

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

**И. В. Чепурных**

## **ДИНАМИКА ПОЛЁТА САМОЛЁТОВ**

Утверждено в качестве учебного пособия  
Ученым советом Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего профессионального образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре  
2014

УДК 629.7.015.4(07)  
ББК 39.52-015я7  
Ч-446

**Рецензенты:**

В. М. Козин, доктор технических наук, профессор,  
заведующий лабораторией МД ФГБУН «Институт машиноведения  
и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук»;  
Секция НТС филиала ОАО «Авиационная холдинговая компания «Сухой»  
«Комсомольский-на-Амуре авиационный завод имени Ю.А. Гагарина»,  
секретарь НТС начальник НПО КнААЗ,  
главный научный сотрудник, кандидат технических наук,  
доцент Р. Ф. Крупский

**Чепурных, И. В.**

Ч-446 Динамика полёта самолётов : учеб. пособие / И. В. Чепурных. –  
Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2014. – 112 с.

ISBN 978-5-7765-1092-2

Рассматриваются траекторные задачи: составляются уравнения движения центра масс летательного аппарата и на их основе рассчитываются основные лётные характеристики самолёта. Анализируется продольное движение самолёта: дополнительно составляются уравнения моментов и оцениваются статические характеристики продольной устойчивости и управляемости; линеаризуются уравнения движения и рассчитываются динамические характеристики продольной устойчивости и управляемости.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Авиа- и ракетостроение» и специальности «Самолёто- и вертолётостроение» при изучении ими дисциплины «Динамика полёта».

УДК 629.7.015.4 (07)  
ББК 39.52-015я7

ISBN 978-5-7765-1092-2

© ФГБОУ ВПО «Комсомольский-  
на-Амуре государственный  
технический университет», 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....   | 5  |
| <b>1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС САМОЛЁТА</b> .....   | 6  |
| 1.1. Уравнения движения материальной точки в векторной форме.....   | 7  |
| 1.2. Системы координат, применяемые в динамике полёта.....  | 9  |
| 1.3. Скалярная форма записи уравнений движения центра<br>масс летательных аппаратов.....                  | 17 |
| 1.4. Уравнения движения в перегрузках.....  | 21 |
| 1.5. Исходные данные для интегрирования уравнений<br>движения.....  | 23 |
| <b>2. РАСЧЁТ ЛЁТНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК<br/>САМОЛЁТА ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ<br/>ПОЛЁТА</b> ..... | 25 |
| 2.1. Диаграмма потребных и располагаемых тяг.....   | 26 |
| 2.2. Установившийся набор высоты. Скороподъёмность<br>летательного аппарата.....                          | 30 |
| 2.3. Установившееся снижение самолёта. Планирование.....  | 32 |
| 2.4. Метод мощностей.....   | 33 |
| <b>3. ДАЛЬНОСТЬ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛЁТА</b> .....  | 34 |
| 3.1. Максимальные дальность и продолжительность полёта.....   | 35 |
| 3.2. Радиус действия самолёта.....  | 36 |
| 3.3. Влияние загрузки самолёта на его дальность.....  | 37 |
| <b>4. ВЗЛЁТНО–ПОСАДОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЁТА</b> ...  | 38 |
| 4.1. Взлёт и начальный набор высоты.....  | 39 |
| 4.2. Заход на посадку и посадка.....  | 42 |
| 4.3. Прерванный и продолженный взлёт.....   | 45 |
| <b>5. МАНЕВРЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЁТА</b> .....   | 47 |
| 5.1. Горизонтальная приемистость.....   | 48 |
| 5.2. Криволинейный полёт в горизонтальной плоскости – вираж.....  | 48 |
| 5.3. Перегрузочная поляра.....  | 51 |
| 5.4. Характерные маневры самолёта в вертикальной плоскости.....   | 53 |
| 5.5. Петля Нестерова.....   | 55 |
| <b>6. ПРОДОЛЬНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ<br/>И БАЛАНСИРОВКА САМОЛЁТА</b> .....                           | 58 |
| 6.1. Момент тангажа самолёта.....   | 60 |
| 6.2. Аэродинамический момент тангажа крыла.....   | 61 |
| 6.3. Аэродинамический момент тангажа фюзеляжа.....  | 66 |
| 6.4. Аэродинамический момент тангажа гондол двигателей.....   | 69 |
| 6.5. Момент тангажа двигателей.....   | 70 |
| 6.6. Момент тангажа самолёта без горизонтального оперения.....  | 70 |
| 6.7. Продольный момент горизонтального оперения.....  | 72 |

|   |            |
|---|------------|
| 6.8. Демпфирующий момент тангажа, возникающий при вращении самолёта.....  | 73         |
| 6.9. Продольная статическая устойчивость самолёта .....   | 74         |
| 6.9.1. Продольная статическая устойчивость по перегрузке .....  | 75         |
| 6.9.2. Продольная статическая устойчивость по скорости .....  | 76         |
| 6.10. Продольная балансировка самолёта в горизонтальном полёте ...  | 77         |
| 6.11. Балансировочная поляра .....  | 78         |
| 6.12. Шарнирный момент органов продольного управления .....   | 79         |
| 6.13. Усилие на ручке управления рулём высоты .....   | 81         |
| 6.14. Статические характеристики продольной управляемости.....  | 82         |
| 6.15. Выбор диапазона центровок и параметров<br>горизонтального оперения .....  | 83         |
| <b>7. ДИНАМИКА ПРОДОЛЬНОГО ВОЗМУЩЁННОГО<br/>ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА .....</b>   | <b>86</b>  |
| 7.1. Линеаризация уравнений движения самолёта.....  | 86         |
| 7.2. Решение системы линейных дифференциальных уравнений<br>с постоянными коэффициентами классическим методом .....                                   | 89         |
| 7.3. Решение системы линейных дифференциальных уравнений<br>с постоянными коэффициентами операторным методом .....                                    | 92         |
| 7.4. Свободное продольное возмущённое движение самолёта.....  | 94         |
| 7.5. Быстрая и медленная составляющие продольного<br>возмущённого движения самолёта .....   | 94         |
| 7.6. Собственное продольное короткопериодическое возмущённое<br>движение самолёта .....   | 95         |
| 7.7. Исследование управляемого движения самолёта с помощью<br>передаточных функций и частотных характеристик.....                                     | 97         |
| 7.8. Реакция самолёта в канале тангажа на ступенчатое<br>отклонение руля высоты (стабилизатора)<br>в короткопериодическом движении .....              | 99         |
| 7.9. Реакция самолёта в канале тангажа на отклонение руля высоты<br>(стабилизатора) по гармоническому закону<br>в короткопериодическом движении ..... | 102        |
| 7.10. Лётчик в системе управления летательным аппаратом.....  | 107        |
| 7.11. Влияние конструктивных параметров самолёта и условий<br>полёта на продольную устойчивость и управляемость.....                                  | 109        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>   | <b>111</b> |
| <b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>   | <b>112</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Динамика полёта самолётов – это раздел механики, в котором изучается движение летательных аппаратов (ЛА) в атмосфере. Ему также соответствует эквивалентное понятие «Аэромеханика самолёта».

Эта дисциплина базируется на таких предметах, как теоретическая механика, аэродинамика, силовые установки, теория автоматического управления. В свою очередь, результаты, полученные в динамике полёта, используются в таких дисциплинах, как конструкция, прочность и проектирование самолётов, системы управления ЛА, их техническая эксплуатация.

Создание современного самолёта невозможно без ясного понимания конструктором основ динамики полёта. С задачами динамики полёта ему приходится сталкиваться как на всех этапах проектирования ЛА, так и в процессе его эксплуатации.

На этапе разработки технического предложения проводятся предварительные исследования различных аэродинамических схем и компоновок, оценивается возможность создания самолёта, удовлетворяющего заданным требованиям. Здесь первостепенное значение приобретают две задачи динамики полёта:

1) расчёт основных лётно-технических характеристик (ЛТХ), к ним относят:

- диапазоны высот и скоростей, в которых возможен безопасный полёт ЛА и выполнение определённых полётных заданий;
- дальность и продолжительность полета, радиус действия;
- маневренные характеристики (радиус и время установившегося виража, скороподъёмность, время выполнения заданного маневра, необходимый для маневра объём пространства и действующие при этом перегрузки и т.д.);
- взлётно-посадочные характеристики (ВПХ), куда входят скорость отрыва, посадочная скорость, длина разбега, длина пробега, взлётная дистанция, посадочная дистанция, характеристики прерванного и продолженного взлёта, класс аэродрома базирования и др.

Помимо этих показателей в ЛТХ также включают ряд других величин, отражающих условия эксплуатации самолёта и не определяемых расчётами динамики полёта.

2) расчёт статических характеристик устойчивости и управляемости самолёта (показатели продольной и боковой устойчивости и управляемости, балансировочные углы отклонения органов управления на различных режимах полёта и др.).

На основе решения указанных задач определяются основные проектные параметры самолёта – удельная нагрузка на крыло  $p = \frac{G}{S} = \frac{mg}{S}$ , стар-

товья тяговооружённость  $\bar{P}_0 = \frac{P_0}{m_0 g}$ , а также параметры аэродинамической компоновки ( $S_{z0}, S_{\beta 0}, L_{z0}, L_{\beta 0}, S_{p\beta}, S_{pH}, S_{эл}$ ), безопасный диапазон (разбег) центровок самолёта и т.п.

По мере разработки проекта и получения достоверной информации (продувки моделей в аэродинамической трубе) расширяется круг задач динамики полёта, усложняются математические модели. Например, на этапе эскизного проекта проводятся расчёты оптимальных траекторий полёта, определяются динамические характеристики самолёта как объекта управления, исследуются переходные процессы, проводятся комплексные исследования на имитационных стендах.

Спроектированный с учётом требований безопасности для выполнения определённых задач в расчётных условиях самолёт изготавливается и проходит цикл лётных испытаний, в процессе которых его характеристики доводятся в соответствии с техническими требованиями и нормами, одновременно уточняются области эксплуатационных режимов и условий полёта.

По результатам расчётов и испытаний составляется «Руководство по лётной эксплуатации» (РЛЭ), регламентирующее способы и условия эксплуатации самолёта. В ходе эксплуатации расчёты траекторий, оценка устойчивости и управляемости осуществляются при модификации самолёта, расширении области его использования, для повышения эффективности использования в изменившихся условиях, а также с учётом накопленного опыта.

## **1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС САМОЛЁТА**

Самолёт (ЛА) представляет собой систему деформируемых тел переменной массы, совершающих как общее переносное, так и взаимные относительные движения. При исследовании динамических свойств обычно применяют упрощённую модель самолёта как абсолютно твёрдого тела переменной массы.

При расчёте ЛТХ самолёт рассматривают как материальную точку (используют только уравнения сил).

При изучении вопросов устойчивости и управляемости самолёт рассматривают как материальное тело (используют уравнения сил и моментов).

## 1.1. Уравнения движения материальной точки в векторной форме

Инерциальными системами отсчёта (ИСО) в классической механике называют те системы, по отношению к которым выполняется закон инерции (первый закон Ньютона). С весьма большой степенью точности ИСО можно считать гелиоцентрическую систему отсчёта. Любая система отсчёта, покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно ИСО, сама является ИСО. Наоборот, всякая система, движущаяся ускоренно по отношению к ИСО, является неинерциальной.

Геоцентрическая система не является ИСО по причине [1]:

1) вращения вокруг своей оси с запада на восток с периодом  $T = 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 4,09 \text{ с} = 86164,09 \text{ с}$  и угловой скоростью  $\omega_3 = \frac{2\pi}{T} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  (рис. 1.1). Вектор  $\bar{\omega}_3$  направлен с юга на север;

2) годового обращения вокруг Солнца со средней скоростью движения по орбите 29,9 км/с;

3) нутационного колебания земной оси с периодом 18,6 года и амплитудой 9,2";

4) прецессионного движения относительно оси эклиптики с периодом 25 800 лет;

5) движения вместе с солнечной системой относительно других звёзд.

При исследовании полёта самолёта (ЛА) все эти составляющие движения, кроме первого, не учитываются. Если же скорость ЛА менее 1 км/с ( $M < 3$ ), то не учитывают и суточное вращение Земли, и тогда геоцентрическая система отсчёта считается ИСО.

Форма Земли – геоид. Уровенная поверхность силы тяжести – это поверхность, в каждой точке которой нормаль к поверхности коллинеарна направлению силы тяжести  $G$  (см. рис. 1.1). Геоид представляет собой тело, ограниченное уровенной поверхностью силы тяжести  $G$ , совпадающей с поверхностью океанов и продолженной под материками (рис. 1.2). В первом приближении Землю считают шаром, объём которого равен объёму Земли. Его радиус  $R = 637111 \text{ 0м}$ . Во втором приближении геоид заменяется общим земным эллипсоидом, полученным вращением относительно малой оси. У него большая полуось (радиус экватора)  $a = 6378137 \text{ м}$ , а

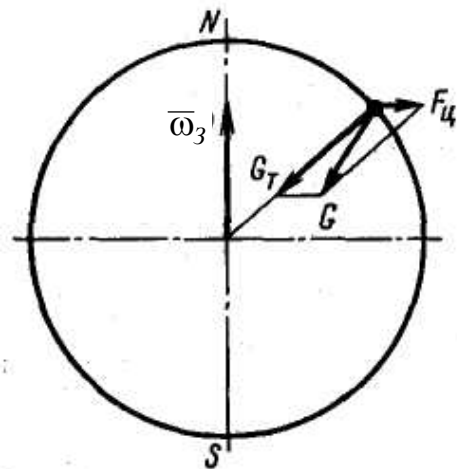


Рис. 1.1. К определению силы тяжести  $G$

сжатие  $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,25}$ , где  $b$  – малая полуось общего земного эллипсоида.

В некоторых задачах вместо общего земного эллипсоида используют референц-эллипсоид. Так, на территории СНГ за размеры референц-эллипсоида приняты размеры эллипсоида Красовского:  $a = 6378245$  м, а

сжатие  $\alpha = \frac{1}{298,3}$ . Центр эллипсоида Красовского не совпадает с центром

масс Земли.

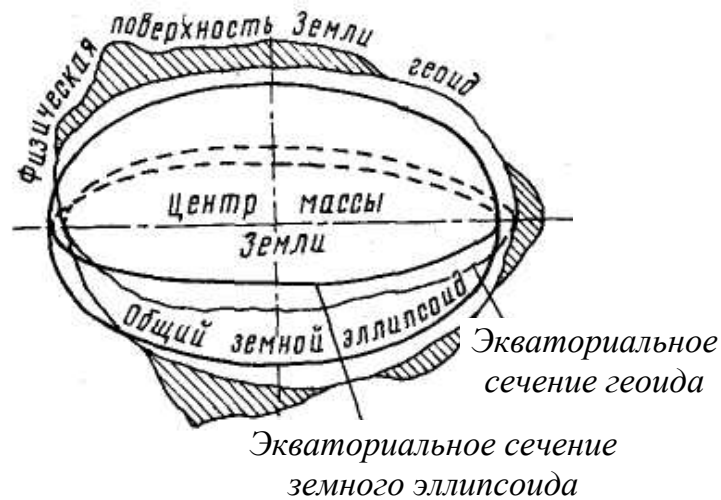


Рис. 1.2. Геоид и общий земной эллипсоид

Положение точки  $M$  в прямоугольной системе координат определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 1.3).

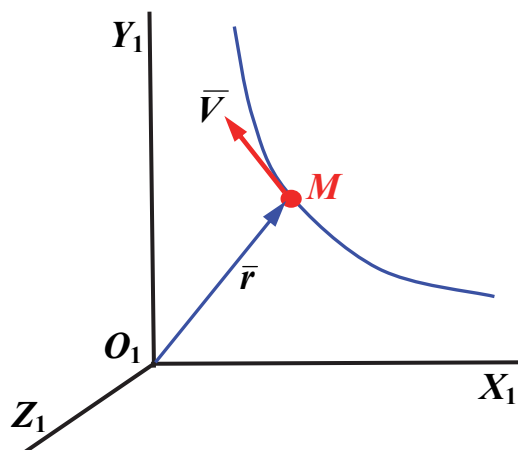


Рис. 1.3. Положение точки  $M$

Кинематическое уравнение [2]

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{V}$  – скорость материальной точки. Это уравнение справедливо для любой системы отсчёта.

Изменение скорости материальной точки переменной массы в неинерциальной системе отсчёта определяется динамическим уравнением

$$m(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{J}_{пер} + \vec{J}_{кор}, \quad (1.2)$$

где  $\vec{P}$  – главный вектор реактивных сил;  $\vec{F}$  – главный вектор внешних сил (кроме реактивных);  $\vec{J}_{пер}$  и  $\vec{J}_{кор}$  – переносная и кориолисова силы инерции.



Для описания движения центра масс (ц.м.) ЛА относительно вращающейся Земли перепишем уравнение (1.2) в виде

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P} + \bar{R}_a + \bar{G} + \bar{J}_{кор}, \quad (1.3)$$

где  $\bar{R}_a$  – главный вектор аэродинамических сил;  $\bar{G}$  – вектор силы тяжести;  $\bar{J}_{кор} = -2m \cdot [\bar{\omega}_3 \times \bar{V}]$ .

При скоростях полёта ЛА менее 1 км/с сила Кориолиса  $J_{кор} < 0,01 G$  и ею в расчётах пренебрегают. Для таких ЛА уравнения движения (1.3) и (1.1) образуют систему

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{P} + \bar{R}_a + \bar{G}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}. \quad (1.4)$$

## 1.2. Системы координат, применяемые в динамике полёта

Для характеристики системы координат необходимо задать положение начала координат, некоторое опорное направление и основную плоскость. Все системы координат, используемые в динамике полёта, определяются по ГОСТ 20058-80 [3] и являются правыми.

Согласно этому стандарту стартовая система координат  $O_c X_c Y_c Z_c$  (рис. 1.4) – это земная система координат, начало которой расположено в точке старта ЛА. Основная плоскость  $O_c X_c Z_c$  касается поверхности Земли в точке старта. Обычно ось  $O_c X_c$  направлена на север по касательной к географическому меридиану, ось  $O_c Z_c$  направлена на восток по касательной к географической параллели, ось  $O_c Y_c$  направлена вверх по местной вертикали (под местной вертикалью понимают прямую, совпадающую с вектором силы тяжести в рассматриваемой точке).

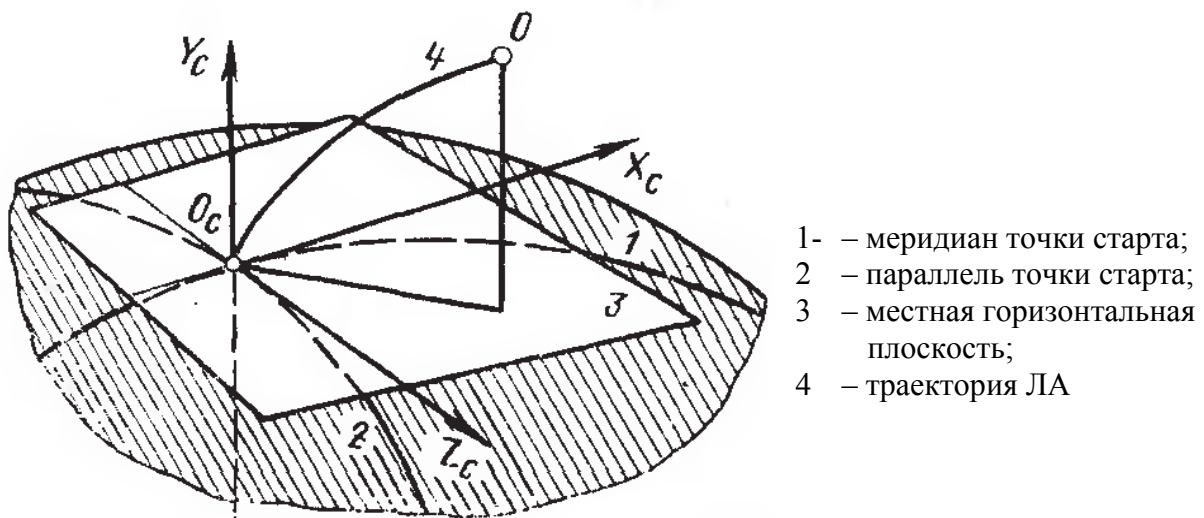


Рис. 1.4. Стартовая система координат  $O_c X_c Y_c Z_c$

Нормальная система координат  $Ox_g y_g z_g$  (рис. 1.5) – это подвижная система координат, начало которой помещено в ц.м. ЛА, ось  $Oy_g$  направлена вверх по местной вертикали, оси  $Ox_g$  и  $Oz_g$  лежат в горизонтальной плоскости, их направление выбирается в соответствии с решаемой задачей. Обычно ось  $Ox_g$  направлена на север по касательной к географическому меридиану, а ось  $Oz_g$  направлена на восток по касательной к географической параллели. Точка пересечения  $A$  радиус-вектора  $\vec{r}$  с поверхностью Земли определяет географические (сферические) координаты ЛА  $\lambda$  и  $\varphi$ , описывающие трассу полёта. Здесь  $\lambda$  – географическая долгота (отсчитывается от гринвичского меридиана на восток),  $\varphi$  – географическая широта (отсчитывается от плоскости экватора),  $\vec{r}$  – расстояние от центра Земли до ЛА.

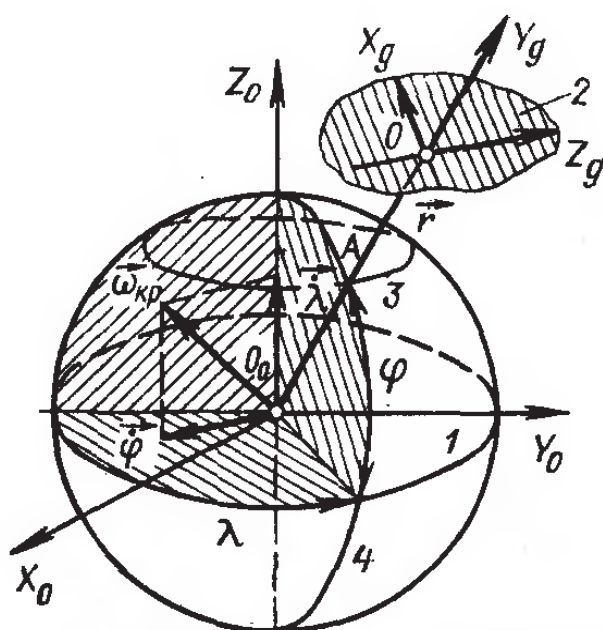


Рис. 1.5. Нормальная система координат  $Ox_g y_g z_g$  и её положение относительно земной системы:

- 1 – плоскость экватора; 2 – местная горизонтальная плоскость, проходящая через точку  $O$ ; 3 – параллель, проходящая через точку  $A$ ; 4 – меридиан, проходящий через точку  $A$

Стартовая и нормальная системы координат в общем случае вращаются вместе с Землей. В дальнейшем будем считать их невращающимися. Это допущение при скоростях полёта ЛА менее 1 км/с не вносит большой погрешности в расчёт ЛТХ.

В связанной системе координат  $OXYZ$  (рис. 1.6) оси координат совпадают с главными осями инерции ЛА. Плоскость  $OXY$  является плоскостью симметрии ЛА. Направление продольной оси  $OX$  должно специально оговариваться. Обычно ось  $OX$  параллельна средней аэродинамической хорде крыла и направлена от хвостовой к носовой части ЛА.

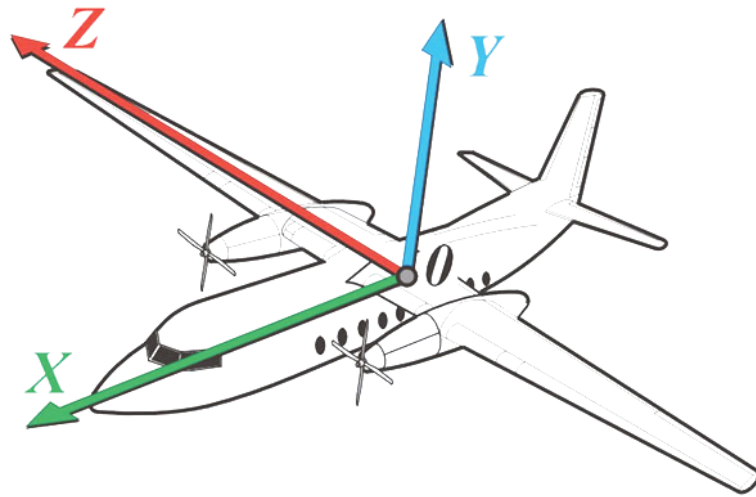


Рис. 1.6. Связанная система координат  $OXYZ$

Связанная система координат жёстко фиксирована по отношению к ЛА и её положение относительно нормальной системы координат определяет пространственное положение ЛА. Оно характеризуется эйлеровыми углами рыскания, тангажа и крена (рис. 1.7).

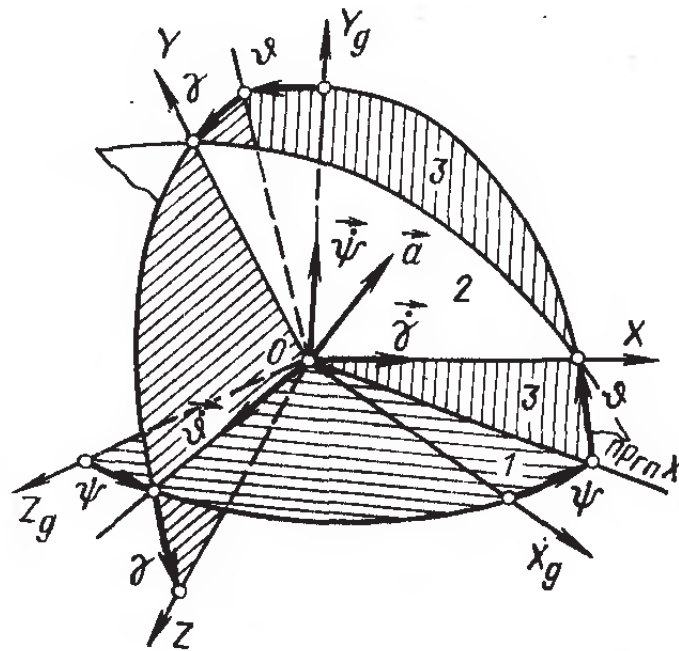


Рис. 1.7. Связанная система координат  $OXYZ$  и её ориентация относительно нормальной системы координат  $OX_gY_gZ_g$ : 1 – местная горизонтальная плоскость; 2 – плоскость симметрии ЛА; 3 – вертикальная плоскость, содержащая ось  $OX$

Углом рыскания  $\psi$  (пси строчная) называют угол между осью  $OX_g$  и проекцией продольной оси  $OX$  на горизонтальную плоскость  $OX_gZ_g$ .

Угол тангажа  $\vartheta$  (тэта строчная) – это угол между осью  $OX$  и горизонтальной плоскостью  $OX_gZ_g$ . Угол тангажа положителен, если ось  $OX$  находится выше горизонтальной плоскости.

Угол крена  $\gamma$  – это угол между осью  $OY$  и вертикальной плоскостью, содержащей продольную ось  $OX$ .

Движение ц.м. ЛА определяется линейными скоростями: воздушной  $\bar{V}$ , земной  $\bar{V}_\kappa$  и путевой  $\bar{V}_n$ . Если воздух неподвижен, то векторы воздушной и земной скоростей совпадают. При наличии ветра, имеющего скорость  $\bar{W}$ ,

$$\bar{V}_\kappa = \bar{V} + \bar{W}.$$

Путевая скорость  $\bar{V}_n$  – это проекция земной скорости  $\bar{V}_\kappa$  на горизонтальную плоскость  $OX_gY_g$ . Воздушная скорость играет основную роль в создании аэродинамических сил и моментов, а земная и путевая скорости используются при решении навигационных задач.

В скоростной системе координат  $OX_aY_aZ_a$  (рис. 1.8) ось  $OX_a$  совпадает по направлению с вектором воздушной скорости  $\bar{V}$ , ось подъёмной силы  $OY_a$  перпендикулярна оси  $OX_a$  и лежит в плоскости симметрии ЛА, боковая ось  $OZ_a$  образует с другими осями правую систему координат. Положение ЛА относительно воздушного потока определяется углами атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$ , задающими взаимную ориентацию связанной и скоростной систем координат.

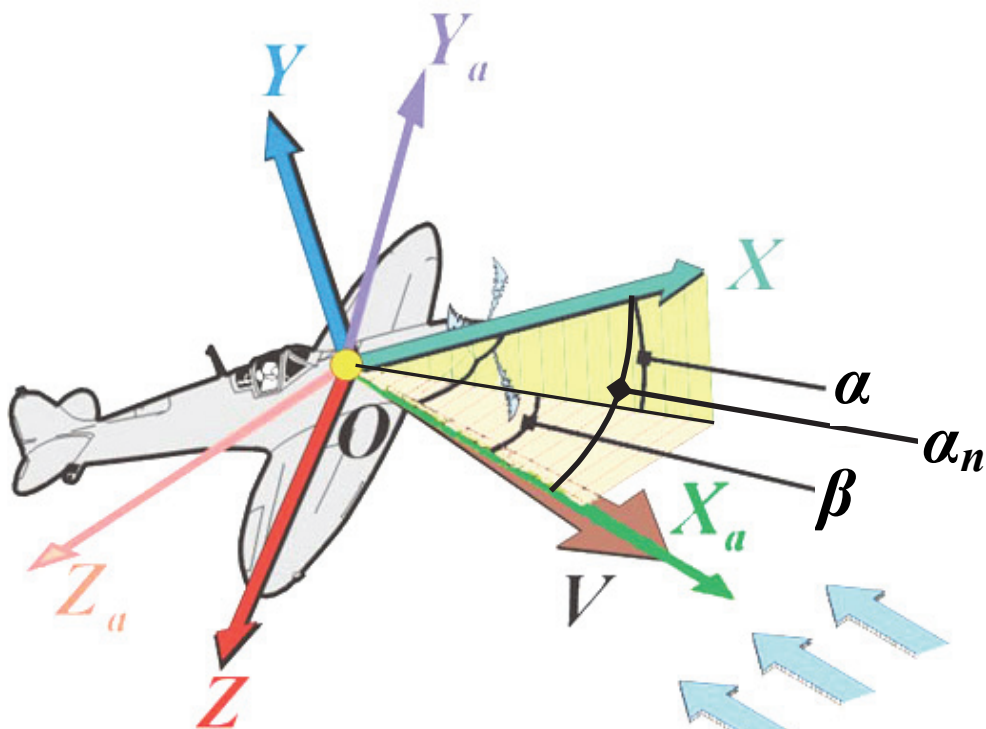


Рис. 1.8. Скоростная система координат  $OX_aY_aZ_a$  и её ориентация относительно связанной системы координат  $OXYZ$

Угол атаки  $\alpha$  – это угол между продольной осью  $OX$  и проекцией воздушной скорости  $\vec{V}$  на плоскость симметрии ЛА.

Угол скольжения  $\beta$  измеряют между вектором воздушной скорости  $\vec{V}$  и плоскостью симметрии ЛА.

В некоторых случаях рассматривают пространственный угол атаки  $\alpha_n$  – это угол между осью  $OX$  и вектором воздушной скорости  $\vec{V}$ .

По отношению к нормальной системе координат скоростная система координат повернута на скоростные углы рыскания, тангажа и крена  $\psi_a$ ,  $\vartheta_a$  и  $\gamma_a$ , введённые по аналогии с эйлеровыми углами  $\psi$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$  для связанной системы координат (рис. 1.9).

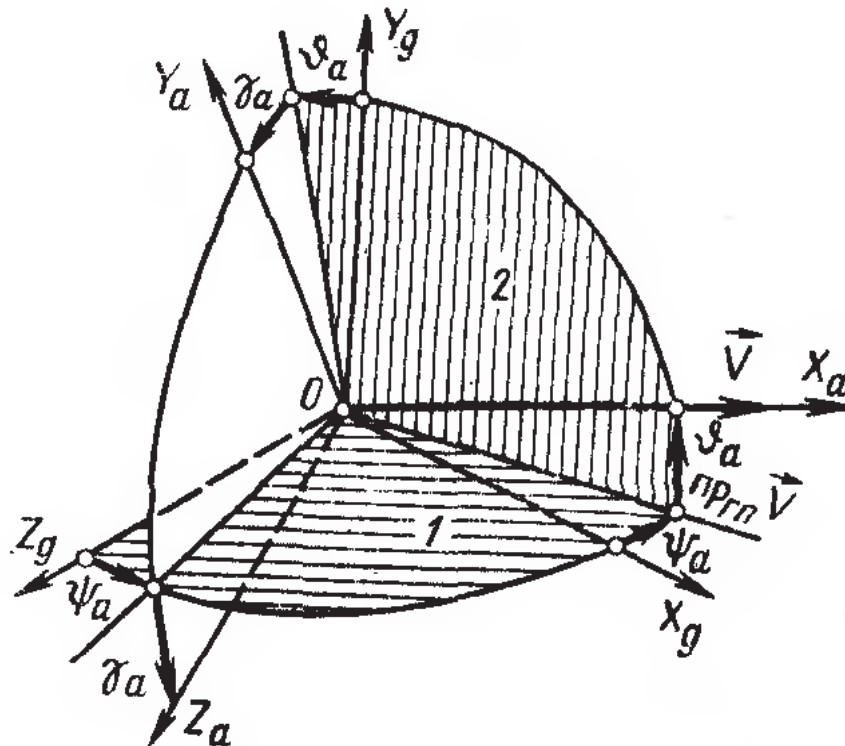


Рис. 1.9. Взаимная ориентация скоростной  $OX_a Y_a Z_a$  и нормальной  $OX_g Y_g Z_g$  систем координат: 1 – местная горизонтальная плоскость; 2 – вертикальная плоскость, содержащая вектор воздушной скорости

Траекторная система координат  $OX_k Y_k Z_k$  (рис. 1.10) определяется так: ось  $OX_k$  направлена по вектору земной скорости  $\vec{V}_k$ , ось  $OY_k$  лежит в вертикальной плоскости, проходящей через вектор  $\vec{V}_k$ , и направлена вверх от поверхности Земли, ось  $OZ_k$  образует с другими осями правую систему координат. Ориентация траекторной системы координат относительно нормальной определяется двумя углами: углом пути и углом наклона траектории.

Угол пути  $\Psi$  (пси заглавная) – это угол между проекцией земной скорости  $\vec{V}_k$  на местную горизонтальную плоскость  $OX_g Y_g$  (путевой скоростью  $\vec{V}_n$ ) и осью  $OX_g$ .

Угол наклона траектории  $\Theta$  (тэта заглавная) образован направлением земной скорости  $\vec{V}_k$  и местной горизонтальной плоскостью  $OX_gY_g$ .

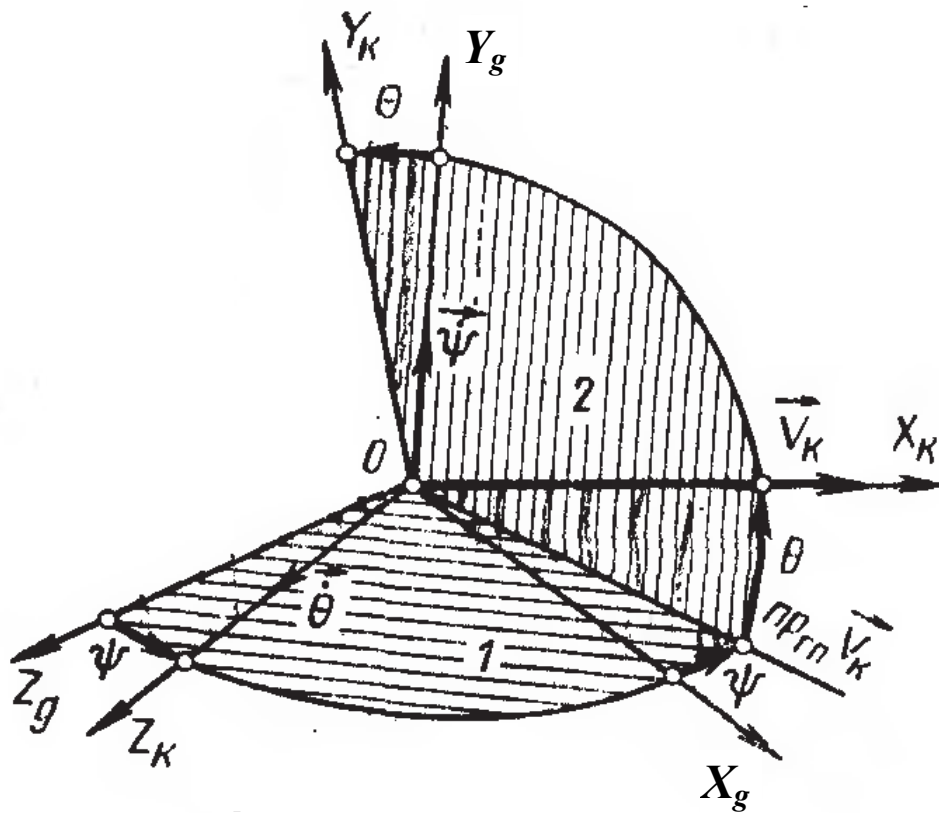





Рис. 1.10. Траекторная система координат  $OX_kY_kZ_k$  и её положение относительно нормальной системы координат  $OX_gY_gZ_g$ :  
1 – местная горизонтальная плоскость; 2 – вертикальная плоскость, содержащая вектор земной скорости

Для перехода от одной системы координат к другой пользуются таблицей направляющих косинусов 1.1 (см. ГОСТ 20058-80 [3]).

Таблица 1.1

Таблица направляющих косинусов

|  |        | Нормальная система координат   |   |   |
|---|--------|--|---|---|
|   |        | $OX_g$   | $OY_g$  | $OZ_g$  |
| Связанная   | $OX$   | $\cos \psi \cos \vartheta$   | $\sin \vartheta$  | $-\sin \psi \cos \vartheta$   |
|   | $OY$   | $\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma$   | $\cos \vartheta \cos \gamma$  | $\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma$  |
|   | $OZ$   | $\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma$   | $-\cos \vartheta \sin \gamma$   | $\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma$  |
| Скоростная  | $OX_a$ | $\cos \psi_a \cos \vartheta_a$   | $\sin \vartheta_a$  | $-\sin \psi_a \cos \vartheta_a$   |
|   | $OY_a$ | $-\cos \psi_a \sin \vartheta_a \cos \gamma_a + \sin \psi_a \sin \gamma_a$  | $\cos \vartheta_a \cos \gamma_a$                                      | $\cos \psi_a \sin \gamma_a + \sin \psi_a \sin \vartheta_a \cos \gamma_a$  |
|   | $OZ_a$ | $\cos \psi_a \sin \vartheta_a \sin \gamma_a + \sin \psi_a \cos \gamma_a$   | $-\cos \vartheta_a \sin \gamma_a$                                     | $\cos \psi_a \cos \gamma_a - \sin \psi_a \sin \vartheta_a \sin \gamma_a$  |
| Траекторная   | $OX_K$ | $\cos \psi \cos \theta$  | $\sin \theta$   | $-\sin \psi \cos \theta$  |
|   | $OY_K$ | $-\cos \psi \sin \theta$   | $\cos \theta$   | $\sin \psi \sin \theta$   |
|   | $OZ_K$ | $\sin \psi$  | 0   | $\cos \psi$   |
| Полусвязанная   | $OX_e$ | $\cos \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \alpha (\sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma)$ | $\cos \alpha \sin \vartheta - \sin \alpha \cos \vartheta \cos \gamma$ | $-\cos \alpha \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)$ |
|   | $OY_e$ | $\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi + \cos \alpha (\sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma)$    | $\sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \gamma$ | $-\sin \alpha \sin \psi \cos \vartheta + \cos \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)$    |
|   | $OZ_e$ | $\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$   | $-\cos \vartheta \sin \gamma$   | $\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma$  |

|    |        | Связанная система координат  |  |                             |
|---|--------|--|--|-----------------------------|
|   |        | $OX$   | $OY$   | $OZ$                        |
| Скоростная  | $OX_a$ | $\cos \alpha \cos \beta$   | $-\sin \alpha \cos \beta$  | $\sin \beta$                |
|   | $OY_a$ | $\sin \alpha$  | $\cos \alpha$  | 0                           |
|   | $OZ_a$ | $-\cos \alpha \sin \beta$  | $\sin \alpha \sin \beta$   | $\cos \beta$                |
| Траекторная   | $OX_K$ | $\cos \alpha \cos \beta$   | $-\sin \alpha \cos \beta$  | $\sin \beta$                |
|   | $OY_K$ | $\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a$ | $\cos \alpha \cos \gamma_a - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_a$ | $-\cos \beta \sin \gamma_a$ |
|   | $OZ_K$ | $\sin \alpha \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a$ | $\cos \alpha \sin \gamma_a + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_a$ | $-\cos \beta \sin \gamma_a$ |
| Полусвязанная   | $OX_e$ | $\cos \alpha$  | $-\sin \alpha$   | 0                           |
|   | $OY_e$ | $\sin \alpha$  | $\cos \alpha$  | 0                           |
|   | $OZ_e$ | 0  | 0  | 1                           |
| Примечание. Для траекторной системы соотношения даны без учета ветра. При наличии ветра использовать $\alpha_c$ , $\beta_c$ , $\gamma_c$ или двойной переход от связанных осей к траекторным через нормальные |        |  |  |                             |
|    |        | Скоростная система координат                                       |  |                             |
|   |        | $OX_a$   | $OY_a$   | $OZ_a$                      |
| Траекторная   | $OX_K$ | 1  | 0  | 0                           |
|   | $OY_K$ | 0  | $\cos \gamma_a$  | $-\sin \gamma_a$            |
|   | $OZ_K$ | 0  | $\sin \gamma_a$  | $\cos \gamma_a$             |
| Полусвязанная   | $OX_e$ | $\cos \beta$   | 0  | $-\sin \beta$               |
|   | $OY_e$ | 0  | 1  | 0                           |
|   | $OZ_e$ | $\sin \beta$   | 0  | $\cos \beta$                |
| Примечание. Без ветра. При наличии ветра использовать двойной переход от скоростной к траекторной системе через нормальную  |        |  |  |                             |



### 1.3. Скалярная форма записи уравнений движения центра масс летательных аппаратов

Уравнения (1.4) нельзя использовать непосредственно для расчёта траекторий и ЛТХ ЛА. Их необходимо записать в скалярной форме. Обычным методом перехода является запись уравнений (1.4) в проекциях на три взаимно перпендикулярных направления, заданных единичными ортами  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , которые образуют оси той или иной системы координат.

Выбор системы координат диктуется соображениями простоты записи уравнений движения и сил для решения конкретных задач. Например, при расчёте ЛТХ динамическое уравнение рассматривают в проекциях на оси траекторной системы координат, а кинематическое уравнение – в проекциях на оси нормальной системы координат. Кроме того, реактивные силы задаются в связанной системе координат, а аэродинамические силы – в скоростной системе координат.

Для определения изменения положения ц.м. ЛА в зависимости от скорости  $V$  спроецируем кинематическое уравнение системы (1.4) на оси нормальной системы координат, используя таблицы направляющих косинусов:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}; \quad \bar{r}(x_g, y_g, z_g) \text{ – в нормальной системе координат;}$$

$$\bar{V}(V, 0, 0) \text{ – в траекторной системе координат.}$$

Спроецируем отрезок, лежащий на оси  $OX_k$ , по осям  $OX_g$ ,  $OY_g$ ,  $OZ_g$ . Направляющие косинусы  $(\cos\Psi \cdot \cos\Theta, \sin\Theta, -\sin\Psi \cdot \cos\Theta)$ . Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_g = \frac{dL}{dt} = \dot{L} = V \cdot \cos\Psi \cdot \cos\Theta; \\ \dot{y}_g = \frac{dH}{dt} = \dot{H} = V_y = V \cdot \sin\Theta; \\ \dot{z}_g = -V \cdot \sin\Psi \cdot \cos\Theta. \end{cases} \quad (1.5)$$

При отсутствии ветра ( $\bar{V}_k = \bar{V}$ ) оси  $OX_a$  и  $OX_k$  совпадают, угол пути совпадает со скоростным углом рыскания ( $\Psi = \psi_a$ ), а угол наклона траектории равен скоростному углу тангажа ( $\Theta = \vartheta_a$ ). Кроме того, если известны углы  $\psi$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$ , определяющие пространственное положение самолёта, а также углы  $\Psi$  и  $\Theta$ , определяющие направление скорости его ц.м. относительно нормальной системы координат, то через них можно однозначно вычислить угол атаки  $\alpha$ , угол скольжения  $\beta$  и скоростной угол крена  $\gamma_a$ .

Определяя из табл. 1.1 косинусы углов между связанными и нормальными осями, а также между скоростными и нормальными осями, по-

сле преобразований получим требуемые тригонометрические соотношения. Например, для угла скольжения  $\beta$  имеем:

$$\begin{aligned} \cos(Z, X_a) = \sin \beta = \bar{k} \cdot \bar{i}_a = \bar{k} \cdot [\cos(X_a, X_g) \cdot \bar{i}_g + \cos(X_a, Y_g) \cdot \bar{j}_g + \\ + \cos(X_a, Z_g) \cdot \bar{k}_g] = \cos(X_a, X_g) \cos(Z, X_g) + \\ + \cos(X_a, Y_g) \cos(Z, Y_g) + \cos(X_a, Z_g) \cos(Z, Z_g) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sin \beta = \cos \Theta [\sin \vartheta \sin \gamma \cos(\Psi - \psi) - \cos \gamma \sin(\Psi - \psi)] - \\ - \sin \Theta \cos \vartheta \sin \gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \frac{1}{\cos \beta} [(\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\Psi - \psi) + \sin \gamma \sin(\Psi - \psi)) \cos \Theta - \\ - \sin \Theta \cos \vartheta \cos \gamma]; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\sin \gamma_a = \frac{1}{\cos \Theta} [\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma)]. \quad (1.8)$$

Вектор угловой скорости самолёта, получающийся за счёт вращения ЛА относительно связанных осей при отклонении рулей и элеронов, равен геометрической сумме угловых скоростей элементарных поворотов, т.е.

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_x + \bar{\omega}_y + \bar{\omega}_z = \bar{\psi} + \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) – это кинематическое уравнение вращательного движения самолёта в векторной форме. Проецируя векторы  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\vartheta}$  и  $\bar{\gamma}$  на оси связанной системы координат  $OXYZ$  с помощью табл. 1.1, получим

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma};$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma;$$

$$\omega_z = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma.$$

Обычно аргументами в данных выражениях являются проекции угловой скорости  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$ , задаваемые через углы отклонения рулей и элеронов. Решая последние уравнения относительно  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\gamma}$ , найдём искомые кинематические соотношения:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \quad (1.10)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - tg\vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad (1.11)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \sec \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (1.12)$$

Если система ортов  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , привязанная к материальной точке, вращается относительно неподвижной системы координат с угловой скоростью  $\bar{\omega}$ , а сама материальная точка движется со скоростью  $\bar{V}$  относительно той же неподвижной системы координат, то в динамическом уравнении системы (1.4) необходимо использовать выражение для полной производной вектора  $\bar{V}$  [4]. Например, если  $\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}$ , тогда

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \left( \bar{i} \frac{dV_x}{dt} + \bar{j} \frac{dV_y}{dt} + \bar{k} \frac{dV_z}{dt} \right) + \left( \frac{d\bar{i}}{dt} V_x + \frac{d\bar{j}}{dt} V_y + \frac{d\bar{k}}{dt} V_z \right) = \frac{\delta \bar{V}}{\delta t} + (\bar{\omega} \times \bar{V}),$$

где  $\frac{\delta \bar{V}}{\delta t}$  – локальная производная, характеризующая быстроту изменения

модуля вектора скорости  $\bar{V}$ ;  $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}$ ;  $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}$ ;  $\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$ .

При движении ц.м. ЛА траекторная система координат вращается относительно нормальной системы с угловой скоростью  $\bar{\omega}_\kappa$ , проекции которой на оси  $OX_\kappa$ ,  $OY_\kappa$  и  $OZ_\kappa$  составят

$$\omega_{x\kappa} = \dot{\Psi} \cdot \sin \Theta; \quad \omega_{y\kappa} = \dot{\Psi} \cdot \cos \Theta; \quad \omega_{z\kappa} = \dot{\Theta}. \quad (1.13)$$

Спроецируем динамическое уравнение системы (1.4) на вращающиеся оси траекторной системы координат  $OX_\kappa$ ,  $OY_\kappa$  и  $OZ_\kappa$

$$m(t) \cdot \left[ \frac{\delta \bar{V}}{\delta t} + (\bar{\omega}_\kappa \times \bar{V}) \right] = \bar{P} + \bar{R}_a + \bar{G}. \quad (1.14)$$

Векторы в левой части уравнения имеют проекции в траекторной системе координат  $\bar{V} = (V, 0, 0)$ ;  $\frac{\delta \bar{V}}{\delta t} = (\dot{V}, 0, 0)$ . Тогда с учётом (1.13) получим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\kappa \times \bar{V} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_{x\kappa} & \omega_{y\kappa} & \omega_{z\kappa} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{y\kappa} & \omega_{z\kappa} \\ V_y & V_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{x\kappa} & \omega_{z\kappa} \\ V_x & V_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{x\kappa} & \omega_{y\kappa} \\ V_x & V_y \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot \bar{i} + (\dot{V} \cdot \dot{\Theta}) \cdot \bar{j} + (-V \cdot \dot{\Psi} \cdot \cos \Theta) \cdot \bar{k}; \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_k \times \bar{V} = (0, V \cdot \dot{\Theta}, -V \cdot \dot{\Psi} \cdot \cos \Theta).$$

Рассмотрим векторы в правой части уравнения (1.14). Тяга силовой установки  $P$  обычно лежит в плоскости симметрии самолёта  $XOY$  и составляет угол  $\varphi_p$  с положительным направлением оси  $OX$ . Используя таблицу направляющих косинусов 1.1 между осями связанной и траекторной систем координат, найдём проекции тяги на оси траекторной системы координат

$$\begin{aligned} P_{xk} &= P \cos(\alpha + \varphi_p) \cos \beta; \\ P_{yk} &= P [\sin(\alpha + \varphi_p) \cos \gamma_a + \cos(\alpha + \varphi_p) \sin \beta \sin \gamma_a]; \\ P_{zk} &= P [\sin(\alpha + \varphi_p) \sin \gamma_a - \cos(\alpha + \varphi_p) \sin \beta \cos \gamma_a]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Проекции аэродинамической силы  $R_a$  на оси траекторной системы координат выражаются через проекции на скоростные оси

$$\begin{aligned} R_{axk} &= -X_a; \\ R_{ayk} &= Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a; \\ R_{azk} &= Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a. \end{aligned} \quad \dots\dots(1.16)$$

Вектор  $\bar{G}$  имеет следующие проекции (рис. 1.11):

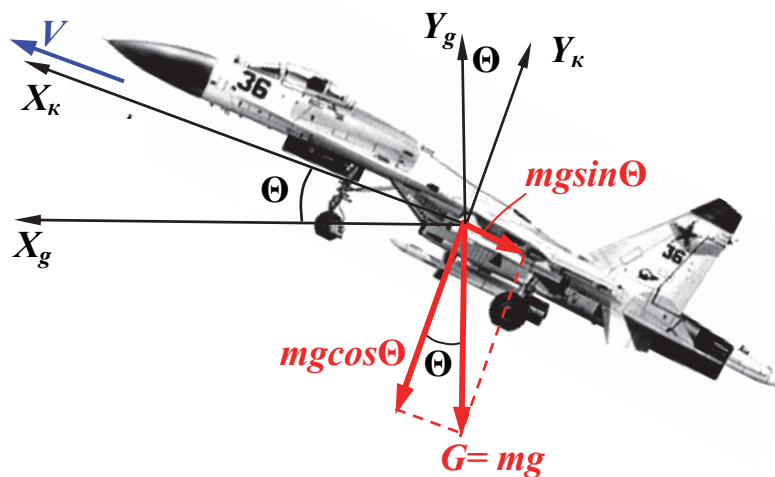


Рис. 1.11. Вектор  $\bar{G}$  и его проекции

$$\begin{cases} G_{xk} = -mg \cdot \sin \Theta; \\ G_{yk} = -mg \cdot \cos \Theta; \\ G_{zk} = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Таким образом, векторное уравнение (1.14) эквивалентно трём скалярным уравнениям

$$\begin{cases} m\dot{V} = F_{xк} = P_{xк} + R_{axк} + G_{xк} ; \\ mV \cdot \dot{\Theta} = F_{yк} = P_{yк} + R_{ayк} + G_{yк} ; \\ -mV \cdot \dot{\Psi} \cdot \cos \Theta = F_{zк} = P_{zк} + R_{azк} + G_{zк} . \end{cases} \quad (1.18)$$

Здесь проекции сил определяются уравнениями (1.15)...(1.17), т.е.

$$F_{xк} = P \cos(\alpha + \varphi_p) \cos \beta - X_a - mg \sin \Theta ;$$

$$F_{yк} = P [\sin(\alpha + \varphi_p) \cos \gamma_a + \cos(\alpha + \varphi_p) \sin \beta \sin \gamma_a] + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - mg \cos \Theta ;$$

$$F_{zк} = P [\sin(\alpha + \varphi_p) \sin \gamma_a - \cos(\alpha + \varphi_p) \sin \beta \cos \gamma_a] + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a .$$

Первое уравнение системы (1.18) определяет изменение модуля скорости ц.м. ЛА, второе и третье – изменение кривизны траектории соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

В курсе «Динамика полёта» в основном рассматривают частные полётные случаи, а именно:

а) полёт в вертикальной плоскости без крена и скольжения, при этом  $\beta = 0$ ;  $\gamma = 0$ ;  $\psi = \Psi$  и  $\vartheta = \alpha + \Theta$ ;

б) полёт в горизонтальной плоскости без крена с малыми углами атаки, при этом  $\Theta = 0$ ;  $\gamma = 0$ ;  $\sin \alpha \approx 0$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ ;  $\cos \vartheta \approx 1$ ;  $\vartheta = \alpha$ ;  $\beta = \psi - \Psi$ ;

в) полёт без скольжения с малыми углами атаки, тогда  $\beta = 0$ ;  $\sin \alpha \approx 0$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ ;  $\vartheta \approx \Theta$  и  $\gamma_a = \gamma$  (при отсутствии ветра).

#### 1.4. Уравнения движения в перегрузках

Введём понятие перегрузки, широко применяемое в динамике полёта. Перегрузкой называется геометрическая сумма всех сил, действующих на ЛА, за исключением силы тяжести, отнесённая к величине силы тяжести [2, 4]

$$\bar{n} = \frac{\bar{P} + \bar{R}_a}{G} = \frac{\bar{P} + \bar{R}_a}{mg} . \quad (1.19)$$

Перегрузка – это вектор, обычно раскладываемый по осям скоростной системы координат. Тангенциальная перегрузка  $n_{xa}$  совпадает с вектором скорости  $\bar{V}$ , нормальная перегрузка  $n_{ya}$  направлена по оси подъёмной силы  $Y_a$ , боковая перегрузка  $n_{za}$  совпадает с осью  $OZ_a$ .

Запишем (1.19) в скалярной форме. Полагаем, что вектор тяги  $\bar{P}$  имеет проекции в связанной системе координат  $(P \cos \varphi_p, P \sin \varphi_p, 0)$ , а вектор

аэродинамических сил  $\bar{R}_a$  имеет проекции в скоростной системе координат  $(-X_a, Y_a, Z_a)$ . Применяв таблицу направляющих косинусов 1.1, получим

$$\begin{cases} n_{xa} = \frac{P \cos(\alpha + \varphi_p) \cos \beta - X_a}{mg}; \\ n_{ya} = \frac{P \sin(\alpha + \varphi_p) + Y_a}{mg}; \\ n_{za} = \frac{-P \cos(\alpha + \varphi_p) \sin \beta + Z_a}{mg}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Используя эти выражения и таблицу направляющих косинусов 1.1, запишем вектор перегрузки в проекциях на оси траекторной системы координат (при отсутствии ветра)

$$\begin{cases} n_{xk} = n_{xa}; \\ n_{yk} = n_{ya} \cos \gamma_a - n_{za} \sin \gamma_a; \\ n_{zk} = n_{ya} \sin \gamma_a + n_{za} \cos \gamma_a. \end{cases}$$

С учётом (1.17) и (1.20) уравнения (1.18) примут вид

$$m\dot{V} = P \cos(\alpha + \varphi_p) \cos \beta - X_a - mg \cdot \sin \Theta = n_x mg - mg \cdot \sin \Theta;$$

$$\begin{cases} \dot{V} = g \cdot (n_{xa} - \sin \Theta); \\ \dot{\Theta} = \frac{g}{V} (n_{ya} \cos \gamma - n_{za} \sin \gamma - \cos \Theta); \\ \dot{\Psi} = -\frac{g}{V \cos \Theta} (n_{ya} \sin \gamma + n_{za} \cos \gamma). \end{cases} \quad (1.21)$$

Уравнения (1.21) называют уравнениями движения в перегрузках, они определяют изменение вектора скорости по величине и направлению в зависимости от действующих на ЛА перегрузок.

Девять кинематических уравнений (1.5), (1.6)–(1.8), (1.10)–(1.12), а также три динамических уравнения в форме (1.18) или (1.21) описывают пространственное движение ц.м. самолёта. К ним добавляют уравнение расхода масс

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = -\beta_{сек} = -\frac{P \cdot c_{PR}}{3600}. \quad (1.22)$$

где  $\beta_{сек}$  – секундный расход топлива;  $c_{PR}$  – удельный часовой расход топлива с учётом дросселирования двигателей.

В итоге получают систему из тринадцати обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, интегрирование которой в общем случае производится численными методами.

## 1.5. Исходные данные для интегрирования уравнений движения

Для решения уравнений движения должны быть заданы аэродинамические характеристики самолёта (зависимости  $c_{ya} = c_{ya}(\alpha, M)$  и  $c_{xa} = c_{xa}(\alpha, M)$  (рис. 1.12), а также поляры  $c_{ya} = c_{ya}(c_{xa}, M)$  (рис. 1.13) в крейсерской, взлётной и посадочной конфигурациях), характеристики силовой установки (дрессельные  $c_{PR}(R)$  (рис. 1.14), тяговые высотно-скоростные  $P(M, H)$  (рис. 1.15), расходные высотно-скоростные  $c_P(M, H)$  (рис. 1.16)), а также абсолютные ( $G_0$  – взлётный вес ЛА,  $S$  – площадь крыла,  $P_0$  – стартовая тяга) или относительные параметры самолёта (удельная нагрузка на крыло  $p = G/S$ , стартовая тяговооружённость  $\bar{P}_0 = P_0/G_0$ ), ограничения режимов полёта (рис. 1.17), начальные значения параметров движения ( $V_0, \Theta_0, \Psi_0, L_0, H_0, Z_0$ ).

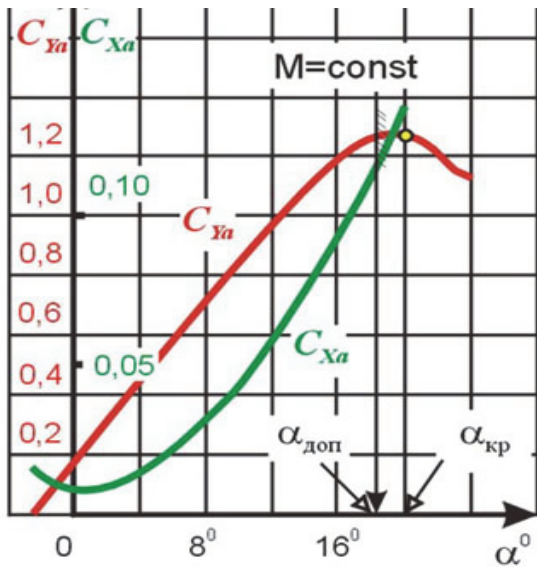


Рис. 1.12. Типовые зависимости  $c_{ya} = c_{ya}(\alpha)$  и  $c_{xa} = c_{xa}(\alpha)$

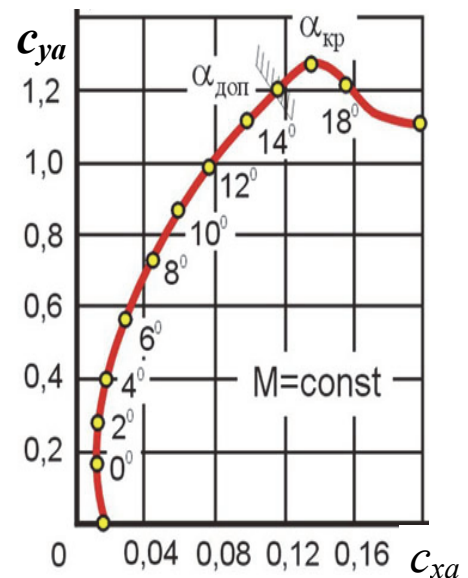


Рис. 1.13. Типовая поляра  $c_{ya} = c_{ya}(c_{xa})$

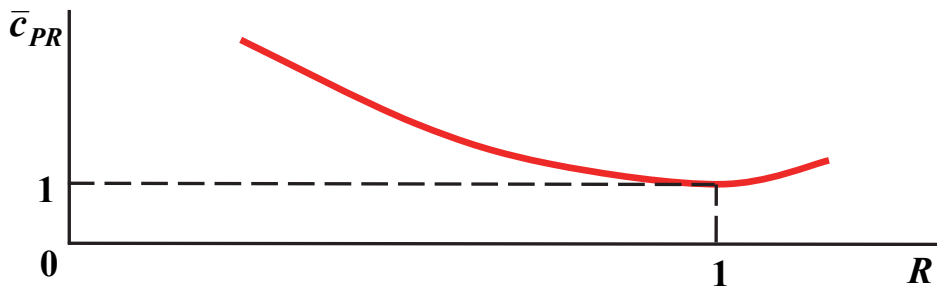


Рис. 1.14. Дрессельная характеристика силовой установки

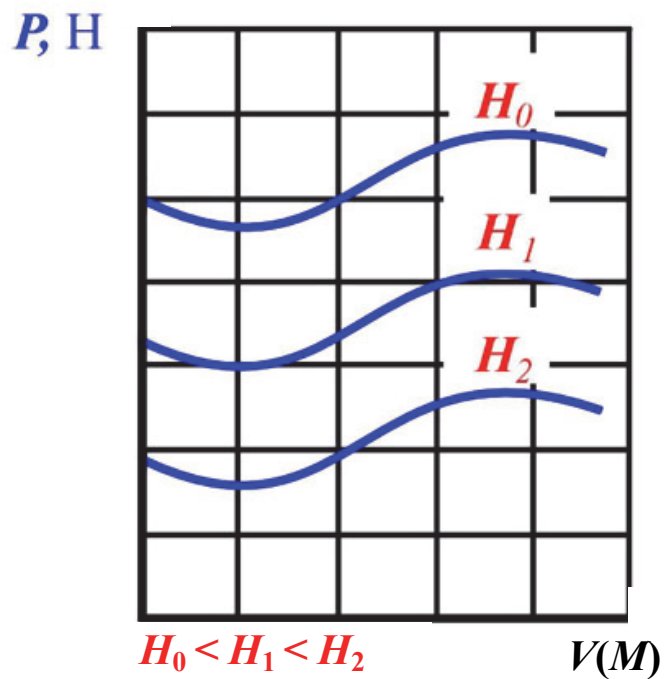


Рис. 1.15. Тяговые высотно-скоростные характеристики силовой установки ЛА

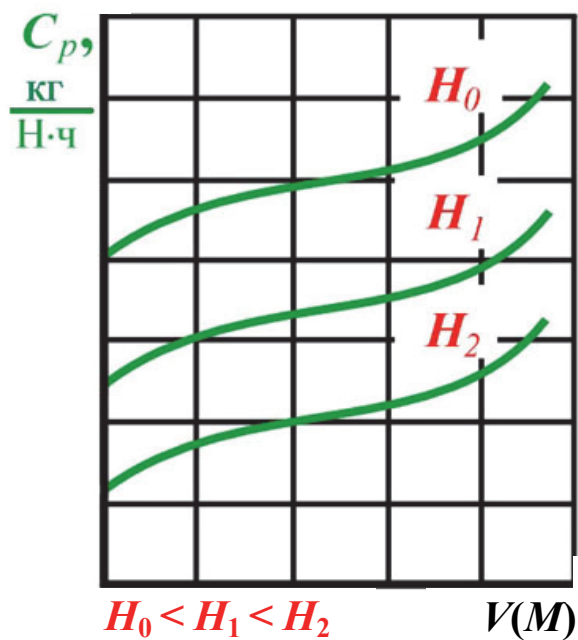


Рис. 1.16. Расходные высотно-скоростные характеристики силовой установки ЛА



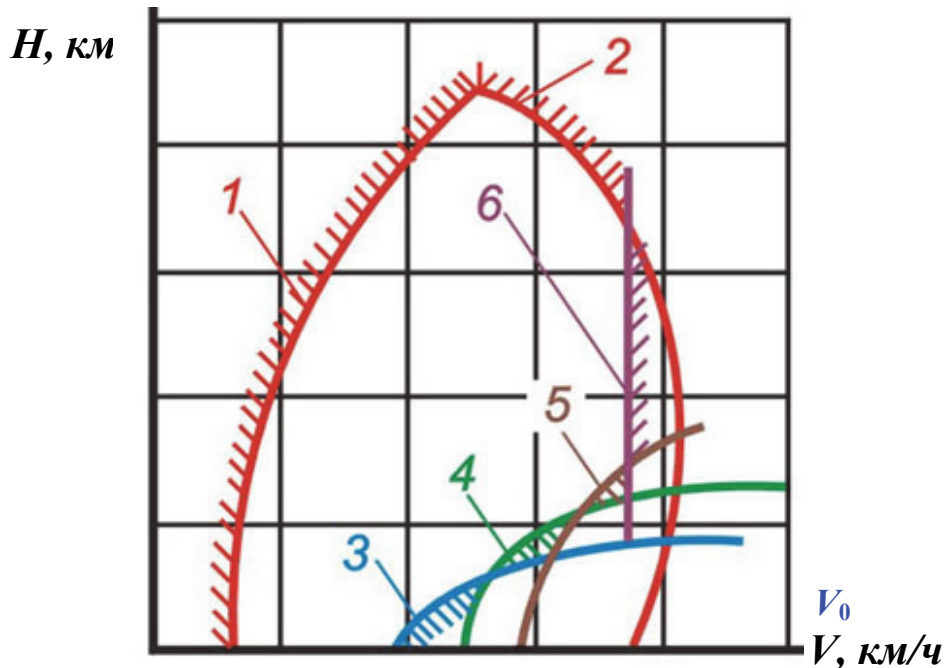


Рис. 1.17. Эксплуатационный диапазон высот и скоростей полёта ЛА с учётом ограничений:  
 1 – ограничение по  $V_{min}$ ; 2 – ограничение по  $V_{max}$ ;  
 3 – ограничение по переносимости человеком болтанки;  
 4 – ограничение по прочности конструкции при болтанке;  
 5 – ограничение по предельному скоростному напору для конструкции;  
 6 – ограничение по кинетическому нагреву конструкции

Расчёт и сравнение лётных данных и характеристик движения самолётов проводят для значений термодинамических параметров воздуха ( $\rho_H$ ,  $T_H$ ,  $\rho_H$ ,  $a_H$ ), соответствующих на данной высоте стандартной атмосфере (МСА или ISA), определяемой по ГОСТ 4401-81 [5].

## 2. РАСЧЁТ ЛЁТНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК САМОЛЁТА ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ПОЛЁТА

В основе этого расчёта лежит метод тяг Н. Е. Жуковского [2, 4, 6, 7]. Его идея заключается в сравнении требуемого значения тяги  $P_n$  для осуществления выбранного режима полёта с располагаемым значением тяги  $P_p$ , которое обеспечивает установленная на самолёте силовая установка.

При расчёте ЛТХ самолёта принимают следующие допущения:

1) движение самолёта (ЛА) происходит в вертикальной плоскости без крена и скольжения ( $\gamma_a = \beta = \dot{\Psi} = 0$ );

2) набор высоты и снижение осуществляются по равновесным траекториям, близким к прямолинейным, с малыми углами  $\Theta$  ( $\cos\Theta \approx 1$ ;  $\dot{\Theta} = 0$ ;  $n_{ya} = 1$ );

3) режимы движения характеризуются малыми углами атаки ( $P \cdot \cos(\alpha + \varphi_p) \approx P$ ;  $P \cdot \sin(\alpha + \varphi_p) \ll Y_a$ ).

С учётом этих допущений уравнения движения (1.5) и (1.22) примут вид

$$\begin{cases} \dot{V} = g \cdot (n_{xa} - \sin \Theta); n_{ya} = 1; \\ \frac{dL}{dt} = V; \dot{H} = V \cdot \sin \Theta, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$n_{xa} = \frac{P - X_a}{mg}; n_{ya} = \frac{Y_a}{mg}. \quad (2.2)$$

## 2.1. Диаграмма потребных и располагаемых тяг

Под располагаемой тягой  $P_p$  понимается максимальная суммарная тяга всех двигателей на самолёте, определённая для данного режима полёта ( $H$  и  $V(M)$ ). Потребная  $P_n$  тяга для установившегося горизонтального полёта подбирается лётчиком (она равна силе аэродинамического сопротивления самолёта).

Запишем динамические уравнения для режима установившегося горизонтального полёта ( $V = H = \text{const}$ ,  $\Theta = 0$ ), представленного на рис. 2.1,

$$n_{xa} = 0; n_{ya} = 1. \quad (2.3)$$

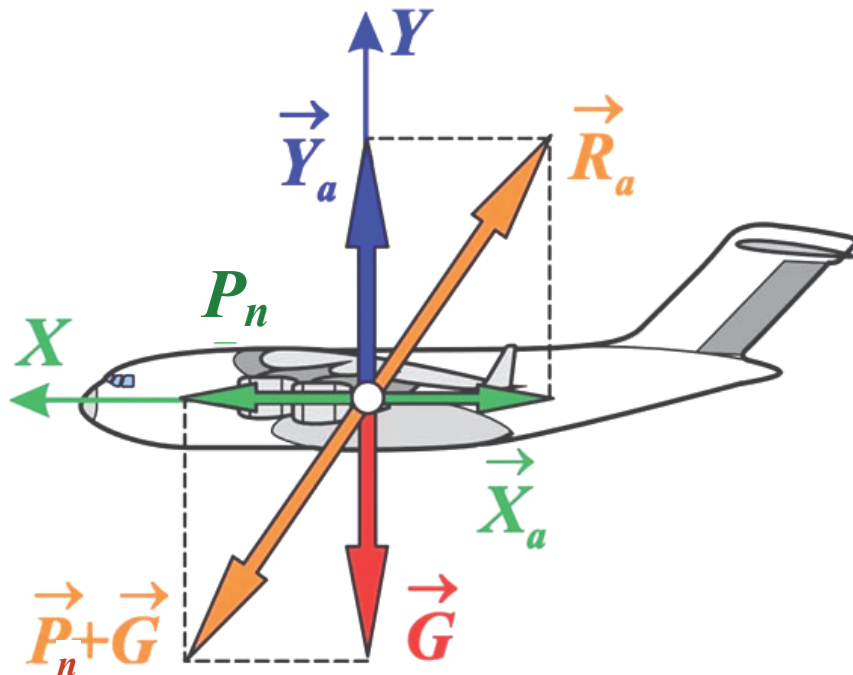


Рис. 2.1. Режим установившегося горизонтального полёта

С учётом (2.2) уравнения (2.3) примут вид

$$P_n = X_a; Y_a = G = mg; P_n = \frac{mg}{\kappa}, \quad (2.4)$$

где  $\kappa$  – аэродинамическое качество самолёта (ЛА) на данном режиме полёта.

Последовательность расчёта  $P_n$  при фиксированных значениях  $M(V)$  и  $H$  такова. Сначала из второго уравнения системы (2.4) определяем

$$c_y = \frac{mg}{(0,7\rho_H M^2) \cdot S} = \frac{mg}{\left(\frac{\rho_H V^2}{2}\right) \cdot S},$$

затем по поляре находим  $c_x$  и, наконец,

$$P_n = c_x (0,7\rho_H M^2) \cdot S = c_x \left(\frac{\rho_H V^2}{2}\right) \cdot S.$$

На рис. 2.2 показан совмещённый график потребной и располагаемой тяги для заданной высоты при определённых массе самолёта (ЛА) и условиях полёта.

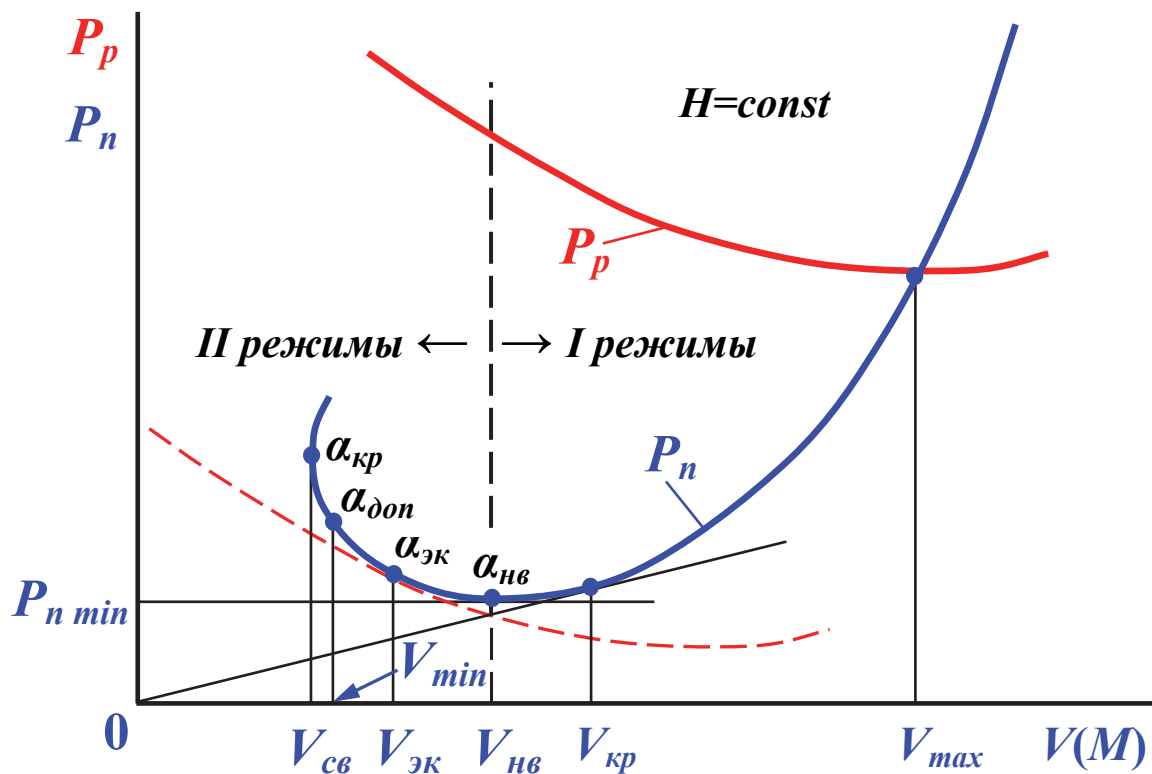


Рис. 2.2. Кривые потребной  $P_n$  и располагаемой  $P_p$  тяги

Здесь указано несколько характерных скоростей горизонтального полёта:  $V_{св}$  – скорость сваливания, соответствующая углу атаки  $\alpha = \alpha_{кр}$  ( $c_y = c_{y max}$ );  $V_{min}$  – практическая минимальная скорость, определяемая углом атаки

$\alpha_{доп} \approx \alpha_{кр} - 3^0$  ( $c_{yдоп} \approx (0,8 \dots 0,85) c_{ymax}$ );  $V_{эк}$  – экономическая скорость полёта на экономическом угле атаки  $\alpha_{эк}$ , при этом потребная мощность минимальна (полет с такой скоростью является наиболее продолжительным, практически же скорость такого полета больше скорости экономической, экономическая скорость равна примерно 0,75 наивыгоднейшей скорости);  $V_{нв}$  – наивыгоднейшая скорость, соответствующая минимальной потребной тяге (полёт на максимальном аэродинамическом качестве  $\kappa_{max} = (c_y/c_x)_{max}$ );  $V_{кр}$  – крейсерская скорость, определяемая минимальным отношением потребной тяги к скорости (при слабой зависимости удельного расхода топлива от скорости полёта близка к режиму минимального километрового расхода топлива или крейсерскому режиму, обеспечивающему максимальную дальность полёта);  $V_{max}$  – максимальная скорость горизонтального установившегося полёта на данной высоте.

Скорость  $V_{нв}$  делит скоростной диапазон полётов на данной высоте на две части: справа от  $V_{нв}$  имеем так называемые *I режимы*, слева от  $V_{нв}$  – так называемые *II режимы*. На *I режимах* самолёт устойчив по скорости, на *II режимах* – неустойчив по скорости. Полёт на *II режимах* нежелателен, так как в этом случае усложняется пилотирование самолёта, что при близости к критическому углу атаки небезопасно. Опасность повышается ещё и из-за того, что на малых скоростях самолёт сравнительно быстро её теряет. При полёте на *II режимах* произвольное изменение скорости (например, при воздействии ветра), нарушает равновесие сил, которое без вмешательства пилота уже не восстанавливается на прежней скорости.

Поскольку полёт дозвукового неманевренного самолёта на вторых режимах нежелателен, то, практически, минимальной скоростью горизонтального полёта является  $V_{нв}$ . Как правило, полёт на *II режимах* при нормальной эксплуатации самолёта имеет место только на этапе посадки.

У сверхзвуковых самолётов возможны две области *I режимов* и две области *II режимов* полёта, по одному в дозвуковой и сверхзвуковой зонах (рис. 2.3).

*II режим* в сверхзвуковой зоне из-за сравнительно медленного изменения скорости и сохранения хорошей управляемости самолёта опасности для пилотирования не представляет. На больших высотах полёт сверхзвукового самолёта выполняется, как правило, на вторых режимах.

Обычно на одном графическом поле строят семейства кривых потребных и располагаемых тяг для нескольких высот (рис. 2.4).

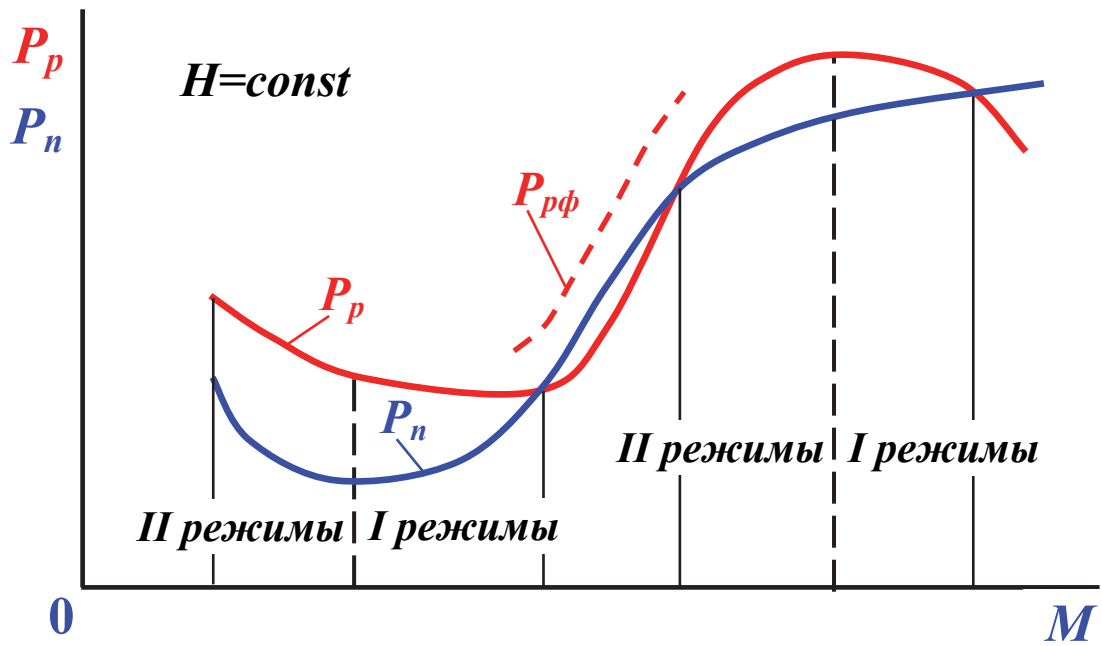


Рис. 2.3. Зоны первых и вторых режимов для сверхзвукового самолёта

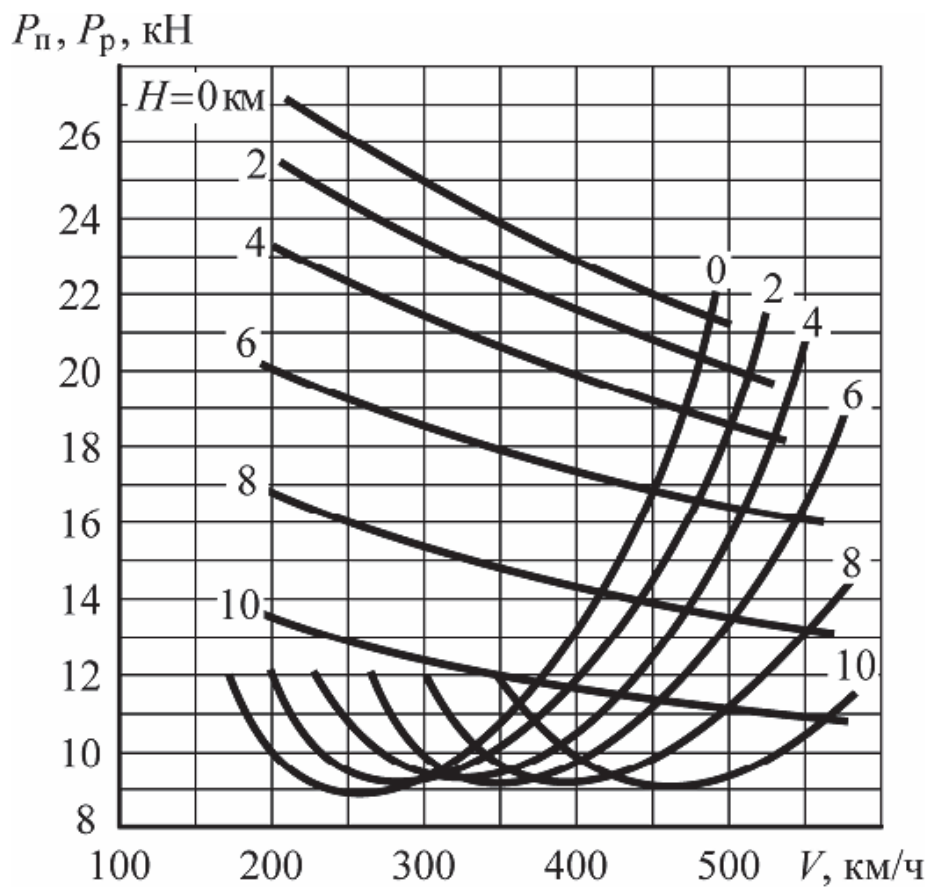


Рис. 2.4. Семейства кривых потребных и располагаемых тяг

## 2.2. Установившийся набор высоты. Скороподъёмность летательного аппарата

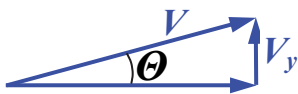
Запишем уравнения (2.1) для установившегося набора высоты ( $\dot{V} = 0$ )

$$n_{xa} = \sin \Theta ; n_{ya} = 1. \quad (2.5)$$

Из (2.5) получим  $\sin \Theta = n_{xa} = \frac{P - X_a}{mg} = \frac{P_p - P_n}{mg} = \frac{\Delta P}{mg}$ . (2.6)

А из (2.6) следует, что для подъёма по наиболее крутой траектории полёт необходимо совершать при скорости  $V_{нв}$ , когда избыточная тяга  $\Delta P$  максимальна.

Вертикальная скорость самолёта



$$V_y = \dot{H} = V \cdot \sin \Theta = \frac{\Delta P \cdot V}{mg} = \frac{\Delta N}{mg}, \quad (2.7)$$

где  $\Delta N = N_p - N_n$  – избыточная мощность. При максимальной избыточной мощности ( $\Delta N = \Delta N_{max}$ ) вертикальная скорость максимальна ( $V_y = V_{ymax}$ ). Для дозвуковых ЛА это соответствует скорости на 20...30 % больше  $V_{нв}$ .

Кривые скороподъёмности для дозвукового и сверхзвукового самолётов приведены на рис. 2.5 и 2.6.

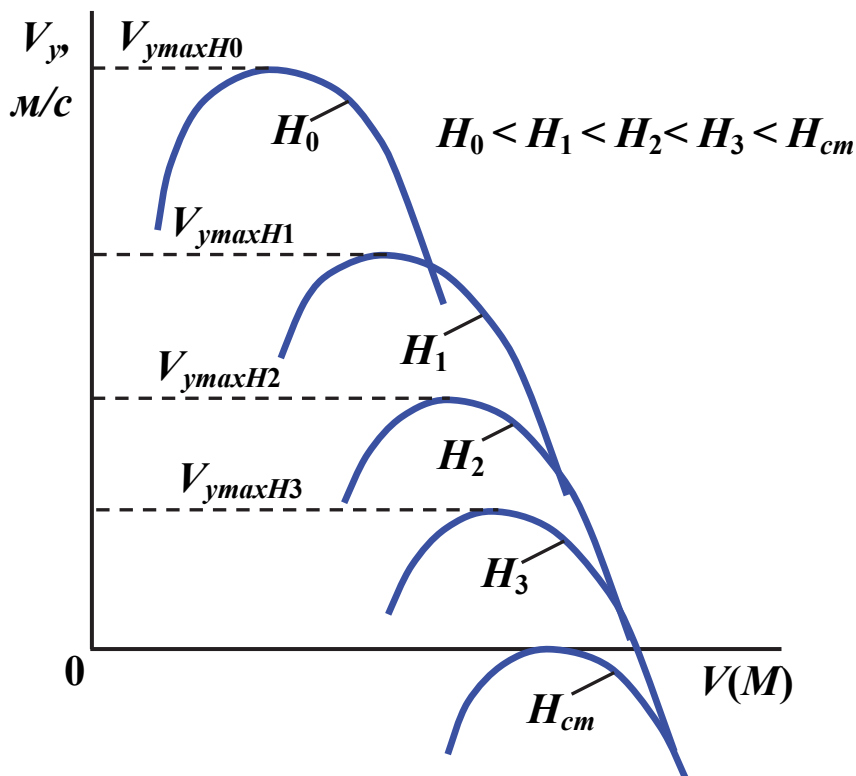


Рис. 2.5. Кривые скороподъёмности дозвукового самолёта

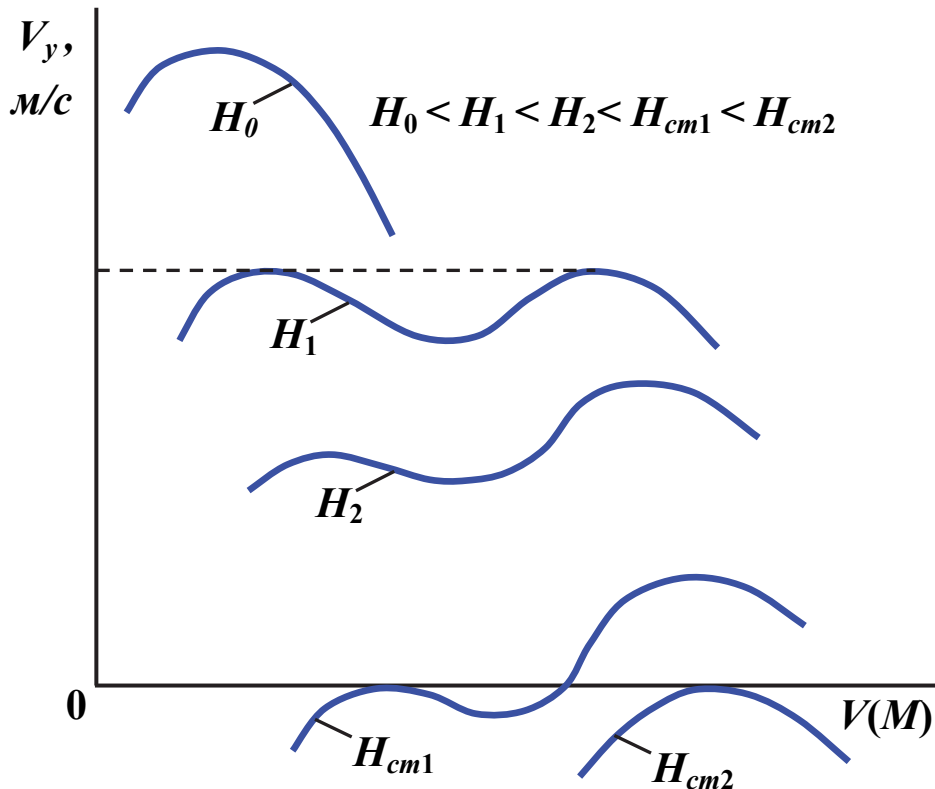


Рис. 2.6. Кривые скороподъёмности сверхзвукового самолёта

На статическом (теоретическом) потолке  $H_{cm}$  максимальная скороподъёмность  $V_{ymax} = 0$ . На практическом потолке  $H_{np}$  максимальная скороподъёмность  $V_{ymax}$  должна быть не менее заданной величины, которая для дозвуковых самолётов составляет 3...5 м/с, а для сверхзвуковых самолётов – 2...3 % от  $V_{ymax}$  у земли. Для сверхзвуковых самолётов подъём следует проводить сначала до высоты  $H_1$  на дозвуковой скорости, далее на сверхзвуке (рис. 2.7).

Динамический потолок  $H_d = H_{cm} + \frac{V_{cm}^2}{2g}$ . Его самолёт может достигнуть только в неустановившемся полёте.

Время набора высоты найдём из уравнения

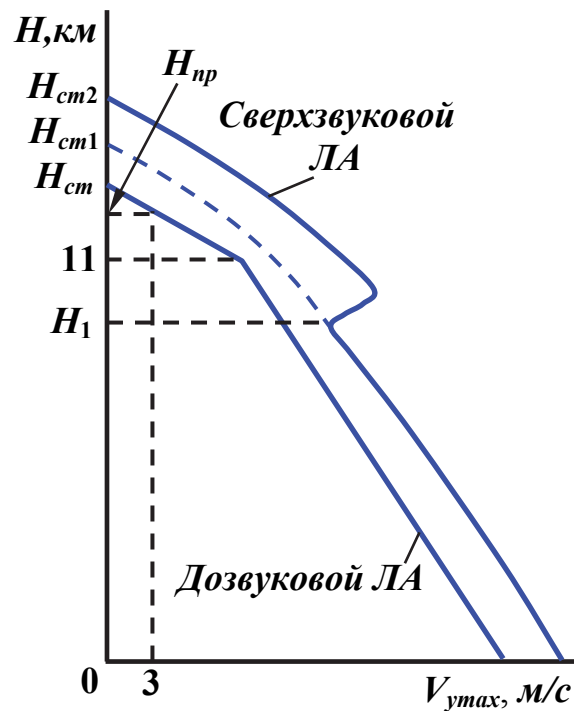


Рис. 2.7. Определение потолков

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = V_y \Rightarrow dt = \frac{dH}{V_y}.$$

Отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \int_0^H \frac{dH}{V_y}; \\ t_{\min} = \int_0^H \frac{dH}{V_{y \max}}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Графическая зависимость высоты  $H$  от минимального времени её набора называется барограммой подъёма (рис. 2.8). Это название сложилось исторически и объясняется тем, что первоначально данная кривая вычерчивалась барографом, т.е. барометром-самописцем.

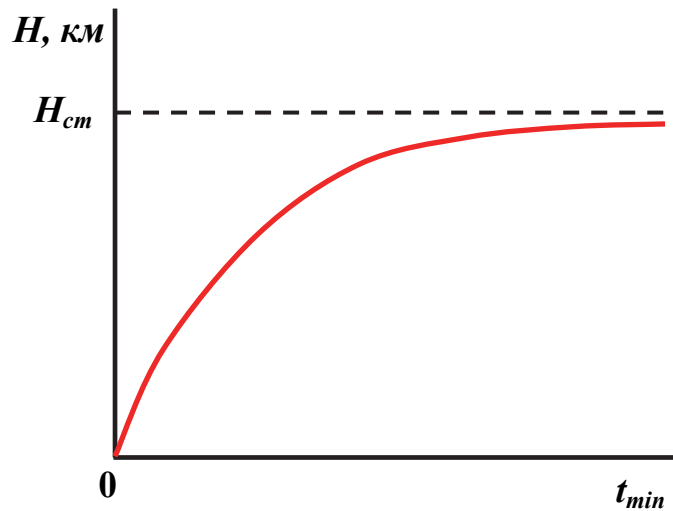
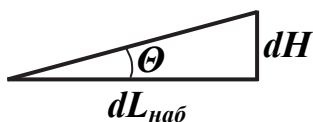


Рис. 2.8. Барограмма подъёма

Дальность при установившемся наборе высоты найдём из уравнения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dH}{dL_{\text{наб}}} \approx \sin \Theta \Rightarrow dL_{\text{наб}} = \frac{dH}{n_{xa}} = \frac{dH \cdot mg}{\Delta P}.$$

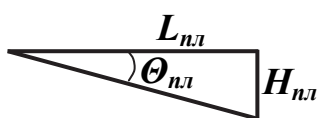


Отсюда

$$L_{\text{наб}} = \int_0^H \frac{dH \cdot mg}{\Delta P} = mg \int_0^H \frac{dH}{\Delta P}. \quad (2.9)$$

### 2.3. Установившееся снижение самолёта. Планирование

Если  $P_p < P_n$ , то угол наклона траектории  $\Theta < 0$  и самолёт летит со



снижением  $\sin \Theta_{\text{сн}} = n_{xa} = \frac{P_p - P_n}{mg} = \frac{\Delta P}{mg} < 0.$



При планировании, когда маршевая силовая установка не работает или находится в режиме «малый газ»,  $P_p = 0$  и тогда

$$\sin \Theta_{nl} = -\frac{P_n}{mg} = -\frac{X_a}{mg} = -\frac{1}{\kappa}.$$

Обычно угол  $\Theta_{nl}$  мал, поэтому

$$\sin \Theta_{nl} \approx \text{tg} \Theta_{nl} = -\frac{1}{\kappa} = -\frac{H_{nl}}{L_{nl}}. \quad (2.10)$$

Отсюда  $L_{nl} = \kappa \cdot H_{nl} = \kappa \cdot (H_2 - H_1)$  и  $L_{nl \max} = \kappa_{\max} \cdot (H_2 - H_1)$ . (2.11)

Скорость установившегося планирования

$$V_{nl} = \sqrt{\frac{2mg \cdot \cos \Theta_{nl}}{c_{y_{nl}} \cdot \rho_H \cdot S}}. \quad (2.12)$$

Эта скорость зависит от высоты, поэтому планирование на постоянных  $\alpha_{nl}$  и  $\Theta_{nl}$  не является строго установившимся и должно рассматриваться как квазиустановившееся.

Таким образом, формулы (2.7) – (2.12) полностью описывают квазиустановившееся движение самолёта в вертикальной плоскости при наборе высоты и снижении.

## 2.4. Метод мощностей

Для самолётов с винтовыми или вентиляторными двигателями расчёт ЛТХ обычно проводят по методу мощностей, поскольку характеристики двигателей таких ЛА (ПД, ТВД или ТВлД) задаются в зависимости от их мощности.

Вместо графиков требуемых и располагаемых тяг строят графики требуемых и располагаемых мощностей (рис. 2.9).

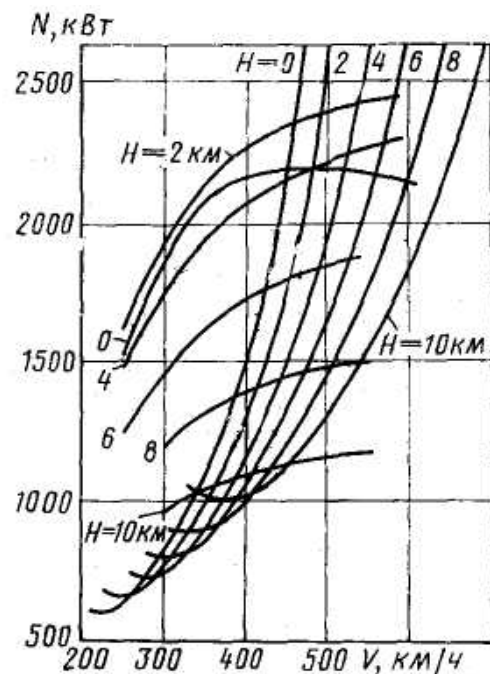


Рис. 2.9. Семейства требуемых и располагаемых мощностей Ан-24

### 3. ДАЛЬНОСТЬ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛЁТА

Дальностью полёта называется расстояние  $L$ , проходимое самолётом по горизонтали, при израсходовании определённого запаса топлива (рис. 3.1)

$$L = L_{наб} + L_{кр} + L_{сн}.$$

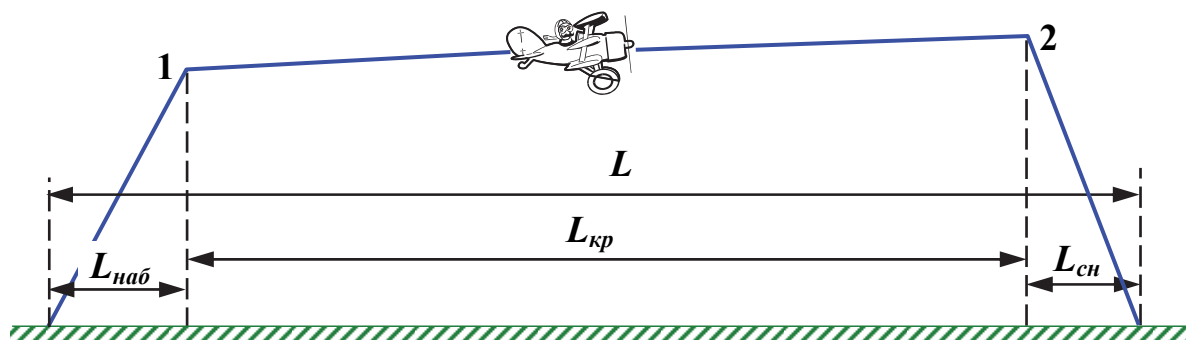


Рис. 3.1. Типовой профиль полёта на дальность

Крейсерский этап полёта – это часть полёта с постоянной скоростью на постоянной высоте или постоянном эшелоне (диапазоне) высот. Имеющийся на борту запас топлива целиком не расходуется на крейсерский этап, так как часть топлива идёт на запуск и прогрев двигателей, рулёжку самолёта по аэродрому и взлёт, на набор высоты, снижение и посадку самолёта. Оставшуюся после выполнения данных процедур часть топлива будем называть располагаемым запасом топлива  $m_{Т,расп}$ .

При оценке дальности полёта различают понятия технической и практической дальности полёта [2, 4, 6, 7, 8]. *Технической дальностью* называют расстояние, проходимое самолётом в условиях полного безветрия при израсходовании всего располагаемого запаса топлива и при условии, что траектория полёта лежит в одной и той же вертикальной плоскости. *Практической дальностью* называют расстояние по горизонтали, проходимое самолётом при израсходовании располагаемого запаса топлива, за исключением аэронавигационного запаса (АНЗ) топлива массой  $m_{Т,АНЗ}$ . В соответствии с нормами лётной годности самолётов АП-23 и АП-25 [9, 10]  $m_{Т,АНЗ}$  должна обеспечить полёт самолёта на режиме  $V_{нв}$  ( $\kappa = \kappa_{max}$ ) в течение 30...45 мин.

Часовой расход топлива

$$q_{ч} = c_{PR} \cdot P_n = c_{PR} \cdot \frac{mg}{\kappa}, \text{ кг/ч.} \quad (3.1)$$

Километровый расход топлива

$$q_{км} = \frac{q_{час}}{3,6 \cdot V} = c_{PR} \cdot \frac{P_n}{3,6 \cdot V} = c_{PR} \cdot \frac{mg}{3,6 \cdot V \cdot \kappa}, \text{ кг/км.} \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) и (3.2)  $\kappa$  – полётное аэродинамическое качество самолёта с учётом потерь на балансировку.

Дифференциальные уравнения расхода масс

$$\frac{dm}{dL} = -q_{\kappa M}; \quad \frac{dm}{dt} = -q_{\dot{c}}. \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнения (3.3), получим

$$L_{кр} = - \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{q_{\kappa M}} = \frac{3,6}{g} \int_{m_2}^{m_1} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right) \cdot \frac{dm}{m}, \text{ км}; \quad (3.4)$$

$$T_{кр} = - \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{q_{\dot{c}}} = \frac{1}{g} \int_{m_2}^{m_1} \left( \frac{\kappa}{c_{PR}} \right) \cdot \frac{dm}{m}, \text{ ч}.$$

Здесь  $m_1 = m_0 - m_{T.взл} - m_{T.наб}$  – масса топлива в начале крейсерского этапа полёта (точка 1 на рис. 3.1);  $m_0$  – взлётная масса самолёта;  $m_{T.взл}$  – масса топлива, необходимая для запуска и прогрева двигателей, руления и взлёта самолёта;  $m_{T.наб}$  – масса топлива, необходимая для набора крейсерской высоты полёта;  $m_2 = m_1 - m_{T.расч}$  – масса топлива в конце крейсерского этапа полёта (точка 2 на рис. 3.1) при расчёте технической дальности полёта;  $m_2 = m_1 - m_{T.расп} + m_{T.АНЗ}$  – масса топлива в конце крейсерского этапа полёта (точка 2 на рис. 3.1) при расчёте практической дальности полёта.

Подынтегральная функция в формуле (3.4)  $\varphi = \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)$  называется

параметром дальности.

### 3.1. Максимальные дальность и продолжительность полёта

Подынтегральные выражения в данных формулах являются сложными функциями  $V(M)$ , и  $H$  и поэтому для получения максимальной дальности или продолжительности полёта для каждого конкретного типа самолёта рассчитывают программы полётов по оптимальным траекториям.

$$L_{кр. \max} = \frac{3,6}{g} \int_{m_2}^{m_1} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)_{\max} \cdot \frac{dm}{m};$$

$$T_{кр. \max} = \frac{1}{g} \int_{m_2}^{m_1} \left( \frac{\kappa}{c_{PR}} \right)_{\max} \cdot \frac{dm}{m}.$$

В первом приближении можно принять подынтегральные функции не зависящими от полётной массы  $m$  и тогда

$$L_{кр. max} = \frac{3,6}{g} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)_{max} \cdot \ln \left( \frac{m1}{m2} \right); \quad (3.5)$$

$$T_{кр. max} = \frac{1}{g} \left( \frac{\kappa}{c_{PR}} \right)_{max} \cdot \ln \left( \frac{m1}{m2} \right).$$

Рассмотрим влияние ветра на дальность полёта. При наличии ветра, имеющего попутную или встречную составляющую скорости  $W$ , километровый расход топлива будет равен

$$q_{км} = \frac{q_{час}}{3,6 \cdot V} = c_{PR} \cdot \frac{P_n}{3,6 \cdot (V \pm W)} = q_{км(W=0)} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{W}{V}}$$

и тогда 
$$L_{кр} = L_{кр(W=0)} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{W}{V}}.$$

Для грубых прикидок можно принять: для достижения максимальной дальности крейсерский полёт необходимо осуществлять на высотах ниже статического потолка на 2...3 км при скорости  $V = V_{кр}$ ; для достижения максимальной продолжительности полёта его необходимо осуществлять на высотах ниже статического потолка на 1...2 км при скорости  $V = V_{нв}$ .

### 3.2. Радиус действия самолёта

Когда полётное задание предусматривает не перелёт самолёта с одного аэродрома на другой, а возвращение самолёта на аэродром базирования после выполнения заданной операции в зоне применения (рис. 3.2), то в этом случае вводят понятие радиуса действия самолёта  $R$ . Радиус действия, как и дальность, также может быть техническим и практическим.

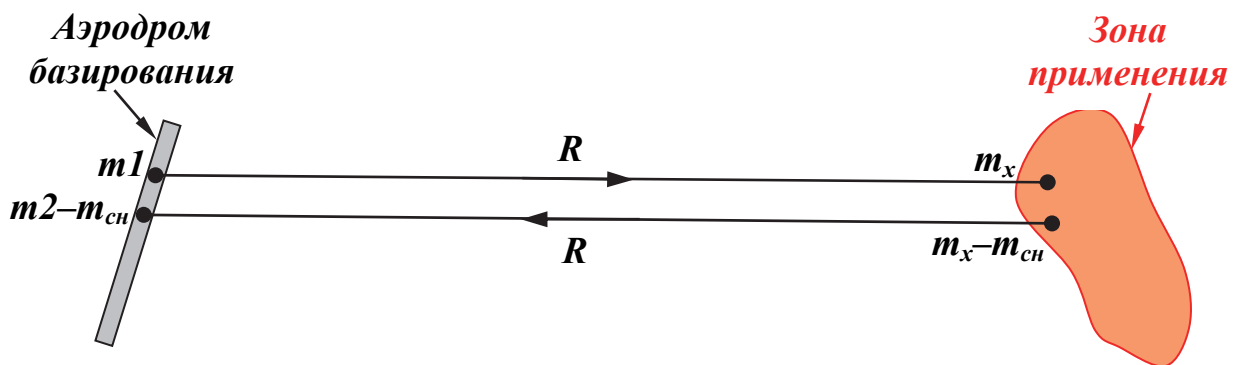


Рис. 3.2. К определению радиуса действия  $R$

Для его вычисления применим формулу (3.5). Имеем

$$R = \frac{3,6}{g} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)_{\max} \cdot \ln \left( \frac{m1}{m_x} \right) = \frac{3,6}{g} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)_{\max} \cdot \ln \left( \frac{m_x - m_{сн}}{m2 - m_{сн}} \right)$$

или

$$\ln \left( \frac{m1}{m_x} \right) = \ln \left( \frac{m_x - m_{сн}}{m2 - m_{сн}} \right).$$

где  $m_{сн}$  – масса сбрасываемой нагрузки.

Решая последнее уравнение относительно  $m_x$ , получим

$$m_x = \frac{m_{сн}}{2} + \sqrt{\left( \frac{m_{сн}}{2} \right)^2 + m1 \cdot (m2 - m_{сн})}. \quad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.5), окончательно находим

$$R = \frac{3,6}{g} \left( \frac{V \cdot \kappa}{c_{PR}} \right)_{\max} \cdot \ln \left( \frac{m1}{\frac{m_{сн}}{2} + \sqrt{\left( \frac{m_{сн}}{2} \right)^2 + m1 \cdot (m2 - m_{сн})}} \right).$$

При постоянно действующем в одном направлении ветре, имеющем составляющую скорости  $W$  по линии полёта, радиус действия уменьшается, независимо от направления этой составляющей и будет равен

$$R = R_{(W=0)} \cdot \left( 1 - \left( \frac{W}{V} \right)^2 \right).$$

### 3.3. Влияние загрузки самолёта на его дальность

Техническая и практическая дальности, как и радиус действия, зависят от массы самолёта, а также от массы целевой нагрузки (ц.н.). Рассмотрим эту зависимость в графическом виде (рис. 3.3).

Если  $m_{цн} = 0$ , то  $L = L_{max}$ . При увеличении  $m_{цн}$  и неизменной заправке топливом  $m_T = const$  (участок 1 диаграммы) дальность монотонно уменьшается. При этом растёт взлётная масса  $m_0$ . Однако этот рост ограничивается величиной  $m_0^{пред}$ , определяемой возможностью эксплуатации с аэродромов данного класса, т.е.  $m_0 = m_{нучст} + m_T + m_{цн}^{расч} \leq m_0^{пред}$ , отсюда  $m_{цн}^{расч} = m_0^{пред} - m_{нучст} - m_T$ . Это соответствует точке “b” на диаграмме. При этом получаем расчётную дальность  $L_{расч}$ .

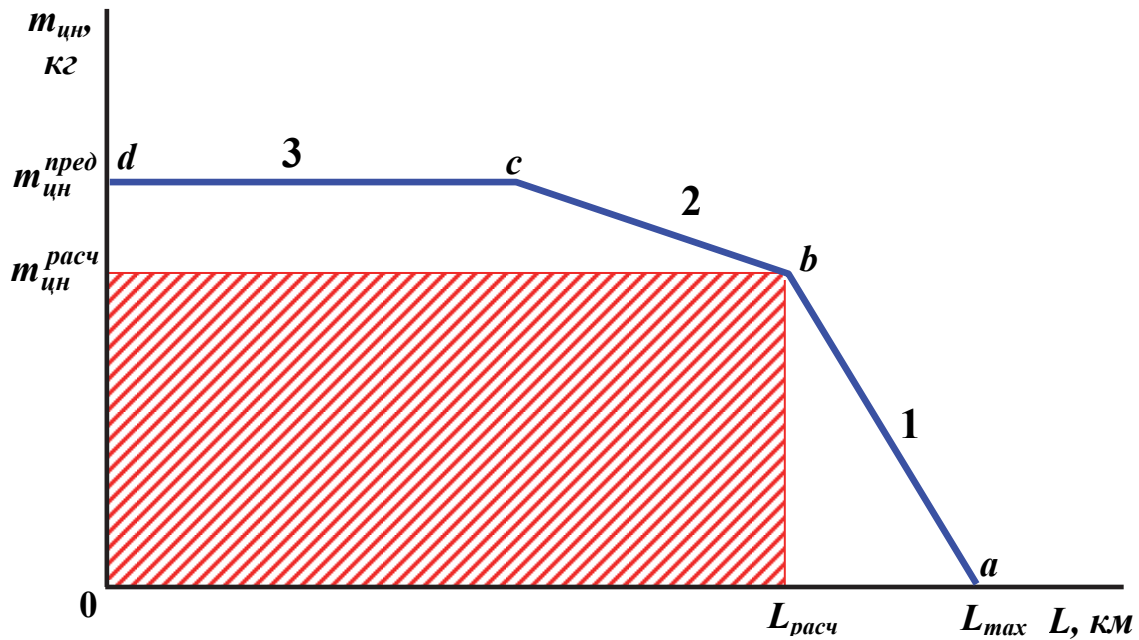


Рис. 3.3. Зависимость дальности полёта от массы целевой нагрузки

Если и далее продолжать увеличение  $m_{цн}$ , то это возможно только за счёт такого же уменьшения массы топлива, что приводит к более интенсивному падению дальности (участок 2 диаграммы). При проектировании самолёта задаётся предельное значение  $m_{цн}^{пред}$ , определяемое вместимостью отсеков самолёта, эксплуатационными или иными соображениями (участок 3 диаграммы). Обычно самолёт эксплуатируется в области, ограниченной заштрихованным прямоугольником на диаграмме, что связано с требованиями безопасности полётов.

Если самолёт необходимо эксплуатировать на дальностях свыше  $L_{max}$ , то используют подвесные топливные баки (ПТБ), сбрасываемые в полёте после выгорания топлива, или применяют дозаправку самолёта в воздухе от самолёта-танкера (заправщика).

#### 4. ВЗЛЁТНО–ПОСАДОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЁТА

Взлёт и посадка самолёта являются наиболее сложными и ответственными этапами полёта [8]. Ошибки пилотирования на них зачастую заканчиваются трагически, поскольку времени и запаса высоты для их исправления практически нет. Дополнительной нагрузкой для лётчика является изменение аэродинамических характеристик самолёта, вызванное влиянием близости земли.

Расчёт ВПХ ведётся для нескольких вариантов состояния атмосферы, в том числе:

- для стандартных условий (МСА)  $H = 0$ ;  $T = 287\text{K}$  ( $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ );  $\rho = 1,225\text{ кг/м}^3$ ;  $p = 101325\text{ Па}$ ;
- для расчётных условий (РУ)  $H = 0$ ;  $T = 303\text{K}$  ( $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ );  $\rho = 1,12\text{ кг/м}^3$ ;  $p = 97335\text{ Па}$ ;
- для самых неблагоприятных атмосферных условий, в которых может находиться проектируемый самолёт в процессе его эксплуатации, например, летняя тропическая атмосфера и значительная высота аэродрома над уровнем моря.

#### 4.1. Взлёт и начальный набор высоты

Этап взлёта начинается с разбега самолёта по взлётно-посадочной полосе (ВПП) и заканчивается достижением скорости, высоты и конфигурации самолёта, необходимых для начала полёта по маршруту. Для гражданских самолётов высота начала полёта по маршруту устанавливается Авиационными Правилами АП-23, АП-25 [9,10] и составляет 400 м над уровнем ВПП (рис. 4.1).

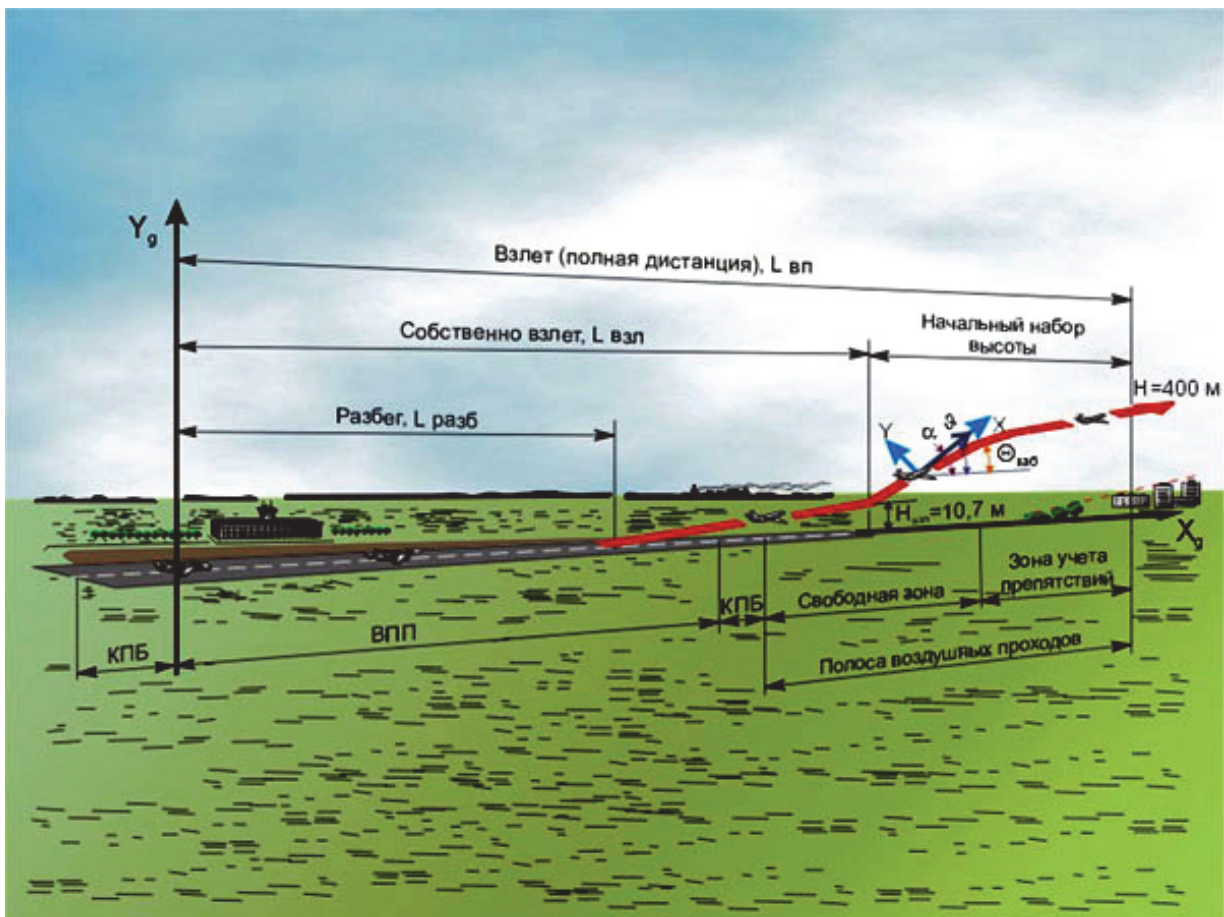


Рис. 4.1. Взлёт и начальный набор высоты

Схема собственно взлёта приведена на рис. 4.2.

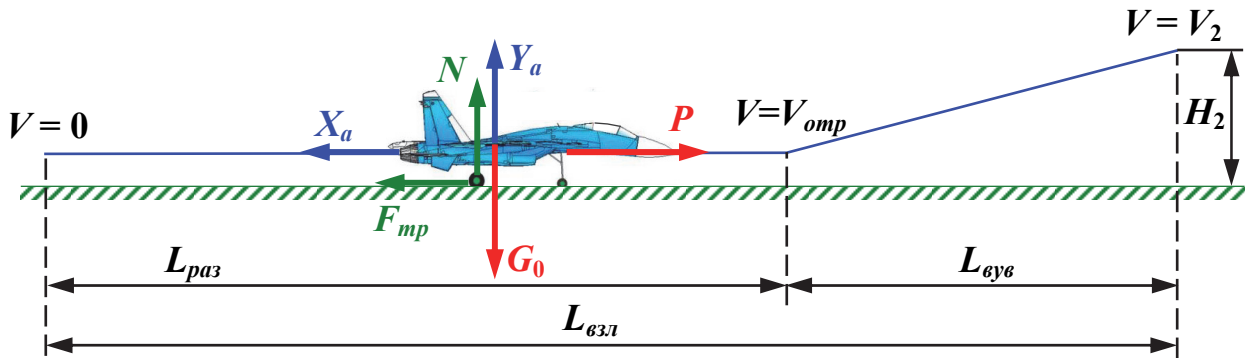


Рис. 4.2. Схема собственно взлёта

На высоте  $H_2 = 10,7$  м (35 ft) безопасная скорость самолёта  $V_2$  должна, как минимум, на 20 % превышать скорость сваливания во взлётной конфигурации. В целях безопасности полёта до высоты 120 м не допускается изменение конфигурации крыла. Начиная с высоты 120 м и разгона до скорости, на 20 % превышающей скорость сваливания в крейсерской конфигурации, происходит поэтапное изменение конфигурации крыла от взлётной к крейсерской. Одновременно продолжается набор высоты. По достижении высоты 400 м и крейсерской конфигурации взлёт считается закончившимся, работу двигателей переводят со взлётного режима на номинальный, и начинается этап набора крейсерской высоты полёта. По возможности взлёт самолёта осуществляется против ветра. Боковая составляющая скорости ветра затрудняет выполнение взлёта и для каждого самолёта в Руководстве по лётной эксплуатации (РЛЭ) задаётся её предельная величина.

Скорость отрыва  $V_{omp} \geq (1,05 \dots 1,1) \cdot V_{cv}$ , где  $V_{cv}$  – скорость сваливания во взлётной конфигурации. Эту скорость найдём из условия  $Y_a = G_0 = m_0 \cdot g$  или

$$c_{y \max} \frac{\rho \cdot V_{cv}^2}{2} \cdot S = m_0 g \Rightarrow V_{cv} = \sqrt{\frac{2m_0 g}{c_{y \max} \rho \cdot S}};$$

$$V_{omp} = 1,1 \sqrt{\frac{2m_0 g}{c_{y \max} \rho \cdot S}}; \quad V_2 = 1,2 \cdot V_{cv}, \quad (4.1)$$

где  $c_{y \max}$  – максимальный коэффициент подъёмной силы самолёта во взлётной конфигурации.

Для расчёта длины разбега запишем уравнения движения самолёта по ВПП

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} = V; \quad Y_a + N = m_0 g; \quad m_0 \frac{dV}{dt} = P - X_a - F_{мп}, \quad (4.2)$$



где  $N$  – реакция на шасси со стороны ВПП;  $P$  – тяга двигателей;  
 $F_{mp} = f_{mp.paz} \cdot N = f_{mp.paz} \cdot \left( m_0 g - c_{yraz} \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S \right)$  – сила трения при движении по ВПП.

Коэффициент силы трения при разбеге  $f_{mp.paz}$  определяется качеством и состоянием ВПП, характеристиками колёс шасси и изменяется от **0,02** для сухого бетонного покрытия до 0,12 для мокрого травяного покрова или заснеженной ВПП.

Из последнего уравнения (4.2) получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P - X_a - F_{mp}}{m_0} = g \cdot \left[ \frac{P}{m_0 g} - \frac{c_{xraz} \frac{\rho V^2}{2} S}{m_0 g} - \frac{f_{mp.paz} (m_0 g - c_{yraz}) \frac{\rho V^2}{2} S}{m_0 g} \right].$$

В правой части уравнения сгруппируем слагаемые, содержащие  $V^2$ ,

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot \left[ \left( \frac{P}{m_0 g} - f_{mp.paz} \right) - (c_{xraz} - f_{mp.paz} c_{yraz}) \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{S}{m_0 g} \right]. \quad (4.3)$$

Если принять допущение о том, что в процессе разбега неизменны тяга двигателей  $P$  и угол атаки  $\alpha$  ( $c_{xraz} = \text{const}$ ;  $c_{yraz} = \text{const}$ ), то из (4.3) получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{V dV}{dL} \Rightarrow dL = \frac{V dV}{\left( \frac{dV}{dt} \right)} \Rightarrow L_{paz} = \int_0^{V_{omp}} \frac{V dV}{\left( \frac{dV}{dt} \right)};$$

$$L_{paz} = \int_0^{V_{omp}} \frac{V dV}{g \left[ \left( \frac{P}{m_0 g} - f_{mp.paz} \right) - (c_{xraz} - f_{mp.paz} c_{yraz}) \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{S}{m_0 g} \right]};$$

$$L_{paz} = \frac{1}{g} \int_0^{V_{omp}} \frac{V dV}{a_{paz} - b_{paz} V^2},$$

где  $a_{paz}$  и  $b_{paz}$  – постоянные:

$$a_{paz} = \frac{P}{m_0 g} - f_{mp.paz}; \quad b_{paz} = (c_{xraz} - f_{mp.paz} c_{yraz}) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{S}{m_0 g}.$$

Последний интеграл является табличным. Взяв его, приходим к выражению

$$L_{paz} = \frac{1}{2gb_{paz}} \cdot \ln \left| \frac{a_{paz}}{a_{paz} - b_{paz} V_{omp}^2} \right|. \quad (4.4)$$

При наличии ветра, имеющего составляющую скорости  $W$  вдоль ВПП,

$$L_{раз} = L_{раз(W=0)} \cdot \left(1 \pm \frac{W}{V_{omp}}\right)^2. \quad (4.5)$$

Если ветер попутный, то в (4.5) используем знак “+”, при встречном ветре используем знак “-”.

Взлётной дистанцией называется расстояние, проходимое самолётом по горизонтали с момента страгивания до набора высоты  $H_2$  и безопасной скорости взлёта  $V_2$  (см. рис. 4.2)

Безопасной скоростью  $V_2$  называется скорость, на которой самолёт во взлётной конфигурации обладает удовлетворительной устойчивостью и управляемостью и может перейти к следующему этапу полёта – начальному набору высоты

$$L_{взл} = L_{раз} + L_{вув}, \quad (4.6)$$

где  $L_{вув}$  – длина воздушного участка взлёта (ВУВ).

Траектория ВУВ является криволинейной. В зависимости от типа самолёта и программы полёта вид траектории может быть различным. Однако из-за малой протяжённости этого участка его длину можно определить приближённо, используя закон сохранения энергии,

$$H_2 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_{omp}^2}{2g} = \int_0^{L_{вув}} n_x dl.$$

Полагая  $n_x = \text{const}$ , получим

$$L_{вув} = \frac{1}{n_x} \cdot \left( \frac{V_2^2 - V_{omp}^2}{2g} + H_2 \right) = \frac{m_0 g}{(P_p - P_n)_{cp}} \cdot \left( \frac{V_2^2 - V_{omp}^2}{2g} + H_2 \right). \quad (4.7)$$

Дальнейший требуемый градиент набора высоты должен составлять не менее 3...5 %, т.е.  $\frac{P_p - P_n}{m_0 g} \geq 0,03...0,05$ .

## 4.2. Заход на посадку и посадка

Заход на посадку начинается с предпосадочного маневрирования самолёта. В соответствии с Авиационными Правилами АП-23, АП-25 [9, 10] заход на посадку должен начинаться не ниже 400 м и заканчиваться на высоте  $H_{пос} = 15$  м (50 ft) над уровнем ВПП. Для небольших самолётов местных воздушных линий (МВЛ) допускается заканчивать заход на посадку на высоте 9 м (30 ft). В процессе этого маневра, который может начинаться с полёта по “коробочке” на постоянной высоте 400 м с разворотами на  $90^\circ$ ,

осуществляется поэтапное изменение конфигурации самолёта от крейсерской к посадочной с постепенным уменьшением скорости полёта до скорости захода на посадку –  $V_{zn}$ . Изменение конфигурации самолёта начинается с выпуска шасси, затем выпускаются предкрылки и в последнюю очередь закрылки (иногда в несколько приёмов). Последний разворот на “коробочке” предшествует началу снижения самолёта по глиссаде, которая лежит в одной вертикальной плоскости с ВПП. Допускается окончание процесса выпуска закрылков уже на глиссаде (рис. 4.3).

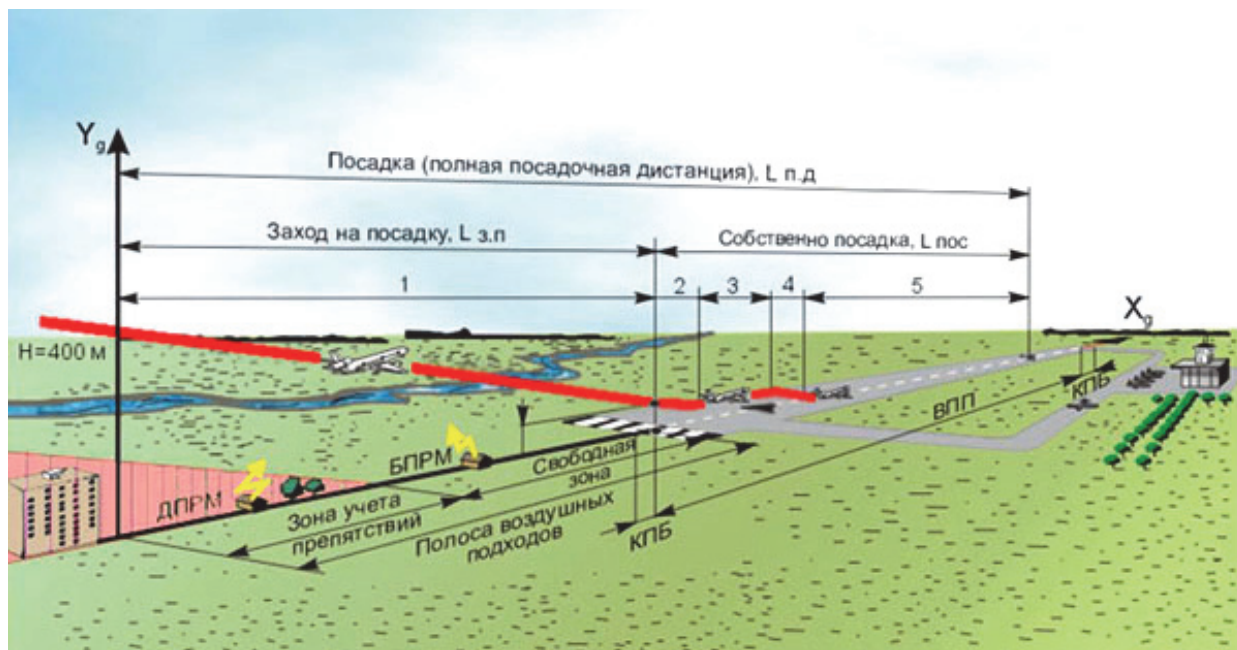


Рис. 4.3. Посадка самолёта

Посадочной дистанцией называется расстояние, проходимое самолётом по горизонтали, с момента пролёта входной кромки ВПП на высоте  $H_{нос}$  до момента его полной остановки на ВПП (рис. 4.4).

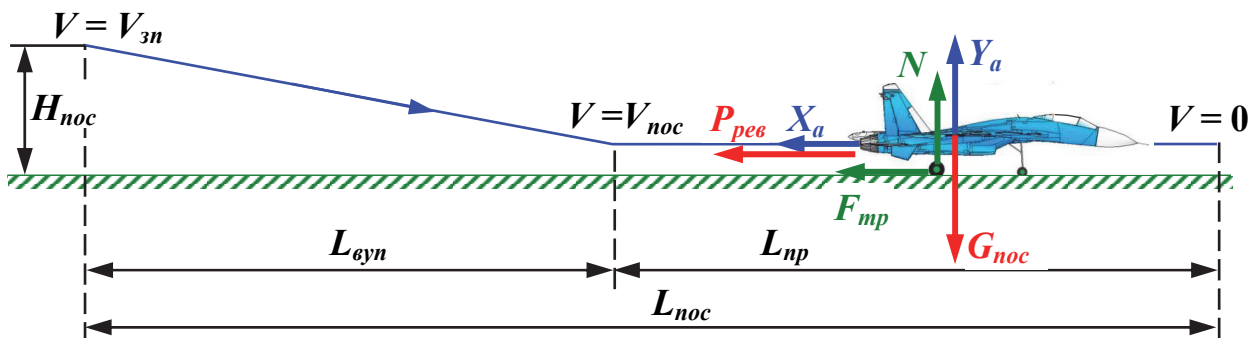


Рис. 4.4. Схема собственно посадки

Скорость захода на посадку  $V_{zn} = 1,3 \cdot V_{cv}$ , где  $V_{cv}$  – скорость сваливания в посадочной конфигурации. Последнюю находим из условия  $Y_a = m_{noc} \cdot g$  или

$$c_{y \max} \frac{\rho \cdot V_{cv}^2}{2} \cdot S = m_{noc} g \Rightarrow V_{cv} = \sqrt{\frac{2m_{noc} g}{c_{y \max} \rho \cdot S}};$$

$$V_{zn} = 1,3 \sqrt{\frac{2m_{noc} g}{c_{y \max} \rho \cdot S}}; \quad V_{noc} = \sqrt{\frac{2m_{noc} g}{c_{y \text{noc}} \rho \cdot S}}. \quad (4.8)$$

где  $c_{y \max}$  – максимальный коэффициент подъёмной силы самолёта в посадочной конфигурации;  $c_{y \text{noc}} = 0,85 \cdot c_{y \max}$ ;  $m_{noc} = m_0 - \kappa_T m_T$  – посадочная масса самолёта;  $\kappa_T$  – коэффициент, зависящий от дальности полёта самолёта

$$\kappa_T = \begin{cases} 0, & \text{если дальность до 1000 км;} \\ 0,3, & \text{если дальность от 1000 до 3000 км;} \\ 0,7, & \text{если дальность свыше 3000 км.} \end{cases}$$

На воздушном участке посадки (ВУП) за счёт дросселирования двигателей и постепенного увеличения угла атаки происходит выравнивание траектории, сопровождаемое торможением самолёта с  $V_{zn}$  до  $V_{noc}$  и одновременным его снижением до касания ВПП.

Длина ВУП рассчитывается энергетическим методом

$$L_{\text{вуп}} = \kappa_{noc} \cdot \left( \frac{V_{zn}^2 - V_{noc}^2}{2g} + H_{noc} \right), \quad (4.9)$$

где  $\kappa_{noc}$  – среднее аэродинамическое качество на ВУП, скорости определяются из выражений (4.8).

При пробеге на самолёт действуют те же силы, что и при разбеге. Разница в том, что тяга двигателей отсутствует или направлена назад (реверс), колёса заторможены, используется тормозной парашют.

Уравнение движения примет вид

$$m_{noc} \frac{dV}{dt} = P_{\text{рев}} + c_{xnp} \frac{\rho V^2}{2} \cdot S + f_{\text{мп.нп}} \left( m_{noc} g - c_{y\text{нп}} \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \right), \quad (4.10)$$

где  $f_{\text{мп.нп}} = 0,2 \dots 0,3$  – коэффициент трения заторможенных колёс по сухому бетонному покрытию. Из (4.10) получим

$$L_{\text{нп}} = \int_{V_{\text{noc}}}^0 \frac{V dV}{\left( \frac{dV}{dt} \right)} = \frac{1}{g} \int_{V_{\text{noc}}}^0 \frac{V dV}{\left[ \left( \frac{P_{\text{рев}}}{m_{noc} g} + f_{\text{мп.нп}} \right) + (c_{xnp} - f_{\text{мп.нп}} c_{y\text{нп}}) \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{S}{m_{noc} g} \right]};$$

$$L_{np} = \frac{1}{g} \int_{V_{noc}}^0 \frac{VdV}{a_{np} + b_{np}V^2},$$

где  $a_{np}$  и  $b_{np}$  – постоянные.

$$a_{np} = \frac{P_{pe6}}{m_{noc}g} + f_{mp.np}; \quad b_{np} = (c_{xnp} - f_{mp.np}c_{ynp}) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{S}{m_{noc}g}.$$

Последний интеграл является табличным. Взяв его, приходим к выражению

$$L_{np} = \frac{1}{2gb_{np}} \cdot \ln \left| \frac{a_{np}}{a_{np} + b_{np}V_{noc}^2} \right|. \quad (4.11)$$

Посадочная дистанция

$$L_{noc} = L_{eyn} + L_{np}. \quad (4.12)$$

Потребная длина ВПП  $L_{ВППпотр}$  должна быть не менее:  $1,67 \cdot L_{noc}$  – для основных аэродромов;  $1,43 \cdot L_{noc}$  – для запасных аэродромов.

### 4.3. Прерванный и продолженный взлёт

При расчёте взлётных характеристик многодвигательных самолётов, кроме нормального взлёта дополнительно рассматривают ещё два варианта взлёта: продолженный взлёт и прерванный взлёт. Оба эти варианта относятся к случаю отказа одного (критического) двигателя.

При продолженном взлёте последний продолжается с одним отказавшим двигателем. Дистанцию продолженного взлёта рассчитывают по формуле

$$L_{взл.прод} = L_{раз1}(P, V_{отк}) + L_{раз2} \left( \frac{n_{дв} - 1}{n_{дв}} \cdot P, V_{отк}, V_{отпр} \right) + L_{высл}, \quad (4.13)$$

где  $L_{раз1}$  – длина разбега при всех работающих двигателях от точки старта ( $V = 0$ ) до скорости  $V_{отк}$ , при которой происходит отказ критического двигателя. Длина этого участка определяется по формуле, аналогичной (4.4), где вместо  $V_{отпр}$  стоит  $V_{отк}$ , т.е.

$$L_{раз1} = \frac{1}{2gb_{раз}} \cdot \ln \left| \frac{a_{раз}}{a_{раз} - b_{раз}V_{отк}^2} \right|. \quad (4.14)$$

Длина участка  $L_{раз2}$  также рассчитывается по формуле, аналогичной (4.4), но в ней уже учитывается отказ критического двигателя и резкое уменьшение тяги на этом участке, скорость изменяется  $V_{отк}$  до  $V_{отпр}$ .

$$L_{раз2} = \frac{1}{2gb_{раз}} \cdot \ln \left| \frac{a_{раз1} - b_{раз} V_{отк}^2}{a_{раз1} - b_{раз} V_{отп}^2} \right|, \quad (4.15)$$

где  $a_{раз1} = \frac{n_{дв} - 1}{m_0 g} \cdot P - f_{мп.раз}$ ;  $n_{дв}$  – количество двигателей, создающих продольную тягу при взлёте самолёта.

Длину воздушного участка  $L_{выв1}$  рассчитываем по формуле, аналогичной (4.7), но в ней учтён отказ критического двигателя

$$L_{выв1} = \frac{m_0 g}{\left( \frac{n_{дв} - 1}{n_{дв}} \cdot P_p - P_n \right)_{cp}} \cdot \left( \frac{V_2^2 - V_{отп}^2}{2g} + H_2 \right). \quad (4.16)$$

Дальнейший требуемый градиент набора высоты  $\frac{\frac{n_{дв} - 1}{n_{дв}} \cdot P_p - P_n}{m_0 g}$

должен составлять не менее: 1,2 %, если  $n_{дв} = 2$ ; 1,5 %, если  $n_{дв} = 3$ ; 1,7 %, если  $n_{дв} = 4$ .

При прерванном взлёте после отказа критического двигателя пилот производит торможение до полной остановки самолёта. Дистанцию прерванного взлёта рассчитывают по формуле

$$L_{взл.прерв} = L_{раз1}(P, V_{отк}) + L_{раз3} \left( \frac{n_{дв} - 1}{n_{дв}} \cdot P, V_{отк}, V_1 \right) + L_{np1}, \quad (4.17)$$

где  $L_{раз3}$  – длина разбега с одним отказавшим двигателем от момента отказа на скорости  $V_{отк}$  до момента принятия командиром воздушного судна решения о прекращении взлёта на скорости  $V_1 = V_{отк} + t_l \cdot n_x$ ;  $t_l = 3$  с – среднее нормативное время реакции пилота;

$n_x \approx \frac{\frac{n_{дв} - 1}{n_{дв}} P}{m_0 g} - \frac{c_{храз} \frac{\rho V_{отк}^2}{2} S}{m_0 g} - \frac{f_{мп.раз} \left( m_0 g - c_{ураз} \frac{\rho V_{отк}^2}{2} S \right)}{m_0 g}$  – продольная перегрузка.

$$L_{раз3} = \frac{1}{2gb_{раз}} \cdot \ln \left| \frac{a_{раз1} - b_{раз} V_{отк}^2}{a_{раз1} - b_{раз} V_1^2} \right|. \quad (4.18)$$

Длину участка торможения  $L_{np1}$  рассчитываем по аналогии с (4.11),

$$L_{np1} = \frac{1}{2gb_{np1}} \cdot \ln \left| \frac{a_{np1}}{a_{np1} + b_{np1}V_1^2} \right|, \quad (4.19)$$

где  $a_{np1} = \frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} \cdot P_{\text{рев}}$ ;  $b_{np1} = (c_{\text{храз}} - f_{\text{тр.пр}} c_{\text{ураз}}) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \frac{S}{m_0 g}$ .

Существует такая скорость  $V_{\text{отк}}$ , при которой  $L_{\text{взл.прод}} = L_{\text{взл.прерв}}$ . Это сбалансированная скорость отказа  $V_{EF}$ . Её находят, задаваясь различными значениями  $V_{\text{отк}}$  и рассчитывая  $L_{\text{взл.прод}}$  и  $L_{\text{взл.прерв}}$  (рис. 4.5).

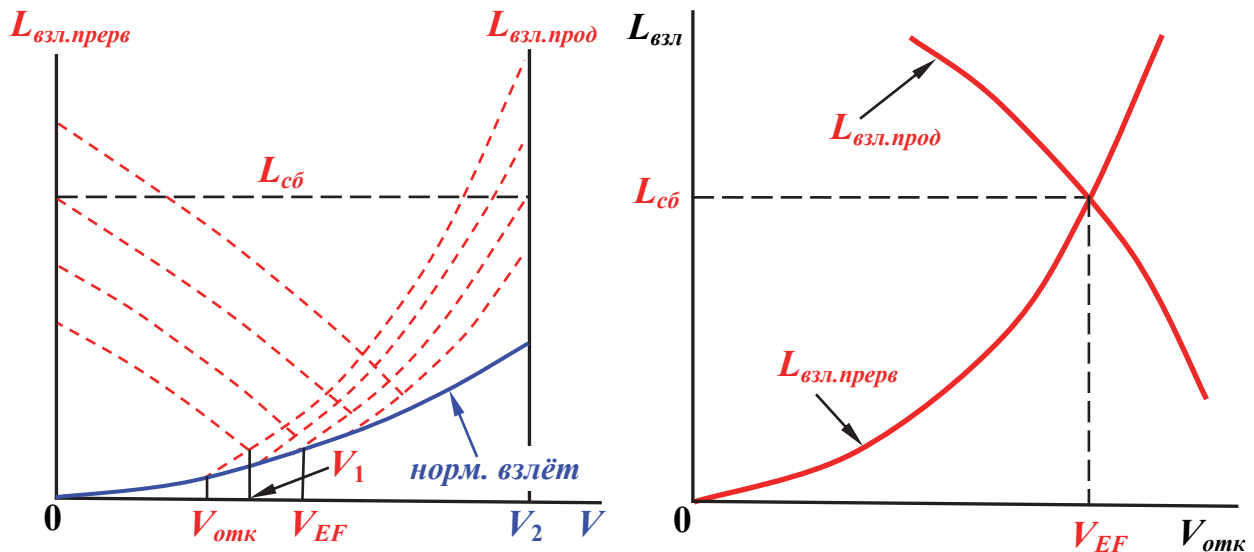


Рис. 4.5. К расчёту сбалансированной скорости отказа  $V_{EF}$

Величине  $V_{EF}$  соответствует скорость принятия решения  $V_1$  и сбалансированная длина взлётной дистанции  $L_{cb}$ . Потребная длина ВПП  $L_{ВППномр}$  (вместе с концевой полосой безопасности (КПБ)) должна быть не менее  $L_{cb}$ .

## 5. МАНЕВРЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЁТА

Способность самолёта изменять свою скорость в полёте как по величине, так и по направлению, определяет его маневренность. Важнейшими показателями маневренности являются предельные значения перегрузок  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , создаваемые самолётом в полёте, либо время маневра при заданном изменении параметров движения [2, 4, 6, 7, 11].

В общем случае маневр самолёта является пространственным, однако достаточно полное представление о маневренных возможностях самолёта даёт анализ показателей его маневренности для двух упрощённых вариантов маневрирования – маневры только в горизонтальной плоскости и только в вертикальной плоскости.

## 5.1. Горизонтальная приемистость

Способность самолёта изменять скорость горизонтального полёта при разгоне называют горизонтальной приемистостью. Чем меньше время перехода от скорости  $V_1$  до скорости  $V_2$ , тем выше горизонтальная приемистость. Из первого уравнения системы (1.22) имеем

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = g \cdot n_{xa}.$$

Отсюда время разгона от скорости  $V_1$  до скорости  $V_2$

$$t_{раз} = \frac{1}{g} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{n_{xa}}, \quad (5.1)$$

где  $n_{xa} = (P_p - P_n)/mg$ . Интеграл в (5.1) берётся численно.

## 5.2. Криволинейный полёт в горизонтальной плоскости – вираж

В этом случае  $\Theta = \dot{\Theta} = 0$ , тогда системы уравнений (1.5) и (1.21) примут вид

$$\dot{V} = g \cdot n_{xa}; \quad (5.2)$$

$$n_{ya} \cos \gamma - n_{za} \sin \gamma = 1; \quad (5.3)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{g}{V} (n_{ya} \sin \gamma + n_{za} \cos \gamma); \quad (5.4)$$

$$\dot{x}_g = V \cdot \cos \Psi; \quad (5.5)$$

$$\dot{z}_g = -V \cdot \sin \Psi. \quad (5.6)$$

Необходимым условием выполнения криволинейного полёта в горизонтальной плоскости является наличие центростремительной силы, направленной к центру кривизны траектории полёта. Её можно создать креном самолёта, скольжением или одновременным использованием крена и скольжения.

Маневр, выполняемый для изменения направления полёта (угла пути  $\Psi$ ), называется разворотом. Полный разворот на  $360^\circ$  называется виражом. Вираж, при выполнении которого  $V, \alpha, \beta, \gamma = \text{const}$  называют установившимся. Правильный вираж (рис. 5.1) – это установившийся вираж без скольжения ( $\beta = 0, n_{za} = 0$ ). Для него уравнения (5.2)–(5.6) примут вид

$$n_{xa} = 0; \quad (5.7)$$



$$n_{ya} = \frac{1}{\cos \gamma}; \quad (5.8)$$

$$\dot{\Psi} = \omega_y = -\frac{g}{V_{вир}} \cdot n_{ya} \sin \gamma. \quad (5.9)$$

Из (5.8) следует, что на вираже нормальная перегрузка всегда больше 1.

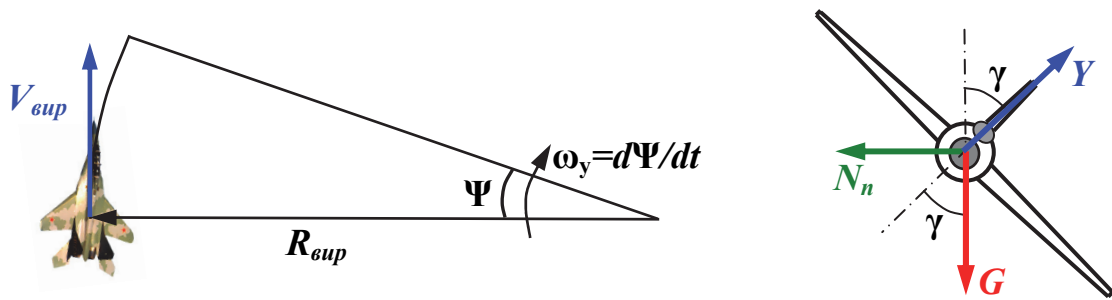


Рис. 5.1. Маневр “правильный вираж”

Рассчитаем радиус правильного виража

$$V_{вир} = \omega_y \cdot R_{вир} = \dot{\Psi} \cdot R_{вир} \Rightarrow R_{вир} = \frac{V_{вир}}{\dot{\Psi}}.$$

Учитывая здесь (5.9), получим

$$R_{вир} = \frac{V_{вир}^2}{g \cdot n_{ya} \cdot \sin \gamma}. \quad (5.10)$$

Теперь подставим (5.8) в (5.10). В итоге имеем

$$R_{вир} = \frac{V_{вир}^2}{g \cdot \operatorname{tg} \gamma} = \frac{V_{вир}^2}{g \cdot \sqrt{n_{ya}^2 - 1}}. \quad (5.11)$$

Время выполнения правильного виража

$$t_{вир} = \frac{2\pi \cdot R_{вир}}{V_{вир}} = \frac{2\pi \cdot V_{вир}}{g \cdot \sqrt{n_{ya}^2 - 1}} \quad (5.12)$$

Перегрузка в исходном горизонтальном прямолинейном установившемся полёте

$$n_{уазн} = 1 = \frac{c_{узн} \frac{\rho \cdot V_{zn}^2}{2} \cdot S}{mg}.$$

При входе в вираж с неизменным углом атаки  $n_{ya} = \frac{c_{y\text{zn}} \frac{\rho \cdot V_{\text{вир}}^2}{2} \cdot S}{mg}$ .

Поделив последнее выражение на предыдущее, получим

$$n_y = \left( \frac{V_{\text{вир}}}{V_{\text{zn}}} \right)^2 \Rightarrow V_{\text{вир}} = V_{\text{zn}} \sqrt{n_{ya}}, \quad (5.13)$$

т.е. скорость на вираже больше скорости исходного горизонтального прямолинейного установившегося полёта.

Потребная тяга в исходном горизонтальном прямолинейном установившемся полёте  $P_n = c_{x\text{zn}} \frac{\rho \cdot V_{\text{zn}}^2}{2} \cdot S$ .

Потребная тяга на вираже при этом же угле атаки  $P_{n.\text{вир}} = c_{x\text{zn}} \frac{\rho \cdot V_{\text{вир}}^2}{2} \cdot S$ .

Сравнивая последние два выражения, получим

$$P_{n.\text{вир}} = P_n \cdot \left( \frac{V_{\text{вир}}}{V_{\text{zn}}} \right)^2 = P_n \cdot n_y. \quad (5.14)$$

При заданной скорости  $V_{\text{вир}}$  перегрузка  $n_{ya}(n^y)$  ограничивается значениями  $\alpha_{\text{дон}} (c_{y\text{дон}})$ ,  $n_{\text{max}}^y$  (условием прочности) или величиной  $P_p$ . Этим предельным параметрам будет соответствовать правильный вираж минимального радиуса, называемый предельным виражом. Характеристики предельного виража ( $t_{\text{вир}}$  и  $R_{\text{вир}}$ ) обычно задаются в техническом задании (ТЗ) на проектирование самолёта.

Для определения характеристик предельного виража строят графики виражей для различных высот полёта и различных конфигураций самолёта с использованием уравнений (5.7)–(5.14) (рис. 5.2).

На больших скоростях полёта возможно выполнение виража с торможением и перегрузкой, превышающей величину, определяемую по формуле (5.8). Этот маневр, более энергичный, чем правильный вираж, называют форсированным виражом и используют пилоты маневренных самолётов. При его выполнении скорость полёта и угол атаки непрерывно изменяются.

Целесообразно с самого начала выполнения форсированного виража сообщить наибольшую допустимую по физиологическим условиям перегрузку. Если пилот не применяет противоперегрузочный костюм, то  $n_{y\text{max}} = 4 \dots 5$ . После достижения данной перегрузки и крена пилот поддерживает перегрузку неизменной, при этом скорость непрерывно уменьшается, а угол атаки растёт. Как только угол атаки достигает величины  $\alpha_{\text{дон}}$ , начинается вторая фаза форсированного виража.

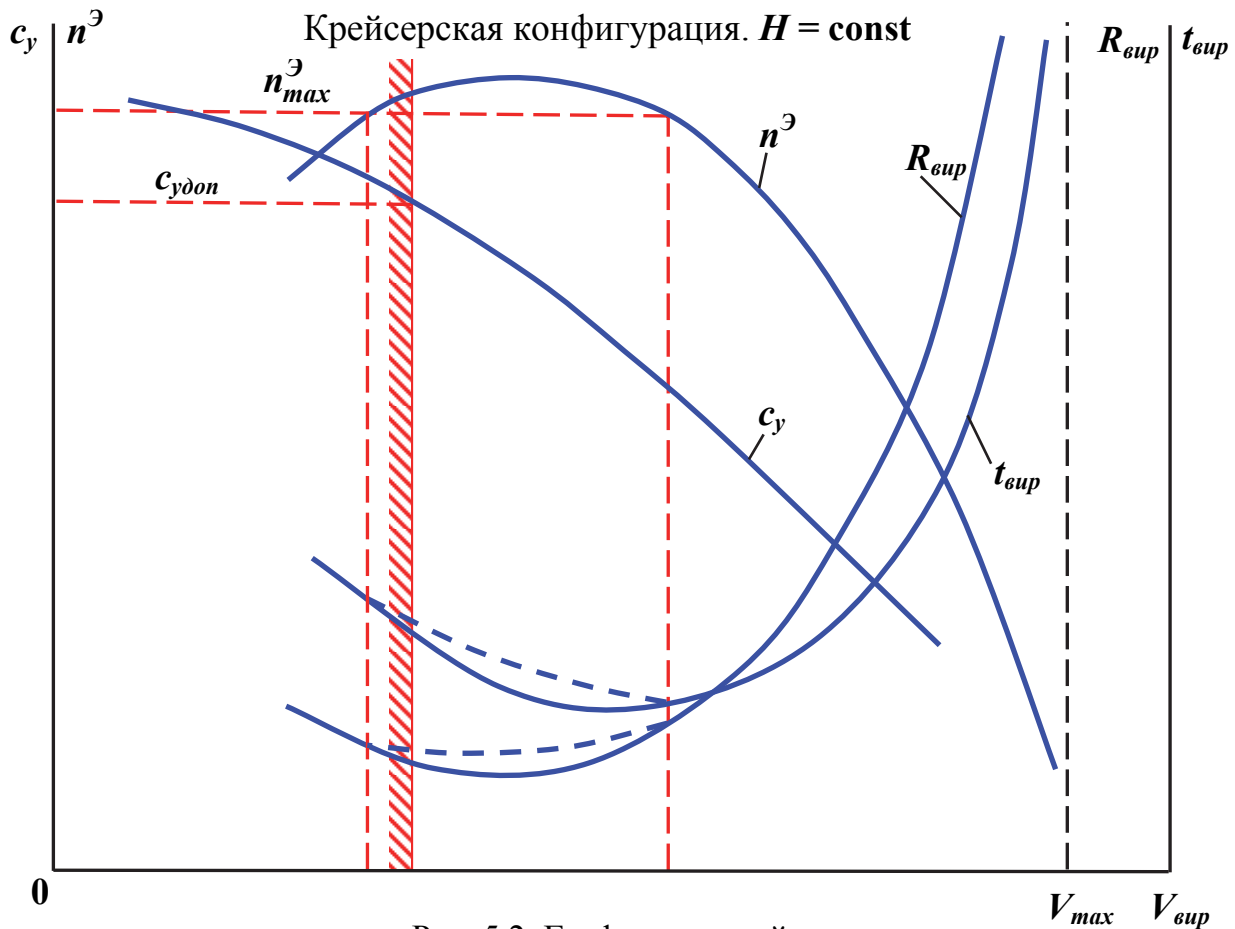


Рис. 5.2. График выражений

На этой фазе пилот поддерживает постоянным угол атаки  $\alpha = \alpha_{дон}$  ( $c_y = c_{yдон}$ ), скорость продолжает падать, перегрузка при этом также уменьшается. Вторая фаза форсированного виража применяется только при больших углах разворота, когда скорость самолёта успеваеет значительно снизиться, развороты на углы  $90...180^0$  обычно осуществляют с постоянной перегрузкой.

При расчёте форсированного виража используют уравнения (5.2), (5.8), (5.9) и (5.11). Интегрирование уравнений движения осуществляют численно, задаваясь временным интервалом интегрирования  $\Delta t = 0,25...1,0$  с.

### 5.3. Перегрузочная поляра

Для выполнения маневров в вертикальной плоскости (без крена и скольжения) необходимо создать избыточную нормальную перегрузку  $\Delta n_{ya} = n_{ya} - 1$ . Если  $\Delta n_{ya} \gg 0$ , то самолёт совершает набор высоты по криволинейной траектории, причём скорость полёта будет меняться в зависимости от тангенциальной перегрузки  $n_{xa}$ . С увеличением  $n_{ya}$  при неизменной тяге двигателя  $n_{xa}$  будет уменьшаться из-за роста индуктивной состав-

ляющей силы аэродинамического сопротивления. Зависимость тангенциальной перегрузки от нормальной на различных высотах и числах  $M$  полёта называется перегрузочной полярой (рис. 5.3).

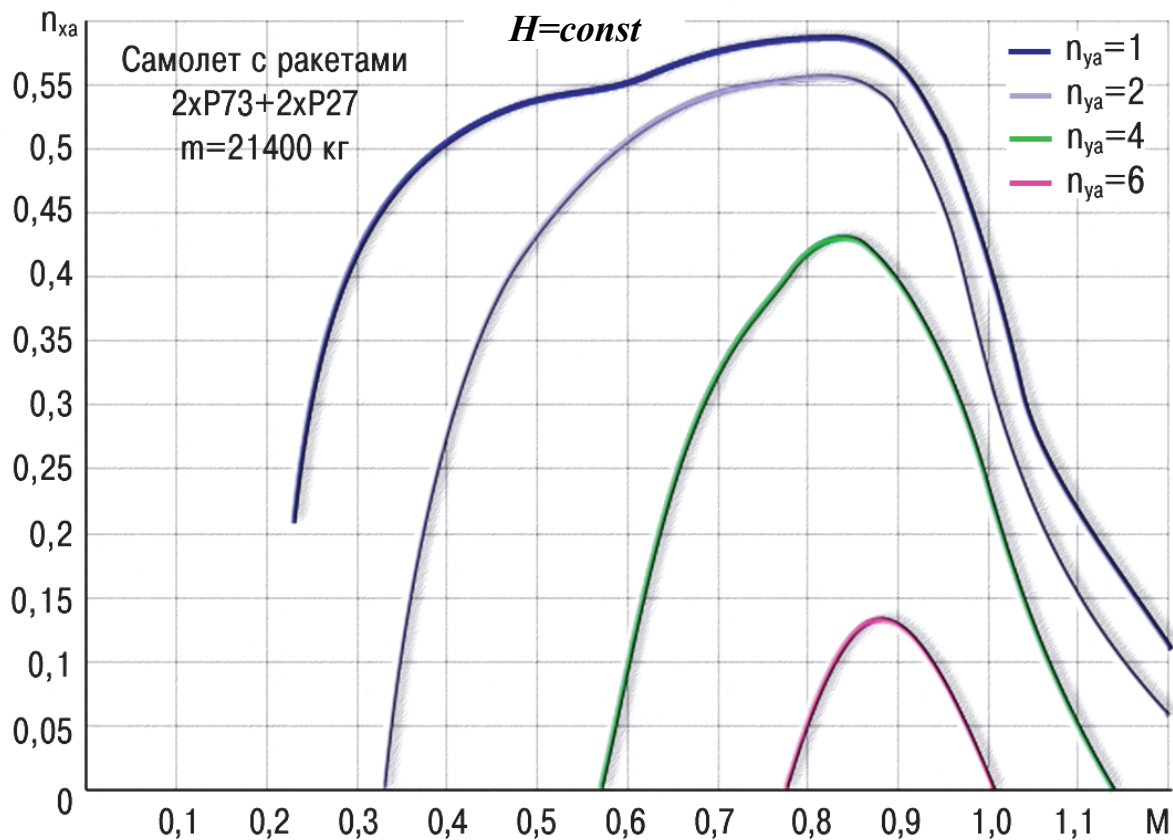


Рис. 5.3. Перегрузочная поляра истребителя

Чтобы построить перегрузочную поляру для данной высоты сначала задаются рядом значений  $n_{ya}$  на интервале  $n_{yamin} \leq n_{ya} \leq n_{yamax}$ . Для каждого значения нормальной перегрузки  $n_{ya}$  определяют диапазон чисел  $M$  полёта  $M_{mindon} \leq M \leq M_{maxdon}$ . Далее для нескольких значений числа  $M$  из найденного диапазона находим

$$c_{ya} = \frac{n_{ya}mg}{0,7\rho_H M^2 S} \rightarrow c_{xa} = c_{xa}(c_{ya}) \text{ (с поляры)} \rightarrow$$

$$\rightarrow X_a = c_{xa} 0,7\rho_H M^2 S \rightarrow n_{xa} = \frac{P_p - X_a}{mg}.$$

С увеличением высоты полёта кривые перегрузочной поляры смещаются вниз и вправо, при этом диапазон допустимых значений тангенциальной перегрузки и чисел  $M$  полёта сужается, т.е. с высотой маневренные качества самолёта ухудшаются.

При сравнении нескольких маневренных самолётов их перегрузочные поляры накладывают друг на друга. Перегрузочная поляра самолёта, в потенциале обладающего наилучшей маневренностью в вертикальной плоскости, будет лежать выше перегрузочных поляр других самолётов.

#### 5.4. Характерные маневры самолёта в вертикальной плоскости

Типовые маневры самолёта в вертикальной плоскости ( $\Psi = \text{const}$ ) выполняются без крена и скольжения ( $\gamma = \beta = 0$ ). В этом случае уравнения движения (1.5) и (1.21) примут вид

$$\dot{V} = g \cdot (n_{xa} - \sin \Theta); \quad (5.15)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{g}{V} (n_{ya} - \cos \Theta); \quad (5.16)$$

$$\dot{L} = V \cdot \cos \Theta; \quad (5.17)$$

$$\dot{H} = V_y = V \cdot \sin \Theta. \quad (5.18)$$

Рассмотрим два характерных маневра – пикирование и горку.

*Пикирование самолёта.* Неустановившееся крутое снижение самолёта, сопровождаемое быстрой потерей высоты, называется пикированием самолёта. Условно траекторию пикирования разбивают на три участка (рис. 5.4): 1-2 – вход (ввод) в пикирование; 2-3 – прямолинейный участок пикирования и 3-4 – выход (вывод) из пикирования.

На участке 1-2  $\dot{\Theta} < 0$  и поэтому из (5.16) получаем, что перегрузка на входе  $n_{yавх} < \cos \Theta$ . Чем меньше  $n_{yавх}$ , тем круче траектория входа в пикирование. На практике часто применяют вход в пикирование с одновременным креном самолёта  $\gamma = 90^\circ$  и  $n_{yавх} \approx 0$ . Крен обеспечивает пилоту хороший обзор. Искривление траектории происходит под действием силы тяжести. Применяется также вход с переворотом на  $180^\circ$ , позволяющий использовать большие положительные перегрузки и значительно уменьшающий радиус входа, но требующий высокой квалификации пилота.

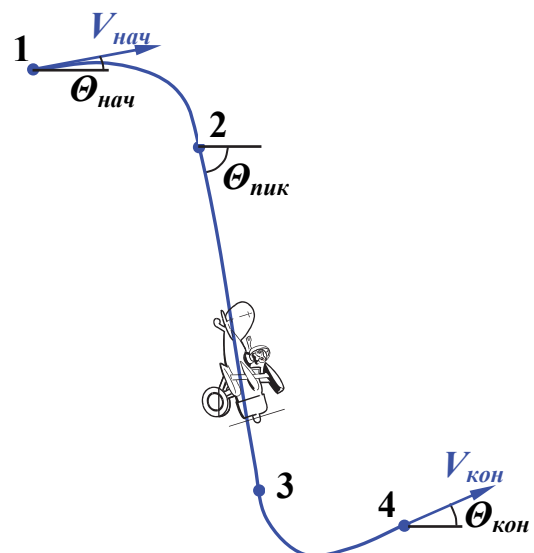


Рис. 5.4. Пикирование самолёта

На прямолинейном участке  $\dot{\Theta} = 0$  и из (5.16) получим  $n_{\text{уапик}} = \cos\Theta_{\text{пик}}$ . Тягу двигателей можно принять равной нулю, если нежелателен быстрый рост скорости и, наоборот, принять максимальной, если целью пикирования является быстрый разгон. На крутых траекториях, во избежание выхода за  $V_{\text{maxmax}}$ , используют воздушные тормоза.

Расчёт траекторий пикирования выполняют путём численного интегрирования уравнений (5.15)–(5.18) для выбранных значений  $n_{\text{уавх}}$ ,  $n_{\text{уапик}}$ ,  $n_{\text{уавых}}$ . Если учесть, что имеются граничные условия  $\Theta_{\text{нач}}$  и  $\Theta_{\text{кон}}$ , то  $n_{\text{ya}}$  лучше задавать в функции угла  $\Theta$ .

Если принять, что  $n_{\text{уавх}}$  и  $n_{\text{уавых}} = \text{const}$ , то уравнения для участков входа и выхода можно проинтегрировать аналитически, если допустить, что на них  $n_{\text{xa}} \approx 0$  и энергия меняется мало. Разделив уравнение (5.15) на (5.16), получим

$$\frac{dV}{d\Theta} = V \cdot \frac{n_{\text{xa}} - \sin\Theta}{n_{\text{ya}} - \cos\Theta} \approx -V \cdot \frac{\sin\Theta}{n_{\text{ya}} - \cos\Theta}. \quad (5.19)$$

Теперь делим (5.18) на (5.16)

$$\frac{dH}{d\Theta} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{\sin\Theta}{n_{\text{ya}} - \cos\Theta}. \quad (5.20)$$

В уравнении (5.19) переменные разделяются

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{\sin\Theta \cdot d\Theta}{\cos\Theta - n_{\text{ya}}} = -\frac{d(\cos\Theta - n_{\text{ya}})}{\cos\Theta - n_{\text{ya}}}. \\ \ln V \Big|_{V_0}^V &= \ln(\cos\Theta - n_{\text{ya}}) \Big|_{\Theta}^{\Theta_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V}{V_0} &= \left( \frac{n_{\text{ya}} - \cos\Theta_0}{n_{\text{ya}} - \cos\Theta} \right) \Rightarrow V = V_0 \left( \frac{n_{\text{ya}} - \cos\Theta_0}{n_{\text{ya}} - \cos\Theta} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Изменение высоты в результате маневра находят из уравнения (5.20) с учётом (5.21) или из энергетических соображений. Поскольку  $n_{\text{xa}} \approx 0$ , то полная энергия постоянна и тогда

$$mgH_0 + m \frac{V_0^2}{2} = mgH + m \frac{V^2}{2} \Rightarrow H = H_0 + \frac{V_0^2 - V^2}{2g}. \quad (5.22)$$

Если  $n_{\text{xa}} \neq 0$ , то уравнения (5.15)–(5.18) интегрируют только численно.

*Горкой* называют маневр, проводимый пилотом самолёта с целью быстрого набора высоты по S-образной траектории (рис. 5.5).

В начале маневра лётчик увеличивает угол атаки, создавая перегрузку  $n_{уавх} > 1$ . Самолёт искривляет траекторию движения, осуществляя вход в горку (участок 1-2 траектории). По достижении требуемого угла набора  $\Theta_{наб}$  самолёт переводится в прямолинейный полёт с  $n_{уанаб} = \cos\Theta_{наб}$  (участок 2-3 траектории). Криволинейный выход из горки (участок 3-4 траектории) осуществляют с перегрузкой  $n_{уавых} < \cos\Theta_{наб}$ . Расчёт входа в горку и выхода из неё производят также, как и расчёт выхода из пикирования и входа в него. Параметры движения на участке 2-3 определяют численным интегрированием уравнений (5.15)–(5.18) при  $n_{уанаб} = \cos\Theta_{наб}$ . Здесь необходимо учитывать, что, в отличие от пикирования, скорость при выполнении горки уменьшается.

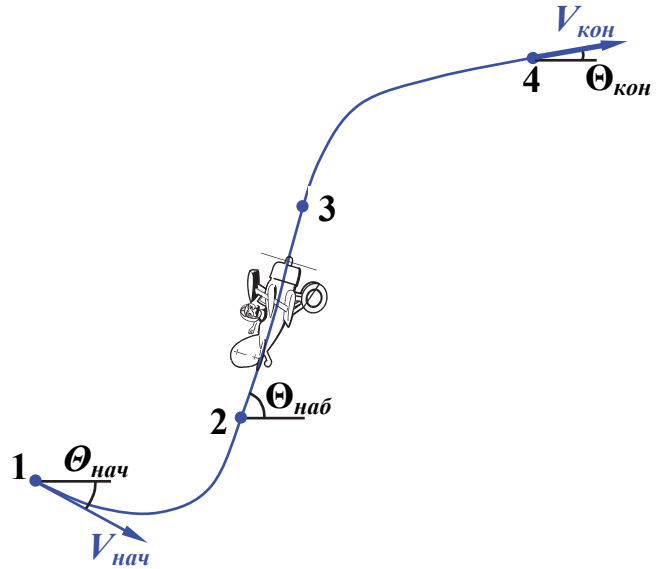


Рис. 5.5. Горка самолёта

### 5.5. Петля Нестерова

Возможность совершения петли на самолёте была предсказана Н. Е. Жуковским в его работе «О парении птиц» (1891 г.). Впервые петля была выполнена выдающимся русским лётчиком П. Н. Нестеровым 9 сентября 1913 г. на самолёте «Ньюпор-IV» с двигателем «Гном» мощностью 70 л.с. Полёт проходил над аэродромом близ Киева.

При выполнении петли (рис. 5.6) необходимо поддерживать достаточно высокую перегрузку в течение всего маневра. Исходные дифференциальные уравнения движения (5.15) и (5.16). Приближённое решение этих уравнений можно получить, полагая, что полная энергия самолёта постоянна, а силовая установка не успевает значительно её изменить. Тогда уравнение (5.15) примет вид

$$\dot{V} = -g \cdot \sin \Theta, \quad (5.23)$$

а уравнение (5.16) останется без изменений.

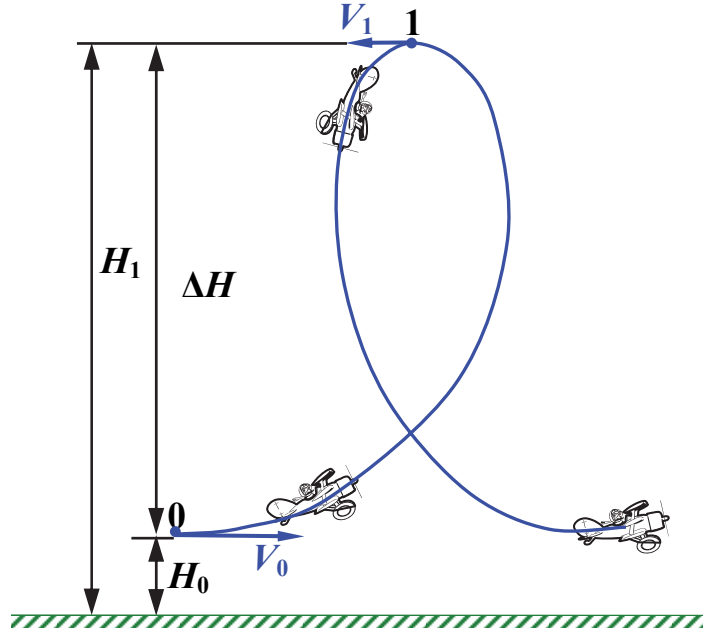


Рис. 5.6. Петля Нестерова

Нормальная перегрузка во время выполнения петли изменяется, однако лётные испытания показывают, что это изменение незначительно. Тогда предположим, что  $n_{ya} = \text{const}$ . Интегрируя (5.23) и (5.16), с учётом начальных условий (в точке 0 при  $t = 0$   $\Theta_0 = 0$  и  $V = V_0$ ) получим [см. уравнение (5.21)]

$$\begin{cases} V = V_0 \frac{n_{ya} - 1}{n_{ya} - \cos \Theta}; \\ t = \frac{V_0/g}{n_{ya} + 1} \left[ \frac{\sin \Theta}{n_{ya} - \cos \Theta} + \frac{n_{ya}}{\sqrt{n_{ya}^2 - 1}} \left( \arcsin \left( \frac{1 - n_{ya} \cos \Theta}{n_{ya} - \cos \Theta} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{cases} \quad (5.24)$$

Из первого уравнения системы (5.24) видно, что скорость  $V$  уменьшается с ростом  $\Theta$ . Минимальное значение  $V$  получим в верхней точке петли – точке 1 траектории ( $\Theta = \pi$  и  $\cos \Theta = -1$ )

$$V_1 = V_{\min} = V_0 \cdot \frac{n_{ya} - 1}{n_{ya} + 1}. \quad (5.25)$$

Высоту петли найдём, используя уравнение (5.22)

$$\Delta H = H_1 - H_0 = \frac{V_0^2 - V_{\min}^2}{2g} = \frac{V_0^2 - V_1^2}{2g}. \quad (5.26)$$



$$n_{ya} = \frac{Y}{G} = \frac{c_{y\delta on} \frac{\rho_{H1} V_{\min}^2 S}{2}}{mg} \Rightarrow V_{\min} = \sqrt{\frac{2n_{ya} mg}{c_{y\delta on} \rho_{H1} S}} = \kappa \cdot \sqrt{n_{ya}}. \quad (5.27)$$

Подставим (5.27) в уравнение (5.25)

$$V_{\min} = \kappa \cdot \sqrt{n_{ya}} = V_0 \cdot \frac{n_{ya} - 1}{n_{ya} + 1} \Rightarrow V_0 = \kappa \cdot \sqrt{n_{ya}} \cdot \frac{n_{ya} + 1}{n_{ya} - 1}. \quad (5.28)$$

Найдём минимальное значение начальной скорости  $V_0$ , при котором возможно выполнение петли

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_{ya}} = 0 \Rightarrow n_{ya} = 4,24 \text{ и } V_0 = 3,33V_{\min}.$$

Если  $V_0 \leq 3,33V_{\min}$ , то вместо петли получаются волнообразные траектории, напоминающие горку (рис. 5.7).

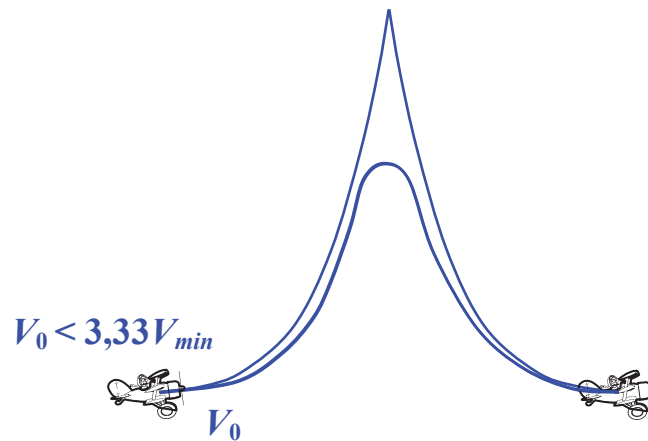


Рис. 5.7. Волнообразные траектории вместо петли

Время выполнения петли можно получить из второго уравнения системы (5.24), подставив в него  $\Theta = 2\pi$ . Получим

$$t = \frac{2\pi}{g} \cdot V_{\min} \cdot \frac{n_{ya}^{1,5}}{(n_{ya} - 1)\sqrt{n_{ya}^2 - 1}}.$$

$$\frac{\partial t}{\partial n_{ya}} = 0 \Rightarrow n_{ya}(t = t_{\min}) = n_{\max}^{\exists}.$$

При этом  $V_0 = (3,4 \dots 3,5)V_{\min}$ .

Найдём наибольшую высоту петли, используя (5.26) и (5.28),

$$\Delta H = \frac{V_{\min}^2}{2g} \cdot n_{ya} \left[ \left( \frac{n_{ya} + 1}{n_{ya} - 1} \right)^2 - 1 \right].$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial n_{ya}} = 0 \Rightarrow n_{ya} (\Delta H = \Delta H_{\max}) = 2,0 \dots 2,5 \text{ и } V_0 = V_{\max}.$$

Для построения траектории полёта при выполнении петли Нестерова, помимо высоты полёта, в каждый момент времени необходимо знать горизонтальную координату  $\Delta L$ .

$$\Delta L = \int_0^t V \cdot \cos \Theta \cdot dt = \frac{V_0^2 (n_{ya} - 1)^2}{g} \int_0^{\Theta} \frac{\cos \Theta \cdot d\Theta}{(n_{ya} - \cos \Theta)^3}.$$

Взяв интеграл, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{V_0^2}{g(n_{ya} - 1)} \left\{ \left[ n_{ya} (0,5 + n_{ya}^2) - \cos \Theta \cdot (0,5n_{ya}^2 + 1) \right] \cdot \frac{\sin \Theta}{(n_{ya} - \cos \Theta)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1,5n_{ya}}{\sqrt{n_{ya}^2 - 1}} \left( \arcsin \frac{1 - n_{ya} \cos \Theta}{n_{ya} - \cos \Theta} + \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

## 6. ПРОДОЛЬНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И БАЛАНСИРОВКА САМОЛЁТА

При изучении ЛТХ самолёта мы предполагали, что все силы, действующие на ЛА, приложены в его центре масс. Это справедливо, если самолёт сбалансирован по моментам. В реальных условиях самолёт подвержен возмущениям вследствие изменения своей конфигурации (уборки-выпуска шасси, механизации, тормозных щитков), изменения состояния атмосферы, активных действий пилота (отклонения ручек управления двигателями (РУДов) и рычагов поста управления), стрельбы из бортового оружия, сброса грузов и т.п. Нарушается балансировка, возникает возмущённое движение ЛА.

Наличие симметрии у ЛА позволяет рассматривать его пространственное возмущённое движение как сумму двух независимых движений: продольного и бокового. Такое разделение возмущённого движения справедливо, когда исходное невозмущённое движение происходит при малом

угле атаки, без крена и скольжения, при этом возмущающие воздействия незначительны (малы) [2].

Изучение продольного и бокового возмущённых движений связано с двумя важнейшими понятиями: устойчивостью и управляемостью.

Под устойчивостью движения понимается свойство параметров движения возвращаться к своим исходным движениям после отклонения самолёта от опорного движения и прекращения действия возмущения. Другими словами, устойчивость – это свойство ЛА сохранять исходный режим полёта без вмешательства в управление пилота. Приведенное определение характеризует динамическую устойчивость.

Управляемостью ЛА называют его способность в ответ на целенаправленные действия пилота совершать любой предусмотренный эксплуатацией маневр.

Устойчивость и управляемость – два взаимно противоположные физические свойства, особенно важные для самолёта. От них в значительной степени зависит безопасность полёта, а также простота и точность пилотирования и полнота реализации лётчиком технических возможностей ЛА.

Продольное возмущённое движение развивается под действием аэродинамических сил  $X_a$ ,  $Y_a$ , силы тяги  $P$ , силы тяжести  $G = mg$  и момента тангажа  $M_z$ . Боковое возмущённое движение происходит под действием сил с проекциями на ось  $OZ$  и моментов крена  $M_x$  и рыскания  $M_y$ .

Аэродинамические моменты тангажа, рыскания и крена сложным образом зависят от аэродинамической схемы и геометрических параметров самолёта, его конфигурации, режима полёта (скорости, высоты и числа  $M$ ), углов атаки и скольжения, угловых скоростей крена  $\omega_x$ , рыскания  $\omega_y$  и тангажа  $\omega_z$ , производной  $\dot{\alpha}$  и других, а также от отклонения управляющих органов: руля высоты ( $\delta_\theta$ ) или управляемого стабилизатора ( $\varphi_{ст}$ ), руля направления ( $\delta_H$ ), элеронов или флаперонов ( $\delta_{эл}$ ).

Принятое правило знаков для кинематических параметров  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  углов отклонения рулей, перемещений ручки управления и педалей показано на рис. 6.1.

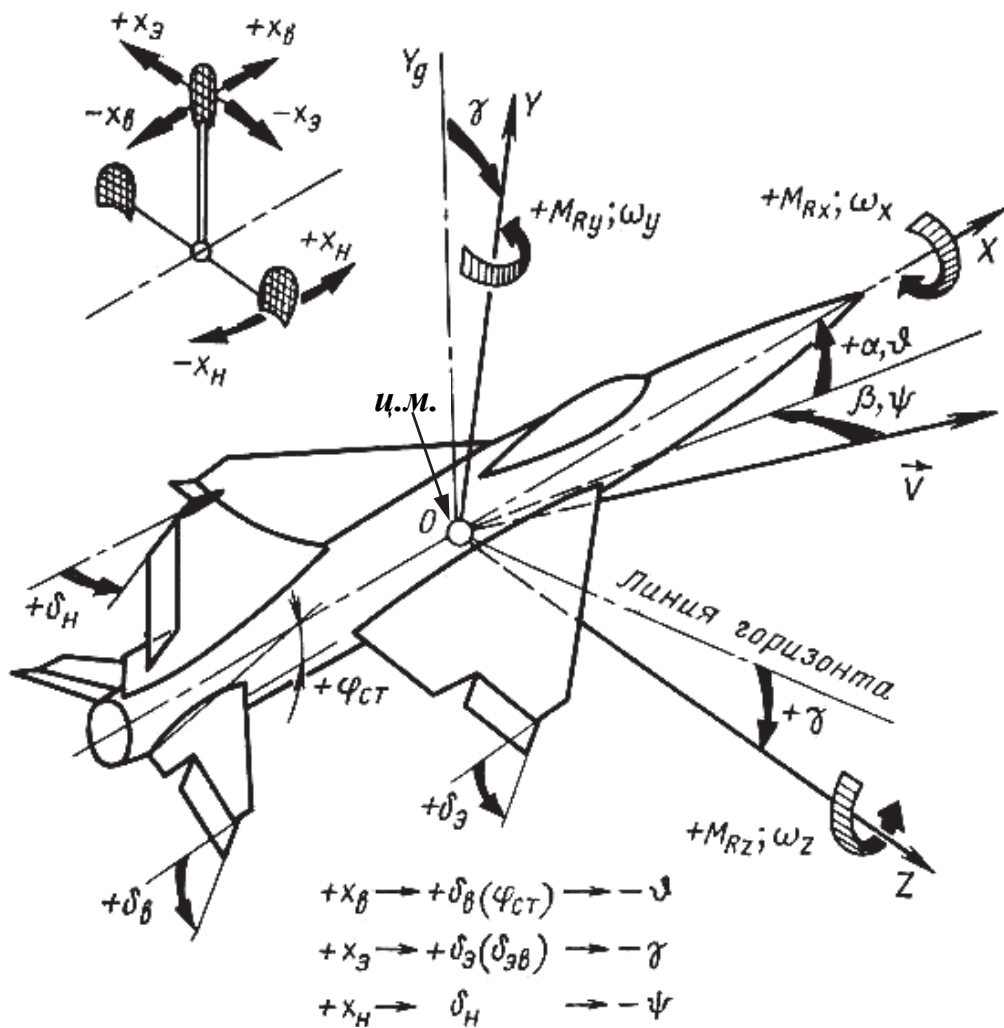


Рис. 6.1. Правило знаков для перемещений и моментов

### 6.1. Момент тангажа самолёта

Момент тангажа (продольный момент) считается положительным, если он вызывает кабрирование ЛА [12].

$$M_z = M_{z \delta_{\alpha 0}} + M_{z \delta_{\alpha}};$$

$$M_{z \delta_{\alpha 0}} = M_{z_{кр}} + M_{z_{\phi}} + M_{z_{\delta \alpha}} + M_{z_p} + M_{z_w} + \dots$$

Момент аэродинамических сил на основании теории подобия можно представить в виде

$$M_z = m_z \cdot q \cdot S \cdot b,$$

где  $m_z$  – безразмерный коэффициент момента.

Тогда

$$m_{z \delta_{\alpha 0}} = m_{z_{кр}} + m_{z_{\phi}} + m_{z_{\delta \alpha}} + m_{z_p} + m_{z_w} + \dots, \quad (6.1)$$

где  $m_{z_{кр}}$  – коэффициент продольного момента крыла;  $m_{z_{ф}}$  – коэффициент продольного момента фюзеляжа;  $m_{z_{д}}$  – коэффициент продольного момента гондол двигателей;  $m_{z_{р}}$  – коэффициент продольного момента двигателей;  $m_{z_{ш}}$  – коэффициент продольного момента шасси.

Выполним поагрегатный расчёт момента тангажа для дозвуковых самолётов.

## 6.2. Аэродинамический момент тангажа крыла

Сначала рассмотрим прямоугольное крыло, при этом пусть ц.м. ЛА лежит в плоскости хорд (рис. 6.2). Момент тангажа крыла вызывают аэродинамический момент относительно передней кромки  $M_{нк} = c_m \cdot q \cdot S \cdot b$ , а также аэродинамические силы  $X_a$  и  $Y_a$ , приложенные в носке и имеющие соответствующие плечи относительно ц.м. ЛА. Эти силы и момент определяют в результате продувок моделей крыльев в аэродинамической трубе, их приводят в атласах аэродинамических профилей в виде зависимостей аэродинамических коэффициентов  $c_{ya}$ ,  $c_{xa}$  и  $c_m$  от угла атаки  $\alpha$ .

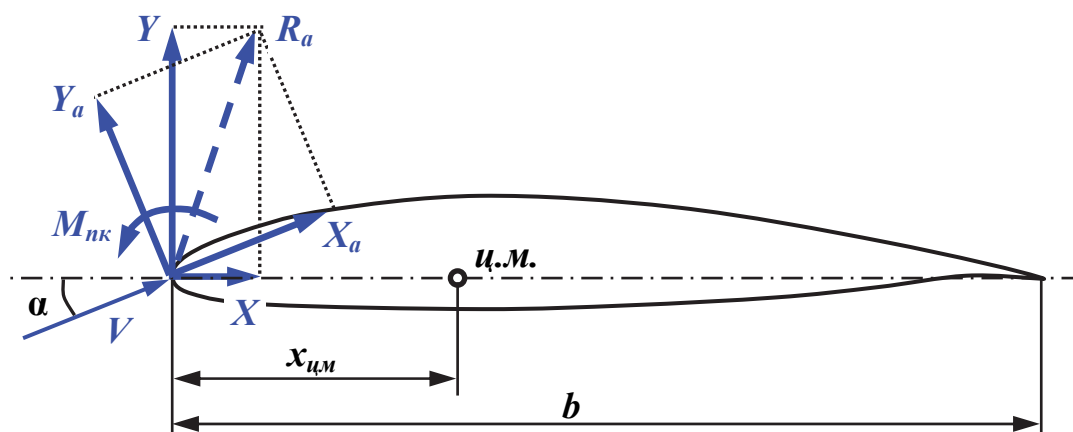


Рис. 6.2. Аэродинамические силы и момент на крыле

Спроецируем силы  $X_a$  и  $Y_a$  на оси связанной системы координат [12]

$$\begin{cases} Y = Y_a \cos \alpha + X_a \sin \alpha; \\ X = X_a \cos \alpha - Y_a \sin \alpha, \end{cases}$$

или через коэффициенты аэродинамических сил

$$\begin{cases} c_y = c_{ya} \cos \alpha + c_{xa} \sin \alpha; \\ c_x = c_{xa} \cos \alpha - c_{ya} \sin \alpha. \end{cases}$$

Обычно угол атаки  $\alpha$  мал и в инженерных расчётах можно принять  $\cos \alpha \approx 1$  и  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Тогда 
$$\begin{cases} c_y = c_{ya} + c_{xa} \alpha; \\ c_x = c_{xa} - c_{ya} \alpha. \end{cases}$$

Поскольку  $c_x \cdot \alpha \ll c_y$ , то 
$$\begin{cases} c_y = c_{ya}; \\ c_x = c_{xa} - c_{ya} \alpha. \end{cases} \quad (6.2)$$

Зависимость  $c_y(c_x)$  иногда называют полярной второго рода (рис. 6.3).

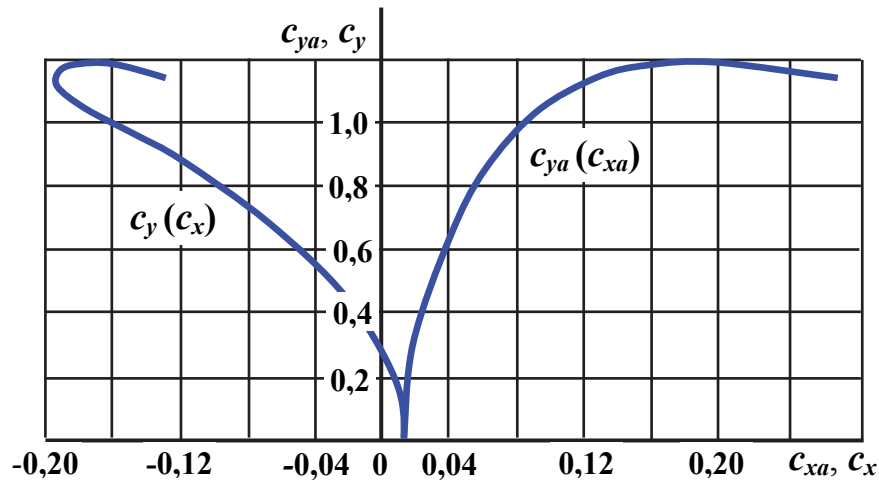


Рис. 6.3. Поляры первого  $c_{ya}(c_{xa})$  и второго  $c_y(c_x)$  рода

Продольный момент плоского прямоугольного крыла можно представить в виде  $M_{z\text{кр}} = m_{z\text{кр}} \cdot q \cdot S \cdot b = M_{нк} + Y \cdot x_{цм} = c_m \cdot q \cdot S \cdot b + c_y \cdot q \cdot S \cdot x_{цм}$ . Сокращая на  $q \cdot S \cdot b$ , получим

$$m_{z\text{кр}} = c_m + \bar{x}_{цм} c_y. \quad (6.3)$$

Типичная зависимость  $c_m(c_y)$  представлена на рис. 6.4.

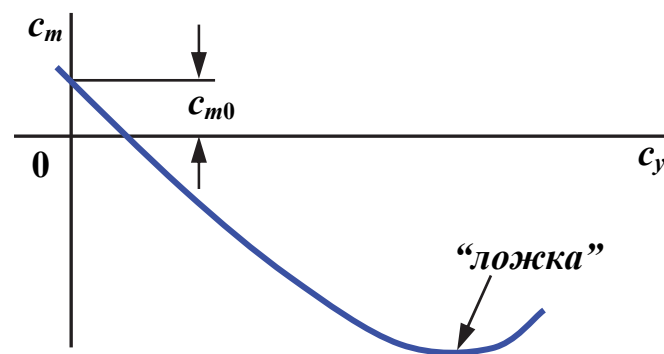


Рис. 6.4. Типовая зависимость  $c_m(c_y)$

Обычно эксплуатация самолёта соответствует линейному участку этой зависимости, который можно представить как

$$c_m = c_{m0} + \left( \frac{\partial c_m}{\partial c_y} \right) \cdot c_y. \quad (6.4)$$

Подставим (6.4) в (6.3). Получим

$$m_{z\text{кр}} = c_{m0} + \left( \frac{\partial c_m}{\partial c_y} + \bar{x}_{цм} \right) \cdot c_y.$$

На хорде всегда можно выбрать такое положение начала координат (ц.м.), при котором  $m_{z\text{кр}}$  не зависит от  $c_y$ , а, следовательно, и от угла атаки. Такая точка на хорде называется фокусом профиля

$$\bar{x}_F = \bar{x}_{цм} = -\frac{\partial c_m}{\partial c_y}. \quad (6.5)$$

При дозвуковом обтекании фокус обычно располагается на 20...25 % хорды профиля, при сверхзвуковом обтекании – на 50 % хорды профиля. Фокус – это точка приложения приращения подъёмной силы на крыле. Положение фокуса и центра давления совпадают только в частном случае, если прямоугольное крыло имеет симметричный или  $S$ -образный профиль (у таких профилей  $c_{m0} = 0$ ).

$$m_{z\text{кр}} = c_{m0} - (\bar{x}_F - \bar{x}_{цм}) \cdot c_y. \quad (6.6)$$

Перемещая ц.м. вдоль хорды крыла, можно существенным образом влиять на величину и знак момента аэродинамических сил крыла, особенно в случае внезапного изменения угла атаки при постоянной скорости полёта. Поэтому положение ц.м. или «центровка» самолёта является важнейшим показателем, определяющим его устойчивость и управляемость.

Если ц.м. самолёта не лежит в плоскости хорд (рис. 6.5), то зависимость  $m_{z\text{кр}}(c_y)$  не будет иметь линейного участка

$$m_{z\text{кр}} = c_{m0} - (\bar{x}_F - \bar{x}_{цм}) \cdot c_y - \bar{y}_{цм} c_x.$$

Учитывая здесь (6.2), получим

$$m_{z\text{кр}} = c_{m0} - (\bar{x}_F - \bar{x}_{цм} - \bar{y}_{цм} \alpha) \cdot c_{ya} - \bar{y}_{цм} c_{xa}. \quad (6.7)$$

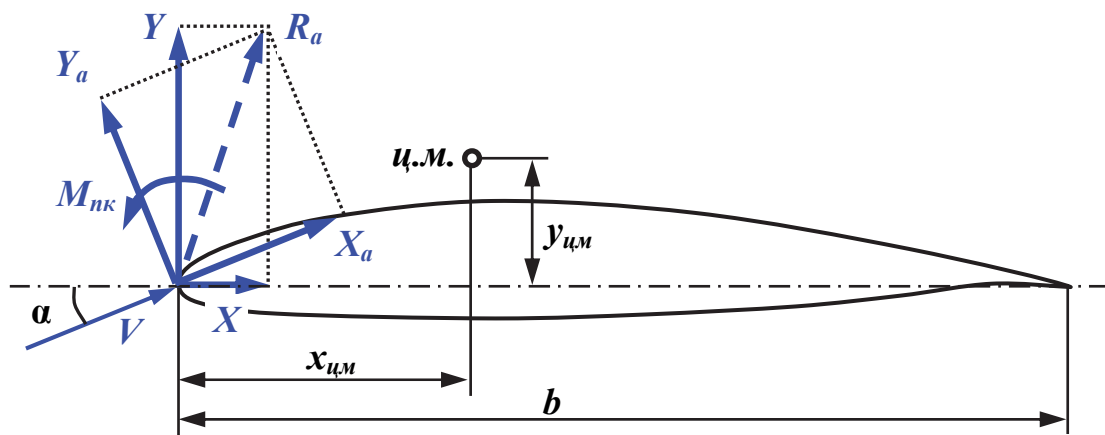


Рис. 6.5. Смещение ц.м. ЛА по высоте

Нелинейность функции  $m_{z_{кр}}(c_y)$  из-за смещения ц.м. самолёта по высоте начинает проявляться лишь при относительно больших значениях  $c_y$  (рис. 6.6), поэтому в ряде случаев при исследовании вопросов устойчивости можно использовать более простое, хотя и менее точное выражение (6.6).

Однако большое смещение ц.м. самолёта по высоте может изменить даже характер протекания кривой  $m_{z_{кр}}(c_y)$  (см. рис. 6.6).

Все вышеприведенные формулы мы получили, рассматривая прямоугольное в плане крыло с неизменным по размаху профилем. Крылья современных самолётов могут иметь самую разнообразную форму в плане и набираться из различных аэродинамических профилей.

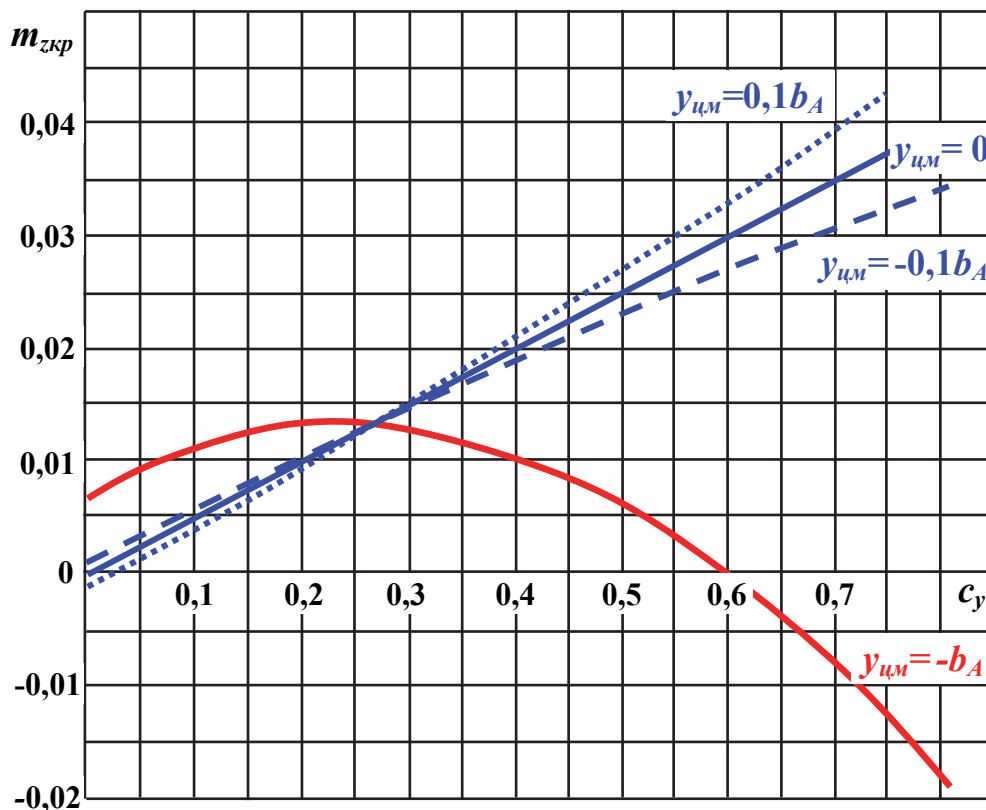


Рис. 6.6. Влияние положения ц.м. по высоте на ход кривой  $m_{z_{кр}}(c_y)$

Для упрощения дальнейших расчётов и использования уже полученных результатов вводят понятие *эквивалентного крыла*. Это такое прямоугольное крыло, моментные характеристики которого и аэродинамические силы  $Y_a$  и  $X_a$  были бы тождественны моментным характеристикам и аэродинамическим силам  $Y_a$  и  $X_a$  крыла произвольной формы в плане. Площади реального и эквивалентного крыльев одинаковы, но их размахи различны. Хорду эквивалентного крыла  $b_A$  называют *средней аэродинамической хордой* или сокращённо *САХ*. Величину *САХ* и её положение относительно реального крыла (рис. 6.7) определяют по формулам [13]



$$\left\{ \begin{array}{l} b_A = 2 \frac{\int_0^{l/2} c_{m\text{сеч}} [b(z)]^2 dz}{c_m S}; \\ x_A = 2 \frac{\int_0^{l/2} c_{ya\text{сеч}} [b(z)] \cdot x \cdot dz}{c_{ya} S}; \\ y_A = 2 \frac{\int_0^{l/2} c_{x\text{сеч}} [b(z)] \cdot y \cdot dz}{c_{xa} S}. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

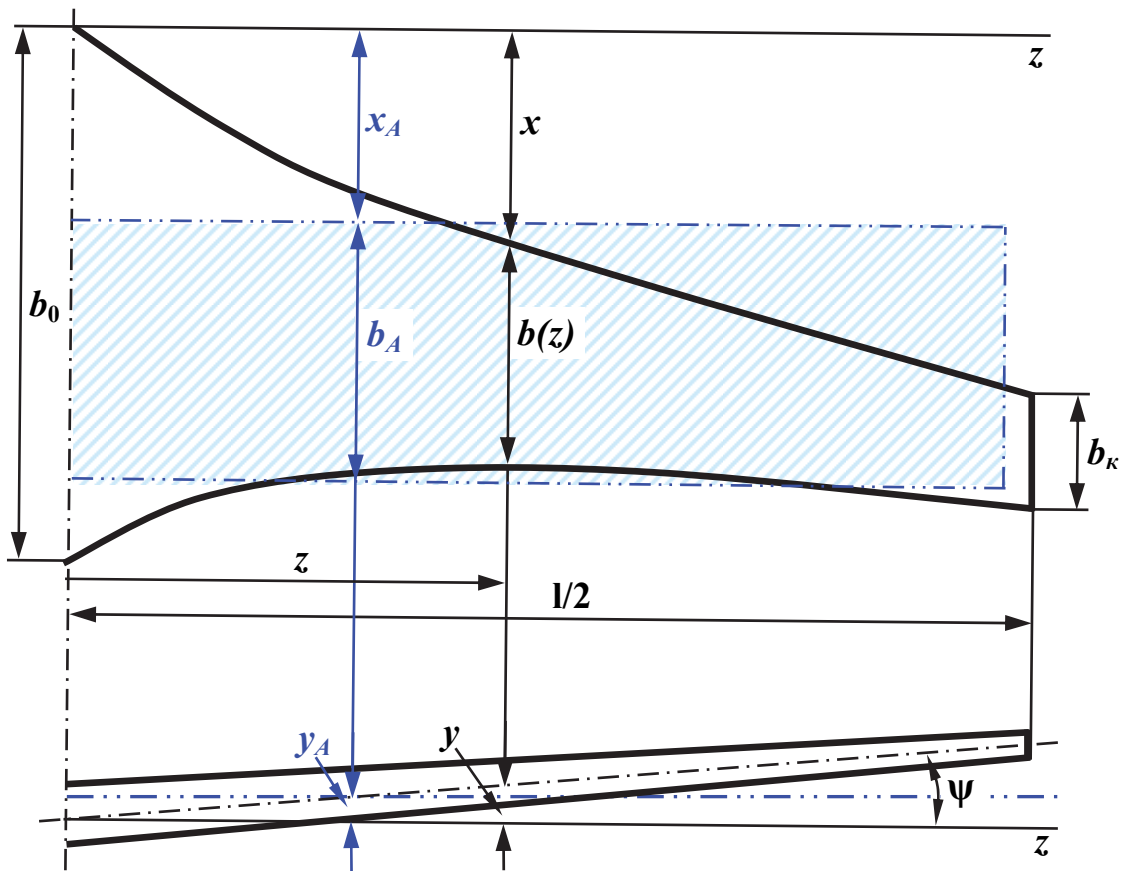


Рис. 6.7. Взаимное расположение реального и эквивалентного крыльев

Для вычисления по формулам (6.8) необходимо знать распределение аэродинамических коэффициентов (циркуляции) по размаху реального крыла. Обычно эти коэффициенты изменяются вдоль размаха крыла незначительно (исключение составляют концевые зоны), поэтому в первом приближении можно считать аэродинамические коэффициенты неизменными по размаху крыла, т.е.  $c_{т\text{сеч}} \approx c_t$ ;  $c_{y\text{сеч}} \approx c_y$ ;  $c_{x\text{сеч}} \approx c_x$ . Тогда выражения (6.8) можно заменить более простыми формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} b_A \approx 2 \frac{\int [b(z)]^2 dz}{S}; \\ x_A \approx 2 \frac{\int [b(z)] \cdot x \cdot dz}{S}; \\ y_A \approx 2 \frac{\int [b(z)] \cdot y \cdot dz}{S}. \end{array} \right. \quad (6.9)$$

В частности, для трапецевидного крыла

$$\left\{ \begin{array}{l} b_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{S}{l} \cdot \left(1 - \frac{\eta}{(\eta-1)^2}\right); \\ x_A = \frac{l}{6} \cdot \frac{\eta+2}{\eta+1} \cdot \left(4 \frac{\bar{x}_F}{\lambda} \cdot \frac{\eta-1}{\eta+1} + \operatorname{tg} \chi\right); \\ x_A = \frac{l}{6} \cdot \frac{\eta+2}{\eta+1} \cdot \frac{\psi^0}{57,3}, \end{array} \right.$$

где  $\eta = b_0/b_k$  – сужение крыла (здесь  $b_0$  – центральная хорда;  $b_k$  – концевая хорда);  $\chi$  – угол стреловидности по линии фокусов;  $\lambda = l^2/S$  – удлинение крыла;  $\psi^0$  – угол поперечного  $V$  крыла.

Таким образом, чтобы получить коэффициент момента аэродинамических сил для крыла произвольной формы в плане, необходимо сначала определить величину  $CAx$  и её положение относительно исходного крыла по формулам (6.8) или (6.9), а затем вычислить коэффициент момента эквивалентного крыла, например, по формуле (6.7).

### 6.3. Аэродинамический момент тангажа фюзеляжа

Аэродинамический момент тангажа фюзеляжа можно рассчитать двумя способами [12].

По первому способу продольный момент фюзеляжа определяют по формуле, аналогичной формуле (6.3) для продольного момента крыла

$$m_{z\phi} = (c_{m\phi} + \bar{x}_\phi \cdot c_{y\phi}) \cdot \frac{S_\phi l_\phi}{S b_A},$$

где  $c_{m\phi}$  – коэффициент момента фюзеляжа относительно оси, проходящей через его переднюю кромку;  $\bar{x}_\phi = x_\phi/l_\phi$  – безразмерная координата ц.м. относительно носа фюзеляжа (рис. 6.8);  $S_\phi$  – площадь прямоугольника, описанного около горизонтальной проекции фюзеляжа;  $l_\phi$  – длина фюзеляжа.

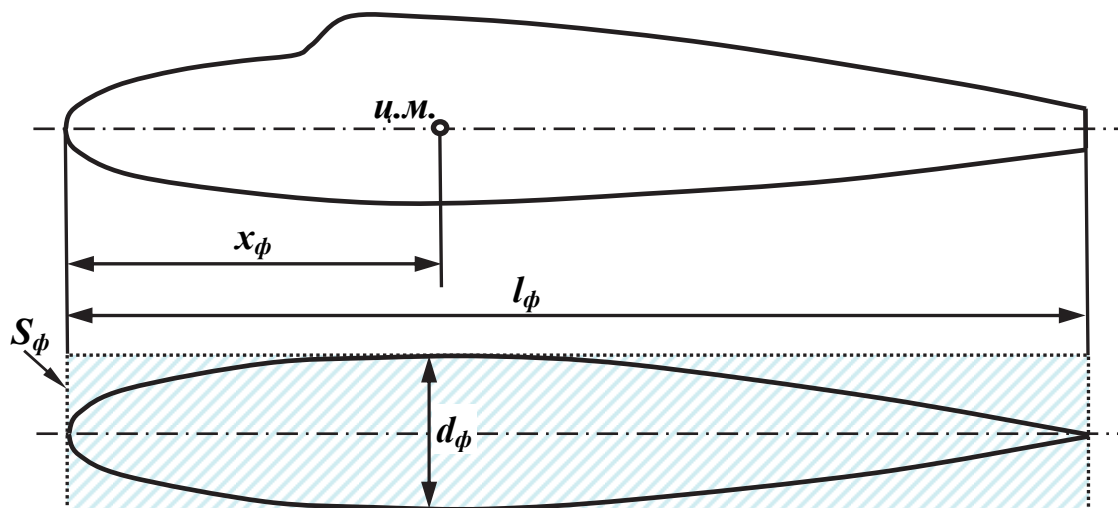


Рис. 6.8. К расчёту момента тангажа фюзеляжа

Коэффициенты  $c_{m\phi}$  и  $c_{y\phi}$  в функции угла атаки получают в результате продувок в аэродинамических трубах различных моделей фюзеляжей (рис. 6.9).

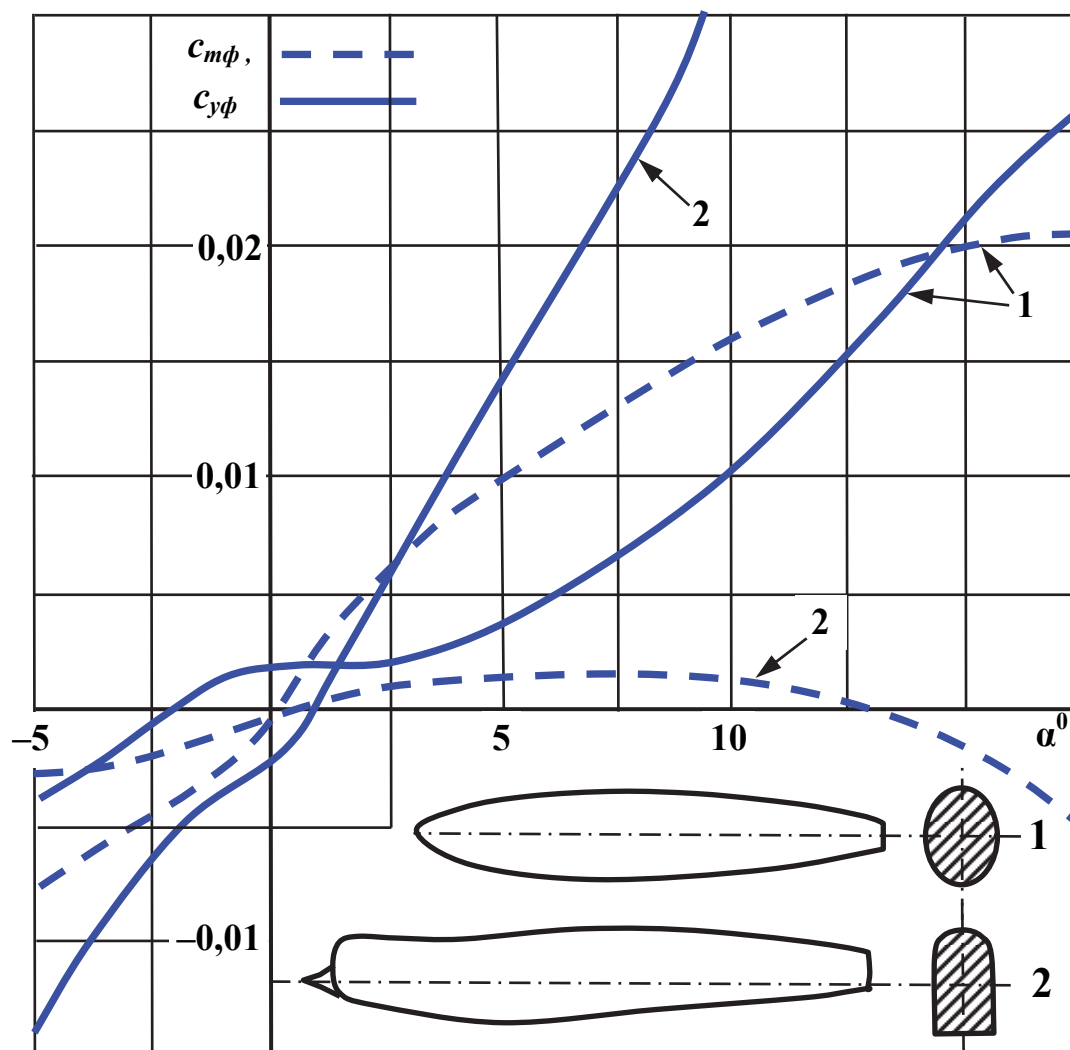


Рис. 6.9. Результаты продувок двух моделей фюзеляжа

Из атласа продувок можно выбрать модель фюзеляжа с относительными размерами, близкими к относительным размерам фюзеляжа исследуемого самолёта.

По второму способу учёт создаваемого фюзеляжем момента можно свести к определению дополнительного коэффициента момента  $\Delta m_{z0\phi}$  (к создаваемому крылом при  $c_y = 0$ ) и к расчёту смещения фокуса крыла  $\Delta \bar{x}_{F\phi}$  от влияния фюзеляжа. Такой подход предполагает, что момент тангажа фюзеляжа невелик по сравнению с моментом тангажа крыла. Это допущение тем ближе к действительности, чем меньше площадь проекции фюзеляжа по сравнению с площадью крыла  $S$ .

Приращение коэффициента момента на основании обработки экспериментов можно определить по приближённой формуле

$$\Delta m_{z0\phi} \approx 0,0032(\alpha_0 + \varphi),$$

где  $\alpha_0$  – угол нулевой подъёмной силы крыла, град;  $\varphi$  – угол между САХ и осью фюзеляжа, град.

Смещение фокуса от влияния фюзеляжа рассчитывают по эмпирической формуле

$$\Delta \bar{x}_{F\phi} = -k_F \cdot \frac{1}{c_y^\alpha} \cdot \frac{S_\phi l_\phi}{S \cdot b_A},$$

где  $k_F$  – некоторая обобщённая функция от  $\bar{x}_\phi$  и удлинения фюзеляжа  $\lambda_\phi = l_\phi/d_\phi$ . Её значения приведены на рис. 6.10.

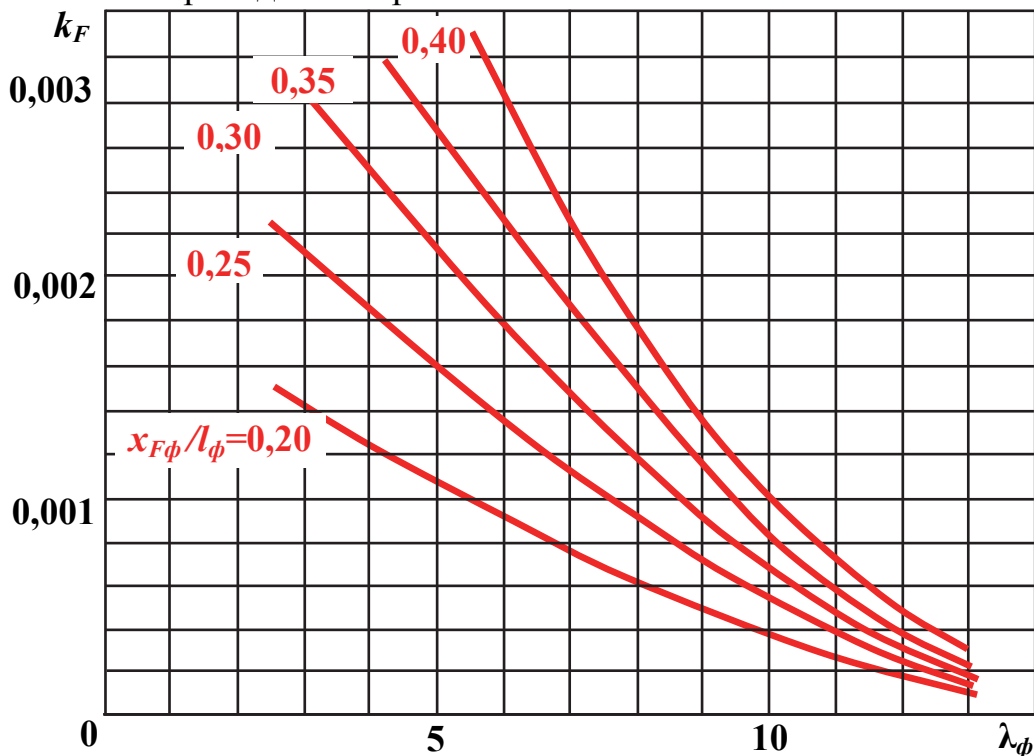


Рис. 6.10. График для определения коэффициента  $k_F$

## 6.4. Аэродинамический момент тангажа гондол двигателей

В тех случаях, когда двигатели установлены на крыле самолёта (рис. 6.11) или снаружи на хвостовой части фюзеляжа, необходимо принимать во внимание продольный момент, создаваемый гондолами [12]. Результаты экспериментов показывают, что влияние крыльевых гондол на коэффициент момента при  $c_y = 0$  незначительно и им можно пренебречь, сводя в итоге это влияние только к смещению фокуса крыла. Гондолы снаружи фюзеляжа могут дать гораздо большее приращение момента при  $c_y = 0$ .

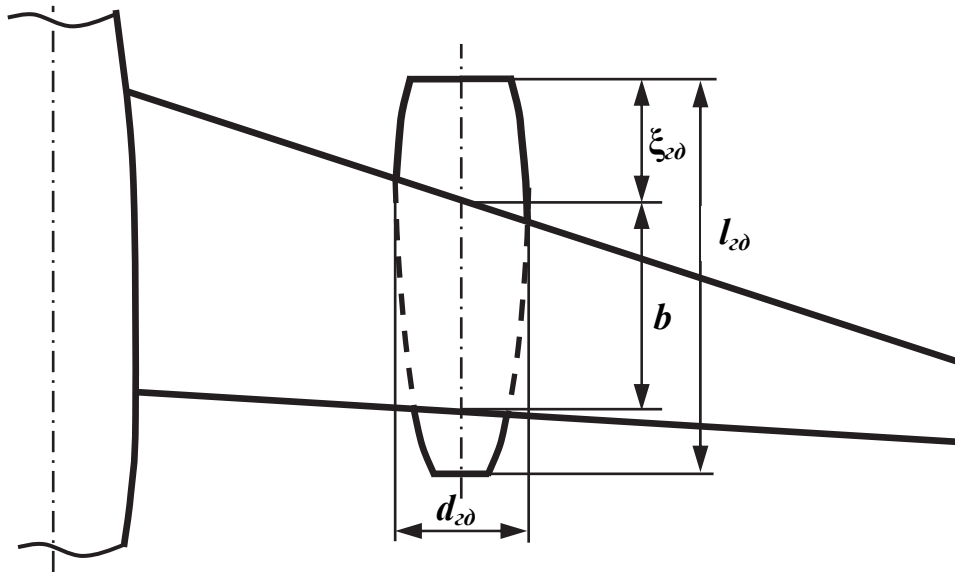


Рис. 6.11. Расположение гондолы двигателя на крыле

Смещение фокуса крыла вперёд оценивается по эмпирической формуле

$$\Delta \bar{x}_{F_{2\partial}} = -i \cdot \left(\frac{\Delta x}{b}\right) \frac{b}{b_A} \frac{S_1}{S} \kappa_{2\partial}, \quad (6.10)$$

где  $i$  – количество гондол на крыле;  
 $\frac{\Delta x}{b} \approx -0,06 + 0,48 \frac{\xi_{2\partial}}{b}$  – местное смещение фокуса на участках крыла, занятых гондолами;  $S_1 = b \cdot d_{2\partial}$  – площадь прямоугольника в месте установки гондолы;  $\kappa_{2\partial}$  – эмпирический коэффициент, зависящий от удлинения гондолы  $\lambda_{2\partial} = l_{2\partial} / d_{2\partial}$  (рис. 6.12).

Обычно  $\Delta \bar{x}_{F_{2\partial}} = -(0,02 \dots 0,04)$ .



Рис. 6.12. Зависимость  $\kappa_{2\partial}$  от  $\lambda_{2\partial}$

## 6.5. Момент тангажа двигателей

Момент тангажа двигателей (рис. 6.13) возникает за счёт того, что [12]:

а) вектор тяги не проходит через ц.м. ЛА;

б) при косо́й обдувке ( $\alpha > 0$ ) имеет место поворот вектора воздушного потока  $V$  в воздухозаборнике двигателя и потеря части количества движения. В результате появляется сила  $P_y$ , создающая на плече  $x_p$  кабрирующий момент.

В итоге

$$M_z = -P \cdot y_p + P_y \cdot x_p.$$

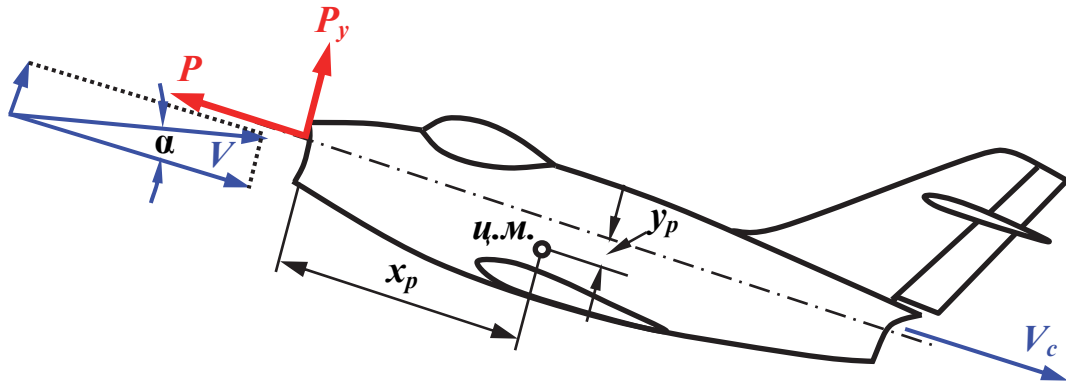


Рис. 6.13. Момент тангажа от тяги двигателей

В горизонтальном полёте  $P = P_n = c_x \cdot q \cdot S$ ,  $P_y \approx \frac{P \cdot \alpha}{\frac{V_c}{V} - 1}$ ,

где  $V_c$  – скорость газов на выходе из сопла двигателя.

Переходя к коэффициенту тангажа, получим

$$m_{zp} = -c_x \cdot \frac{y_p}{b_A} + \frac{c_x \cdot \alpha}{\frac{V_c}{V} - 1} \cdot \frac{x_p}{b_A} = c_x \left( \frac{\alpha}{\frac{V_c}{V} - 1} \bar{x}_p - \bar{y}_p \right). \quad (6.11)$$

## 6.6. Момент тангажа самолёта без горизонтального оперения

Формулу (6.1) можно представить в виде [12]

$$m_{z\delta z_0} = m_{z_0\delta z_0} - (\bar{x}_{F\delta z_0} - \bar{x}_{цм}) \cdot c_{y\delta z_0} + m_{zp}, \quad (6.12)$$

где  $m_{z_0\delta z_0} = m_{z_0кр} + \Delta m_{z_0\phi} + \Delta m_{z_0z\delta}$  (основную роль в данном выражении играет  $m_{z_0кр}$ , причём для крыльев дозвуковых самолётов обычно  $m_{z_0кр} < 0$ );

$$\bar{x}_{F\delta z_0} = \bar{x}_{Fкр} + \Delta \bar{x}_{F\phi} + \Delta \bar{x}_{Fz\delta}; \quad (6.13)$$

$c_{y\bar{b}z0}$  – коэффициент подъёмной силы самолёта без г.о. (с учётом несущих свойств фюзеляжа и интерференции комбинации «крыло+фюзеляж»), положение фокуса определяется формулами (6.5), (6.10) и (6.11).

Фокус самолёта без г.о. по сравнению с фокусом изолированного крыла смещается вперёд в среднем на 7...10 % САХ. Если ц.м. самолёта расположен позади фокуса, как это обычно и бывает, то самолёт без г.о. не обладает продольной статической устойчивостью. Для обеспечения продольной статической устойчивости самолёта без г.о. необходимо, чтобы ц.м. находился перед фокусом.

На рис. 6.14 показаны типичные кривые  $m_{z\bar{b}z0} = f(c_y)$  самолёта нормальной аэродинамической схемы для различных положений ц.м.

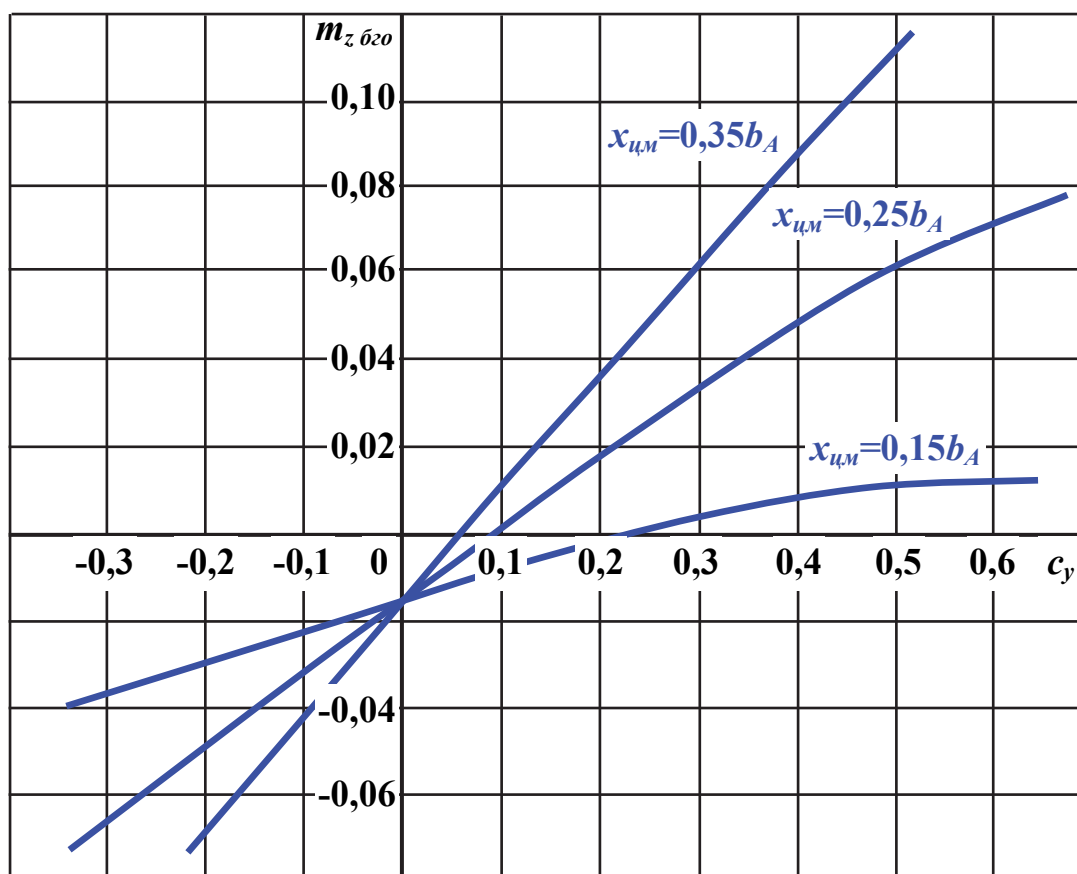


Рис. 6.14. Влияние положения ц.м. самолёта на кривую  $m_{z\bar{b}z0}(c_y)$

Возможен ли полёт самолёта без г.о.? Для установившегося режима полёта, прежде всего, необходимо сбалансировать самолёт по моментам. В случае, когда  $\bar{x}_p = \bar{y}_p = \bar{y}_{ц.м.} = 0$ , из (6.12) получим

$$m_{z\bar{b}z0} = m_{z0\bar{b}z0} - (\bar{x}_{F\bar{b}z0} - \bar{x}_{ц.м.}) \cdot c_y = m_{z0\bar{b}z0} + m_z^{c_y} c_y = 0.$$

Найдём отсюда требуемую центровку

$$\bar{x}_{цм} = -\frac{m_{z0\delta_{z0}}}{c_y} + \bar{x}_{F\delta_{z0}}. \quad (6.14)$$

Обычно  $m_{z0\delta_{z0}} < 0$ , поэтому из (6.14) следует, что при управлении ЛА путём перемещения ц.м. должно выполняться условие  $\bar{x}_{цм} > \bar{x}_{F\delta_{z0}}$ , причём каждому режиму полёта должна соответствовать своя центровка.

Как видно из последнего выражения, при таком способе управления мы получили неустойчивый в продольном канале ЛА. Степень его продольной неустойчивости  $m_z^{c_y}$  возрастает с увеличением скорости полёта (с уменьшением  $c_y$ ).

Рассмотренный «балансирный» способ управления применяется на некоторых планерах, дельтапланах, т.е. он приемлем для малоразмерных ЛА, летающих с небольшой скоростью. Однако полёт на ЛА с «балансирным» управлением требует от пилота напряжённого внимания и постоянного вмешательства в управление.

Возможен и другой способ управления самолётом без г.о. Если использовать на крыле профиль, у которого хвостик отогнут вверх (так называемый S-образный профиль), то получим  $m_{z0\delta_{z0}} > 0$ . Тогда из (6.14) имеем  $\bar{x}_{цм} < \bar{x}_{F\delta_{z0}}$  и статически устойчивый в продольном канале ЛА. Этот способ балансировки используется при создании самолётов по схеме «бесхвостка».

Положение фокуса самолёта без г.о., как и положение фокуса изолированного крыла, значительно зависит от числа  $M$  полёта. При переходе от дозвуковых к трансзвуковым и сверхзвуковым скоростям полёта фокус самолёта без г.о. смещается назад.

## 6.7. Продольный момент горизонтального оперения

Установка на ЛА оперения предусматривает управление сравнительно малой силой, приложенной на большом плече, чтобы при изменении баланса моментов баланс сил практически не нарушался.

Условием установившегося полёта является равновесие моментов сил, действующих на самолёт, т.е.

$$M_z = M_{z\delta_{z0}} + M_{z_{z0}} = 0.$$

Рассмотрим один из вариантов взаимного расположения крыла и г.о., например, когда г.о. находится позади крыла [2, 4], что соответствует наиболее распространённой нормальной аэродинамической схеме (рис. 6.15).

Обычно в этом случае момент  $M_{z\delta_{z0}}$  является пикирующим и сила  $Y_{z0}$  направлена вниз. Плечо г.о.  $L_{z0}$  – это расстояние от ц.м. самолёта до центра давления на г.о. Крыло оказывает двоякое воздействие на воздушный



поток, набегающий на г.о.: во-первых, оно тормозит этот поток ( $V_{z0} < V$ ), во-вторых, оно вызывает скос потока, поворачивая его на угол  $\varepsilon$ . Согласно линейной теории угол скоса  $\varepsilon = \varepsilon'_0 + \varepsilon^\alpha \cdot \alpha = \varepsilon_0 + \varepsilon^{Cy} \cdot c_y$ .

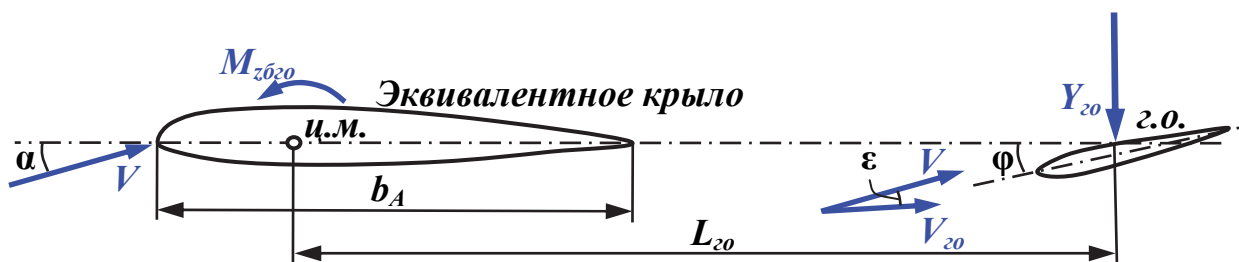


Рис. 6.15. Взаимное расположение эквивалентного крыла и г.о.

$$M_{z_{z0}} = Y_{z0} L_{z0} = c_{y_{z0}} \cdot q_{z0} \cdot S_{z0} \cdot L_{z0} = c_{y_{z0}}^\alpha (\alpha + \varphi - \varepsilon_{z0} + n_\delta \delta_\delta) \cdot \kappa_{z0} q \cdot S_{z0} L_{z0}.$$

Переходя к безразмерному коэффициенту момента, получим

$$m_{z_{z0}} = c_{y_{z0}}^\alpha (\alpha + \varphi - \varepsilon_{z0} + n_\delta \delta_\delta) \kappa_{z0} \frac{S_{z0} L_{z0}}{S \cdot b_A} = c_{y_{z0}}^\alpha (\alpha + \varphi - \varepsilon_{z0} + n_\delta \delta_\delta) \kappa_{z0} A_{z0}. \quad (6.15)$$

где  $\varphi$  – угол установки хорды г.о. относительно  $CAH$  крыла (на рис. 6.15 он показан отрицательным);  $n_\delta$  – эффективность руля высоты (на дозвуке

$n_\delta = \sqrt{\frac{S_{p\delta}}{S_{z0}}}$ , на сверхзвуке  $n_\delta \approx \frac{S_{p\delta}}{S_{z0}}$ , здесь  $S_{p\delta}$  – площадь руля высоты);

$\delta_\delta$  – угол отклонения руля высоты;  $\kappa_{z0} = q_{z0}/q$  – коэффициент торможения потока у г.о.;  $A_{z0} = \frac{S_{z0} L_{z0}}{S b_A} = \bar{S}_{z0} \bar{L}_{z0}$  – безразмерный статический момент г.о.

Существует инженерная методика ЦАГИ, определяющая коэффициент торможения и скос потока у г.о. как функции взаимного расположения крыла и оперения, а также учитывающая влияние земли [12, 14].

Из (6.15) получим, что установка г.о. сдвигает фокус самолёта без г.о. в направлении горизонтального оперения на относительную величину

$$\Delta \bar{x}_{F_{z0}} = \frac{c_{y_{z0}}^\alpha}{c_{y_{кр}}^\alpha} A_{z0} \kappa_{z0} (1 - \varepsilon^\alpha).$$

## 6.8. Демпфирующий момент тангажа, возникающий при вращении самолёта

При движении по криволинейной траектории в вертикальной плоскости самолёт совершает вращение с угловой скоростью  $\omega_z = \dot{\alpha} + \dot{\Theta}$ . При этом возникает демпфирующий момент [4], основной вклад в который

вносит г.о. (рис. 6.16). Оценим величину демпфирующего момента, когда угол атаки  $\alpha = \text{const}$  и  $\omega_z = \dot{\Theta}$ .

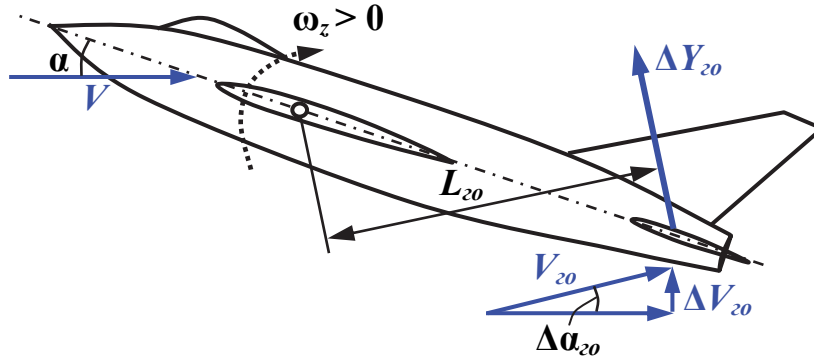


Рис. 6.16. Возникновение демпфирующего момента г.о.

$$\Delta \alpha_{z0} = \frac{\Delta V_{z0}}{V_{z0}} = \frac{\omega_z L_{z0}}{V_{z0}};$$

$$\Delta M_{z_{z0}} = -c_{y_{z0}}^\alpha \frac{\omega_z L_{z0}}{V_{z0}} q_{z0} S_{z0} L_{z0}. \quad (6.16)$$

Введём понятие безразмерной угловой скорости  $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V}$ .

Тогда из (6.16) получим  $\Delta m_{z_{z0}} = -c_{y_{z0}}^\alpha \frac{\omega_z L_{z0}}{V_{z0}} \frac{q_{z0}}{q} \frac{S_{z0} L_{z0}}{S b_A} = -c_{y_{z0}}^\alpha \bar{\omega}_z \bar{L}_{z0} A_{z0} \sqrt{\kappa_{z0}};$

$$\Delta m_{z_{z0}} = (-c_{y_{z0}}^\alpha \bar{L}_{z0} A_{z0} \sqrt{\kappa_{z0}}) \cdot \bar{\omega}_z = m_{z_{z0}}^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z, \quad (6.17)$$

где  $\bar{L}_{z0} = \frac{L_{z0}}{b_A}$  – относительное плечо г.о. в долях САХ.

Крыло и фюзеляж также создают демпфирующий момент (20...40 % от демпфирующего момента г.о., определяемого по формуле (6.17)). В итоге

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = (1,2...1,4) \cdot m_{z_{z0}}^{\bar{\omega}_z}.$$

## 6.9. Продольная статическая устойчивость самолёта

Статическую устойчивость самолёта рассматривают как при фиксированных органах и рычагах управления, так и при освобождённом управлении [15]. В первом случае рассматривают статическую устойчивость по перегрузке и по скорости.

### 6.9.1. Продольная статическая устойчивость по перегрузке

Пусть в результате действия возмущения изменяются угол атаки  $\alpha$  и нормальная перегрузка  $n_y$ ,  $V = \text{const}$ . Если при этом возникает аэродинамический момент тангажа, стремящийся восстановить значения  $\alpha$  и  $n_y$ , то самолёт обладает статической устойчивостью по перегрузке

$$\sigma_n = \left. \frac{dm_z}{dc_y} \right|_{\substack{V=\text{const}, \\ \delta_\epsilon=\text{const}}} . \quad (6.18)$$

Выявим зависимость  $\sigma_n$  от параметров самолёта и режима полёта. В установившемся криволинейном движении на самолёт действует продольный момент

$$m_z = m_{z0} + m_z^{c_y} c_y + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z + m_z^\varphi \varphi + m_z^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon .$$

Возьмём полную производную по  $c_y$  при условиях  $V = \text{const}$ ,  $\delta_\epsilon = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ .

$$\frac{dm_z}{dc_y} = m_z^{c_y} + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{d\bar{\omega}_z}{dc_y} .$$

Полагая  $\dot{\alpha} = 0$  и используя уравнение движения ц.м. (5.16), получим

$$\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V} = \dot{\Theta} \frac{b_A}{V} = \frac{g b_A}{V^2} (n_y - \cos \Theta) .$$

Подставим в последнее выражение  $n_y = \frac{c_y \rho \cdot V^2 S}{2mg}$ . Отсюда

$$\frac{d\bar{\omega}_z}{dc_y} = \frac{\rho \cdot S \cdot b_A}{2m} = \frac{1}{\mu} .$$

Величина  $\mu = \frac{2m}{\rho \cdot S \cdot b_A}$  называется относительной плотностью самолёта. Окончательно из (6.18) получим

$$\sigma_n = m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu} = (\bar{x}_{cm} - \bar{x}_F) + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu} . \quad (6.19)$$

Основной вклад в  $\sigma_n$  вносит производная  $m_z^{c_y}$ . Величина поправки на демпфирование  $\frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu}$  у современных самолётов на малых высотах и скоростях полёта составляет 0,01...0,02 и её в расчётах часто не учитывают.

По знаку показателя  $\sigma_n$  можно судить о статической устойчивости по перегрузке. Если  $\sigma_n < 0$ , то самолёт устойчив по перегрузке. Если  $\sigma_n > 0$ , то самолёт неустойчив по перегрузке. Если  $\sigma_n = 0$ , то самолёт нейтрален по перегрузке. Согласно норм лётной годности, для самолётов транспортной категории наличие статической устойчивости по перегрузке обязательно.

Устойчивость по перегрузке характеризует поведение самолёта при движении по криволинейной траектории с постоянной скоростью (выход из пикирования, вход в горку и т.п.).

Для современных самолётов с тонкими стреловидными крыльями значительное влияние на устойчивость по перегрузке (особенно при больших скоростных напорах) оказывают упругие деформации крыла и г.о., вызывая смещение фокуса самолёта вперёд и уменьшая степень продольной статической устойчивости по перегрузке.

### 6.9.2. Продольная статическая устойчивость по скорости

Вторым видом продольного маневра с фиксированными органами и рычагами управления, при котором происходит изменение угла атаки, является разгон и торможение самолёта при постоянной перегрузке.

Пусть в результате действия возмущения изменяется только воздушная скорость самолёта, а перегрузка  $n_y$  остаётся постоянной. Если при этом возникают силы и моменты, направленные на восстановление исходной скорости полёта, то самолёт обладает продольной статической устойчивостью по скорости

$$\sigma_V = \left. \frac{dm_z}{dc_y} \right|_{\substack{n_y=const=1, \\ \delta_\epsilon=const}}. \quad (6.20)$$

$$m_z = m_{z0} + m_z^{c_y} c_y + m_z^\varphi \varphi + m_z^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon;$$

$$\sigma_V = \frac{dm_z}{dc_y} = m_z^{c_y} + m_z^M \frac{dM}{dc_y} = m_z^{c_y} + (m_{z0}^M - \bar{x}_F^M c_y + \frac{\partial m_z^\varphi}{\partial M} \varphi + \frac{\partial m_z^{\delta_\epsilon}}{\partial M} \delta_\epsilon) \frac{dM}{dc_y}.$$

В исходном горизонтальном установившемся полёте  $Y = G$  и тогда

$$c_{ygn} = \frac{mg}{0,7 p_H M^2 S} \text{ или } c_{ygn} M^2 = \frac{mg}{0,7 p_H S}. \text{ Дифференцируя по частям, полу-}$$

$$\text{чим } 2MdMc_{ygn} + M^2 dc_y = 0, \text{ откуда } \frac{dM}{dc_y} = -\frac{M}{2c_{ygn}}.$$

Используя (6.20), окончательно получим

$$\sigma_V = m_z^{c_y} + \frac{M}{2} \bar{x}_F^M - (m_{z0}^M + \frac{\partial m_z^\varphi}{\partial M} \varphi + \frac{\partial m_z^{\delta_\epsilon}}{\partial M} \delta_\epsilon) \frac{M}{2c_{ygn}}. \quad (6.21)$$

Согласно (6.21) основной вклад в  $\sigma_V$  на дозвуке и сверхзвуке вносит производная  $m_z^{c_y}$ . В трансзвуковой области значительное влияние оказывает производная  $\bar{x}_F^M$ , изменяющая даже знак  $\sigma_V$  (участок  $BD$  на моментной диаграмме рис. 6.17).

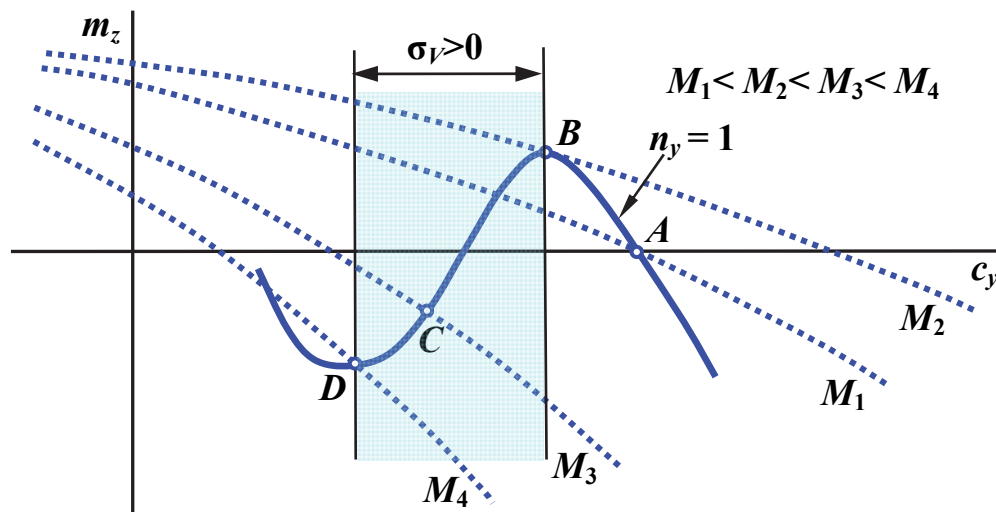


Рис. 6.17. Область статической неустойчивости по скорости

Неустойчивость по скорости ( $\sigma_V > 0$ ) при разгоне в трансзвуковой области вызывает «затягивание в пикирование», при торможении – «скоростной подхват», что усложняет пилотирование самолёта.

Для безопасности полёта более существенна устойчивость по перегрузке, чем по скорости (самолёты с небольшой степенью неустойчивости по скорости на эксплуатационных режимах полёта и в трансзвуковом диапазоне скоростей ещё встречаются в массовой эксплуатации). Это объясняется тем, что возмущённое движение самолёта, неустойчивого по скорости, в противоположность самолёту, неустойчивому по перегрузке, всегда развивается медленно, и лётчик располагает достаточным временем для исправления ситуации.

## 6.10. Продольная балансировка самолёта в горизонтальном полёте

Запишем условие балансировки самолёта в горизонтальном установившемся полёте [4]

$$m_z = m_{z0} + m_z^{c_y} c_y(\alpha) + m_z^\varphi \varphi + m_z^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon^{bal} = 0; \quad (6.22)$$

$$c_{y2n} = c_y(\alpha) + c_y^\varphi \varphi + c_y^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon^{bal}, \quad (6.23)$$

где

$$c_y^\varphi = -\frac{m_z^\varphi}{L_{z0}}; \quad c_y^{\delta_b} = -\frac{m_z^{\delta_b}}{L_{z0}}. \quad (6.24)$$

Определим  $c_y(\alpha)$  из уравнения (6.23) и подставив в (6.22), с учётом (6.24), получим

$$\delta_v^{бал} = -\frac{m_{z0} + m_z^{c_y} c_y + m_z^\varphi \left(1 + \frac{m_z^{c_y}}{L_{z0}}\right) \cdot \varphi}{m_z^{\delta_b} \left(1 + \frac{m_z^{c_y}}{L_{z0}}\right)}. \quad (6.25)$$

На основании (6.25) строят балансировочные кривые для различных высот полёта (рис. 6.18).

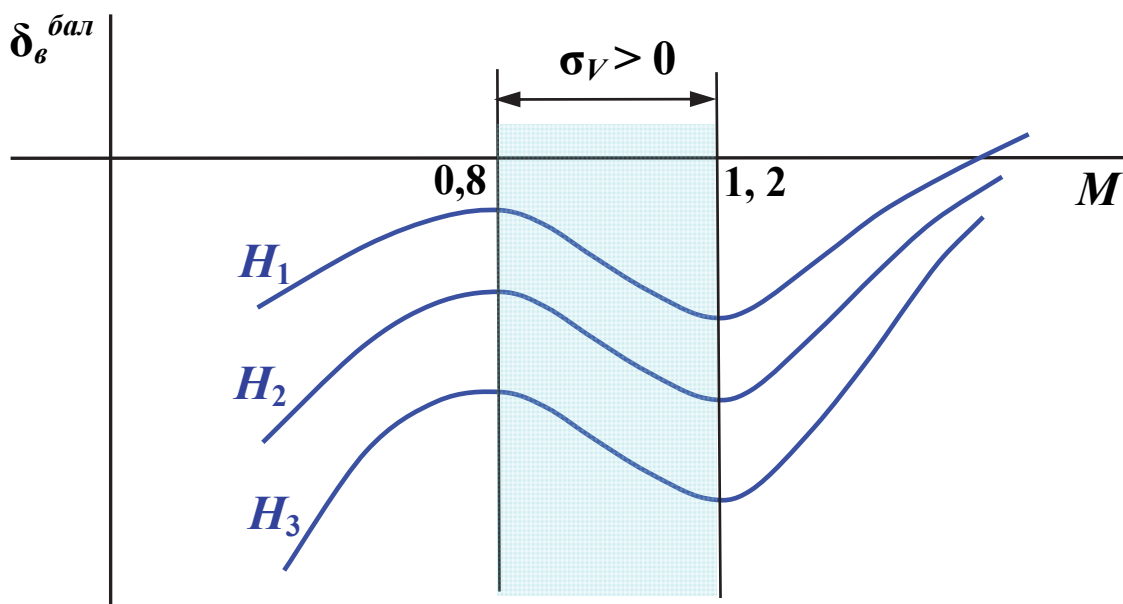


Рис. 6.18. Балансировочные кривые

В трансзвуковой области ( $0,8 \leq M \leq 1,2$ ), где наблюдается неустойчивость по скорости ( $\sigma_v > 0$ ), изменяется монотонность балансировочных кривых (образуется «ложка»), что требует двойных движений ручки управления при выполнении разгона (торможения).

### 6.11. Балансировочная поляра

При балансировке статически устойчивого по перегрузке самолёта нормальной схемы г.о. создаёт отрицательную подъёмную силу. При этом ухудшаются несущие свойства самолёта, растёт его сопротивление, что в итоге приводит к падению аэродинамического качества (возникают потери на балансировку).

Поляра самолёта, рассчитанная с учётом потерь на балансировку, называется балансировочной поляррой [4].

Полагаем, что заданы полярры самолёта без г.о.  $c_{x\bar{b}_{20}} = c_{x0\bar{b}_{20}} + A \cdot c_{y\bar{b}_{20}}^2$  и полярры г.о.  $c_{x_{20}} = c_{x0_{20}} + A \cdot c_{y_{20}}^2$ .

$$c_{y_{2n}} = c_{y\bar{b}_{20}} + c_{y_{20}} \kappa_{20} \bar{S}_{20};$$

$$c_x^{\bar{b}_{ал}} = c_{x0} + A \cdot (c_{y_{2n}} - c_{y_{20}} \kappa_{20} \bar{S}_{20})^2 + A \cdot (c_{y_{20}} \kappa_{20} \bar{S}_{20})^2. \quad (6.26)$$

Из условия балансировки

$$m_z = m_{z0} + (\bar{x}_{цм} - \bar{x}_{F\bar{b}_{20}}) \cdot c_{y\bar{b}_{20}} - c_{y_{20}} \kappa_{20} A_{20} = 0.$$

Найдём отсюда  $c_{y_{20}}$  и подставим в (6.26), после преобразований получим

$$c_x^{\bar{b}_{ал}} = c_{x0} + (1 + \Delta_{\bar{б}_{ал}}) \cdot A \cdot c_{y_{2n}}^2,$$

где  $\Delta_{\bar{б}_{ал}} = \left( \frac{m_z^{c_y}}{\bar{L}_{20} + m_z^{c_y}} \right)^2 \cdot \left[ 1 - \frac{2(\bar{L}_{20} + m_z^{c_y})}{m_z^{c_y}} \right]$ .

## 6.12. Шарнирный момент органов продольного управления

Шарнирным моментом руля высоты называется момент аэродинамических сил, действующих на руль относительно его оси вращения [12]

$$M_{ш} = m_{ш} q_{20} S_{pв} b_{pв},$$

где  $m_{ш}$  – коэффициент шарнирного момента;  $S_{pв}$ ,  $b_{pв}$  – площадь и средняя хорда руля высоты. Шарнирный момент положителен, если он стремится отклонить хвостик руля высоты вниз.

Для уменьшения шарнирного момента применяют осевую, роговую и сервокомпенсацию рулей.

В соответствии с линейной моделью

$$m_{ш} = m_{ш}^{\alpha} \alpha_{20} + m_{ш}^{\delta_e} \delta_e, \quad (6.27)$$

где  $m_{ш}^{\alpha} = 0,12 \frac{S_{pв}}{S_{20}} (1 - 3,6 \frac{S_{ок}}{S_{pв}}) \cdot c_{y_{20}}^{\alpha}$  ;  
 $m_{ш}^{\delta_e} = 0,14 \cdot (1 - 6,5 (\frac{S_{ок}}{S_{pв}})^2) \cdot c_{y_{20}}^{\alpha}$  ;

} – на дозвуке.

При увеличении  $S_{ок}$  шарнирный момент убывает и при  $S_{ок}/S_{pв} \approx 0,28$  становится равным нулю. При дальнейшем увеличении  $S_{ок}$  возникает перекомпенсация рулей, что недопустимо.

Аэродинамическая компенсация только уменьшает шарнирный момент, но не сводит его к нулю. При длительном полёте на каком-либо режиме даже небольшое постоянное усилие, прикладываемое к рычагам управления, утомляет пилота. Для получения нулевого усилия на рычагах управления применяют триммер (рис. 6.19), управляемый лётчиком.

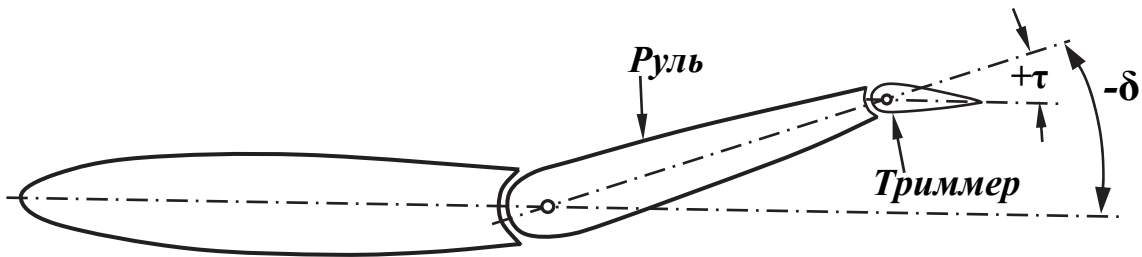


Рис. 6.19. Руль с триммером

При отклонении триммера коэффициент шарнирного момента изменится на величину

$$\Delta m_{ш}^{\tau} \approx 0,017 \frac{S_{mp}}{S_{pв}} \frac{b_{p1}}{b_{pв}} \sqrt{\frac{b_{p1}}{b_{mp}}} \cdot \tau^{\circ},$$

где  $b_{p1}$  – средняя хорда той части руля, на которой расположен триммер;  $b_{mp}$  – хорда триммера.

На сверхзвуке  $m_{ш}^{\alpha} = m_{ш}^{\delta_s} = -\frac{2}{57,3\sqrt{M^2 - 1}} \left(1 - 2\frac{S_{ок}}{S_{pв}}\right).$

В этом случае перекомпенсация наступает при  $\frac{S_{ок}}{S_{pв}} = 0,5.$

Зависимость коэффициента шарнирного момента (6.27) в широком диапазоне чисел  $M$  полёта представлена на рис. 6.20.

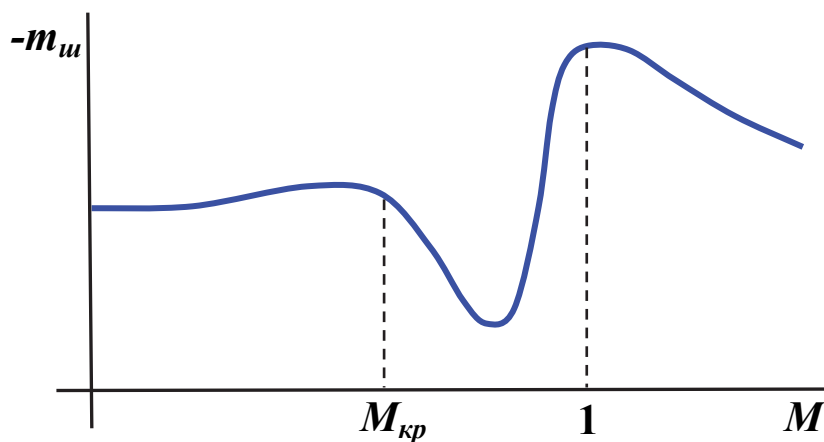


Рис. 6.20. Зависимость  $m_{ш}$  от числа  $M$  полёта



Придавая оперению стреловидную форму в плане, можно отодвинуть волновой кризис, ослабить его и получить удовлетворительное протекание кривой  $m_{\omega} = f(M)$  во всём диапазоне чисел  $M$  полёта.

### 6.13. Усилие на ручке управления рулём высоты

Определим связь между шарнирным моментом и усилием на ручке управления (штурвале) в случае безбустерного управления (рис. 6.21).

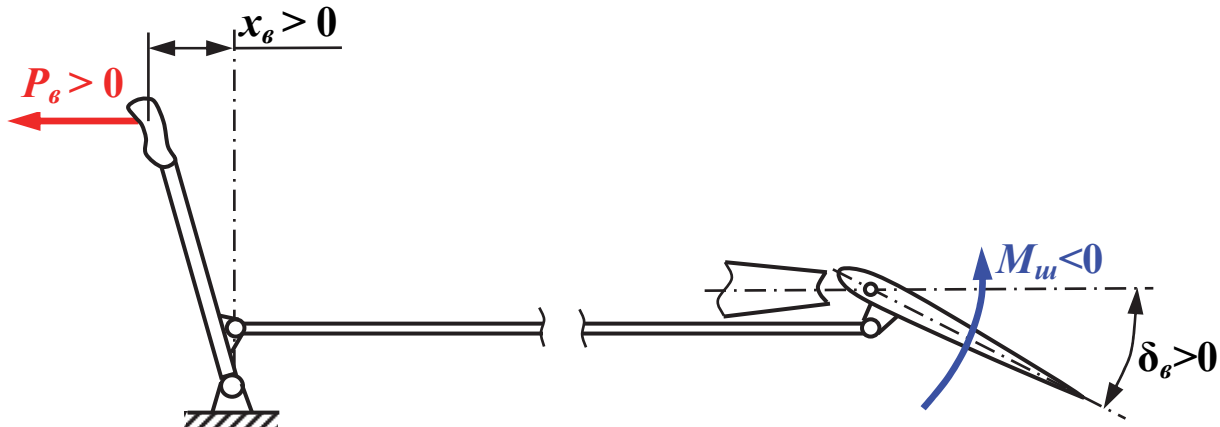


Рис. 6.21. Схема управления по тангажу

При перемещении ручки совершается работа по преодолению шарнирного момента и сил трения в системе управления. Пренебрегая силами трения, из уравнения сохранения энергии получим

$$P_{\epsilon} \Delta x + M_{\omega} \Delta \delta_{\epsilon} = 0 \Rightarrow P_{\epsilon} = -\left(\frac{\Delta \delta_{\epsilon}}{\Delta x}\right) \cdot M_{\omega} = -\kappa_{\omega} M_{\omega}, \quad (6.28)$$

где  $\kappa_{\omega}$  — кинематический (штурвальный) коэффициент передачи усилий от руля высоты к ручке управления. Величина  $\kappa_{\omega}$  определяется кинематикой системы управления. Для современных самолётов  $\kappa_{\omega}$  изменяется в сравнительно небольших пределах —  $(0,8 \dots 2,0) \text{ м}^{-1}$ .

Из (6.28) следует, что с ростом  $M_{\omega}$  увеличивается усилие на ручке управления. Для его уменьшения применяют различные методы аэродинамической компенсации, а также устанавливают гидроусилители (бустеры) в системе управления по обратимой и необратимой схемам. При необратимой схеме шарнирный момент руля не передаётся на ручку управления (штурвал). В этом случае величина шарнирного момента определяет требуемую мощность гидроусилителя. Загрузка ручки имитируется с помощью специального грузочного механизма, основу которого составляет пружина. При бустерном управлении по необратимой схеме величина усилия определяется по формуле

$$P_{\epsilon} = P_{\epsilon}^{x_{\epsilon}} x_{\epsilon} = \frac{P_{\epsilon}^{x_{\epsilon}}}{K_{ш}} \delta_{\epsilon},$$

где  $P_{\epsilon}^{x_{\epsilon}}$  – градиент усилия на ручке управления (штурвале) по перемещению (коэффициент жёсткости загрузки), определяемый характеристиками загрузочного механизма (пружины).

## 6.14. Статические характеристики продольной управляемости

При анализе статических характеристик продольной управляемости самолёта рассматривают два вида управляемых движений [15]:

1) криволинейное движение в вертикальной плоскости с постоянной скоростью  $V$  и резким изменением перегрузки  $n_y$ ;

2) разгон и торможение в прямолинейном горизонтальном полёте.

К статическим характеристикам продольной управляемости относятся:

а) балансировочные кривые по перемещениям ручки управления (штурвала) и по усилиям, прикладываемым лётчиком к ручке управления (штурвалу) в канале тангажа,

$$x_{\epsilon}^{бал}(n_y); P_{\epsilon}^{бал}(n_y); x_{\epsilon}^{бал}(V); P_{\epsilon}^{бал}(V).$$

Эти кривые определяют абсолютные значения усилий и перемещений ручки управления (штурвала), необходимые для обеспечения заданного сбалансированного режима полёта.

б) коэффициенты расхода (градиенты) усилий и перемещений ручки управления (штурвала) на перегрузку (при криволинейном движении) и на скорость (при разгоне и торможении в прямолинейном полёте):

- коэффициент расхода (градиент) усилий на перегрузку

$$P_{\epsilon}^n(V) = \left. \frac{dP_{\epsilon}}{dn_y} \right|_{V=const};$$

- коэффициент расхода (градиент) перемещений на перегрузку

$$x_{\epsilon}^n(V) = \left. \frac{dx_{\epsilon}}{dn_y} \right|_{V=const};$$

- коэффициент расхода (градиент) усилий на скорость (усилие, которое должен приложить пилот к ручке, чтобы изменить скорость исходного полёта на 50 % при  $n_y = 1$ )

$$P_{\epsilon}^V = \left[ \frac{V}{2} \right] \cdot \left( \left. \frac{dP_{\epsilon}}{dn_y} \right) \right)_{n_y=1};$$

- коэффициент расхода (градиент) перемещений на скорость (перемещение, которое должен обеспечить пилот на ручке, чтобы изменить скорость исходного полёта на 50 % при  $n_y = 1$ )

$$x_{\epsilon}^V = \left[ \frac{V}{2} \right] \cdot \left( \frac{dx_{\epsilon}}{dn_y} \right) \Big|_{n_y=1}.$$

Градиенты усилий и перемещений определяют приращение усилий или перемещений для изменения режима полёта (изменения нормальной перегрузки на  $\pm 1$  ( $\Delta n_y = \pm 1$ ) или изменения скорости на  $\pm 50$  %).

Нормы лётной годности АП-23 и АП-25 [9, 10] устанавливают определённые требования к статическим характеристикам продольной управляемости. Так, на всех эксплуатационных режимах полёта должны выполняться условия:

$$|P_{\epsilon}| \leq 350 \text{ Н}; |P_{\epsilon}^n| \leq 100 \text{ Н}; |x_{\epsilon}^n| \leq 5 \text{ см}; \frac{x_{\epsilon}^n \max}{x_{\epsilon}^n \min} \leq 3; P_{\epsilon}^V > 0; x_{\epsilon}^V > 0. \quad (6.29)$$

Последние два условия означают, что балансировочные кривые по усилиям и перемещениям при разгоне-торможении в прямолинейном полёте не должны иметь «ложек».

Требования (6.29) для современных самолётов (особенно сверхзвуковых) могут быть выполнены только с применением автоматики в канале управления по тангажу.

### 6.15. Выбор диапазона центровок и параметров горизонтального оперения

При проектировании самолёта диапазон допустимых центровок  $\Delta \bar{x}_{cm}$  и параметры г.о.  $A_{z0}$  и  $\bar{S}_{z0}$  выбирают в первую очередь из условия обеспечения балансировки на любом эксплуатационном режиме и минимального запаса продольной статической устойчивости по перегрузке  $|\sigma_{n \min}|$ .

Диапазон допустимых центровок ограничен предельно передней  $\bar{x}_{cm \min}$  и предельно задней  $\bar{x}_{cm \max}$  центровками

$$\bar{x}_{cm \min} \leq \bar{x}_{cm} \leq \bar{x}_{cm \max}.$$

Для предельно задней центровки, учитывая (6.19), имеем

$$\bar{x}_{cm \max} = \bar{x}_F - \frac{m_z^{\bar{0}_z}}{\mu} + \sigma_{n \min}$$

или

$$\bar{x}_{цм\ nз} = \sigma_{n\ min} + \bar{x}_{F\ бго} + c_{y20}^{\alpha} A_{20} \left( \frac{\kappa_{20} (1 - \varepsilon^{\alpha})}{c_{укр}^{\alpha}} + \frac{1,4 \cdot \bar{L}_{20} \sqrt{\kappa_{20}}}{\mu} \right). \quad (6.30)$$

Для современных дозвуковых самолётов транспортной категории

$$\sigma_{n\ min} = -0,02.$$

Если  $\sigma_{n\ min} = 0$ , то предельно задняя центровка будет совпадать с так называемой *нейтральной центровкой*. В этом случае самолёт будет нейтрален по перегрузке. У современных самолётов нейтральная центровка находится позади фокуса самолёта на расстоянии, равном 1...2 % САХ, что соответствует величине поправки на демпфирование  $\frac{m_z^{\omega_z}}{\mu}$ . На сверх-

звуке нейтральная центровка вместе с фокусом самолёта смещается назад.

Координата предельно передней центровки определяется из условия балансировки самолёта на режиме  $|m_{z\ бго}|_{max}$  при максимальном располагаемом отклонении руля высоты (и стабилизатора)

$$\delta_{в\ пред} = \delta_{в\ расн} + \Delta\delta_{в\ зан}; \quad \Delta\delta_{в\ зан} \approx 5...8^{\circ}.$$

Такой режим для самолётов транспортной категории обычно имеет место:

а) при отклонении механизации на участке посадки самолёта перед касанием колёсами шасси поверхности ВПП. Тогда

$$m_{z0\ бго} + (\bar{x}_{цм\ mn} - \bar{x}_{F\ бго})(c_{y\ бго}^{\alpha} (\alpha_{noc} - \alpha_0) + \Delta c_{yз}^{noc}) + (\bar{x}_{цм\ mn} - \bar{x}_{F\ мех}) \Delta c_{умех}^{noc} -$$

$$- A_{20} \kappa_{20} c_{y20}^{\alpha} (\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon^{\alpha}) \alpha_{noc} + \alpha_0 \varepsilon^{\alpha} - \Delta \varepsilon_{мех}^{noc} - \Delta \varepsilon_3^{noc} + \varphi + n_{\delta} \delta_{в\ расн}) = 0.$$

Отсюда

$$\bar{x}_{цм\ mn} = \frac{1}{c_{y\ бго}^{\alpha} (\alpha_{noc} - \alpha_0) + \Delta c_{yз}^{noc} + \Delta c_{умех}^{noc}} \left[ -m_{z0\ бго} + \bar{x}_{F\ бго} (c_{y\ бго}^{\alpha} (\alpha_{noc} - \alpha_0) + \right.$$

$$\left. + \Delta c_{yз}^{noc}) + \bar{x}_{F\ мех} \Delta c_{умех}^{noc} + A_{20} \kappa_{20} c_{y20}^{\alpha} (\varepsilon_0 + (1 - \varepsilon^{\alpha}) \alpha_{noc} + \alpha_0 \varepsilon^{\alpha} - \Delta \varepsilon_{мех}^{noc} - \right.$$

$$\left. - \Delta \varepsilon_3^{noc} + \varphi + n_{\delta} \delta_{в\ расн}) \right]. \quad (6.31)$$

б) при отклонении механизации на участке взлёта самолёта в момент подъёма передней опоры шасси (рис. 6.22).

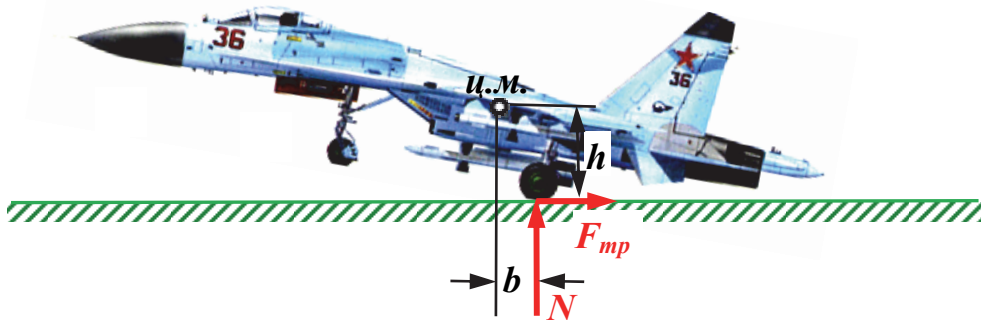


Рис. 6.22. Момент подъёма передней опоры шасси

В этом случае на самолёт будет действовать дополнительный пикирующий момент от сил, приложенных к основным опорам шасси,

$$\Delta M_z = -Nb - F_{mp}h,$$

где  $N$  и  $F_{mp}$  – нормальная составляющая со стороны ВПП и сила трения, действующая на колёса основных опор шасси;  $b$  – расстояние от ц.м. самолёта до основных шасси, измеренное по горизонтали;  $h$  – расстояние от ц.м. самолёта до поверхности ВПП при стояночном обжатии колёс. Тогда

$$\begin{aligned} m_{z0\delta z0} + (\bar{x}_{цмпп} - \bar{x}_{F\delta z0})(c_{y\delta z0}^\alpha (\alpha_{раз} - \alpha_0) + \Delta c_{yз}^{раз}) + (\bar{x}_{цмпп} - \bar{x}_{F_{мех}})\Delta c_{умех}^{раз} - \\ - A_{z0}\kappa_{z0}c_{yз0}^\alpha (\varepsilon_0 + (1-\varepsilon^\alpha)\alpha_{раз} + \alpha_0\varepsilon^\alpha - \Delta\varepsilon_{мех}^{раз} - \Delta\varepsilon_3^{раз} + \varphi + n_6\delta_6_{расп}) + m_{zp} - \\ - \left(\frac{m_0g}{Sq_{нк}} - c_{ураз}\right)\left(\frac{b}{b_A} + f_{mp.раз}\frac{h}{b_A}\right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{x}_{цмпп} = \frac{1}{c_{y\delta z0}^\alpha (\alpha_{раз} - \alpha_0) + \Delta c_{yз}^{раз} + \Delta c_{умех}^{раз}} \left[ -m_{z0\delta z0} + \bar{x}_{F\delta z0}(c_{y\delta z0}^\alpha (\alpha_{раз} - \alpha_0) + \right. \\ \left. + \Delta c_{yз}^{раз}) + \bar{x}_{F_{мех}}\Delta c_{умех}^{раз} + A_{z0}\kappa_{z0}c_{yз0}^\alpha (\varepsilon_0 + (1-\varepsilon^\alpha)\alpha_{раз} + \alpha_0\varepsilon^\alpha - \Delta\varepsilon_{мех}^{раз} - \right. \\ \left. - \Delta\varepsilon_3^{раз} + \varphi + n_6\delta_6_{расп}) - m_{zp} + \left(\frac{m_0g}{Sq_{нк}} - c_{ураз}\right)\left(\frac{b}{b_A} + f_{mp.раз}\frac{h}{b_A}\right) \right]. \quad (6.32) \end{aligned}$$

Как видно из выражений (6.30), (6.31) и (6.32), координаты  $\bar{x}_{цмпп}$  и  $\bar{x}_{цмпз}$  линейно зависят от  $A_{z0}$ . С ростом  $A_{z0}$  диапазон допустимых центровок увеличивается.

Обычно координаты  $\bar{x}_{цм\text{пн}}$  и  $\bar{x}_{цм\text{пз}}$  определяются при компоновке самолёта. Зная их, находят три значения  $A_{20}$ , и из них выбирают максимальное. Это и будет искомая величина  $A_{20} = \bar{S}_{20} \bar{L}_{20}$ . Затем разработчик выбирает  $\bar{S}_{20}$  или  $\bar{L}_{20}$ , сначала используя статистику. Так, для самолётов с прямыми крыльями  $\bar{L}_{20} = 2,0 \dots 3,5$ ;  $\bar{S}_{20} = 0,15 \dots 0,30$ .

## 7. ДИНАМИКА ПРОДОЛЬНОГО ВОЗМУЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА

Для исследования устойчивости и управляемости самолёта уравнения движения ц.м. удобно записывать в траекторной системе координат, а уравнения движения относительно ц.м. – в связанной системе координат.

Собрав вместе кинематические (1.5), геометрические (1.6)–(1.8) и динамические (1.18) уравнения движения ц.м. самолёта, кинематические уравнения движения относительно ц.м. (1.10), добавим к ним три динамических уравнения движения относительно ц.м. самолёта

$$\begin{cases} J_x \dot{\omega}_x - J_{xy} (\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z) + (J_z - J_y) \cdot \omega_y \omega_z = M_{R_x} ; \\ J_y \dot{\omega}_y - J_{xy} (\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) + (J_x - J_z) \cdot \omega_x \omega_z = M_{R_y} ; \\ J_z \dot{\omega}_z - J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) + (J_y - J_x) \cdot \omega_x \omega_y = M_{R_z} . \end{cases} \quad (7.1)$$

В итоге вместе с (7.1) имеем систему из 15 уравнений. Это система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Их решение можно осуществить численно для конкретных ЛА, но общее решение задачи получить нельзя. В то же время для оценки влияния аэродинамических и конструктивных параметров самолёта на характеристики устойчивости и управляемости необходимо иметь решение в общем виде, поэтому для дальнейшего анализа исходную систему уравнений линеаризуют, используя метод малых возмущений.

### 7.1. Линеаризация уравнений движения самолёта

Пусть имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (7.2)$$

Пусть невозмущённому (опорному) движению соответствует частное решение вида  $y_s = y_s^o(t)$ . Подставим это решение в (7.2)

$$\frac{dy_s^o}{dt} = Y_s(t, y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o). \quad (7.3)$$

Будем считать, что параметры возмущённого движения отличаются от соответствующих параметров опорного движения  $y_s^o$

$$y_s = y_s^o + \Delta y_s, \quad (7.4)$$

где  $\Delta y_s$  – малое отклонение (вариация) параметра движения.

Вычитая (7.3) из (7.2) и имея в виду (7.4), получим

$$\frac{d\Delta y_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - Y_s(t, y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o).$$

Разложим нелинейную функцию  $Y_s$  в ряд Тейлора в окрестности точки, соответствующей опорному невозмущённому движению, пренебрегая в первом приближении величинами второго и выше порядков малости. Получим линейные уравнения возмущённого движения произвольной динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y_s}{dt} &= \cancel{Y_s(t, y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o)} + \left( \frac{\partial Y_s}{\partial y_1} \right)_0 \Delta y_1 + \left( \frac{\partial Y_s}{\partial y_2} \right)_0 \Delta y_2 + \dots + \left( \frac{\partial Y_s}{\partial y_n} \right)_0 \Delta y_n - \\ &\quad - \cancel{Y_s(t, y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o)}; \\ \frac{d\Delta y_s}{dt} &= a_{s1}\Delta y_1 + a_{s2}\Delta y_2 + \dots + a_{sn}\Delta y_n \quad (s = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где коэффициенты  $a_{s1} = \left( \frac{\partial Y_s}{\partial y_1} \right)_0$ ;  $a_{s2} = \left( \frac{\partial Y_s}{\partial y_2} \right)_0$  ...

Коэффициенты  $a_{si}$  в (7.5) будут переменными при неустановившемся опорном движении и постоянными при установившемся опорном движении.

Исследования уравнений движения можно упростить, если использовать свойство симметрии самолёта и в качестве опорного движения – движение в вертикальной плоскости. В этом случае производные сил и моментов  $F_x, F_y, M_z$ , действующих в продольной плоскости, по параметрам бокового движения ( $\beta, \gamma, \omega_x, \omega_y, \dots$ ) равны нулю (рис. 7.1).

Тогда исходная система из 15 уравнений распадается на две независимых системы, отдельно описывающие продольное и боковое движения. Если в качестве опорного движения принять установившийся горизонтальный полёт с малыми углами атаки без крена и скольжения, то  $M_{R_z}^0 = 0$ ,  $\cos(\alpha + \varphi_p) \approx 1$  и

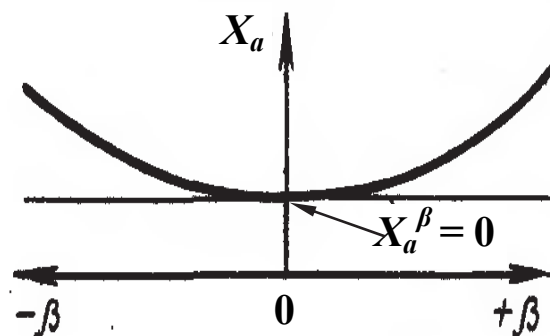


Рис. 7.1. Зависимость  $X_a$  от  $\beta$

$\sin(\alpha + \varphi_p) \approx (\alpha + \varphi_p)$ . В итоге линеаризованные уравнения продольного возмущённого движения примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{V} + a_{11} \Delta V + a_{12} \Delta \alpha + a_{14} \Delta \vartheta = b_{11} \Delta \delta_{oy} + b_{12} \Delta P + f_1; \\ \Delta \dot{\alpha} + a_{21} \Delta V + a_{22} \Delta \alpha + a_{23} \Delta \omega_z = b_{21} \Delta \delta_{oy} + f_2; \\ \Delta \dot{\omega}_z + a_{31} \Delta V + a_{32} \Delta \alpha + a_{33} \Delta \omega_z = b_{31} \Delta \delta_{oy} + b_{32} \Delta P + f_3; \\ \Delta \dot{\vartheta} + a_{43} \Delta \omega_z = 0. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

В этой системе

$$a_{11} = -\bar{F}_x^V = -\frac{F_x^V}{m} = -\frac{1}{\tau} [2(c_p - c_{xa}) + (c_p^M - c_{xa}^M)M]; \quad \tau = \frac{2m}{\rho S V}; \quad c_p = \frac{P}{S q};$$

$$q = \frac{\rho V^2}{2}; \quad a_{12} = \bar{F}_x^\Theta - \bar{F}_x^\alpha = \frac{F_x^\Theta - F_x^\alpha}{m} = -\left( g \cdot \cos \Theta + \frac{V}{\tau} c_{xa}^\alpha \right);$$

$$a_{14} = -\bar{F}_x^\Theta = -\frac{F_x^\Theta}{m} = g \cdot \cos \Theta; \quad a_{21} = \bar{F}_y^V = \frac{F_y^V}{mV} \approx \frac{2c_{ya}}{\tau V} \left( 1 - c_{ya}^M \frac{dM}{dc_{ya}} \right);$$

$$a_{22} = \bar{F}_y^\alpha = \frac{F_y^\alpha}{mV} = \frac{1}{\tau} (c_p + c_{ya}^\alpha); \quad a_{23} = -1;$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \cdot \bar{F}_y^V - \bar{M}_{R_z}^V = \frac{M_{R_z}^{\dot{\alpha}} F_y^V}{J_z mV} - \frac{M_{R_z}^V}{J_z} = \\ &= D_z m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A}{V} \frac{2c_{ya}}{\tau V} \left( 1 - c_{ya}^M \frac{dM}{dc_{ya}} \right) - D_z m_z^M \frac{M}{V}; \quad D_z = \frac{S q b_A}{J_z}; \end{aligned}$$

$$a_{32} = \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \cdot \bar{F}_y^\alpha - \bar{M}_{R_z}^\alpha = \frac{M_{R_z}^{\dot{\alpha}} F_y^\alpha}{J_z mV} - \frac{M_{R_z}^\alpha}{J_z} = D_z m_z^{\bar{\alpha}} \frac{b_A}{V} \frac{1}{\tau} (c_p + c_{ya}^\alpha) - D_z m_z^{c_y} c_{ya}^\alpha;$$

$$a_{33} = -(\bar{M}_{R_z}^{\omega_z} + \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}}) = -\left( \frac{M_{R_z}^{\omega_z}}{J_z} + \frac{M_{R_z}^{\dot{\alpha}}}{J_z} \right) = -D_z \frac{b_A}{V} (m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}});$$

$$a_{43} = -1; \quad b_{11} = \bar{F}_x^{\delta_{oy}} = \frac{F_x^{\delta_{oy}}}{m} = -\frac{V}{\tau} c_{xa}^{\delta_{oy}}; \quad b_{12} = \bar{F}_x^P = \frac{F_x^P}{m} = \frac{1}{m};$$

$$b_{21} = -\bar{F}_y^{\delta_{oy}} = -\frac{F_y^{\delta_{oy}}}{mV} = -\frac{1}{\tau} c_{ya}^{\delta_{oy}};$$



$$b_{31} = \overline{M}_{R_z}^{\delta_{oy}} - \overline{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \overline{F}_y^{\delta_{oy}} = \frac{M_{R_z}^{\delta_{oy}}}{J_z} - \frac{M_{R_z}^{\dot{\alpha}} F_y^{\delta_{oy}}}{J_z mV} = D_z (m_z^{\delta_{oy}} - m_z^{\dot{\alpha}} \frac{b_A}{V} \frac{1}{\tau} c_{ya}^{\delta_{oy}});$$

$$b_{32} = \overline{M}_{R_z}^P = \frac{M_{R_z}^P}{J_z} = -\frac{b_A}{J_z} \bar{y}_P; \quad \bar{y}_P = \frac{y_P}{b_A};$$

где  $\Delta\delta_{oy}$  – приращение угла отклонения руля высоты, управляемого стабилизатора или элевонов;  $f_1, f_2, f_3$  – возмущающие силы и моменты, не обусловленные непосредственным изменением кинематических параметров (например, из-за изменения параметров атмосферы).

## 7.2. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами классическим методом

Существуют два метода решения такой системы: классический и операторный. Сначала рассмотрим классический метод.

Пусть имеем однородную систему из четырёх линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Delta y_s}{dt} - a_{s1}\Delta y_1 - a_{s2}\Delta y_2 - a_{s3}\Delta y_3 - a_{s4}\Delta y_4 = 0 \quad (s = 1, 2, 3, 4). \quad (7.7)$$

Как известно, общее решение есть линейная комбинация частных решений. Ищем частные решения в виде

$$\Delta y_s = A_s \cdot e^{\lambda t} \quad (s = 1, 2, 3, 4). \quad (7.8)$$

Подставив (7.8) в (7.7) и сократив на множитель  $e^{\lambda t}$ , получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_1, A_2, A_3, A_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) \cdot A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 + a_{14}A_4 = 0, \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot A_2 + a_{23}A_3 + a_{24}A_4 = 0, \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + (a_{33} - \lambda) \cdot A_3 + a_{34}A_4 = 0, \\ a_{41}A_1 + a_{42}A_2 + a_{43}A_3 + (a_{44} - \lambda) \cdot A_4 = 0. \end{array} \right. \quad (7.9)$$

Для получения нетривиальных решений определитель системы уравнений (7.9) должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & (a_{44} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая его, получим характеристическое уравнение системы (7.7)

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (7.10)$$

Коэффициенты характеристического уравнения определяются через коэффициенты системы уравнений  $a_{ij}$ . Корни характеристического уравнения могут быть действительными или мнимыми.

Пусть корни действительные. Тогда общее решение системы примет вид

$$\begin{cases} \Delta y_1 = C_1 A_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{12} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{13} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{14} e^{\lambda_4 t} \\ \Delta y_2 = C_1 A_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{23} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{24} e^{\lambda_4 t} \\ \Delta y_3 = C_1 A_{31} e^{\lambda_1 t} + C_2 A_{32} e^{\lambda_2 t} + C_3 A_{33} e^{\lambda_3 t} + C_4 A_{34} e^{\lambda_4 t} \\ \Delta y_4 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t}, \end{cases} \quad (7.11)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные, определяемые из начальных условий.

Из общего решения (7.11) видно, что если все  $\lambda_k$  действительные, то отклонения  $\Delta y_s$  изменяются во времени по аperiодическому закону и будут возрастать или убывать в зависимости от знаков корней характеристического уравнения  $\lambda_k$ . Если все  $\lambda_k$  будут отрицательными, то при  $t \rightarrow \infty$  все  $\Delta y_s \rightarrow 0$ , и, следовательно, невозмущённое движение будет асимптотически устойчивым. Если среди корней найдётся хотя бы один положительный, то при  $t \rightarrow \infty$  все  $\Delta y_s$  будут неограниченно возрастать, и, следовательно, невозмущённое движение будет неустойчивым.

Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы пара комплексных сопряжённых корней, то соответствующее им частное движение будет колебательным, причём амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать, если вещественная часть комплексного числа положительная, и затухать, если вещественная часть комплексного числа отрицательная.

Обобщая, можно сделать вывод, что для устойчивости установившегося движения необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Поэтому для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости движения можно не решать характеристическое уравнение, а только определить знак вещественной части всех его корней.

Косвенные признаки, по которым можно судить о знаке вещественной части корней характеристического уравнения линейных систем с постоянными коэффициентами, минуя вычисления самих корней, называются *критериями устойчивости*. По критериям устойчивости можно судить об устойчивости линейной системы, определять границы устойчивости и выбирать параметры устойчивой системы. Критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные.

Алгебраические критерии позволяют судить об устойчивости систем по коэффициентам характеристического уравнения. Имеются различные формы критериев. Наибольшее применение получили критерии Гурвица и Рауса.

Приведём без доказательства теорему Гурвица.

Пусть характеристическое уравнение  $n$ -й степени имеет вид

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (7.12)$$

в котором все коэффициенты  $a_k$  – вещественные числа и  $a_n > 0$ .

Построим из коэффициентов  $a_k$  матрицу Гурвица из  $n$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 \Delta_1 & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \hline
 \Delta_2 & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\
 \hline
 \Delta_3 & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\
 \hline
 \Delta_4 & a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & \dots & 0 \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \hline
 \Delta_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0
 \end{array} \quad (7.13)$$

**Теорема.** Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (7.12) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы (7.13) были положительными, т.е.

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots; \quad \Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} > 0.$$

В частности, если для уравнения 4-й степени (7.10) выполняются неравенства

$$\Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0; \Delta_4 = a_0 \cdot \Delta_3 > 0,$$

то вещественные части всех корней будут отрицательными.

Равносильными для уравнений 4-й степени являются условия Рауса-Гурвица, которые имеют вид

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; R = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0. \quad (7.14)$$

Найдём границы устойчивости. На границе устойчивости будут равны нулю действительный корень ( $\lambda = 0$ ) или вещественная часть комплексных сопряжённых корней ( $\lambda = i\nu$ ). Если в характеристическое уравнение подставить  $\lambda = 0$ , то получим границу аperiodической устойчивости  $a_0 = 0$  или  $\Delta_n = 0$  (при всех остальных положительных минорах Гурвица). Подставляя в характеристическое уравнение  $\lambda = i\nu$ , получим границу колебательной устойчивости:  $\Delta_{n-1} = 0$  (при всех остальных положительных минорах Гурвица). Третья граница устойчивости соответствует корню  $\lambda = \infty$ , что будет при  $a_n = 0$ , но этот случай в динамике полёта не рассматривается.

Границы устойчивости формируют область устойчивости.

### 7.3. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом

Сущность этого метода состоит в том, что с помощью интегрального преобразования переходят от исходной системы линейных дифференциальных уравнений к вспомогательной системе алгебраических уравнений. Решив вспомогательную систему уравнений, с помощью обратного преобразования получают решение исходной системы.

В качестве интегрального преобразования обычно используют преобразование Лапласа

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) \cdot dt,$$

где  $Y(p)$  – изображение оригинала;  $p$  – комплексное число (параметр);  $y(t)$  – кусочно-непрерывная и ограниченная функция (оригинал).

Существует также обратное преобразование Лапласа, позволяющее по изображению  $Y(p)$  находить оригинал  $y(t)$ . Такое преобразование записывается так:  $L^{-1}[Y(p)] = y(t)$ .

Если оригинал  $y(t)$ , имеющий изображение  $Y(p)$ , подвергается какой-либо математической операции (сложению, дифференцированию и т.п.), то для нового оригинала можно найти изображение по формулам, приведенным в табл. 7.1.

Таблица 7.1

| Математическая операция        | Оригинал  | Изображение  |
|--------------------------------|---|--|
| Исходное преобразование        | $y(t)$  | $Y(p)$   |
| Сложение оригинала             | $y_1(t) + y_2(t)$   | $Y_1(p) + Y_2(p)$  |
| Умножение на постоянное число  | $ay(t)$   | $aY(p)$  |
| Дифференцирование              | $\frac{dy}{dt}$<br>$\frac{dy}{dt}, y_0 = 0$                                     | $pY(p) - y_0$<br>$pY(p)$   |
| $n$ -кратное дифференцирование | $\frac{d^n y}{dt^n}$<br><br>$\frac{d^n y}{dt^n}$ при нулевых начальных условиях | $p^n Y(p) - [p^{n-1}y^0 + p^{n-2}\dot{y}_0 + \dots + y_0^{n-1}]$<br>$p^n Y(p)$ |
| Интегрирование                 | $\int_0^t y(t) dt$  | $\frac{1}{p} Y(p)$   |
| Сдвиг оригинала на $\tau$      | $y(t - \tau)$   | $e^{-p\tau} Y(p)$  |

При анализе возмущённого движения самолёта иногда возникает необходимость определить предельные значения решения дифференциального уравнения по виду этого уравнения, не решая его. К примеру, необходимо оценить поведение функции  $y(t)$  вблизи  $t = 0$  (в начале движения) и при  $t \rightarrow \infty$ . Эту задачу можно решить с помощью двух теорем о предельном переходе:

1) если существует предел функции  $\lim_{t \rightarrow 0} [y(t)]$ , то

$$\lim_{t \rightarrow 0} [y(t)] = \lim_{p \rightarrow \infty} [pY(p)];$$

2) если существует предел функции  $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)]$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pY(p)].$$

Достоинство операторного метода заключается том, что объём и сложность вычислений получаются меньшими по сравнению с классическим методом. При операторном методе отсутствует трудоёмкая операция определения произвольных постоянных по начальным условиям, поскольку сразу находится решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

## 7.4. Свободное продольное возмущённое движение самолёта

Свободное продольное возмущённое движение самолёта описывается системой уравнений (7.6), когда правая часть уравнений равна нулю (органы управления самолётом и двигателем зафиксированы в балансирующем положении  $\Delta\delta_{0y} = 0$ ,  $\Delta P = 0$ , и отсутствуют внешние воздействия, т.е.  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\dot{V} + a_{11}\Delta V + a_{12}\Delta\alpha + a_{14}\Delta\vartheta = 0; \\ \Delta\dot{\alpha} + a_{21}\Delta V + a_{22}\Delta\alpha + a_{23}\Delta\omega_z = 0; \\ \Delta\dot{\omega}_z + a_{31}\Delta V + a_{32}\Delta\alpha + a_{33}\Delta\omega_z = 0; \\ \Delta\dot{\vartheta} + a_{43}\Delta\omega_z = 0. \end{array} \right. \quad (7.15)$$

Коэффициенты характеристического уравнения системы (7.15) определяются так:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{14}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}); \\ a_1 &= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} + a_{32}) - a_{12}(a_{31} + a_{21} \cdot a_{33}) - a_{14} \cdot a_{31}; \\ a_2 &= a_{11}(a_{22} + a_{33}) - a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{33} + a_{32}; \\ a_{33} &= a_{11} + a_{22} + a_{33}. \end{aligned}$$

Для обеспечения устойчивости характеристик опорной траектории необходимым и достаточным является выполнение условий Рауса-Гурвица (7.14). В этом случае в переходном процессе при  $t \rightarrow \infty$   $\Delta V \rightarrow 0$ ,  $\Delta\Theta \rightarrow 0$ ,  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ ,  $\Delta L \rightarrow C_1$ ,  $\Delta H \rightarrow C_2$ .

Следовательно, самолёт по отношению к опорной траектории будет устойчив, но не асимптотически. Для возвращения самолёта на исходную траекторию требуется вмешательство пилота или работа автопилота.

## 7.5. Быстрая и медленная составляющие продольного возмущённого движения самолёта

Анализ продольного возмущённого движения самолёта показывает, что обычно характеристическое уравнение (7.10) имеет два больших и два малых комплексных корня. Причём первая пара корней на 1...2 порядка превышает вторую.

Поскольку вещественная часть комплексного корня характеризует степень затухания колебаний, а мнимая – частоту колебаний, то большим корням соответствует быстро затухающее движение с большой частотой

( $\Delta\alpha$ ,  $\Delta n_{ya}$ ,  $\Delta\Theta$ ) – короткопериодическое движение, а малым корням – медленно затухающее движение с малой частотой ( $\Delta V$ ) – длиннопериодическое движение.

В начальный период преобладает короткопериодическое движение, связанное с нарушением равновесия моментов (вращательное возмущённое движение). Оно заканчивается через несколько секунд. Затем начинает изменяться скорость  $V$  до тех пор, пока не наступит равновесие сил, действующих на самолёт.

Отсюда следует, что короткопериодическая и длиннопериодическая составляющие продольного движения самолёта как бы разнесены по времени. Это позволяет рассматривать их отдельно, что существенно упрощает анализ продольного возмущённого движения.

Однако отдельно рассматривать длиннопериодическое движение можно только в том случае, когда установлено, что короткопериодическое движение затухающее (или для неустойчивого самолёта его затухание обусловлено работой системы улучшения устойчивости).

Роль короткопериодической и длиннопериодической составляющих продольного возмущённого движения для лётной практики различна.

По отношению к длиннопериодическому движению установлено требование отсутствия аperiодической неустойчивости. Для парирования этих отклонений требуется частое вмешательство лётчика в управление. Колебательная неустойчивость в длиннопериодическом движении, в отличие от аperiодической, развивается медленнее, и, если не предъявлять жёстких требований к точному выдерживанию заданных параметров движения, то она не внесёт трудностей в управление самолётом и даже может не замечаться лётчиком.

Неустойчивость самолёта в короткопериодическом движении недопустима. Это объясняется тем, что при частоте колебаний выше 0,3...0,4 Гц лётчик в силу запаздывания реакции не может своевременно и правильно отклонять органы управления для парирования колебаний и может даже усиливать колебания, раскачивая самолёт.

Решающее значение для лётной практики имеют характеристики короткопериодического движения.

## **7.6. Собственное продольное короткопериодическое возмущённое движение самолёта**

Рассмотрим короткопериодическое свободное возмущённое движение, приняв за опорное движение горизонтальный установившийся полёт. В начале возмущённого движения  $\Delta V = 0$ , тогда первое уравнение системы (7.6), характеризующее изменение  $\Delta V$ , выпадает, а в остальных уравнениях считают, что  $\Delta V = 0$ .

Тогда из уравнений (7.6) получим следующую систему однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающую собственное продольное короткопериодическое возмущённое движение самолёта [2, 4]:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\Theta} = \bar{F}_y^\alpha \Delta \alpha; \\ \Delta \dot{\omega}_z = \bar{M}_{R_z}^\alpha \Delta \alpha + \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \bar{M}_{R_z}^{\omega_z} \Delta \omega_z; \\ \Delta \dot{\vartheta} = \Delta \omega_z; \Delta \alpha = \Delta \vartheta - \Delta \Theta. \end{cases} \quad (7.16)$$

Преобразуем систему (7.16), исключив из второго уравнения  $\Delta \omega_z$  с помощью остальных уравнений. В итоге приходим к основному уравнению короткопериодического движения

$$\Delta \ddot{\alpha} + 2h_k \Delta \dot{\alpha} + \omega_k^2 \Delta \alpha = 0, \quad (7.17)$$

где  $h_k$  – коэффициент демпфирования (затухания), определяемый по формуле (7.18);  $\omega_k$  – опорная частота или частота недемпфированных колебаний, определяемая по формуле (7.19);

$$h_k = \frac{1}{2} (\bar{F}_y^\alpha - \bar{M}_{R_z}^{\dot{\alpha}} - \bar{M}_{R_z}^{\omega_z}) = -\frac{1}{2} \left[ D_z \frac{b_A}{V} (m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\dot{\alpha}}) - \frac{c_{ya}^\alpha}{\tau} \left( 1 + \frac{c_P}{c_{ya}^\alpha} \right) \right]; \quad (7.18)$$

$$\omega_k^2 = -(\bar{M}_{R_z}^\alpha + \bar{M}_{R_z}^{\omega_z} \cdot \bar{F}_y^\alpha) = -D_z \cdot c_{ya}^\alpha \cdot \sigma_n. \quad (7.19)$$

Однородному дифференциальному уравнению (7.17) соответствует характеристическое уравнение второй степени

$$\lambda^2 + 2h_k \lambda + \omega_k^2 = 0, \quad (7.20)$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = -h_k \pm \sqrt{h_k^2 - \omega_k^2} \quad (7.21)$$

определяют характер собственного короткопериодического продольного возмущённого движения самолёта.

Если  $\omega_k^2 > h_k^2$  и  $\omega_k^2 > 0$ , то корни уравнения (7.20), определяемые формулой (7.21), будут комплексными сопряжёнными, а собственное короткопериодическое движение – колебательным

$$\lambda_{1,2} = -h_k \pm i\sqrt{\omega_k^2 - h_k^2}. \quad (7.22)$$

Подставив (7.22) в (7.8), получим решение уравнения (7.17).

$$\Delta \alpha = A e^{-h_k t} \sin(v_k t + \psi), \quad (7.23)$$



где  $\nu_k = \sqrt{\omega_k^2 - h_k^2}$  – круговая частота собственных колебаний;  $\psi$  – фазовый угол сдвига.

Постоянные  $A$  и  $\psi$  определяют из начальных условий.

Если  $h_k^2 \geq \omega_k^2$ , то корни уравнения (7.20) будут действительными. Собственное возмущённое движение будет аperiodическим, состоящим из двух движений,

$$\Delta\alpha = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (7.24)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  вычисляются из начальных условий.

Определив  $\Delta\alpha(t)$  по формулам (7.23) или (7.24), находят скорость изменения угла наклона траектории  $\Delta\dot{\Theta}(t)$  и перегрузку  $\Delta n_{ya}(t)$ .

Необходимыми и достаточными условиями устойчивости опорного движения являются

$$h_k > 0 \text{ и } \omega_k^2 > 0. \quad (7.25)$$

Условия (7.25) получаются из критерия Гурвица для квадратного характеристического уравнения.

Условие  $\omega_k^2 > 0$  эквивалентно условию  $\sigma_n < 0$ .

### **7.7. Исследование управляемого движения самолёта с помощью передаточных функций и частотных характеристик**

В продольном движении управление самолёта осуществляется отклонением органов управления  $\delta_{oy}$  и изменением тяги двигателей  $\Delta P$ .

Если за опорное движение принять горизонтальный установившийся полёт, то продольное возмущённое движение самолёта при отклонении органов управления можно описать системой уравнений (7.6), принимая в них  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ .

Решая уравнения при нулевых начальных условиях, можно найти реакцию самолёта на управляющие воздействия  $\Delta\delta_{oy}$  или  $\Delta P$ . Реакция самолёта на управляющие воздействия зависит как от динамических характеристик самолёта, так и от вида управляющих воздействий. Обычно рассматривают два вида управляющих воздействий: скачкообразное (ступенчатое) и гармоническое (колебательное) [2, 4].

При ступенчатом отклонении изучаются переходные или временные характеристики (функции) самолёта, а при гармоническом – частотные.

Для самолёта выходными величинами могут быть параметры движения (скорость, нормальная и продольная перегрузки, углы атаки, тангажа, наклона траектории и т.п.), а входными – управляющие или возмущающие воздействия.

*Передаточной функцией* называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях

$$W_{yx}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

где  $Y(p)$  и  $X(p)$  – изображения по Лапласу выходной и входной величины. Двойной подстрочный индекс указывает, что выходной величиной является  $y(t)$ , а входной –  $x(t)$ .

*Частотными характеристиками* системы (звена) называют зависимость отношения амплитуды выходной величины к амплитуде входного сигнала и сдвига по фазе выходной величины по отношению к входному сигналу от частоты входного воздействия.

Входное гармоническое воздействие вызовет выходной процесс (возмущённое движение), состоящий из собственной и вынужденной составляющих. В устойчивой системе собственная составляющая со временем затухает. Поэтому при изучении выходных процессов, вызванных гармоническим воздействием, рассматривают только вынужденную составляющую, предполагая, что система устойчива.

Если на вход системы (звена) подаётся гармонический сигнал

$$\Delta x(t) = A_1 \sin \omega t,$$

то на выходе вынужденная составляющая будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой  $\omega$ , но с другой амплитудой  $A_2$  и сдвигом по фазе  $\gamma$   $\Delta y(t) = A_2 \sin(\omega t + \gamma)$ .

Величины  $A_2$  и  $\gamma$  можно определить по частотной функции  $W(i\omega)$ , являющейся комплексной величиной. Её получают из передаточной функции  $W(p)$ , используя замену  $p = i\omega$ . Частотную функцию можно представить в виде

$$W(i\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + i \operatorname{Im}(\omega) = A(\omega)e^{i\gamma},$$

где  $\operatorname{Re}(\omega)$ ,  $\operatorname{Im}(\omega)$  – вещественная и мнимая части частотной функции;  $A(\omega) = \frac{A_2}{A_1} = |W(i\omega)|$  – модуль частотной функции, называемый амплитудной частотной характеристикой (АЧХ);  $\gamma(\omega) = \arg W(i\omega)$  – аргумент частотной функции, называемый фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

Кроме этих характеристик, можно построить амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ), представляющую собой кривую на комплексной плоскости, по которой перемещается конец вектора частотной функции  $W(i\omega)$  при изменении частоты входного сигнала  $\omega$  от 0 до  $\infty$  (рис. 7.2).

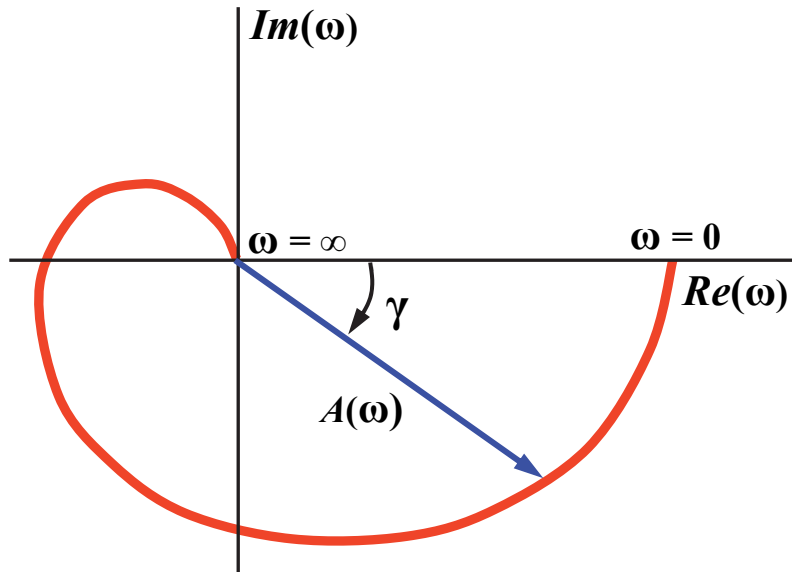


Рис. 7.2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика системы

Из рис. 7.2 видно, что

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}; \quad (7.26)$$

$$\gamma(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}. \quad (7.27)$$

### 7.8. Реакция самолёта в канале тангажа на ступенчатое отклонение руля высоты (стабилизатора) в короткопериодическом движении

При необходимости совершить интенсивный маневр в вертикальной плоскости лётчик энергично отклоняет руль высоты (управляемый стабилизатор). В этом случае закон отклонения органа управления близок к скачкообразному (ступенчатому). Реакция самолёта на такое воздействие характеризует выход самолёта на некоторую заданную перегрузку (угол атаки). Формирование новых значений угла атаки и нормальной перегрузки происходит на этапе короткопериодического движения.

Поскольку движение самолёта описывается линейными уравнениями, то при отклонении органа управления (руля высоты) на произвольный угол  $\Delta\delta_{oy} = \Delta\delta_g$  перегрузка и другие параметры изменятся пропорционально  $\Delta\delta_g$ . Поэтому можно рассматривать реакцию самолёта на единичное изменение  $\Delta\delta_g(t) = 1$  при  $t \geq 0$ , т.е. так называемую переходную функцию.

Тогда система уравнений (7.6) примет вид [2]:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\alpha} + a_{22} \Delta \alpha + a_{23} \Delta \omega_z = b_{21} \Delta \delta_\epsilon; \\ \Delta \dot{\omega}_z + a_{32} \Delta \alpha + a_{33} \Delta \omega_z = b_{31} \Delta \delta_\epsilon; \\ \Delta \dot{\vartheta} + a_{43} \Delta \omega_z = 0. \end{cases} \quad (7.28)$$

В результате решения системы (7.28) операторным или классическим методом получим при  $\xi < 1$

$$\Delta n_{ya} = \Delta n_{y_{уст}} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \left( \sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} + \psi \right) \right] = \Delta n_{y_{уст}} f, \quad (7.29)$$

где  $T = \frac{1}{|\omega_k|}$  – постоянная времени;  $\xi = \frac{h_k}{\omega_k}$  – относительный коэффициент

демпфирования;  $\psi = \arcsin \sqrt{1-\xi^2}$  – сдвиг собственных колебаний по фазе;

$$\Delta n_{y_{уст}} = \frac{m_z^{\delta_\epsilon}}{c_{y_{гн}} \cdot \sigma_n} \Delta \delta_\epsilon.$$

Переходная функция для угла атаки аналогична  $\Delta \alpha = \Delta \alpha_{уст} \cdot f$ ,

$$\text{где } \Delta \alpha_{уст} = \frac{m_z^{\delta_\epsilon}}{c_{\alpha}^{\delta_\epsilon} \cdot \sigma_n} \Delta \delta_\epsilon.$$

На основании выражения (7.29) можно определить динамические показатели устойчивости и управляемости самолёта в короткопериодическом колебательном процессе, по которым оценивают качество переходного процесса:

– период собственных колебаний самолёта  $T_k = \frac{2\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{v_k}$ , с;

– частота собственных колебаний  $f_k = \frac{1}{T_k}$ , Гц;

– время переходного процесса (время практически полного затухания колебаний)  $t_{зам} \approx \frac{3}{h_k} = \frac{3}{\xi} T$  – промежуток времени, по истечении кото-

рого отклонение регулируемого параметра движения (например,  $\Delta n_{ya}$  или  $\Delta \alpha$ ) будет отличаться от его конечного установившегося значения ( $\Delta n_{ya_{уст}}$  или  $\Delta \alpha_{уст}$ ) на 5 %;

– количество колебаний до практически полного затухания

$$n_{зам} = \frac{t_{зам}}{T_k} \approx 0,48 \frac{v_k}{h_k} = 0,48 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi};$$

– относительный заброс перегрузки (угла атаки) при достижении им своего первого экстремального значения

$$\Delta \bar{n}_{ya} = \frac{\Delta n_{ya \max} - \Delta n_{ya \text{ уст}}}{\Delta n_{ya \text{ уст}}} = e^{-\frac{\pi h_k}{v_k}} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}},$$

что соответствует моменту времени  $t_1 = \frac{\pi}{v_k}$ ;

время срабатывания – время первого выхода регулируемого параметра движения на его установившееся значение

$$t_{cp} = \frac{(\pi - \psi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot T.$$

На рис. 7.3 приведены основные характеристики колебательного переходного процесса.

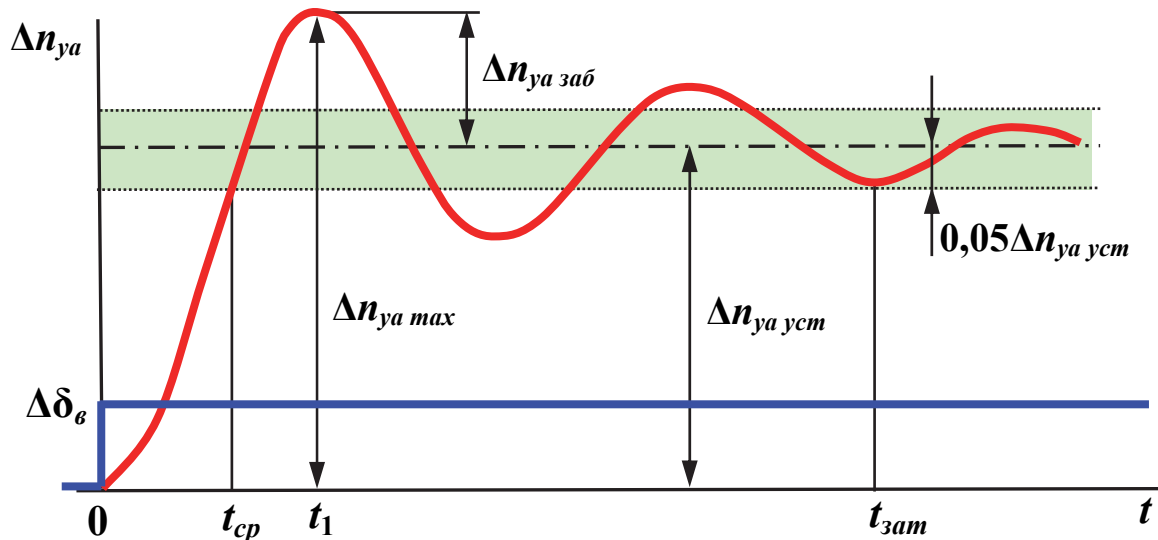


Рис. 7.3. Вид и характеристики переходного колебательного процесса

Большая продолжительность переходного процесса  $t_{\text{зат}}$  и значительный заброс  $\Delta \bar{n}_{ya}$  отрицательно сказываются на управляемости и маневренности самолёта.

Потери маневренности из-за колебательного переходного процесса оценивают коэффициентом использования маневренных возможностей самолёта  $K_M$

$$K_M = \frac{\Delta n_{ya \text{ уст}}}{\Delta n_{ya \max}} = \frac{1}{1 + \Delta \bar{n}_{ya}} < 1.$$

Из теории известно, что наивыгоднейшая величина относительного коэффициента демпфирования  $\xi = 0,707$ , что соответствует минимальному времени переходного процесса.

В авиации  $\Delta \bar{n}_{ya} \leq 0,1 \dots 0,2$ . Если забросы превышают допустимые значения, а средствами аэродинамической компоновки исправить это нельзя, то в контуре продольного управления необходимо использовать автоматику.

При увеличении высоты полёта плотность воздуха уменьшается, что при неизменной скорости приводит к уменьшению демпфирующих моментов и ухудшению затухания колебаний. Упругие деформации конструкции планера самолёта также приводят к уменьшению демпфирующих моментов и увеличению времени переходного процесса.

Если относительный коэффициент демпфирования  $\xi > 1$ , то корни характеристического уравнения будут действительными. Тогда короткопериодическое возмущённое движение, обусловленное ступенчатым отклонением руля высоты, будет аperiodическим. При отрицательных корнях самолёт устойчив и величина  $\Delta n_{ya}(t)$  асимптотически стремится к установившемуся значению  $\Delta n_{ya \text{ уст}}$ .

Для аperiodического процесса многие показатели динамической устойчивости и управляемости не имеют смысла. За время срабатывания принимается время создания перегрузки  $\Delta n_{ya} = 0,95 \Delta n_{ya \text{ уст}}$ .

Увеличением демпфирования до  $\xi > 1$  можно избавиться от колебательности и обеспечить переходный процесс без заброса, но в этом случае увеличивается время переходного процесса.

### **7.9. Реакция самолёта в канале тангажа на отклонение руля высоты (стабилизатора) по гармоническому закону в короткопериодическом движении**

Реакция самолёта на гармонический сигнал характеризует его способность «ходить» за рычагами управления и определяет качество таких маневров, как прицеливание, заход на посадку, полёт в строю и т.п.

Пусть у самолёта, совершающего прямолинейный горизонтальный установившийся полёт, орган продольного управления (руль высоты) начинает отклоняться по гармоническому закону с частотой  $\omega$  и единичной амплитудой, т.е.  $\Delta \delta_g = \sin \omega t$  [2].

В этом случае возмущённое короткопериодическое движение описывается системой уравнений (7.26) и будет состоять из собственной и вынужденной составляющих. Собственное движение определяется как общее решение однородных уравнений (с нулевой правой частью). Для устойчивого самолёта это движение быстро затухает и остаётся только вынужден-

ная составляющая, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только вынужденную составляющую возмущённого движения.

Изменение перегрузки (угла атаки) в вынужденном движении будет также иметь гармонический характер, но будет отличаться по амплитуде и по фазе. Например, перегрузка в вынужденном движении будет изменяться по закону

$$\Delta n_{ya}(t) = A \sin(\omega t + \gamma), \quad (7.30)$$

где  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний;  $\omega$  – круговая частота вынужденных колебаний;  $\gamma$  – сдвиг по фазе. Аналогично выражается и угол атаки.

Амплитуда и сдвиг фазы вынужденных колебаний перегрузки (7.30) определяются из передаточной функции

$$W_{n\delta}(p) = \frac{\Delta n_{ya}(p)}{\Delta \delta_e(p)} = \frac{K_c}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (7.31)$$

где  $K_c = \frac{m_z^{\delta_e}}{c_{yazn} \sigma_n} = -\frac{1}{\delta_e^n}$  – передаточный коэффициент по перегрузке.

Заменяя в (7.31)  $p = i\omega$ , получим частотную функцию по перегрузке

$$W_n(i\omega) = \frac{K_c [(1 - \psi^2) - 2\xi\psi \cdot i]}{(1 - \psi^2)^2 + 4\xi^2\psi^2}, \quad (7.32)$$

где  $\psi = \frac{\omega}{\omega_k} = T \cdot \omega$  – относительная частота вынужденных колебаний.

Выделим вещественную и мнимую части частотной функции (7.32)

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{K_c (1 - \psi^2)}{(1 - \psi^2)^2 + 4\xi^2\psi^2}; \quad \operatorname{Im}(\omega) = -\frac{2K_c \xi \psi}{(1 - \psi^2)^2 + 4\xi^2\psi^2}. \quad (7.33)$$

Подставим (7.33) в (7.26). Получим амплитудную частотную характеристику (АЧХ) по перегрузке

$$A = \frac{K_c}{\sqrt{(1 - \psi^2)^2 + 4\xi^2\psi^2}}. \quad (7.34)$$

Теперь подставим (7.33) в (7.27). Получим фазовую частотную характеристику (ФЧХ) по перегрузке

$$\gamma = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi\psi}{1 - \psi^2}\right). \quad (7.35)$$

По этим же формулам строят амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) по перегрузке. На рис. 7.4 показана АФЧХ при  $\xi = \text{const}$ .

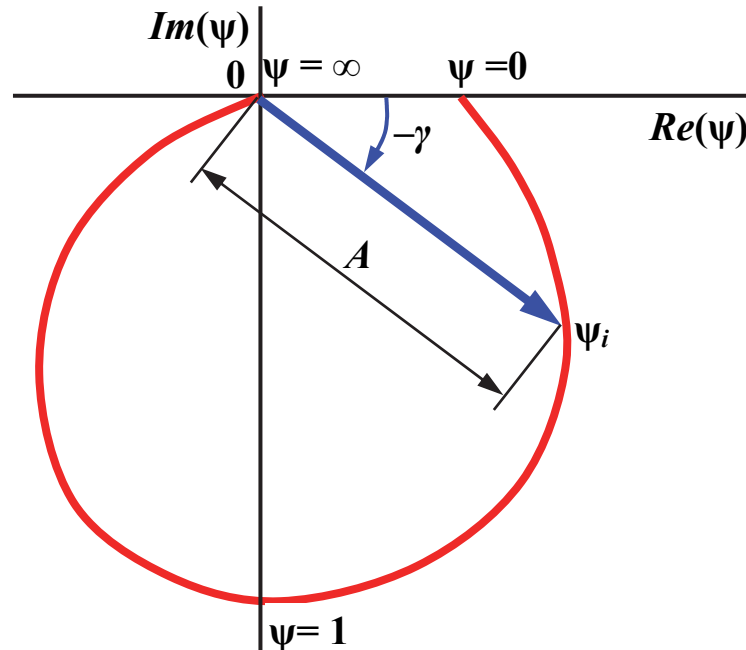


Рис. 7.4. АФЧХ по перегрузке при  $\xi = \text{const}$

Видно, что при изменении относительной частоты  $\psi$  от 0 до  $\infty$  вектор  $W_n(i\omega)$  поворачивается по часовой стрелке (в отрицательном направлении) на угол от 0 до  $-\pi$ , т.е. сдвиг по фазе составляет от 0 до  $-180^\circ$ . При этом амплитуда колебаний перегрузки изменяется от  $K_c$  до нуля, проходя через максимум.

При изменении относительного коэффициента демпфирования  $\xi$  будут меняться все частотные характеристики. С уменьшением  $\xi$  кривая АФЧХ (рис. 7.5) охватывает всё большую часть нижней полуплоскости и при  $\xi = 0$  разрывается на две ветви, лежащие на действительной оси. Точка разрыва соответствует относительной частоте  $\psi = 1$ , т.е.  $\omega = \omega_k$ .

Типичная АЧХ, построенная по формуле (7.34), приведена на рис. 7.6. Из нее следует, что при отсутствии демпфирования ( $\xi = 0$ ) на резонансной частоте  $\omega = \omega_k = \omega_{\text{рез}}$  ( $\psi = 1$ ) амплитуда колебаний  $A_{\text{max}} \Rightarrow \infty$ . При наличии демпфирования резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$ , при которой амплитуда колебаний достигает максимума, равна

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_k \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{\omega_k^2 - 2h_k^2}; \quad \psi_{\text{рез}} = \sqrt{1 - 2\xi^2},$$

при этом  $A_{\text{max}} \approx K_c / 2\xi$ . Отклонение органа управления с частотой  $\omega_{\text{рез}}$  или близкой к ней при слабом демпфировании может привести к недопустимым перегрузкам.



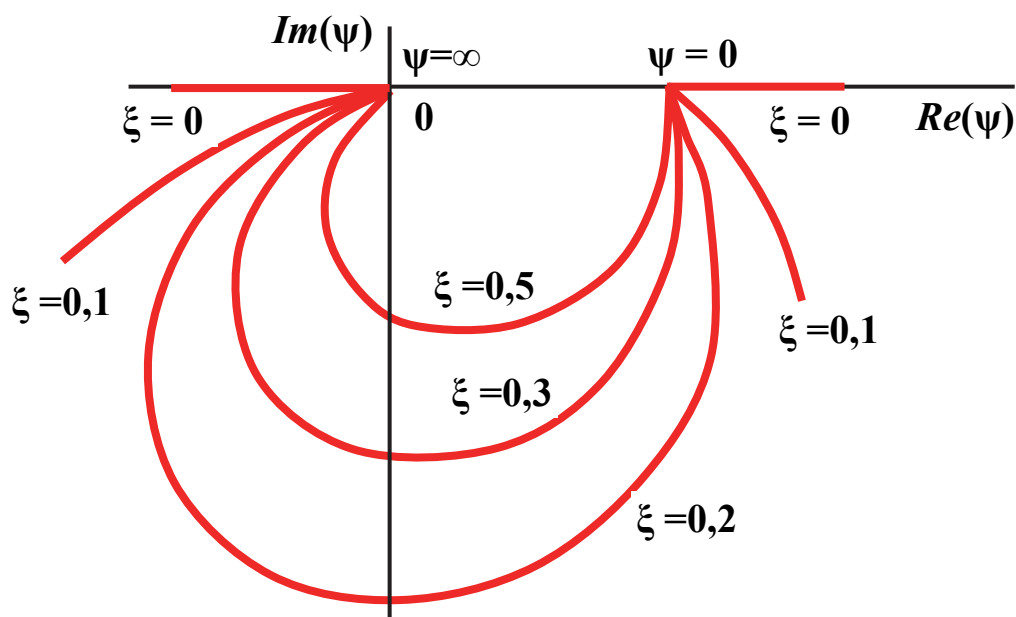


Рис. 7.5. АФЧХ при различном демпфировании

По АЧХ можно судить о величине амплитуды вынужденных колебаний перегрузки. Если амплитуда слишком велика, то самолёт будет строгим в управлении, что усложняет его пилотирование. Если амплитуда слишком мала, то для получения необходимой величины перегрузки необходимо отклонять рули на сравнительно большой угол, в этом случае самолёт тяжёл в управлении (плохо слушается рулей). Отсюда возникает требование  $A_{min} < A < A_{max}$ .

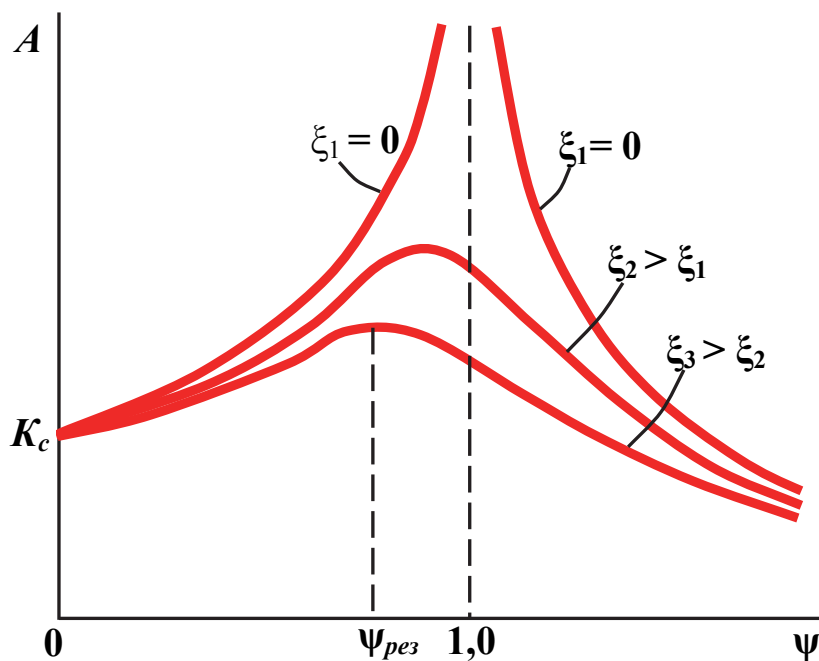


Рис. 7.6. АЧХ по перегрузке при различных  $\xi$

Типичная ФЧХ, построенная по формуле (7.35), приведена на рис. 7.7. При отсутствии демпфирования ( $\xi = 0$ ) в диапазоне относительных частот  $0 \leq \psi \leq 1$  фазовый сдвиг колебаний перегрузки отсутствует ( $\gamma = 0$ ), а на относительной частоте  $\psi = 1$  он скачком меняется до  $-180^\circ$ . При наличии демпфирования ( $\xi \neq 0$ ) изменение сдвига по фазе плавное, причём с увеличением частоты отставание по фазе растёт. Для всех  $\xi \neq 0$  при  $\psi = 1$  запаздывание по фазе одинаковое и составляет  $-90^\circ$ .

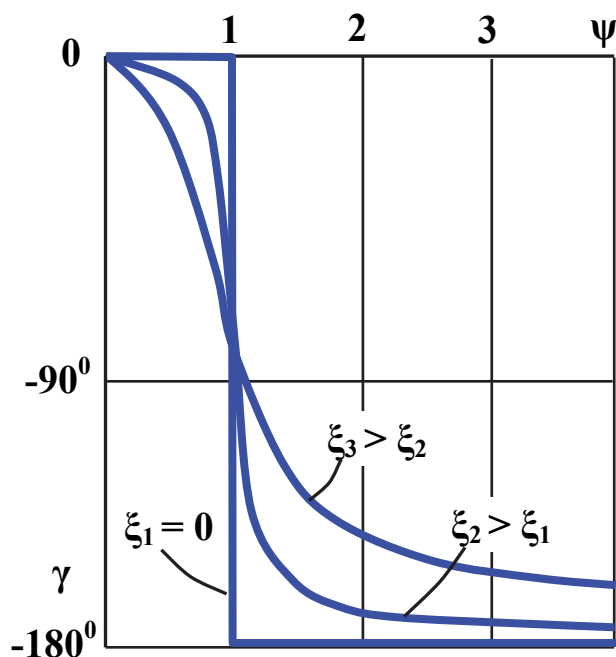


Рис. 7.7. ФЧХ по перегрузке при различном демпфировании

По ФЧХ можно судить о слежении самолёта за отклонением рулей, т.е. о времени запаздывания изменения параметров движения (перегрузки) от отклонения рулей  $\Delta t_{зан} = \gamma/\omega$ . Чем меньше  $\Delta t_{зан}$ , тем лучше управляемость. Отсюда возникает ещё одно требование  $\gamma < \gamma_{max}$ .

Из анализа частотных характеристик следует, что качество реакции самолёта на гармонические отклонения органов управления определяется амплитудой и фазой вынужденных колебаний параметров движения самолёта. Чем меньше будут изменения амплитуды и меньше фазовые искажения в эксплуатационном диапазоне частот  $\omega$ , тем точнее самолёт будет «ходить» за рычагами управления, тем легче пилоту управлять самолётом.

Требования  $\gamma < \gamma_{max}$  и  $A_{min} < A < A_{max}$  накладывают ограничения на параметры  $\xi$ ,  $\psi$  и в итоге на параметры самолёта, от которых они зависят ( $x_{цм}$ ,  $A_{zo}$  и др.). Используя формулы (7.34) и (7.35), построим граничные

кривые  $\gamma_{max}$ ,  $A_{min}$  и  $A_{max}$  в функции от  $\xi$  и  $\psi$  (рис. 7.8). Добавляя к ним горизонтальные линии  $\xi_{max} = const$  и  $\xi_{min} = const$ , ограничивающие зону качественных переходных процессов при  $\Delta\delta_{oy}(t) = 1$ , получим область допустимых значений  $\xi$  и  $\psi$ , обеспечивающих требуемые характеристики управляемости как при ступенчатом, так и при гармоническом отклонения руля (заштрихованная зона на рис. 7.8).

Граничные линии могут быть использованы для определения в первом приближении передаточных чисел автоматов демпфирования и устойчивости, если требуемые характеристики устойчивости и управляемости не могут быть получены в системе «самолёт-лётчик».

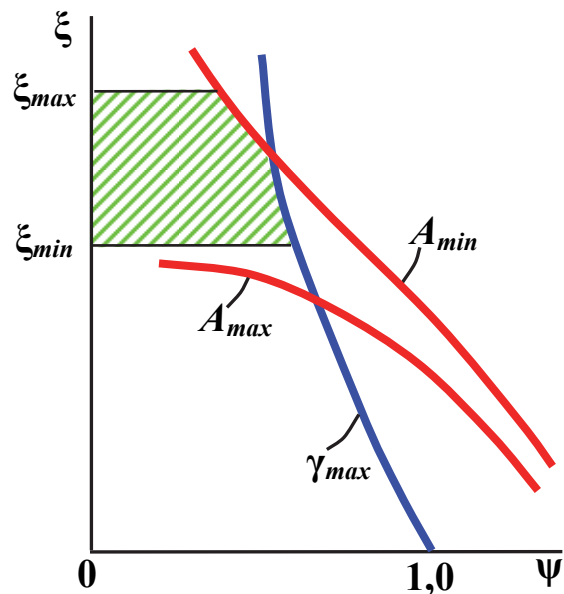


Рис. 7.8. Область допустимых параметров управляемости

## 7.10. Лётчик в системе управления летательным аппаратом

Лётчик является центральным звеном в замкнутой системе управления пилотируемым ЛА. Он воспринимает и перерабатывает поток первичной информации, определяя и дозируя необходимые управляющие воздействия, выполняя функции регулирующего звена [15].

Процесс управления ЛА сопровождается умственной работой лётчика, а также механическим воздействием на рычаги управления, кнопки и тумблеры.

При анализе системы «лётчик–ЛА» учитывают следующие свойства лётчика:

- способность следить только за сигналами, поступающими с определённой частотой (0...3 Гц), т.е. наличие определённой полосы пропускания;
- способность отвечать только на такие внешние сигналы, величина которых выше порога восприятия их органами чувств, т.е. наличие зоны нечувствительности;
- запаздывание ответной реакции на внешние сигналы, воспринимаемые органами чувств;
- прерывистый (дискретный) характер ответной реакции;
- способность к логической фильтрации внешних сигналов, т.е. к последовательному устранению рассогласования по какому-то одному параметру, что свойственно одноканальному усилителю;

- способность дозировать управляющие воздействия в зависимости от величины и знака поступающих внешних воздействий, что свойственно звену с обратной связью по управляющему воздействию;
- способность реагировать не только на отклонение параметра от заданной величины, но и на его производную и интеграл, что свойственно дифференцирующему и интегрирующему звеньям;
- способность усиливать величину управляющего воздействия для компенсации запаздывания своей реакции, что свойственно форсирующему звену;
- способность приспосабливаться через определённое время к изменившимся внешним условиям, т.е. свойство адаптации.

Широкое применение различной автоматики на современных ЛА отнюдь не исключает лётчика из процесса управления. Автоматика освобождает пилота от выполнения таких операций, которые он не может осуществлять с достаточной быстротой и точностью (из-за ограниченных психофизиологических возможностей человека), а также от большого количества простых (рутинных) операций, утомляющих его внимание и отнимающих время.

Для построения математической модели указанных выше свойств пилота пользуются методами статистической идентификации. Динамические свойства пилота описываются нелинейной дискретной и нестационарной функцией со случайными и изменяющимися во времени коэффициентами.

Существует несколько динамических моделей лётчика. При решении задач по оценке устойчивости системы «лётчик–ЛА» динамические свойства пилота можно представить передаточной функцией вида [15].

$$W_{\text{л}}(p) = e^{-pT_{\text{л}}} K_0 \frac{T_{1\text{л}}p + 1}{T_{2\text{л}}p + 1} \frac{K_1}{T_{3\text{л}}p + 1},$$

где  $T_{\text{л}}$  – постоянная времени, характеризующая запаздывание реакции лётчика на внешние сигналы;  $T_{1\text{л}}$  – постоянная времени подстройки лётчика (форсирующего звена);  $T_{2\text{л}}$  – постоянная времени инерционного (апериодического) звена лётчика;  $T_{3\text{л}}$  – постоянная времени нервно-мышечной реакции лётчика;  $K_0$  – коэффициент усиления лётчика;  $K_1$  – коэффициент усиления нервно-мышечного звена.

Структурная схема данной передаточной функции может быть представлена в виде трёх последовательно соединённых функциональных звеньев. В передаточной функции запаздывание реакции лётчика описывается членом  $e^{-pT_{\text{л}}}$  – это усилительное звено с запаздыванием. Инерционность и форсирующие действия лётчика описываются вторым функциональным звеном. Нервно-мускульное воздействие лётчика на движение ЛА описывается последним звеном первого порядка.

Для определённого круга задач и конкретного самолёта коэффициенты усиления и постоянные времени обычно изменяются в узких пределах. Например, для простых задач время запаздывания реакции лётчика  $T_l = 0,15 \dots 0,25$  с. Постоянные времени второго звена близки по величине  $T_{1л} \approx T_{2л} < 1$  с, а постоянная времени нервно-мышечной реакции  $T_{3л} = 0,1 \dots 0,7$  с.

### 7.11. Влияние конструктивных параметров самолёта и условий полёта на продольную устойчивость и управляемость

Из анализа движения самолёта с фиксированными органами управления и при типовых отклонениях последних показана тесная связь характеристик устойчивости, управляемости и маневренности самолёта. Балансировка самолёта в опорном установившемся движении, возмущённое собственное и управляемое движение ЛА зависят от целого ряда параметров: положения центра масс, площади крыла, горизонтального оперения, скорости и высоты полёта, аэродинамических характеристик  $c_{ya}^\alpha$ ,  $m_z^{\bar{\omega}_z}$ ,  $m_z^{\delta_\delta}$  и др. Иногда требования устойчивости и управляемости совпадают, иногда они противоречивы.

Следует отдавать предпочтение характеристикам управляемости. Только при хорошей управляемости могут быть в полной мере реализованы все возможности самолёта, заложенные в его конструкции, аэродинамике и силовой установке.

Рассмотрим влияние центровки  $x_{цм}$  на устойчивость и управляемость самолёта [2]. Например, смещение ц.м. вперёд увеличивает степень продольной статической устойчивости по перегрузке  $\sigma_n$ , коэффициент демпфирования  $h_k$  от центровки не зависит, а опорная частота  $\omega_k$  возрастёт, поскольку она  $\sim \sqrt{\sigma_n}$ , при этом уменьшится относительный коэффициент демпфирования  $\xi = h_k/\omega_k$ . В результате время переходного процесса практически не изменится, количество колебаний за время переходного процесса  $n_{зат}$  и величина заброса перегрузки  $\Delta \bar{n}_{ya}$  возрастут. Коэффициент использования маневренных возможностей самолёта  $K_M$  и передаточный коэффициент по перегрузке  $K_c$  станут меньше. Следовательно, слишком передняя центровка ухудшает управляемость и маневренность самолёта. Однако и слишком задняя центровка приводит к негативным последствиям. Уменьшается опорная частота  $\omega_k$ , растёт постоянная времени  $T$  и относительный коэффициент демпфирования  $\xi$ . Увеличивается время срабатывания  $t_{ср}$ , относительная частота  $\psi = \omega/\omega_k$  может превысить единицу, что приведёт к большим фазовым искажениям ( $\gamma > 90^\circ$ ) и к уменьшению

амплитуды вынужденных колебаний ( $A < A_{max}$ ). Поэтому центровка самолёта должна находиться в некоторых заданных пределах.

От площади крыла  $S$  зависят величины  $K_c$ ,  $h_k$  и  $\omega_k$ . Приблизённо коэффициент демпфирования  $h_k \sim S$ ,  $\omega_k \sim \sqrt{S}$ . С уменьшением  $S$  также уменьшается относительное демпфирование  $\xi$ , что ухудшает качество переходного процесса и частотных характеристик, снижает маневренность самолёта.

Изменение характеристик устойчивости, управляемости и маневренности при увеличении полётной массы самолёта будет происходить точно так же, как и при уменьшении площади крыла.

В диапазоне докритических чисел  $M$  полёта уменьшение приборной скорости (скоростного напора) приводит к тем же последствиям, что и уменьшение площади крыла. В области закритических чисел  $M$  полёта наблюдаем более сложную картину. Для современного самолёта с увеличением скорости характерным является рост его устойчивости по перегрузке и знакопеременное изменение устойчивости по скорости при переходе от трансзвука к сверхзвуку. Для полёта на сверхзвуке характерно более медленное затухание возмущённого процесса и увеличение заброса перегрузки.

С ростом высоты полёта демпфирование значительно уменьшается, характеристики устойчивости, управляемости и маневренности самолёта ухудшаются.

Целый ряд факторов, характерных для современных скоростных самолётов, в том числе, повышение удельной нагрузки на крыло, рост упругих деформаций агрегатов конструкции, а также большой диапазон скоростей и высот применения, приводят к ухудшению показателей демпфирования до значений, не обеспечивающих удовлетворительные характеристики устойчивости и управляемости. Только применение средств автоматики в каналах управления и, в частности, демпфера продольных колебаний и автомата улучшения продольной устойчивости делает возможной безопасную эксплуатацию таких самолётов.

Так, в демпфере продольных колебаний чувствительным элементом является гироскопический датчик угловых скоростей, а исполнительным устройством – раздвижная тяга или рулевая машина, осуществляющие малые отклонения стабилизатора, обычно составляющие до 10 % его общего хода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие содержит базовые сведения по расчёту основных лётно-технических характеристик самолёта, оценке его продольной устойчивости и управляемости. В ней учтена возможность самостоятельной проработки студентами отдельных разделов при изучении теоретического материала дисциплины "Динамика полёта".

В главах с первой по пятую рассматриваются траекторные задачи. В главе 1 представлены уравнения движения центра масс самолёта в векторной и скалярной форме, приведены основные системы координат, используемые в дальнейших расчётах. В главе 2 рассмотрен расчёт основных лётно-технических характеристик самолёта с использованием метода тяг Н. Е. Жуковского. Глава 3 посвящена определению дальности и продолжительности полёта, радиуса действия, оценке влияния загрузки самолёта на его дальность. Глава 4 описывает определение взлётно-посадочных характеристик самолёта при нормальном взлёте и посадке, а также при прерванном и продолженном взлёте в случае отказа критического двигателя. В главе 5 рассматриваются характерные полётные маневры самолёта в горизонтальной и вертикальной плоскости.

Главы 6 и 7 описывают продольное движение самолёта. В главе 6 анализируются статические характеристики продольной устойчивости и управляемости летательного аппарата, его балансировка, рассчитываются усилия в канале управления по тангажу. В главе 7 оцениваются динамические характеристики собственного и вынужденного продольного возмущённого движения в переходных процессах.

Данная информация количественно и качественно соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта специальности 160100 «Самолёто- и вертолётостроение» по дисциплине «Динамика полёта».

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Лебедев, А. А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов : учеб. пособие для вузов / А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин. – М. : Машиностроение, 1973. – 616 с.

2 Аэромеханика самолета: Динамика полета : учебник для авиационных вузов / А. Ф. Бочкарев, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов [и др.] ; под ред. А. Ф. Бочкарева, В. В. Андреевского. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1985. – 360 с.

3 ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. – Введ. 1981-06-30. – М. : Издательство стандагов, 1981.

4 Сурин, В. П. Динамика полёта и летные испытания самолета (Летно-технические характеристики. Статическая устойчивость и балансировка самолета) : учеб. пособие / В. П. Сурин, И. Л. Голобородько, Л. И. Выскребенцев ; под ред. В. П. Сурина. – М. : МАИ, 1982. – 87 с.

5 ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. – Введ. 1982-07-01. – М. : Издательство стандагов, 1981.

6 Динамика полета : учебник для авиационных вузов / А. М. Мхитарян, П. С. Лазнюк, В. С. Максимов [и др.]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1978. – 424 с.

7 Остославский, И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – М. : Машиностроение, 1969. – 500 с.

8 Котик, В. М. Динамика взлета и посадки самолета / В. М. Котик. – М. : Машиностроение, 1984. – 256 с.

9 Авиационные Правила. Ч. 23. Нормы летной годности гражданских легких самолетов. – М. : ЛИИ им. М. М. Громова, 1993. – 227 с.

10 Авиационные Правила. Ч. 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. – М. : ЛИИ им. М. М. Громова, 1994. – 322 с.

11 Аэродинамика и динамика полёта магистральных самолётов / под ред. Г. С. Бюшгенса. – Москва-Пекин : Издательский отдел ЦАГИ, 1995. – 772 с.

12 Остославский, И. В. Аэродинамика самолёта / И. В. Остославский. – М. : Оборонгиз, 1957. – 560 с.

13 Микеладзе, В. Г. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет : справ. / В. Г. Микеладзе, В. М. Титов. – М. : Машиностроение, 1990. – 144 с.

14 Остославский, И. В. Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – М. : Машиностроение, 1965. – 467 с.

15 Пашковский, И. М. Устойчивость и управляемость самолета / И. М. Пашковский. – М. : Машиностроение, 1975. – 328 с.