-й итерации.

Итерационный метод Зейделя имеет вид (скалярная запись):

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^k + d_i\,,\ i = 1,2,...,n. \tag{4.9}$$

где $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $i, j = 1,2,...,n$, $i \neq j$.

Или в матричной форме

$$X^{k+1} = -Dg^{-1} \cdot A2 \cdot X^{k+1} - Dg^{-1} \cdot A3 \cdot X^k + Dg^{-1} \cdot B,$$

где $A2$ – матрица коэффициентов A, у которой диагональные элементы и все элементы выше главной диагонали равны нулю

$$A2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & 0 & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & 0 \end{pmatrix},$$

$A3$ – матрица коэффициентов A, у которой диагональные элементы и все элементы ниже главной диагонали равны нулю

$$A3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1m} \\ 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Dg – диагональная матрица, по диагонали которой расположены диагональные элементы матрицы A исходной системы.

Таким образом, матрицу A можно представить как сумму матриц $A2$, Dg, $A3$.

Условия сходимости для метода простых итераций остаются верными и для метода Зейделя.

Алгоритм решения системы линейных уравнений (4.1) с использованием метода Зейделя может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 4.15) и реализован в MathCad различными способами, в частности, в виде функции пользователя (см. рис. 4.15).

Пример. Методом Зейделя с точностью до 0.0000001 решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 10 \\ &10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 20 \\ &5x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 13x_5 = 30 \\ &20x_1 + x_2 + 3x_3 + 17x_4 + 14x_5 = 40 \\ &12x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 16x_4 + 15x_5 = 50 \end{aligned} \quad .$$

```
Zeidel(A,b,ε) := | N ← rows(A) − 1
                 | C ← A^T·A
                 | D ← A^T·b
                 | for i ∈ 0..N
                 |    | D1_i ← D_i / C_(i,i)
                 |    | d0_i ← D1_i
                 |    | d1_i ← D1_i
                 | for i ∈ 0..N
                 |   for j ∈ 0..N
                 |     | C1_(i,j) ← 0  if i = j
                 |     | C1_(i,j) ← −C_(i,j) / C_(i,i)  otherwise
                 | Flag ← 0
                 | R_0 ← d0
                 | k ← 1
                 | while Flag = 0
                 |    | for i ∈ 0..N
                 |    |    | tmp ← Σ(j=0..N) (C1_(i,j)·d1_j) + D1_i
                 |    |    | d1_i ← tmp
                 |    | R_k ← d1
                 |    | s ← |R_k − R_(k−1)|
                 |    | if s < ε
                 |    |    | Flag ← 1
                 |    |    | Rf ← d1
                 |    | d0 ← d1
                 |    | k ← k + 1
                 | (Rf)
                 | (s )
```

Рис. 4.15. Функция пользователя, реализующая алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений (4.1) методом Зейделя в MathCad

Решение:

Рис. 4.16 иллюстрирует применение функции пользователя (см. рис. 4.15) для решения данной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 11 & 12 & 13 \\ 20 & 1 & 3 & 17 & 14 \\ 12 & 10 & 4 & 16 & 15 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$Z := \mathrm{Zeidel}\left(A, B, 10^{-8}\right) = \begin{pmatrix} \{5,1\} \\ 9.997 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0.096445472 \\ 1.432421283 \\ -1.353001718 \\ 1.6593173 \\ 0.892091424 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.16. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций

Ответ: $x_1 \approx 0.096445472 \pm 0.00000001$,

$x_2 \approx 1.432421283 \pm 0.00000001$,

$x_3 \approx -1.353001718 \pm 0.00000001$,

$x_4 \approx 1.6593173 \pm 0.00000001$,

$x_5 \approx 0.892091424 \pm 0.00000001$.

4.9. Лабораторная работа 3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цели работы:

1) научиться решать системы линейных уравнений в MathCad, используя вычислительный алгоритм метода простых итераций;

2) научиться решать системы линейных уравнений в MathCad, используя вычислительный алгоритм метода Зейделя.

Задание 1

Решить систему линейных уравнений (табл. 4.1) методом простых итераций, проверить решение с помощью встроенных функций пакета MathCad.

Таблица 4.1

Варианты заданий

Вариант	Система уравнений	Абсолютная погрешность
1	$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,45x_2 - 0,20x_3 = 1,97 \\ 0,30x_1 + 0,25x_2 + 0,43x_3 = 0,32 \\ 0,60x_1 - 0,35x_2 - 0,25x_3 = 1,83 \end{cases}$	ε=0.001
2	$\begin{cases} 1,53x_1 - 1,65x_2 - 0,76x_3 = 2,18 \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95 \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47 \end{cases}$	ε=0.001
3	$\begin{cases} 0,45x_1 - 0,94x_2 - 0,15x_3 = -0,15 \\ -0,01x_1 + 0,34x_2 + 0,06x_3 = 0,31 \\ -0,35x_1 + 0,05x_2 + 0,65x_3 = 0,37 \end{cases}$	ε=0.009
4	$\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34 \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42 \\ 0,03x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	ε=0.001
5	$\begin{cases} -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,10x_3 = 0,30 \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,50x_3 = 0,40 \\ 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60 \end{cases}$	ε=0.001
6	$\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60 \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30 \\ 0,50x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	ε=0.0001
7	$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74 \\ 0,58x_1 + 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02 \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	ε=0.001
8	$\begin{cases} 14,38x_1 - 2,41x_2 + 1,39x_3 = 5,86 \\ 1,84x_1 + 25,36x_2 - 3,31x_3 = -2,28 \\ 2,46x_1 - 3,49x_2 + 16,37x_3 = 4,47 \end{cases}$	ε=0.001
9	$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41 \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44 \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56 \end{cases}$	ε=0.0001
10	$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,73x_2 - 9,11x_3 = -1,25 \\ 6,25x_1 + 2,32x_2 + 7,62x_3 = 2,33 \\ 1,13x_1 - 8,88x_2 + 4,64x_3 = -3,75 \end{cases}$	ε=0.001

Продолжение табл. 4.1

Вариант	Система уравнений	Абсолютная погрешность
11	$\begin{cases} 0,62x_1+0,92x_2+0,03x_3=-0,82 \\ 0,99x_1+0,01x_2+0,07x_3=0,66 \\ 1,01x_1-0,02x_2+0,99x_3=-0,98 \end{cases}$	ε=0.004
12	$\begin{cases} 0,10x_1-0,07x_2-0,96x_3=-2,04 \\ 0,04x_1-0,99x_2-0,85x_3=-3,73 \\ 0,91x_1+1,04x_2+0,19x_3=-1,67 \end{cases}$	ε=0.0001
13	$\begin{cases} 0,62x_1+0,84x_2+0,77x_3=-8,18 \\ 0,03x_1-1,11x_2-1,08x_3=0,08 \\ 0,97x_1+0,02x_2-1,08x_3=0,06 \end{cases}$	ε=0.005
14	$\begin{cases} 0,63x_1-0,37x_2+1,76x_3=-9,29 \\ 0,90x_1+0,99x_2+0,05x_3=0,12 \\ 0,13x_1-0,95x_2+0,69x_3=0,69 \end{cases}$	ε=0.003
15	$\begin{cases} 6,34x_1+11,75x_2+10x_3=-41,40 \\ 7,42x_1-19,03x_2+11,75x_3=-49,49 \\ 5,57x_1+7,48x_2+6,36x_3=-27,67 \end{cases}$	ε=0.0001

Задание 2

Решить систему линейных уравнений (табл. 4.1) методом Зейделя, проверить решение с помощью встроенных функций пакета MathCad.

4.10. Пример выполнения лабораторной работы 3

Задание 1

Используя метод простых итераций, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8.714x_1+2.180x_2+5.684x_3=49.91 \\ -1.351x_1+10.724x_2+5.224x_3=50.17 \\ 2.489x_1+0.459x_2+6.799x_3=32.68 \end{cases}$$

с точностью ε=0.0001.

Решение:

1. Запишем условие задачи в виде векторов и матриц. Для этого определим *B* – вектор свободных членов системы уравнений (правые части уравнений), определим *A* – матрицу коэффициентов системы уравнений, диагональ которой содержит нули, определим *D* – диагональную матрицу, по диагонали которой расположены коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} заданной системы. Сделать это можно при помощи функции diag (рис. 4.17).

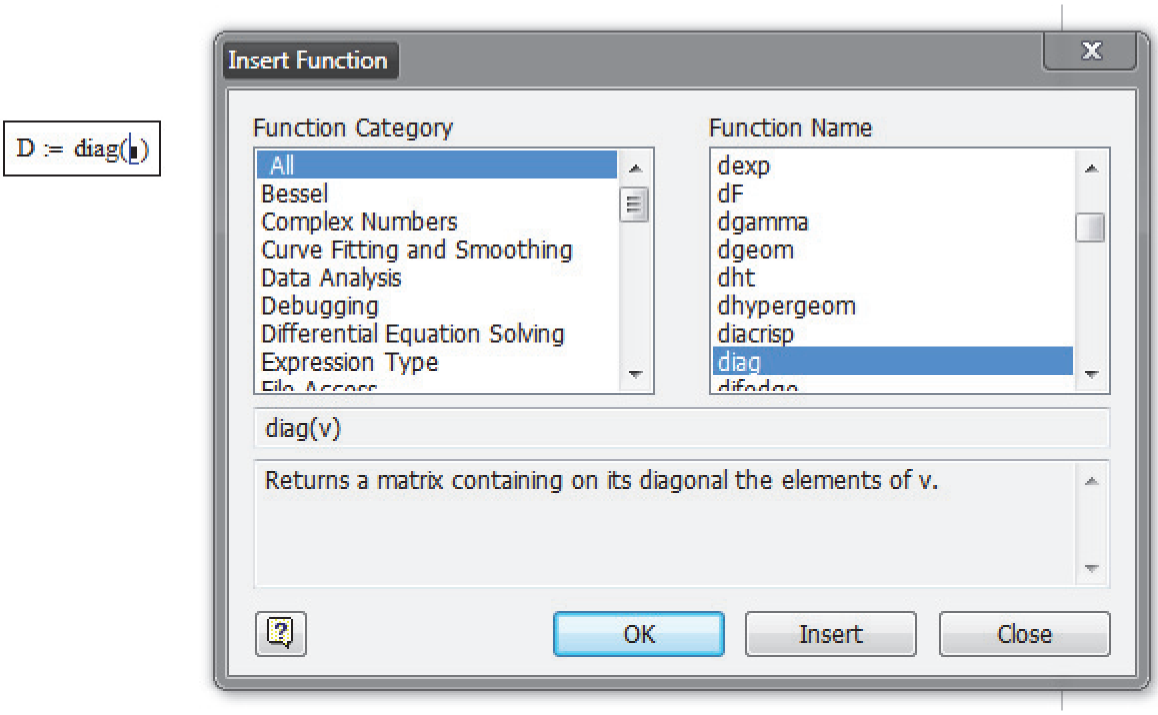


Рис. 4.17. Определение диагональной матрицы

Аргументом функции будет вектор, состоящий из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn} заданной системы. В нашей задаче это коэффициенты 8.714, 10.724, 6.799. В скобки в качестве аргумента функции diag необходимо ввести оператор вектора для трех элементов и заполнить его вышеперечисленными коэффициентами (рис. 4.18).

Матрица коэфициентов уравнения, диагональ которой содержит нули:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2.18 & 5.684 \\ -1.351 & 0 & 5.224 \\ 2.489 & 0.459 & 0 \end{pmatrix} \qquad E := 10^{-4}$$

Вектор свободных членов:

$$B := \begin{pmatrix} 49.91 \\ 50.17 \\ 32.68 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица данной системы:

$$D := \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 8.714 \\ 10.724 \\ 6.799 \end{pmatrix}\right)$$

Рис. 4.18. Задание системы линейных уравнений

Выполним проверку условий сходимости. Для этого нужно получить суммы элементов матрицы A по строкам и сравнить их с диагональными элементами матрицы Dg. Если условие сходимости выполняется, то продолжаем вычисления, иначе необходимо преобразовать исходную СЛАУ к другому виду, подходящему для итерационного метода. Поскольку все полученные суммы меньше соответствующих элементов матрицы D, можно продолжать вычисления (рис. 4.19).

Проверим условия сходимости.
Для этого получим суммы элементов матрицы A по строкам и потом сравним их с элементами диагональной матрицы.

$$\sum_{j=0}^{2} \left|A_{0,j}\right| = 7.864$$

$$\sum_{j=0}^{2} \left|A_{1,j}\right| = 6.575 \qquad D = \begin{pmatrix} 8.714 & 0 & 0 \\ 0 & 10.724 & 0 \\ 0 & 0 & 6.799 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{2} \left|A_{2,j}\right| = 2.948$$

Рис. 4.19. Проверка условий сходимости

Определим вектор начальных значений переменных системы:

$$\begin{pmatrix} x1_0 \\ x2_0 \\ x3_0 \end{pmatrix} := D^{-1} \cdot B$$

Зададим количество итераций:

$$i := 0..28$$

Запишем итерирующую формулу простых итераций:

$$\begin{pmatrix} x1_{i+1} \\ x2_{i+1} \\ x3_{i+1} \end{pmatrix} := D^{-1} \cdot B - D^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x1_i \\ x2_i \\ x3_i \end{pmatrix}$$

Рис. 4.20. Определение начального приближения, количества итераций, итерирующая формула

Определим вектор начальных значений переменных системы. Для этого введем оператор вектора на три элемента (по количеству переменных в системе). Поля для ввода данных заполним идентификаторами переменных ($x1_0$, $x2_0$, $x3_0$). Начальные значения определяем в матричной форме. Задаем максимальное число итераций как дискретную переменную *i,* принимающую значения от 0 до 28. Задаем итерирующую формулу метода простых итераций (рис. 4.20).

Чтобы увидеть результат, введем: xl= x2= x3= . Принимая во внимание условие окончания вычислений, можно считать значения переменных на 19-й итерации решением заданной системы уравнений (рис. 4.21).

	x1 =	x2 =	x3 =
	0	0	0
0	5.7275648	4.6782917	4.8065892
1	1.4219269	3.0584034	2.3939925
2	3.4008753	3.6912352	4.079573
3	2.1430818	3.1194417	3.3123907
4	2.786549	3.3347048	3.8114496
5	2.4071682	3.1726609	3.5613546
6	2.61084	3.246696	3.7111791
7	2.4945904	3.1993701	3.6316202
8	2.558325	3.2234808	3.6773722
9	2.5224499	3.2092227	3.6524123
10	2.5422978	3.216862	3.6665082
11	2.5311922	3.2124959	3.6587265
12	2.5373603	3.2148875	3.6630868
13	2.5339178	3.2135405	3.6606673
14	2.535833	3.2142854	3.6620185
15	2.5347653	3.2138685	3.661267
16	2.5353597	3.2141	3.6616861
17	2.5350285	3.2139708	3.6614528
18	2.535213	3.2140427	3.6615828
19	2.5351102	3.2140026	3.6615104
20	2.5351674	3.2140249	3.6615507
21	2.5351356	3.2140125	3.6615283
22	2.5351533	3.2140194	3.6615408
23	2.5351434	3.2140156	3.6615338
24	2.5351489	3.2140177	3.6615377
25	2.5351459	3.2140165	3.6615355
26	2.5351476	3.2140172	3.6615368
27	2.5351466	3.2140168	3.6615361
28	...	...	...

Таким образом система стабилизируется на 19 итерации.

Ответ: x1=2.5351, x2=3.2140,x3=3.6615

Рис. 4.21. Решение заданной системы уравнений

Проверка решения с использованием встроенных функций приведена на рис. 4.22.

Проверка:

$$A1 := \begin{pmatrix} 8.714 & 2.18 & 5.684 \\ -1.351 & 10.724 & 5.224 \\ 2.489 & 0.459 & 6.799 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 49.91 \\ 50.17 \\ 32.68 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(A1, B) = \begin{pmatrix} 2.5351 \\ 3.214 \\ 3.6615 \end{pmatrix}$$

Вывод: Проверка решения системы линейных уравнений встроеными функциями подтвердила полученный ранее результат.

Рис. 4.22. Проверка решения

Задание 2

Используя метод Зейделя, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6.1x_1 + 2.2x_2 + 1.2x_3 = 16.55 \\ 2.2x_1 + 5.5x_2 - 1.5x_3 = 10.55 \\ 1.2x_1 - 1.5x_2 + 7.2x_3 = 16.8 \end{cases}$$

с точностью ε=0.0001.

Решение:

1) Запишем условие задачи в виде векторов и матриц (рис. 4.23).

Матрица коэфициентов уравнения, диагональ которой содержит нули:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2.2 & 1.2 \\ 2.2 & 0 & -1.5 \\ 1.2 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор свободных членов:

$$f := \begin{pmatrix} 16.55 \\ 10.55 \\ 16.8 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица:

$$D := \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 6.1 \\ 5.5 \\ 7.2 \end{pmatrix}\right)$$

Рис. 4.23. Условия задачи

2) Проверка условий сходимости (рис. 4.24).

Проверим условия сходимости.
Для этого получим суммы элементов матрицы A по строкам и потом сравним их с элементами диагональной матрицы.

$$\sum_{j=0}^{2} A_{0,j} = 3.4 \qquad \sum_{j=0}^{2} A_{1,j} = 0.7 \qquad \sum_{j=0}^{2} A_{2,j} = -0.3$$

Поскольку все полученные суммы меньше соответствующих элементов матрицы *D*, можно продолжать вычисления.

Рис. 4.24. Проверка условия диагонального преобладания

3) Задание начального приближения (рис. 4.25).

Определим вектор начальных значений переменных системы:

$$\begin{pmatrix} x1_0 \\ x2_0 \\ x3_0 \end{pmatrix} := D^{-1} \cdot f$$

Рис. 4.25. Начальное приближение

4) Определение количества итераций и вспомогательных функций для расчета (рис. 4.26).

Зададим количество итераций: $i := 0..15$

Запишем вспомогательные формулы для определения итераций по методу Зейделя:

$$f1(x1,x2,x3) := \frac{f_0}{D_{0,0}} - \frac{A_{0,0} \cdot x1 + A_{0,1} x2 + A_{0,2} x3}{D_{0,0}}$$

$$f2(x1,x2,x3) := \frac{f_1}{D_{1,1}} - \frac{A_{1,0} \cdot x1 + A_{1,1} x2 + A_{1,2} x3}{D_{1,1}}$$

$$f3(x1,x2,x3) := \frac{f_2}{D_{2,2}} - \frac{A_{2,0} \cdot x1 + A_{2,1} x2 + A_{2,2} x3}{D_{2,2}}$$

Рис. 4.26. Вспомогательные функции

5) Определение итерирующей формулы и результаты ее применения (рис. 4.27).

Запишем итерирующую формулу для вычисления итераций методом Зейделя:

$$\begin{pmatrix} x1_{i+1} \\ x2_{i+1} \\ x3_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f1\left(x1_i, x2_i, x3_i\right) \\ f2\left(x1_i, x2_i, x3_i\right) \\ f3\left(x1_i, x2_i, x3_i\right) \end{pmatrix}$$

Выведем результаты решения:

x1 =

	0
0	2.7131148
1	1.5622951
2	1.7345276
3	1.554343
4	1.5568908
5	1.5203985
6	1.5150866
7	1.5066358
8	1.5041971
9	1.5020465
10	1.5011991
11	1.5006162
12	1.5003475
13	1.5001834
14	1.5001015
15	1.5000543
16	...

x2 =

	0
0	1.9181818
1	1.4692996
2	1.9152916
3	1.8732039
4	1.9627895
5	1.9675692
6	1.9871404
7	1.9911955
8	1.9959293
9	1.9975193
10	1.9987593
11	1.9992864
12	1.9996285
13	1.9997924
14	1.9998897
15	1.9999393
16	...

x3 =

	0
0	2.3333333
1	2.2807688
2	2.3790549
3	2.4432645
4	2.464527
5	2.482766
6	2.4898438
7	2.4948065
8	2.4970598
9	2.4984524
10	2.4991421
11	2.4995417
12	2.4997486
13	2.4998647
14	2.4999262
15	2.4999601
16	...

Рис. 4.27. Результаты расчетов

6) Проверка условия остановки итерационного процесса (рис. 4.28).

7) Определение искомых неизвестных. Видно (см. рис. 4.27), что заданная точность достигнута на 14-й итерации (рис. 4.28). Выполним проверку полученного решения с использованием встроенных функций (рис. 4.29).

$x1_{i+1} - x1_i =$

	0
0	-1.151
1	0.172
2	-0.18
3	$2.548\cdot10^{-3}$
4	-0.036
5	$-5.312\cdot10^{-3}$
6	$-8.451\cdot10^{-3}$
7	$-2.439\cdot10^{-3}$
8	$-2.151\cdot10^{-3}$
9	$-8.474\cdot10^{-4}$
10	$-5.829\cdot10^{-4}$
11	$-2.687\cdot10^{-4}$
12	$-1.641\cdot10^{-4}$
13	$-8.195\cdot10^{-5}$
14	$-4.719\cdot10^{-5}$
15	$-2.455\cdot10^{-5}$

$x2_{i+1} - x2_i =$

	0
0	-0.449
1	0.446
2	-0.042
3	0.09
4	$4.78\cdot10^{-3}$
5	0.02
6	$4.055\cdot10^{-3}$
7	$4.734\cdot10^{-3}$
8	$1.59\cdot10^{-3}$
9	$1.24\cdot10^{-3}$
10	$5.271\cdot10^{-4}$
11	$3.421\cdot10^{-4}$
12	$1.639\cdot10^{-4}$
13	$9.729\cdot10^{-5}$
14	$4.955\cdot10^{-5}$
15	$2.813\cdot10^{-5}$

$x3_{i+1} - x3_i =$

	0
0	-0.053
1	0.098
2	0.064
3	0.021
4	0.018
5	$7.078\cdot10^{-3}$
6	$4.963\cdot10^{-3}$
7	$2.253\cdot10^{-3}$
8	$1.393\cdot10^{-3}$
9	$6.897\cdot10^{-4}$
10	$3.996\cdot10^{-4}$
11	$2.07\cdot10^{-4}$
12	$1.161\cdot10^{-4}$
13	$6.15\cdot10^{-5}$
14	$3.393\cdot10^{-5}$
15	$1.819\cdot10^{-5}$

Рис. 4.28. Погрешность вычисления неизвестных на каждой итерации

Ответ: x1=1.5001, x2=1.9999,x3=2.4999

Проверка:

$$A1 := \begin{pmatrix} 6.1 & 2.2 & 1.2 \\ 2.2 & 5.5 & -1.5 \\ 1.2 & -1.5 & 7.2 \end{pmatrix} \qquad \text{lsolve}(A1,f) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Вывод: Проверка решения системы линейных уравнений встроеными функциями подтвердила полученный ранее результат.

Рис. 4.29. Полученное решение и его проверка

Вывод: В результате выполнения лабораторной работы мы научились решать системы линейных уравнений в MathCad, используя вычислительные алгоритмы метода простых итераций и метода Зейделя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, Ф. П. Михайлов. – М. : Наука, 1997. – 386 с.

2. Лебедев, В. В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В. В. Лебедев. – М. : Изограф, 1997. – 471 с.

3. Хазанова, А. Э. Математическое моделирование в экономике : учеб. пособие / А. Э. Хазанова. – М. : БЕК, 1998. – 141 с.

4. Федосеев, В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов, И. В. Орлова, В. А. Половников. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 392 с.

5. Самарский, А. А. Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – М. : Лань, 2009. – 288 с.

6. Воскобойников, Ю. Е. Программирование и решение задач в пакете MathCad : учеб. пособие / Ю. Е. Воскобойников, В. Ф. Очков. – Новосибирск : НГАСУ, 2002. – 136 с.

7. Кирьянов, Д. Самоучитель MathCad 13 / Д. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

8. Солодовников, А. С. Математика в экономике. Ч. 1 : учебник / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Брайлов, И. Г. Шандра. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2007. – 384 с.

9. Солодовников, А. С. Математика в экономике. Ч. 2 : учебник / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Брайлов, И. Г. Шандра. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2007. – 560 с.

10. Поршнев, С. В. Численные методы на базе MathCad / С. В. Поршнев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.

11. Дьяконов, В. Mathcad 2001 : специальный справочник / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002. – 832 с.

12. Черняк, А. А. Математика для экономистов на базе Mathcad / А. А. Черняк, В. А. Новиков, О. И. Мельников, А. В. Кузнецов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.

13. Черняк, А. А. Математика для экономистов на базе MathCad / А. А. Черняк, В. А. Новиков, О. И. Мельников, А. В. Кузнецов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – Мажукин, В. И. Математическое моделирование в экономике : Ч. I. Численные методы и вычислительные алгоритмы. Часть II. Лабораторный практикум по численным методам и вычислительным алгоритмам : учеб. пособие / В. И. Мажукин, О. Н. Королева. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Флинта: МПСИ, 2005. – 232 с.

14. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М. : Высш. шк., 1994. – 544 с.

15. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин. – М. : BHV, 2011. – 592 с.

16. Хазанова, Л. Э. Математическое моделирование в экономике: учеб. пособие / / Л. Э. Хазанова. – М. : БЕК, 1998. – 141 с.

Учебное издание

Малашевская Елена Анатольевна
Еськова Анна Владимировна
Щербатюк Галина Анатольевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Часть 1

Учебное пособие

Научный редактор – профессор, кандидат технических наук,
Бердоносов Виктор Дмитриевич

Редактор Е. В. Безолукова

Подписано в печать 23.12.2013.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 65 г/м^2. Ризограф EZ570E.
Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 6,00. Тираж 50 экз. Заказ 25967.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.