Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

М. В. Сташкевич

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2013

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0\,du = C$.
2. $\int du = u + C$.
3. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
5. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
7. $\int e^u du = e^u + C$.
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$.
9. $\int \cos u\, du = \sin u + C$.
10. $\int tgu\, du = -\ln|\cos u| + C$.
11. $\int ctgu\, du = \ln|\sin u| + C$.
12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$.
13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$.
15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.
16. $\int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C$.
17. $\int \frac{u'dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

Учебное издание

Сташкевич Марина Владимировна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Научный редактор И. Н. Каталажнова

Редактор Е. О. Колесникова

Подписано в печать 01.02.2013
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 80 г/м². Ризограф FR3950EP-α.
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 6,50. Тираж 100 экз. Заказ 25334.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.61я7
С788

Рецензенты:
Кафедра «Общая математика» ГОУВПО «Томский государственный университет», заведующий кафедрой доктор физико-математическх наук, профессор С. В. Панько;
Н.А. Павлова, старший преподаватель кафедры естественнонаучных и математических дисциплин КГБОУ СПО «Комсомольский-на-Амуре колледж информационных технологий и сервиса»

Сташкевич, М. В.
С788 Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / М. В. Сташкевич. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2013. – 111 с.
ISBN 978-5-7765-1045-8

В учебном пособии излагаются традиционные разделы общего курса обыкновенных дифференциальных уравнений, приводятся примеры экономических моделей, базирующихся на дифференциальных уравнениях, и задачи на использование этих моделей. Для каждого класса дифференциальных уравнений приводятся правила и методы решения уравнений. Большое внимание уделяется разбору примеров и задач, иллюстрирующих основной теоретический материал. Каждый раздел содержит вопросы и задачи для повторения.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей «Экономика», «Менеджмент организации» и «Коммерция (торговое дело)» вузов. Пособие может быть полезно для студентов специальностей «Организация перевозок и управление на транспорте», «Прикладная информатика в экономике», а также всех технических специальностей.

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.61я7

ISBN 978-5-7765-1045-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Производная постоянной:
$$C' = 0 .$$
2. Вынесение постоянной за знак производной:
$$(Cu)' = C \cdot u' .$$
3. Производная суммы (разности) функций:
$$(u \pm v)' = u' \pm v' .$$
4. Производная произведения функций:
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$
5. Производная частного функций:
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} .$$
6. Производная сложной функции:
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ если } y = f(u),\ u = \varphi(x).$$
7. Производная обратной функции:
$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ если } y = f(x) \text{ и } x = \varphi(y).$$

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

1. $d\,u(x) = u'(x)dx$.
2. $dC = 0$.
3. $d(Cu) = C \cdot du$.
4. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
5. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. $x' = 1$.
2. $\left(u^a\right)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$;
$\left(u^2\right)' = 2u \cdot u'$; $\quad \left(x^2\right)' = 2x$;
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$; $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
3. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$; $\quad \left(e^x\right)' = e^x$;
$\left(2^u\right)' = 2^u \cdot \ln 2 \cdot u'$; $\quad \left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2$.
4. $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; $\quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.
5. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$; $\quad \left(\sin x\right)' = \cos x$.
6. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$; $\quad \left(\cos x\right)' = -\sin x$.
7. $\left(tgu\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; $\quad \left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $\left(ctgu\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$; $\quad \left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
9. $\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $\quad \left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.
10. $\left(arcctgu\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$, $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
11. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\quad \left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 302 с.
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 416 с.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – СПб. : Лань, 2003. – 576 с.
4. Колесников, А. Н. Краткий курс математики для экономистов: учебное пособие / А. Н. Колесников. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 208 с.
5. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды : учеб. для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Физматлит, 2002. – 400 с.
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах : учеб. пособие для втузов / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, А. В. Босов. – М. : Высшая школа, 2001. – 376 с.
7. Пискунов, М. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т. 2 : учеб. пособие для вузов / М. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2001. – 544 с.
8. Солодовников, А. С. Математика в экономике. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. для вузов / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 376 с.
9. Сташкевич, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и ряды : учеб.-практ. пособие / М. В. Сташкевич, В. Н. Логинов. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КнАГТУ», 2001. – 98 с.
10. Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. для вузов / В.С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2005. – 480 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие «Обыкновенные дифференциальные уравнения» является расширным изложением лекций, которые автор читала студентам факультета экономики и менеджмента государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет». Оно может быть использовано в качестве учебника для студентов экономического и неэкономического профилей.

Автор стремилась изложить материал по возможности полно, строго и доступно, ставя своей целью не просто сообщить читателю различные сведения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, а показать внутреннюю связь математических и экономических понятий.

Учебное пособие состоит из шести разделов. Основными разделами являются первый, второй и третий. Каждый раздел начинается вводным подразделом (кроме четвертого и пятого), в котором кратко излагаются основные понятия, определения и теоремы, а также общие вопросы, относящиеся к задачам этого раздела. Затем идут подразделы, в которых содержатся уравнения определенного типа. Каждый из этих подразделов состоит из краткого изложения методов интегрирования уравнений рассматриваемого вида, решенных примеров и задач. В конце раздела приводятся вопросы и задачи для повторения. Четвертый, пятый и шестой разделы являются дополнительными. В них показываются другие методы решения уравнений, связь разностных и дифференциальных уравнений.

Вопросы и задачи для повторения, включенные в учебное пособие, содержат минимальный объем требований, предъявляемых обычно на экзамене по обыкновенным дифференциальным уравнениям, и могут быть использованы для самоконтроля. Перед тем, как приступить к решению задач, сначала необходимо изучить теорию нужного раздела и добиться полного понимания соответствующих понятий и теорем. Кроме того, необходимо знание разделов высшей математики: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной», «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», «Ряды».

Следует отметить, что в пособии начало доказательства теоремы обозначено знаком □, конец доказательства – знаком ■; начало решения примеров – знаком Δ, окончание их решения или рассмотрения – знаком ▲; запись $A \Rightarrow B$, где *A* и *B* – два высказывания, читается: «из *A* следует *B*», а запись $A \Leftrightarrow B$: « *A* равносильно *B*» или «*A* или, что то же самое, *B*».

6.2. Модель Самуэльсона – Хикса

В качестве примера линейного разностного уравнения рассмотрим *модель делового цикла Самуэльсона – Хикса*. Эта модель является динамическим вариантом модели Кейнса (см. раздел 1.7.4), в ней также используется принцип акселерации, который характеризуется следующим уравнением:

$$I(t) = k\big(Y(t-1) - Y(t-2)\big), \tag{6.4}$$

где $I(t)$ – величина инвестиций в период *t*; коэффициент $k > 0$ – фактор акселерации; $Y(t-1)$, $Y(t-2)$ – величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-м и $(t-2)$-м периодах.

Предполагается также, что потребление на данном этапе зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе, т.е.

$$S(t) = aY(t-1) + b. \tag{6.5}$$

Условие равенства спроса и предложения имеет вид

$$Y(t) = I(t) + S(t). \tag{6.6}$$

Подставляя в (6.6) выражение для $I(t)$ из (6.4) и выражение для $S(t)$ из (6.5), находим:

$$Y(t) = (a + k)Y(t-1) - kY(t-2) + b. \tag{6.7}$$

Уравнение (6.7) носит название *уравнения Хикса*.

Если предположить, что на протяжении рассматриваемых периодов величины *a* и *k* постоянны, то уравнение (6.7) представляет собой линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение уравнения Хикса находится в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного. Частное решение уравнения (6.7) можно легко найти, если предположить, что

$$Y(t) = Y(t-1) = Y(t-2) = Y_p,$$

т.е. выбрав в качестве частного решения равновесное решение $Y_p = const$.

Тогда

$$Y_p = (a + k)Y_p - kY_p + b,$$

откуда

$$Y_p = b(1-a)^{-1} \tag{6.8}$$

Дифференциальные уравнения позволяют выразить соотношения между изменениями различных величин (используется физический смысл производной), поэтому математическое моделирование многих физических, экономических, биологических и других процессов приводит к появлению дифференциальных уравнений.

В качестве примера математической модели, построенной на дифференциальных уравнениях, приведем динамическую односекторную модель экономического роста, известную под названием «базовая модель Солоу».

Экономика рассматривается как единое целое (без структурных элементов), в ней производится единственный универсальный продукт, который может потребляться как в производственной, так и в непроизводственной сфере. Его потребление в производственной сфере может рассматриваться как инвестирование. Эта модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты, в том числе и процесса воспроизводства.

Состояние экономики в *модели Солоу* задаётся пятью переменными состояния:

Y – конечный продукт,

L – наличные трудовые ресурсы,

K – производственные фонды,

I – инвестиции,

C – размер непроизводственного потребления.

Все переменные взаимосвязанно изменяются по времени, т.е. являются функциями времени *t*.

Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) используются полностью. Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых фондов и труда:

$$Y = f(K, L).$$

Таким образом, $f(K, L)$ – производственная функция всей экономики.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$$Y = C + I.$$

Введем долю конечного продукта ρ, используемого на инвестиции (ρ – *норма накопления*), тогда $I = \rho Y$, $C = (1-\rho)Y$. В дальнейшем норма накопления будет считаться постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$.

Выражение $b(1-a)^{-1}$ в формуле (6.8) называется *мультипликатором Кейнса* и является одномерным аналогом *матрицы полных затрат.*

В зависимости от значений a и k возможны четыре типа динамики. Она может быть растущей или затухающей и при этом иметь или не иметь колебательный характер.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Дайте определение разностного уравнения. Что называется общим решением разностного уравнения?
2. Опишите связь между теорией дифференциальных уравнений и теорией разностных уравнений.
3. Сформулируйте правило нахождения общего решения линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
4. Сформулируйте правило нахождения общего решения линейного неоднородного разностного уравнения.
5. Приведите пример экономической модели, основанной на разностном уравнении.

Задачи

1. Решить уравнение: $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 0$.

Ответ: $x_n = C_1(-6)^n + C_2$.

2. Решить уравнение: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0$.

Ответ: $x_n = 2^n\left(C_1\cos\frac{n\varphi}{3} + C_2\sin\frac{n\varphi}{3}\right)$.

3. Решить уравнение: $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

Ответ: $x_n = (-3)^n(C_1 + C_2 n)$.

4. Решить уравнение: $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 32\cdot 3^n$.

Ответ: $x_n = C_1(-3)^n + C_2 + 2\cdot 5^n$.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых искомыми являются функции одной или нескольких независимых переменных, причём в эти уравнения входят как сами искомые функции, так и их производные (или дифференциалы).

Другими словами, дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее функцию под знаком производной или дифференциала. Основная задача теории дифференциальных уравнений – нахождение и изучение функций, являющихся решениями таких уравнений.

Дифференциальное уравнение может содержать неизвестную функцию и её производные различных порядков, в связи с этим возникает понятие: порядок дифференциального уравнения.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей из производных (старшего из дифференциалов) искомой функции.

Простейшим примером решения дифференциального уравнения первого порядка является нахождение первообразной функции. Пусть $y' = f(x)$, необходимо найти функцию y. Из интегрального исчисления функции одной переменной известно решение этого дифференциального уравнения:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, и, следовательно, дифференциальное уравнение имеет бесконечное число решений.

Если неизвестная – функция одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, если нескольких переменных – *дифференциальным уравнением с частными производными*. Данное учебное пособие посвящено изучению теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

При изучении количественных характеристик сложных объектов, процессов, явлений используется метод математического моделирования, который состоит в том, что рассматриваемые закономерности формулируются на математическом языке и исследуются при помощи соответствующих математических средств. Математическая модель изучаемого объекта записывается при помощи математических символов и состоит из совокупности уравнений, неравенств, формул, алгоритмов, программ (для ЭВМ), в состав которых входят переменные и постоянные величины, операции, функции и их производные и другие математические понятия.

Используется также сокращение: $\forall$ – любой, всякий, каждый. Например, запись «$\forall x \in R: W(x) \neq 0$» читается: «для любого действительного числа x выполняется условие $W(x) \neq 0$».

Знаком отмечены важные сведения, на которые необходимо обратить внимание. Все определяемые понятия и теоремы выделены курсивом.

Теоремы нумеруются в пределах одного подраздела.

Формулы, рисунки, таблицы и примеры имеют двойную нумерацию, первая цифра означает номер раздела, к которому относится формула, рисунок, таблица и пример, вторая цифра – порядковый номер формулы, рисунка, таблицы и примера в рассматриваемом разделе.

Автор надеется, что учебное пособие поможет в изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студенту с любым уровнем подготовки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подготовка кадров квалифицированных экономистов, способных обеспечить все ступени планирования обоснованными и наиболее выгодными расчетами, возможна только при построении этих расчетов на надежной математической основе. Однако количество академических часов, отводимых на изучение дифференциальных уравнений для экономических специальностей, недостаточно для получения практических навыков решения задач. Поэтому при изучении теории дифференциальных уравнений студенту необходимо использовать специальную литературу по данной теме.

В данном учебном пособии было дано классическое введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Пособие отличается от других подобных изданий большим числом подробно решенных примеров и задач. Приведены некоторые другие методы (аналитические и численные) решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Более подробное изложение данного материала можно найти в книгах, учебных пособиях и монографиях, указанных в списке литературы.

Решению дифференциальных уравнений с частными производными посвящен раздел математики «Математическая физика», а примерами таких уравнений служат волновое уравнение, уравнение колебания струны и другие. Эти темы выходят за рамки данного учебного пособия и могут быть изучены студентами самостоятельно по специальной литературе.

В связи с тем, что заранее не известно, имеет ли дифференциальное уравнение решение, возникает проблема формулировки условий существования и единственности его решения.

Теорема Коши (*о существовании и единственности решения дифференциального уравнения*). Пусть дано уравнение $y' = \Phi(x, y)$, где функция $\Phi(x, y)$ определена в некоторой открытой области D координатной плоскости Oxy. Если функции $\Phi(x, y)$ и $\Phi'_y(x, y)$ непрерывны в области D, то для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует решение $y = f(x)$ уравнения $y' = \Phi(x, y)$, удовлетворяющее условию

$$y_0 = y(x_0), \qquad (1.4)$$

причём это решение единственно.

Доказательство этой теоремы приводится в более подробных курсах.

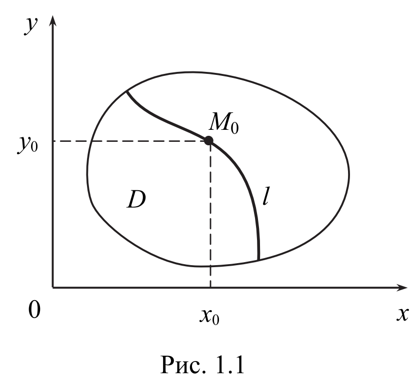

Рис. 1.1

Геометрический смысл теоремы: через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ из области D непрерывности функций Φ и Φ'_y проходит единственная интегральная кривая l (рис. 1.1). Очевидно, что в области D уравнение (1.2) имеет бесконечное множество решений.

Определение. Задача решения дифференциального уравнения (1.1), (1.2) или (1.3) совместно с условием (1.4) называется *задачей Коши.* Условие (1.4) называется *начальным условием*, а значения x_0 и y_0 называются *начальными значениями.*

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит, из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy.

Определение. Точки плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются *особыми точками* данного уравнения.

Определение. Решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную C, будем называть *общим решением* этого дифференциального уравнения. Решение, полученное из общего решения фиксированием постоянной $C = C_0$, соответствующей данному начально-

Вторая графа таблицы содержит приближенные значения y_i искомого решения заданного уравнения на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$. По табл. 5.1 находим приближенное значение $y(1) \approx y_{10} = 3{,}1873$.

Чтобы оценить точность вычисления, найдем точное решение уравнения. Уравнение $y' = x + y$ – это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид $y = Ce^x - x - 1$ (убедитесь в этом самостоятельно, применяя метод вариации произвольной постоянной или метод Бернулли). Используя начальные значения $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$, находим значение произвольной постоянной: $1 = Ce^0 - 0 - 1$, откуда $C = 2$, и точное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, $y = 2e^x - x - 1$. Теперь найдем значение этой функции в точке $x = 1$: $y(1) = 2(e - 1) \approx 3{,}4366$. Сравнивая это решение с приближенным, видим, что абсолютная погрешность не превышает 0, 2493. ▲

Следует отметить, что степень точности метода Эйлера, вообще говоря, невелика. Существуют гораздо более точные методы приближенного решения дифференциальных уравнений, с ними можно познакомиться в специальных курсах.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какова основная идея метода Эйлера?
2. Какой линией заменяется интегральная кривая на отрезке разбиения?
3. Запишите уравнение касательной к графику интегральной кривой в точке (x_5, y_5).
4. Как определяется шаг разбиения отрезка?
5. Запишите основную расчетную формулу метода Эйлера.

Задачи

1. Найти приближенное решение уравнения $y' = x + y + y^2$ на отрезке $[0, 0{,}3]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ:

x	0,0	0,1	0,2	0,3
y	1,00	1,20	1,45	1,78

Возможны три случая корней характеристического уравнения:

1) корни k_1 и k_2 – действительные и различные. Тогда общее решение находится по формуле

$$X(n) = C_1 k_1^n + C_2 k_2^n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные;

2) корни действительные и равные: $k_1 = k_2 = k$, тогда

$$X(n) = (C_1 + C_2 n) k^n;$$

3) корни комплексно-сопряженные: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, тогда общее решение разностного уравнения находится по формуле

$$X(n) = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi),$$

где r – модуль; φ – аргумент комплексного числа;

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \ tg\varphi = \beta/\alpha.$$

Пример 6.1. Решить уравнение: $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 32 \cdot 3^n$.

Δ Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4k - 5q = 0$. Находим корни квадратного уравнения: $k_1 = -5$, $k_2 = 1$. Корни характеристического уравнения действительные и различные, следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$X(n) = C_1(-5)^n + C_2 1^n = C_1(-5)^n + C_2.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Воспользуемся для этого методом неопределенных коэффициентов. Будем искать частное решение в виде, похожем на правую часть разностного уравнения: $x(n) = a3^n$. Тогда $x(n+1) = a \cdot 3^{n+1} = 3a \cdot 3^n$, $x(n+2) = a \cdot 3^{n+2} = 9a \cdot 3^n$. Подставляя эти выражения в заданное уравнение, получим:

$$9a \cdot 3^n + 12a \cdot 3^n - 5a \cdot 3^n = 32 \cdot 3^n \ \Rightarrow \ 16a \cdot 3^n = 32 \cdot 3^n \ \Rightarrow \ a = 2.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$x(n) = 2 \cdot 3^n.$$

Складывая полученные решения, окончательно имеем:

$$x_n = C_1(-5)^n + C_2 + 2 \cdot 3^n. \ ▲$$

Инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост. Если принять, что выбытие происходит с постоянным *коэффициентом выбытия* μ, $0 < \mu < 1$ (в расчёте на год), то

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличным трудовым ресурсам, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dL}{dt} = \nu L,$$

где коэффициент пропорциональности ν – *годовой прирост трудовых ресурсов*. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$L = L_0 e^{\nu t}, \qquad (0.1)$$

где $L_0 = L(0)$ – трудовые ресурсы в начале наблюдения.

Таким образом, модель Солоу задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} C = (1-\rho)Y, \\ Y = f(K, L), \\ L = L_0 e^{\nu t}, \\ dK/dt = \rho Y - \mu K, \quad K(0) = K_0. \end{cases}$$

Функция $f(K, L)$ удовлетворяет требованиям к производственной функции и считается линейно-однородной, т.е. $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$. Пользуясь её однородностью и обозначив среднюю производительность труда $y = Y/L$, среднюю фондовооружённость $k = K/L$, получаем

$$y = Y/L = f(K, L)/L = f(K/L, 1) = f(k, 1).$$

Если ввести обозначение $F(k) = f(k, 1)$, то получаем $y = F(k)$.

Далее найдём производную от средней фондовооруженности k по переменной t:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{L} - K\frac{L'}{L^2} = \frac{\rho Y - \mu K}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} =$$

$$= \frac{\rho Y - \mu K}{L} - \frac{K}{L}\nu = \rho\frac{Y}{L} - (\mu + \nu)\frac{K}{L} = \rho y - (\mu + \nu)k.$$

Окончательно получаем

$$\frac{dk}{dt}=\rho F(k)-(\mu+\nu)k, \qquad k(0)=k_0=\frac{K_0}{L_0}. \qquad (0.2)$$

Уравнение (0.2) – это уравнение с разделяющимися переменными и начальным условием (задача Коши), поэтому оно имеет единственное решение.

Поведение макропоказателей модели целиком определяется уравнением (0.2) и динамикой трудовых ресурсов (0.1).

Можно также исследовать некоторые специальные решения уравнения (0.2). Например, рассмотрим стационарную траекторию, т.е. такую, на которой фондовооружённость постоянна и равна своему начальному значению: $k(t)=const=k_0$. Но поскольку таким постоянным значением может быть, наверное, не всякое начальное, обозначим его k^0. Такое значение фондовооружённости называется стационарным. На стационарной траектории $dk/dt=0$, поэтому k^0 есть решение уравнения

$$\rho F(k)-(\mu+\nu)k=0.$$

Таким образом, необходимо уметь не только составлять математические модели экономических процессов, но и находить решение этих моделей, а также исследовать полученное решение.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений начнем с наиболее простых уравнений – уравнений первого порядка.

1.1. Основные определения и понятия

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1.1)$$

Форма записи дифференциального уравнения (1.1) называется *общей формой*.

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде

$$y'=\Phi(x,y). \qquad (1.2)$$

Форма записи уравнения (1.2) называется *нормальной формой* или формой Коши записи дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение (1.2) можно также представить и в другой форме, которая называется *дифференциальной формой* записи уравнения первого порядка:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \qquad (1.3)$$

Дифференциальную форму записи уравнения (1.3) можно получить, используя обозначение производной: $y'=\frac{dy}{dx}$.

Уравнение в *симметрической форме* (1.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Формы записи (1.1) – (1.3) – это различные представления одного и того же дифференциального уравнения.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение: $x+y-y'=0$. Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, так как содержит производную первого порядка y' некоторой функции $y(x)$, кроме того, это уравнение записано в общей форме (1.1), где $F(x,\,y,\,y')=x+y-y'$. Из этого уравнения выразим производную: $y'=x+y$. В результате, получим то же дифференциальное уравнение, но записанное в нормальной форме (1.2), где $\Phi(x,\,y)=x+y$. Если в последнем уравнении сделать замену $y'=\frac{dy}{dx}$, то получим $\frac{dy}{dx}=x+y$ или $(x+y)dx-dy=0$ – уравнение, записанное в дифференциальной форме (1.3), где $P(x,\,y)=x+y$, а $Q(x,\,y)=-1$.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* (1.1) называется функция $y=y(x)$ или $x=x(y)$, обращающая это уравнение в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.* График решения $y=f(x)$ дифференциального уравнения на координатной плоскости Oxy называется *интегральной кривой дифференциального уравнения.*

Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

2. Найти приближенное решение уравнения $y'=x^2+y^3$ на отрезке $[0,\,0{,}4]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$, с точностью до трех знаков после запятой.

Ответ:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,000	0,000	0,001	0,005	0,014

6. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные понятия

Определение. *Разностным уравнением порядка* ℓ называется уравнение вида

$$F(n,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+\ell})=0, \qquad (6.1)$$

где ℓ – фиксированное число; $n\in N$; $x_n,\ x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+\ell}$ – члены некоторой числовой последовательности.

Решениями разностного уравнения являются последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$. Найти *общее решение* разностного уравнения (6.1) означает найти все последовательности, удовлетворяющие этому уравнению.

Разностные уравнения часто используются в моделях экономической динамики с дискретным временем, а также для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Некоторые типы разностных уравнений встречаются в элементарной математике. Например, разностное уравнение второго порядка

$$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}$$

является признаком арифметической прогрессии. Решением этого уравнения является последовательность $x_n=a+d(n-1)$, где a и d – произвольные действительные числа; a – первый член прогрессии; d – разность арифметической прогрессии.

Уравнение

$$y_n^2=y_{n-1}y_{n+1}$$

определяет признак геометрической прогрессии, его решением является последовательность $y_n=bq^{n-1}$, где b и q – произвольные действительные числа; b – первый член прогрессии; q – знаменатель геометрической прогрессии.

Между теориями разностных и дифференциальных уравнений прослеживается определенная аналогия. Если в уравнении (6.1) формально заменить n на x, x_n на $y(x)$, x_{n+1} на $y'(x)$, …, $x_{n+\ell}$ на $y^{(\ell)}(x)$, то получится обыкновенное дифференциальное уравнение порядка ℓ:

$$F(x,y,y',\dots,y^{(\ell)})=0.$$

Так же, как в теории дифференциальных уравнений, вводится *задача Коши* – задача нахождения решения уравнения (6.1) удовлетворяющего начальным условиям: $x(n_0)=a_0,\ x(n_0+1)=a_1,\ \dots,\ x(n_0+\ell-1)=a_{\ell-1}$.

Определение. *Линейным разностным уравнением порядка* ℓ называется разностное уравнение вида

$$a_0(n)x_n+a_1(n)x_{n+1}+\dots+a_\ell(n)x_{n+\ell}=f(n), \qquad (6.2)$$

где $a_0(n),\ a_1(n),\ \dots,\ a_\ell(n),\ f(n)$ – заданные функции от n, $n\in N$. Если правая часть уравнения $f(n)\equiv 0$, то уравнение

$$a_0(n)x_n+a_1(n)x_{n+1}+\dots+a_\ell(n)x_{n+\ell}=0$$

называют линейным *однородным* уравнением.

В случае, когда коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_\ell$ уравнения (6.2) являются константами, методы решения данного класса уравнений во многом аналогичны решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. подраздел 2.4).

Рассмотрим линейное разностное уравнение второго порядка:

$$x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n=f(n), \qquad (6.3)$$

где p и q – заданные числа.

Так же, как и для линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (6.3) определяется по формуле

$$x_n=X(n)+x(n),$$

где $X(n)$ – общее решение соответствующего (6.3) однородного уравнения; $x(n)$ – некоторое частное решение уравнения (6.3).

Для нахождения общего решения однородного уравнения необходимо сначала решить *характеристическое уравнение*

$$k^2+pk+q=0.$$

му условию, будем называть *частным решением* дифференциального уравнения, т.е. $y = f(x, C)$ – общее решение, $y = f(x, C_0)$ – частное решение.

Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде, то будем называть его *общим или частным интегралом*, т.е. $Y(x, y, C) = 0$ – общий интеграл, $Y(x, y, C_0) = 0$ – частный интеграл.

Таким образом, общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой совокупность частных решений (частных интегралов), соответствующих различным значениям постоянной *C*, найденным для всевозможных начальных условий $y_0 = y(x_0)$. С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной *C*. Эти кривые являются интегральными кривыми данного дифференциального уравнения. Частному решению (частному интегралу) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Правило решения задачи Коши:

1) найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения;

2) подставить начальные значения в формулу общего решения (интеграла) и из полученного соотношения найти значение произвольной постоянной $C = C_0$;

3) полученное значение C_0 подставить в формулу общего решения (интеграла), в результате получится частное решение (частный интеграл), которое и является решением задачи Коши.

1.2. Геометрический смысл уравнения

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, т.е. в нормальной форме (1.2), и пусть $y = f(x, C)$ есть общее решение данного уравнения. Это общее решение определяет семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy*.

Правая часть уравнения (1.2) для каждой точки *M*(*x*, *y*) дает значение производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку (согласно геометрическому смыслу производной). Таким образом, дифференциальное уравнение (1.2) дает со-

Уравнение вида (1.7) является дифференциальным уравнением с разделенными переменными (1.5). Считая *y* известной функцией от x, равенство (1.7) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, поэтому неопределенные интегралы от них будут отличаться на постоянную

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Интегрируя, получим:

$$G(y) = F(x) + C,$$

где $G(y)$ – первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Мы получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т.е. получили общий интеграл уравнения (1.6).

Если уравнение $g(y) = 0$ имеет корни $y = y_i = const$, то они являются решениями уравнения (1.6). Если функции $y = y_i$ не могут быть получены из формулы общего решения ни при каком конечном C, то они называются *особыми решениями* дифференциального уравнения, в противном случае – это частные решения.

Правило решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1) необходимо разделить переменные x и y, т.е. получить дифференциальное уравнение с разделёнными переменными;

2) проинтегрировать полученное уравнение и найти общее решение (общий интеграл);

3) найти особые решения (если они есть).

В дифференциальном уравнении первого порядка можно будет разделить переменные, если его можно представить в виде (1.6), т.е. правую часть дифференциального уравнения удастся записать в виде произведения функций, содержащих или только *x*, или только *y*.

Разделить переменные в уравнении, записанном в дифференциальной форме (1.3), возможно, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так же можно представить в виде произведений, т.е.

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Пример 4.2. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение: $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y(1) = 1$, взяв пять первых членов разложения, отличных от нуля.

Δ Согласно (4.2), решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

Начальное условие $y(1) = 1$ даёт первый член этого ряда. Подставив $x = 1$ и $y = 1$ в данное уравнение, получим: $y'(1) = 1 + 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 1$.

Дифференцируя данное уравнение по переменной *x*, последовательно получаем:

$$y'' = \left(1 + x + x^2 - 2y^2\right)' = 1 + 2x - 4yy', \; y''' = \left(1 + 2x - 4yy'\right)' = 2 - 4(y')^2 - 4yy'',$$

$$y^{IV} = \left(2 - 4(y')^2 - 4yy''\right)' = -4 \cdot 2y'y'' - 4y'y'' - 4yy''' = -12y'y'' - 4yy'''.$$

Полагая $x = 1$ и используя значения $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, последовательно находим:

$$y''(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -1, \quad y'''(1) = 2 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 2,$$

$$y^{IV}(1) = -12 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 12 - 8 = 4.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{4}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

или

$$y = x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \ldots \; \blacktriangle$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. В каком случае находится решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда?

2. Какова основная идея приближенного решения дифференциальных уравнений?

Формула (5.1) есть *основная расчетная формула* метода Эйлера. Её точность тем выше, чем меньше разность Δx.

Решение задачи Коши, полученное при помощи формулы (5.1), называется *численным решением*, а способ получения такого решения называется *численным интегрированием дифференциального уравнения*.

Пример 5.1. Найти приближенное (численное) решение уравнения $y' = x + y$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, и вычислить $y(1)$.

Δ Разделим отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, …, $x_{10} = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}1$. Обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ приближенные значения решения, которые будем искать по формуле (5.1), которая в нашем случае принимает вид

$$y_i = y_{i-1} + \left(x_{i-1} + y_{i-1}\right)\Delta x \quad \left(i = \overline{1, 10}\right).$$

Вычисляем:

$$y_1 = 1 + (0 + 1) \cdot 0{,}1 = 1{,}1,$$

$$y_2 = 1{,}1 + (0{,}1 + 1{,}1) \cdot 0{,}1 = 1{,}22.$$

Аналогично находятся остальные значения y_i, причем результаты вычисления удобно представлять в виде таблицы, заполняя ее по строкам (табл. 5.1). При этом все вычисления проводим с точностью до четырех знаков после запятой, чтобы не накапливалась погрешность округления.

Таблица 5.1

Результаты вычисления

x_i	y_i	$\left(x_{i-1} + y_{i-1}\right)\Delta x$
$x_0 = 0{,}0$	$y_0 = 1{,}0000$	0,1000
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 1{,}1000$	0,1200
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 1{,}2200$	0,1420
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 1{,}3620$	0,1662
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 1{,}5282$	0,1928
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 1{,}7210$	0,2221
$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 1{,}9431$	0,2543
$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 2{,}1974$	0,2897
$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 2{,}4871$	0,3287
$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 2{,}8158$	0,3715
$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 3{,}1873$	

вокупность направлений или, как говорят, определяет *поле направлений* на плоскости Oxy.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Построив на плоскости поле направлений данного дифференциального уравнения, можно приближенно построить интегральные кривые.

Для дифференциального уравнения (1.2) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение: $\frac{dy}{dx}=k=const$, называется *изоклиной* данного дифференциального уравнения. При различных значениях k получаем различные изоклины. Уравнение изоклины, соответствующей значению k, будет $\Phi(x, y)=k$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых. Говорят, что, зная изоклины, можно качественно определить расположение интегральных кривых на плоскости.

Например, рассмотрим уравнение: $y'=-\frac{y}{x}$. Функция $\Phi(x, y)=-\frac{y}{x}$ не определена при $x=0$, следовательно, поле направлений для данного уравнения можно построить на всей плоскости, кроме оси Oy.

Изоклинами данного дифференциального уравнения являются

$$-\frac{y}{x}=k \text{ или } y=-kx.$$

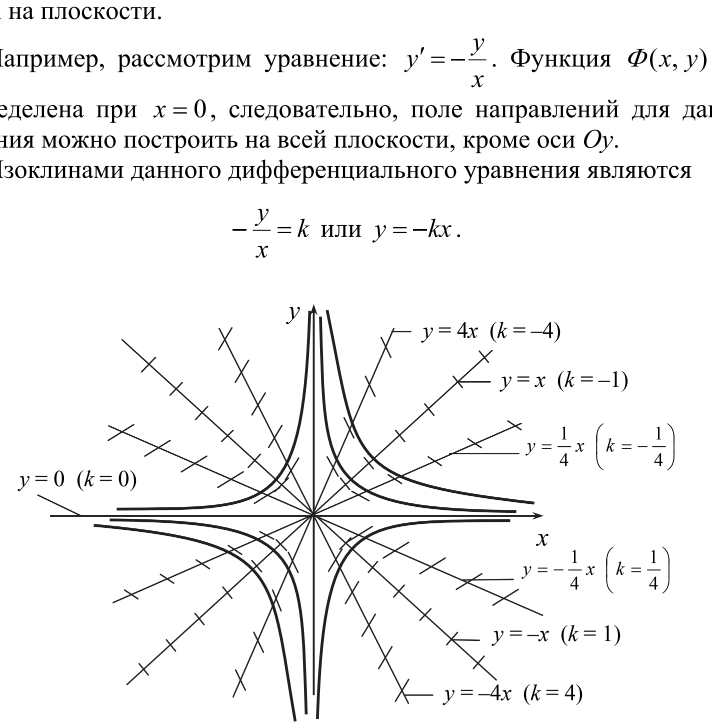

Рис. 1.2

Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 1.2). В каждой точке (x, y) $(x \neq 0)$ отдельной изоклины сохраняется угол наклона касательных, проведенных к интегральным кривым в этих точках. Используя полученное поле направлений, можно изобразить семейство интегральных кривых, которые, очевидно, являются гиперболами.

Рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают отдельные типы уравнений и для каждого из них находят свой способ нахождения решений.

1.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1.3.1. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0, \tag{1.5}$$

где множитель при dx зависит только от x, а множитель при dy – только от y, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. При этом говорят, что в уравнении (1.5) *переменные разделены*.

Общим интегралом такого уравнения будет

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C.$$

1.3.2. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'=f(x)g(y), \tag{1.6}$$

или его можно привести к виду (1.6), то говорят, что уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Рассмотрим уравнение (1.6). Преобразуем его, предполагая $g(y)\neq 0$ и учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, к виду

$$\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx. \tag{1.7}$$

Задачи

1. С помощью разложения в ряд по степеням x проинтегрировать следующие уравнения и определить область существования полученного решения: а) $y''-x^2y=0$; б) $y'=x-2y$; $y(0)=0$.

Ответ:

а) $y=a_0\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\ldots(4k-1)4k}+a_1\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\ldots4k(4k+1)}$; решение существует на всей числовой оси;

б) $y=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{2\cdot n!}=\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$; решение существует на всей числовой оси.

2. $y'=x^2y+y^3$; $y(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

Ответ: $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{17x^3}{3!}+\ldots$

3. $y''=yy'-x^2$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Найти шесть первых (отличных от нуля) членов разложения.

Ответ: $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Рассмотренные в первом разделе аналитические методы нахождения точных решений дифференциальных уравнений первого порядка могут привести к довольно сложным вычислениям. В таких случаях можно использовать приближенный метод решения уравнений. Рассмотрим один из таких методов, который носит название *метода Эйлера* (*ломаных Эйлера*).

Основная идея метода Эйлера состоит в том, что искомая интегральная кривая, являющаяся графиком частного решения, приближенно заменяется ломаной.

Пусть дана задача Коши

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0.$$

Найдем приближенное решение уравнения на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Разобьем отрезок $[x_0, b]$ точками $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n равных частей. Обозначим $x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=\Delta x$. Обозначим через y_i приближенные значения искомого решения в точках x_i $(i=\overline{1,n})$.

Проведем через точки разбиения x_i прямые (рис. 5.1), параллельные оси Oy, и последовательно проделаем следующие однотипные операции. Подставим начальные значения x_0 и y_0 в правую часть уравнения $y'=f(x,y)$ и вычислим угловой коэффициент $y'=f(x_0,y_0)$ касательной к интегральной кривой в точке $(x_0,\ y_0)$. Для вычисления приближенного значения y_1 искомого решения заменим на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую отрезком её касательной в точке $(x_0,\ y_0)$. При этом получаем:

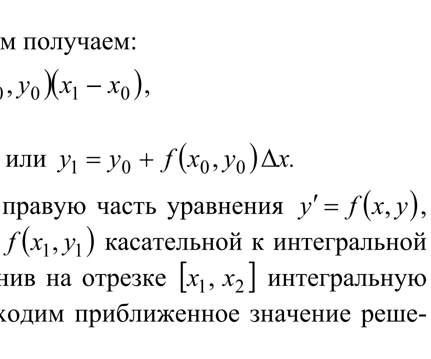

Рис. 5.1

$$y_1-y_0=f(x_0,y_0)(x_1-x_0),$$

откуда находим

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0) \text{ или } y_1=y_0+f(x_0,y_0)\Delta x.$$

Подставив значения x_1 и y_1 в правую часть уравнения $y'=f(x,y)$, вычислим угловой коэффициент $y'=f(x_1,y_1)$ касательной к интегральной кривой в точке $(x_1,\ y_1)$. Далее, заменив на отрезке $[x_1, x_2]$ интегральную кривую отрезком ее касательной, находим приближенное значение решения y_2 в точке x_2:

$$y_2=y_1+f(x_1,y_1)(x_2-x_1) \text{ или } y_2=y_1+f(x_1,y_1)\Delta x.$$

Аналогично находим

$$y_3=y_2+f(x_2,y_2)\Delta x,\ \ldots,\ y_n=y_{n-1}+f(x_{n-1},y_{n-1})\Delta x.$$

Таким образом, получены приближенные значения y_i искомого решения в точках x_i (приближенно построена искомая интегральная кривая в виде ломаной). При этом значения y_i вычисляются по формуле

$$y_i=y_{i-1}+f(x_{i-1},y_{i-1})\Delta x\quad (i=\overline{1,n}). \tag{5.1}$$

Пример 1.2. Проинтегрировать уравнение: $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$.

Δ Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными вида (1.6), так как $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(y) = \sqrt{y}$. Разделим переменные x и y, для этого изменим обозначение производной y' на $\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на $\sqrt{y}$, при условии $\sqrt{y} \neq 0$ или $y \neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение с разделёнными переменными (см. приложение 1):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x} + C \;\Rightarrow\; 2\sqrt{y} = \ln|x| + C.$$

Полученное решение является общим интегралом исходного уравнения. Выразив из этого равенства y, получим общее решение:

$$y = \left(\frac{1}{2}\left(\ln|x| + C\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + C\right)^2.$$

Найдём особые решения, если они есть. Общее решение уравнения было получено в предположении $y \neq 0$. Очевидно, что функция $y = 0$ обращает заданное уравнение в тождество, т.е. является его решением. Выясним, будет ли $y = 0$ являться частным решением уравнения, которое можно получить из формулы общего решения $y = \frac{1}{4}\left(\ln|x| + C\right)^2$ при каком-либо значении постоянной C. Для этого приравняем обе функции: $\frac{1}{4}\left(\ln|x| + C\right)^2 = 0$. Очевидно, что ни при каком значении постоянной C выражение в левой части равенства в ноль не обращается, поэтому $y = 0$ – особое решение дифференциального уравнения. ▲

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \dots)$ находятся путём последовательного дифференцирования уравнения и подстановкой начальных данных в выражения для этих производных. Аналогично можно интегрировать и уравнения высших порядков.

Пример 4.1. Проинтегрировать уравнение $y'' = xy$.

Δ Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Такой ряд является частным случаем ряда (4.1) при $x_0 = 0$.

Дифференцируем формально ряд почленно два раза. Подставим y и y'' в заданное уравнение. Тогда

$$2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} +$$

$$+ (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \dots = x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0; \quad 3 \cdot 2 \cdot a_3 = a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3};$$

$$4 \cdot 3 \cdot a_4 = a_1 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}; \; \dots; \quad n(n-1) a_n = a_{n-3} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)}; \; \dots$$

Так как $a_2 = 0$, то $a_5 = a_8 = \dots = a_{3k+2} = \dots = 0$. Остальные коэффициенты выражаются через a_0 и a_1:

$$a_{3k} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k}, \quad a_{3k+1} = \frac{a_1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots 3k(3k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Эти формулы позволяют найти последовательно все коэффициенты искомого разложения. Таким образом,

$$y = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) 3k}\right) + a_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots 3k(3k+1)}\right).$$

По признаку Даламбера радиус сходимости найденного ряда равен бесконечности. Следовательно, все проделанные операции были законными, и сумма ряда при всех значениях x является решением уравнения (это общее решение дифференциального уравнения, где a_0 и a_1 играют роль произвольных постоянных интегрирования). ▲

Введем функцию $\tilde{y} = \varphi(x + C)$. Найдем её производную, используя правило дифференцирования сложной функции и учитывая равенство (1.9):

$$\tilde{y}' = \varphi'(x + C) \cdot (x + C)' = f(\varphi(x + C)) = f(\tilde{y}).$$

Таким образом, получили $\tilde{y}' = f(\tilde{y})$. Это говорит о том, что функция $\tilde{y} = \varphi(x + C)$ также является решением уравнения (1.8). ■

Геометрическая трактовка данной теоремы заключается в том, что при параллельном переносе вдоль оси Ox интегральные кривые автономного уравнения переходят друг в друга.

Если $f(y) \neq 0$, то общее решение автономного уравнения задается формулой $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольное частное решение.

1.3.4. Дифференциальное уравнение показательного роста

Ряд задач на составление дифференциальных уравнений приводит к уравнениям вида

$$y' = ky, \tag{1.10}$$

где k – постоянная величина.

Определение. Уравнение (1.10) называется *уравнением показательного роста.*

Смысл уравнения (1.10) состоит в том, что скорость изменения функции пропорциональна самой функции.

Уравнение (1.10) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, автономным уравнением. Перепишем это уравнение в дифференциальной форме, для чего используем обозначение производной $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = ky \;\Leftrightarrow\; dy = kydx.$$

Разделим переменные в последнем уравнении, разделив обе его части на *y:*

$$\frac{dy}{y} = kdx.$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \;\Rightarrow\; \ln|y| = kx + \ln|C|.$$

- для корня k_n решение системы (3.8):

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \quad \dots, \quad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Путем непосредственной подстановки в уравнения (3.8) можно убедиться, что система функций

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = C_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{cases} \tag{3.13}$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные, тоже является решением системы дифференциальных уравнений (3.8). Формулы (3.13) представляют общее решение системы (3.8).

Правило решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

1) для системы уравнений (3.8) составить характеристическое уравнение (3.12) и найти его корни;

2) для каждого корня k_i записать систему (3.10) и определить коэффициенты:

$$\alpha_1^{(i)}, \; \alpha_2^{(i)}, \; \dots, \; \alpha_n^{(i)} \quad (i = \overline{1, n});$$

3) найденные значения коэффициентов $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, …, $\alpha_n^{(i)}$ для корней характеристического уравнения k_i $(i = \overline{1, n})$ подставить в общее решение (3.13) исходной системы.

Так как однородная система (3.10) имеет бесконечное множество решений, то при нахождении коэффициентов $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, …, $\alpha_n^{(i)}$ им можно придавать различные, удобные для вычислений, значения.

Пример 3.2. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Δ Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (2-k)(3-k) - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Пример 1.3. Найти частное решение уравнения $2yy' = 1 - 3x^2$, используя начальное условие $y(1) = 3$.

Δ Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, так как легко приводится к виду (1.6). Перепишем уравнение в виде: $2ydy = (1 - 3x^2)dx$. Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\int 2ydy = \int \left(1 - 3x^2\right)dx + C \;\Rightarrow\; y^2 = x - x^3 + C$$

– общий интеграл уравнения. Подставим начальные значения y=3 при x=1, получим: 9=1–1+C, отсюда следует, что C=9. Искомое решение имеет вид

$$y^2 = x - x^3 + 9 \quad \text{или} \quad x^3 + y^2 - x - 9 = 0.$$

Из последнего уравнения y однозначно не выражается, поэтому решение оставим в виде частного интеграла. ▲

Пример 1.4. Найти общее решение уравнения $y'\cos x - (y + 1)\sin x = 0$.

Δ Перепишем заданное уравнение в дифференциальной форме, используя $y' = \dfrac{dy}{dx}$, и умножим обе части равенства на dx: $\cos x dy - (y+1)\sin x dx = 0$. Далее разделим обе части уравнения на $\cos x$ и $y + 1 \neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{y+1} - \frac{\sin x}{\cos x}dx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y+1} - tgxdx = 0.$$

Проинтегрируем почленно это уравнение с разделенными переменными:

$$\int \frac{dy}{y+1} - \int tgxdx = \ln C \;\Rightarrow\; \int \frac{(y+1)'}{y+1}dy = \ln C + \int tgxdx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(y+1)}{y+1} = \ln C + \int tgxdx \;\Rightarrow\; \ln|y+1| = \ln C - \ln|\cos x|.$$

Произвольную постоянную интегрирования можно ввести в любом нужном нам виде. Здесь постоянная введена в виде $\ln C$ для того, чтобы упростить полученное решение.

Используя свойства логарифмов: 1) $\log_a\left|\dfrac{b}{c}\right| = \log_a|b| - \log_a|c|$, 2) если $\log_a|b| = \log_a|c|$, то $b = c$, перепишем полученный общий интеграл:

$$\ln|y+1| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right| \;\Rightarrow\; y + 1 = \frac{C}{\cos x} \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{\cos x} - 1.$$

Функция $y = \dfrac{C}{\cos x} - 1$ является общим решением уравнения. Это решение было получено в предположении, что $y + 1 \neq 0$ или $y \neq -1$. Очевидно, что функция $y = -1$ является решением заданного уравнения (в этом легко убедиться, подставив $y = -1$ в уравнение). Данную функцию можно получить из формулы общего решения $y = \dfrac{C}{\cos x} - 1$ при $C = 0$. Следовательно, $y = -1$ не является особым решением уравнения. ▲

1.3.3. *Автономное уравнение*

Рассмотрим один из важных случаев дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида

$$y' = f(y) \tag{1.8}$$

называют *автономным уравнением.*

Такие уравнения часто встречаются в различных вопросах экономической динамики. Обычно в качестве независимой переменной рассматривается время t; его отсутствие в правой части уравнения (1.8) можно трактовать как неизменность законов, по которым развивается экономическая система в рассматриваемый промежуток времени.

Если y^* – корень уравнения $f(y) = 0$, то $y = y^* = const$ является решением уравнения (1.8). Такое решение называется *стационарным.*

Отметим еще одно интересное свойство, которым обладают решения автономного уравнения.

Теорема. Если $y = \varphi(x)$ – решение автономного дифференциального уравнения, то $y = \varphi(x + C)$ также является решением этого уравнения.

□ Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.8). Тогда, по определению решения дифференциального уравнения первого порядка

$$\varphi'(x) = f(\varphi(x)).$$

Это равенство выполняется для любого x из области определения, поэтому мы можем заменить в нем x на $x + C$, в результате получим:

$$\varphi'(x + C) = f(\varphi(x + C)). \tag{1.9}$$

Находим его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Решение системы будем искать в виде

$$x_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^t + C_2\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \quad x_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^t + C_2\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Значение коэффициентов $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$ определяем из системы:

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0,\\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0,\end{cases}$$

или $\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$, откуда $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Полагая $\alpha_1^{(1)} = 2$, получаем: $\alpha_2^{(1)} = -1$.

Значение коэффициентов $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2^{(2)}$ определяем из системы

$$\begin{cases}(2-4)\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0,\\ \alpha_1^{(2)} + (3-4)\alpha_2^{(2)} = 0,\end{cases}$$

или $\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0$, откуда $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. Пусть $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = 1$.

Тогда общее решение системы:

$$x_1 = 2C_1e^t + C_2e^{4t}, \quad x_2 = -C_1e^t + C_2e^{4t}. \quad ▲$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какой общий вид имеет нормальная система дифференциальных уравнений? Что называется её порядком?
2. Дайте определение решения нормальной системы дифференциальных уравнений.
3. Как ставится задача Коши для нормальной системы?
4. Какая система носит название линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка?
5. Опишите алгоритм метода исключения неизвестных.
6. Дайте определение характеристического уравнения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.

Задачи

1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

а) $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2,\\ y_1'' = -2y_1 - 5y_2,\end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2.\end{cases}$

Ответ: а) $y_1(x) = e^{-6x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$,

$y_2(x) = e^{-6x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x - C_1\sin x + C_2\cos x\right)$;

б) $x_1(t) = e^t\left(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\right)$, $x_2(t) = e^t\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right)$.

2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2,\\ y_1'' = y_1 - 2y_2,\end{cases} \quad y_1(0) = 1,\; y_2(0) = 2.$$

Ответ: $y_1(x) = \dfrac{9}{4}e^{-x} - \dfrac{5}{4}e^{3x}$, $y_2(x) = \dfrac{9}{4}e^{-x} - \dfrac{1}{4}e^{3x}$.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, решение такого уравнения находят в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x - x_0\right)^n. \tag{4.1}$$

Неопределенные коэффициенты a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x - x_0$ в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y' = f(x, y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y(x_0) = y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n, \tag{4.2}$$

Из общего интеграла получим общее решение, используя основное логарифмическое тождество $b = a^{\log_a b}$ и свойство $\ln a + \ln b = \ln ab$:

$$\ln|y| = \ln e^{kx} + \ln|C| \iff \ln|y| = \ln\left|Ce^{kx}\right|$$

или

$$y = Ce^{kx}. \tag{1.11}$$

1.4. Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Функция $\Phi(x, y)$ называется *однородной функцией степени* k относительно аргументов x и y, если для любого $t \neq 0$ выполняется тождество

$$\Phi(tx, ty) \equiv t^k \Phi(x, y). \tag{1.12}$$

Функции, удовлетворяющие условию (1.12), иногда называют однородными измерения k или порядка k.

Многочлен $\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i} x^i y^{k-i}$, где каждое слагаемое имеет одну и ту же степень k ($k = i + (k - i)$), всегда является однородной функцией степени k. Например, каждое слагаемое многочлена

$$\Phi(x, y) = x^3 - 2x^2 y + 5y^3$$

имеет третью степень, поэтому данная функция является однородной третьей степени. Кроме того, однородность функции всегда можно исследовать при помощи определения (1.12).

Пример 1.5. Исследовать функцию $\Phi(x, y) = \sin\left(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$ на однородность.

Δ В выражение функции $\Phi(x, y) = \sin\left(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$ вместо переменных x и y подставим tx и ty ($t \neq 0$), тогда

$$\Phi(tx, ty) = \sin\left(\frac{2(tx)(ty)}{(tx)^2 - (ty)^2}\right) = \sin\left(\frac{t^2 2xy}{t^2(x^2 - y^2)}\right) = \sin\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) =$$
$$= 1 \cdot \sin\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) = t^0 \Phi(x, y).$$

В результате алгебраических преобразований нам удалось вынести t за знак функции $\Phi(x, y)$ в нулевой степени. Таким образом, рассмотренная

Данное уравнение записано в дифференциальной форме, где $P(x, y) = x(x + 2y)$, $Q(x, y) = (x^2 - y^2)$. Выясним, будут ли функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородными:

$$P(tx, ty) = tx(tx + 2ty) = t^2 x(x + 2y) = t^2 P(x, y),$$

таким образом, функция $P(x, y)$ – однородная функция второй степени;

$$Q(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 Q(x, y),$$

таким образом, функция $Q(x, y)$ – однородная функция второй степени. Следовательно, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной степени и уравнение является однородным дифференциальным уравнением.

Найдем решение уравнения, используя подстановку (1.15), тогда

$$x(x + 2ux)dx + (x^2 - u^2x^2)(x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(1 + 2u)dx + x^2(1 - u^2)(x\,du + u\,dx) = 0.$$

Разделим на x^2 обе части уравнения:

$$(1 + 2u)dx + (1 - u^2)(x\,du + u\,dx) = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$(1 + 2u)\,dx + (1 - u^2)\,xdu + (1 - u^2)udx = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + 2u + (1 - u^2)u)\,dx + (1 - u^2)\,xdu = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + 3u - u^3)\,dx + (1 - u^2)\,xdu = 0.$$

В результате подстановки получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные, для этого обе части последнего уравнения разделим на выражение $1 + 3u - u^3$ и на x. Тогда

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - u^2)\,du}{1 + 3u - u^3} = 0.$$

Это уравнение с разделенными переменными, найдем его общий интеграл, проинтегрировав обе части:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1 - u^2)\,du}{1 + 3u - u^3} = C \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{(3 - 3u^2)\,du}{1 + 3u - u^3} = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{d(1 + 3u - u^3)}{1 + 3u - u^3} = C \Rightarrow \ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|1 + 3u - u^3\right| = C.$$

В общем интеграле уравнения с разделяющимися переменными сделаем обратную подстановку $u = y/x$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{3.3}$$

Подставляя равенства (3.3) в последнее из уравнений (3.2), получим уравнение n-го порядка для определения функции $y_1(x)$:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \tag{3.4}$$

Решая уравнение (3.4), определим:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{3.5}$$

Дифференцируя общее решение (3.5) $n - 1$ раз, найдем производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ как функции от $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Подставляя эти функции в (3.3), определяем:

$$\begin{matrix} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), & y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, & y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{matrix} \tag{3.6}$$

Если система (3.1) линейна относительно искомых функций, то и уравнение (3.4) будет линейным.

Понятия общего, частного, особого решения полностью аналогичны случаю одного дифференциального уравнения.

Для того чтобы полученное решение (3.5) – (3.6) удовлетворяло начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{1_0}, \quad y_2(x_0) = y_{2_0}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n_0},$$

необходимо найти из уравнений (3.5) и (3.6) соответствующие значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пример 3.1. Проинтегрировать систему $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2. \end{cases}$

Δ Продифференцируем первое уравнение данной системы по переменной x:

Выберем такие значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и k, чтобы удовлетворялась система (3.10). Эта система есть система линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Составим определитель системы (3.10):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Если $\Delta(k) \neq 0$, то система (3.10) имеет только нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, следовательно, формулы (3.9) дают только тривиальное решение:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Этот случай не представляет собой интереса.

Таким образом, нетривиальное решение (3.9) можно получить только при таких значениях k, при которых определитель (3.11) обращается в нуль. В этом случае получаем уравнение n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) называется *характеристическим уравнением* для системы (3.8), его корни называются *корнями характеристического уравнения*.

Пусть корни характеристического уравнения (3.12) действительные, обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Для каждого корня k_i $(i = \overline{1, n})$ напишем систему (3.10) и определим коэффициенты

$$\alpha_1^{(i)}, \; \alpha_2^{(i)}, \; \ldots, \; \alpha_n^{(i)}.$$

Таким образом, получаем:

- для корня k_1 решение системы (3.8):
$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \quad \ldots, \quad x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$
- для корня k_2 решение системы (3.8):
$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \quad \ldots, \quad x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots;$$

функция $\Phi(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени (т.е. $k = 0$). ▲

Пример 1.6. Исследовать функцию $\Phi(x, y) = \dfrac{x + y}{y - x^2}$ на однородность.

Δ В выражение функции $\Phi(x, y) = \dfrac{x + y}{y - x^2}$ вместо переменных x и y подставим *tx* и *ty*, тогда

$$\Phi(tx, ty) = \frac{tx + ty}{ty - t^2x^2} = \frac{t(x + y)}{t(y - tx^2)} = \frac{x + y}{y - tx^2}.$$

Очевидно, что переменную t невозможно вынести за знак функции и, следовательно, функция не является однородной. ▲

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = \Phi(x, y)$ называется *однородным*, если $\Phi(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка.

Можно дать другую формулировку этого определения.

Определение. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинаковой степени k.

Эти два определения эквивалентны, так как если дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ привести к нормальному виду $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, то правая часть уравнения, т.е. функция: $\Phi(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ есть однородная функция нулевой степени.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \Phi(x, y)$, где функция $\Phi(x, y)$ – однородная функция нулевой степени, т.е.

$$\forall t \neq 0:\ \Phi(x, y) \equiv \Phi(tx, ty).$$

Выберем $t = \dfrac{1}{x}$, тогда $\Phi(x, y) \equiv \Phi\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ – функция одного аргумента $\dfrac{y}{x}$.

Введём обозначение $\Phi\left(1, \dfrac{y}{x}\right) \equiv g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тогда дифференциальное уравнение примет следующий вид:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.13}$$

Если дифференциальное уравнение можно привести к виду (1.13), то оно является однородным.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\dfrac{y}{x} = u$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция переменной x. Возможны два варианта такой подстановки:

1) если однородное уравнение дано в общей или нормальной форме, то используется подстановка:

$$y = ux,\ y' = u + u'x, \tag{1.14}$$

где $u' = \dfrac{du}{dx}$;

2) если уравнение записано в дифференциальной форме, то

$$y = ux, \quad dy = x\,du + u\,dx. \tag{1.15}$$

В формулах (1.14) и (1.15) использованы правило дифференцирования и дифференциал произведения функций (см. приложение 2).

Правило решения однородных дифференциальных уравнений:

1) убедиться, что уравнение является однородным дифференциальным уравнением, используя одно из определений или приведя уравнение к виду (1.13);

2) в однородном дифференциальном уравнении сделать подстановку (1.14) или (1.15);

3) проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

4) в промежуточном общем решении (общем интеграле) сделать обратную подстановку $u = \dfrac{y}{x}$.

Пример 1.7. Проинтегрировать уравнение

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Δ Очевидно, что в данном дифференциальном уравнении разделить переменные невозможно, поэтому это не уравнение с разделяющимися переменными. Проверим, будет ли оно однородным дифференциальным уравнением.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}.$$

В полученное уравнение подставим $\dfrac{dy_1}{dx}$ из первого уравнения и $\dfrac{dy_2}{dx}$ из второго уравнения, тогда

$$\frac{d^2y_1}{dx} = y_1 + y_2 + 2y_2; \quad y_1'' = y_1 + 3y_2.$$

В результате получили систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_1'' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y_2:

$$y_2 = y_1' - y_1 \tag{3.7}$$

и подставим во второе уравнение:

$$y_1'' = y_1 + 3(y_1' - y_1) \ \Rightarrow\ y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0.$$

Последнее уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 3k + 2 = 0$; находим корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Так как корни действительные и различные, то фундаментальная система решений

$$y_{1_1} = e^x,\ y_{1_2} = e^{2x}$$

и общее решение будет: $y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Продифференцируем общее решение по x: $y_1' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$, подставим в уравнение (3.7), тогда $y_2 = C_2e^{2x}$.

Ответ: $y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}$, $y_2 = C_2e^{2x}$. ▲

3.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{3.8}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные числа, будем называть *системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* относительно функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, определенных и дифференцируемых на некотором интервале (*a, b*) изменения аргумента *t*.

Будем искать частные решения системы в следующем виде:

$$x_1 = \alpha_1e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_ne^{kt} \tag{3.9}$$

Требуется определить постоянные α_1, α_2, …, α_n и k так, чтобы функции α_1e^{kt}, α_2e^{kt}, …, α_ne^{kt} удовлетворяли системе (3.8). Подставляя функции (3.9) в систему (3.8), получим:

$$\begin{cases} k\alpha_1e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)e^{kt}, \\ k\alpha_2e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)e^{kt}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ k\alpha_ne^{kt} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)e^{kt}. \end{cases}$$

Сократим все уравнения на e^{kt}, перенесем все члены в одну сторону и соберем коэффициенты при α_1, α_2, …, α_n. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Итак, чтобы функция (1.20) являлась решением уравнения (1.17), функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению (1.21). Интегрируя его, находим:

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C,$$

где C – новая произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение функции $C(x)$ в соотношение (1.20), получаем общее решение линейного уравнения (1.17):

$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Правило решения линейного дифференциального уравнения первого порядка методом вариации произвольного постоянного:

1) привести дифференциальное уравнение к виду (1.17) и определить функции $p(x)$ и $q(x)$;

2) подставить функции $p(x)$ и $q(x)$ в формулу общего решения:

$$y = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.22)$$

При решении конкретных примеров можно не использовать полученную громоздкую формулу, а повторять каждый раз все приведённые выкладки.

1.5.2. Метод Бернулли нахождения решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

Основная идея решения линейного дифференциального уравнения первого порядка методом Бернулли состоит в том, что решение уравнения (1.17) находится в специальном виде $y = u(x)v(x)$. Таким образом, вместо одной неизвестной функции y вводятся две неизвестные функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Так как подстановка $y = u(x)v(x)$ увеличивает число неизвестных функций, то одну из искусственно введенных функций можно находить по своему усмотрению (чаще всего из соображений упрощения поиска второй функции).

В уравнении (1.17) сделаем подстановку:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \qquad (1.23)$$

тогда

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Пусть функция $v = v(x)$ является частным решением дифференциального уравнения $v' + p(x)v = 0$ при условии $C = 0$. Тогда $u'v = q(x)$.

Задачи

1. Найти общее (частное) решение дифференциального уравнения:

а) $y''' = x^2 - \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$;

б) $xy''' - y'' = x^2 + 1$; в) $y^{IV} = \dfrac{y'''}{x}$;

г) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; д) $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Ответ:

а) $y = \dfrac{x^5}{60} - \dfrac{x^2}{2} - \cos x + 2$; б) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^2}{2} + C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$;

в) $y = C_1 \dfrac{x^4}{24} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$; г) $e^{-y} = 1 - x$; д) $1 - y^2 = (1 - x)^2$.

2. Показать, что система функций e^x, e^{-x}, e^{2x} является фундаментальной для уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ и записать его общее решение.

Указание: сначала убедиться, что заданные функции являются решениями уравнения, затем найти определитель Вронского функций e^x, e^{-x}, e^{2x}.

Ответ: $W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = -6e^{2x} \neq 0$; $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 2y' - 4y = 0$; д) $y'' - 2y' + 10y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; е) $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$;

в) $y'' - 6y' + 18y = 0$; ж) $y^{IV} - 8y'' + 7y = 0$;

г) $y'' - 15y' + 26y = 0$; з) $y^{VI} - 3y^V + 3y^{IV} = 0$.

Ответ:

а) $y = C_1 e^{(1-\sqrt{5})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{5})x}$; б) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$;

в) $y = e^{3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$; г) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x}$;

д) $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$; е) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}$;

ж) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{7}x} + C_4 e^{-\sqrt{7}x}$;

з) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{\frac{3x}{2}} \left(C_5 \cos \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + C_6 \sin \dfrac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

3.2. Метод исключения неизвестных

Одним из методов решения системы (3.1) является метод исключения неизвестных, который приводит к одному дифференциальному уравнению n-го порядка, эквивалентному системе.

Дифференцируем по x первое уравнение системы (3.1):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}$ их выражениями F_1, $F_2, \ldots, F_n$ из уравнений (3.1), будем иметь уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

при этом введем обозначение:

$$f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение второго порядка, подставляя производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}$ из (3.1), найдем:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продолжая далее таким же образом, получим, наконец, уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

В результате получили следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Из первых $n-1$ уравнений системы (3.2) определим $y_2, y_3, \ldots, y_n$ (предполагается, что эти операции выполнимы):

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|1 + 3\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right| = C.$$

В результате получился общий интеграл исходного дифференциального уравнения. ▲

Пример 1.8. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' = x + \dfrac{y}{2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 3$.

Δ Разделим обе части уравнения $xy' = x + \dfrac{y}{2}$ на x, тогда

$$y' = 1 + \frac{1}{2}\frac{y}{x}.$$

Получили уравнение вида (1.13), поэтому данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением. Для того чтобы найти общее решение этого уравнения, воспользуемся подстановкой (1.14), тогда

$$u + u'x = 1 + \frac{1}{2}u \;\Rightarrow\; u'x = 1 - \frac{1}{2}u.$$

Поскольку $u' = \dfrac{du}{dx}$, то

$$\frac{du}{dx}x = 1 - \frac{1}{2}u \;\Rightarrow\; x\frac{du}{dx} = \frac{2-u}{2}.$$

Разделим переменные в последнем уравнении:

$$\frac{du}{2-u} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{du}{2-u} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \ln|C| \;\Rightarrow\; -\int\frac{d(2-u)}{2-u} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \ln|C| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\ln|2-u| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C|.$$

Преобразуем полученный общий интеграл уравнения, используя свойства логарифмов:

$$n\log_a|b| = \log_a|b|^n, \qquad \log_a|b| + \log_a|c| = \log_a|bc|.$$

Тогда

$$\ln\left|\frac{1}{2-u}\right| = \ln\left|C\sqrt{x}\right| \;\Rightarrow\; \frac{1}{2-u} = C\sqrt{x} \;\Rightarrow\; 2 - u = \frac{1}{C\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; u = 2 - \frac{1}{C\sqrt{x}}.$$

Сделаем обратную подстановку $u = y/x$:

$$\frac{y}{x} = 2 - \frac{1}{C\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; y = x\left(2 - \frac{1}{C\sqrt{x}}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = 2x - \frac{\sqrt{x}}{C}. \qquad (1.16)$$

Найдем значение постоянной C, соответствующей начальному условию $y(1) = 3$. Для этого в общее решение (1.16) подставим начальные значения $y = 3$ и $x = 1$:

$$3 = 2\cdot 1 - \frac{\sqrt{1}}{C} \;\Rightarrow\; 1 = -\frac{1}{C} \;\Rightarrow\; C = -1.$$

Запишем теперь частное решение уравнения, подставив найденное значение постоянной в общее решение (1.16): $y = 2x + \sqrt{x}$. ▲

1.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (1.17)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции переменной x (или постоянные).

Таким образом, линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$y' + p(x)y = 0. \qquad (1.18)$$

Уравнение (1.18) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка*. Оно является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (1.17) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если $p(x) \equiv 0$, то уравнение $y' = q(x)$ также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим общий случай, когда $p(x) \neq 0, q(x) \neq 0$.

При решении линейных дифференциальных уравнений (1.17) обычно используется один из двух различных методов: либо *метод вариации произвольной постоянной, либо метод Бернулли.*

1.5.1. Метод вариации произвольной постоянной нахождения решения линейного дифференциального уравнения первого порядка

Основная идея решения линейного дифференциального уравнения первого порядка методом вариации произвольной постоянной состоит в том, что решение находится в виде, подобном общему решению соответствующего однородного уравнения (1.18).

Запишем линейное однородное уравнение, соответствующее данному линейному неоднородному уравнению (1.17):

$$y' + p(x)y = 0,$$

которое, как уже отмечалось ранее, является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -p(x)dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|,$$

здесь постоянная интегрирования введена в виде $\ln|C_1|$ для удобства выкладок. Откуда находим общее решение уравнения (1.14):

$$y = e^{-\int p(x)dx + \ln|C_1|} = e^{-\int p(x)dx}\cdot e^{\ln|C_1|}$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \qquad (1.19)$$

где $C = e^{\ln|C_1|}$ – произвольная постоянная.

Теперь найдём общее решение неоднородного уравнения (1.17) в виде (1.19), где C будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией переменной x (в этом заключается смысл метода), т.е. решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.20)$$

Чтобы найти решение линейного неоднородного уравнения (1.17) в виде (1.20), необходимо найти неизвестную функцию $C(x)$. Для этого подставим функцию (1.20) в уравнение (1.17). Получим:

$$\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-p(x)\right) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

или

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}. \qquad (1.21)$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения, используя метод вариации произвольных постоянных:

а) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;

б) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

в) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$.

Ответ: а) $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3x^2}{4}\right)$;

б) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \cos 2x \ln|\sin x| - \cos^2 x - x\sin 2x$;

в) $y = e^x\left(C_1 + C_2 x + x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1 + x^2}\right)$.

5. Найти общее (частное) решение дифференциального уравнения, используя метод неопределенных коэффициентов:

а) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$;

б) $y^{IV} - y = 8e^x$;

в) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

Ответ: а) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} - 0{,}6\cos x + 0{,}8\sin x$;

б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + 2xe^x$; в) $y = e^x - e^{-x} + x^2$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения, используя принцип наложения решений:

а) $y''' + y'' = 2x + e^{-x}$;

б) $y^{IV} - y = 3xe^x + \sin x$.

Ответ: а) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \dfrac{x^3}{3} - x^2 + xe^{-x}$;

б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{x}{4}\cos x$.

3. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Основные понятия

Пусть функции $y_1, y_2, ..., y_n$ независимой переменной x определены на некотором промежутке (a, b).

Определение. *Системой обыкновенных дифференциальных уравнений* называется совокупность дифференциальных уравнений вида

$$\Phi_i(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', y_2'', ..., y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y_n', y_n'', ..., y_n^{(m_n)}) = 0,$$
$$(i = \overline{1, n}).$$

Используя процедуру введения дополнительных функций, любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений только первого порядка.

Определение. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (3.1)$$

называется *нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.*

Определение. *Решением системы* (3.1) называется совокупность n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, определенных и дифференцируемых на некотором промежутке (a, b), при подстановке которых в систему (3.1) получается совокупность тождеств на (a, b). Процесс нахождения решения системы называется *интегрированием системы.*

Определение. Задача интегрирования системы (3.1), совместно с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i_0}$ $(i = \overline{1, n})$, называется *задачей Коши для системы* (3.1).

7. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, не содержащего искомой функции?

8. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?

9. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, однородного относительно неизвестной функции и её производных?

10. Какой общий вид имеет линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка?

11. Докажите третье свойство решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

12. Какие решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называются линейно-независимыми?

13. Дайте определение фундаментальной системы решений. Может ли решение $y \equiv 0$ входить в состав фундаментальной системы решений? Обоснуйте свой ответ.

14. Дайте определение определителя Вронского. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы данная система решений была фундаментальной?

15. Сколько фундаментальных систем решений имеет заданное линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка?

16. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами?

17. Какова структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка?

18. Дайте правило решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. От чего зависит вид общего решения?

19. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами? Чему равна степень характеристического уравнения?

20. Объясните, как составляется фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

21. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка?

22. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка?

23. Опишите метод нахождения частного решения неоднородного уравнения при помощи метода вариации произвольных постоянных.

24. В каких случаях используется метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?

Таким образом нахождение общего решения $y = uv$ сводится к нахождению функций $u(x)$ и $v(x)$ из системы дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \quad C = 0; \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ не обращаются в ноль ($u \neq 0$, $v \neq 0$), так как в противном случае $p(x) = 0$ и $q(x) = 0$, что противоречит условию.

Правило решения линейного дифференциального уравнения первого порядка методом Бернулли:

1) привести дифференциальное уравнение к виду (1.17) и определить функции $p(x)$ и $q(x)$;

2) сделать подстановку (1.23), записать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \quad C = 0; \\ u'v = q(x) \end{cases} \tag{1.24}$$

и найти её решение. Причем сначала находится частное решение первого дифференциального уравнения, найденная функция $v(x)$ подставляется во второе уравнение системы и находится функция $u(x)$;

3) общее решение дифференциального уравнения записать в виде произведения найденных функций $u(x)$ и $v(x)$, т.е. в виде $y = uv$.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{1.25}$$

где $m = const$.

При $m = 0$ получим линейное уравнение, при $m = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными.

В случае, когда $m \neq 0, m \neq 1$, уравнение (1.25) можно свести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка (1.17) заменой $z = y^{1-m}$. Разделив все члены уравнения (1.25) на y^m, получим

$$y^{-m}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Заметив, что

$$z' = (y^{1-m})' = (1-m)y^{-m}\frac{dy}{dx},$$

найдем: $\quad \dfrac{1}{1-m}z' + p(x)z = q(x) \;\Rightarrow\; z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x).$

1.6. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. *Уравнением в полных дифференциалах* называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. уравнение вида:

$$dU(x,y) = 0. \tag{1.29}$$

Выясним связь между функциями $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и $U(x,y)$. Сравнивая левую часть дифференциального уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ с полным дифференциалом функции двух переменных $U(x,y)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

делаем вывод, что

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Если продифференцировать функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ по переменным y и x соответственно, то согласно (1.30) получим: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Если частные производные второго порядка непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.31}$$

Соотношение (1.31) является *признаком уравнения в полных дифференциалах* (т.е. дифференциальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют равенству (1.31)).

Исходя из равенства (1.29), можно сделать вывод о виде решения уравнения в полных дифференциалах:

$$U(x,y) = C, \tag{1.32}$$

где C – произвольная постоянная.

2.5.4. Принцип наложения решений

В тех случаях, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму нескольких различных функций специального вида, удобно использовать принцип наложения решений, который справедлив для любого конечного числа функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ (доказательство теоремы приведено для случая $n = 2$; если $n > 2$, то доказательство проводится аналогично).

Теорема (*принцип наложения решений*). Если функция $y_1(x)$ – решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

а функция $y_2(x)$ – решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x),$$

то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x). \tag{2.33}$$

□ Подставим функцию $y_1(x) + y_2(x)$ в дифференциальное уравнение (2.33) вместо y:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

или

$$(y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_1) + (y_2^{(n)} + a_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_2) = \\ = f_1(x) + f_2(x).$$

Отсюда

$$f_1(x) + f_2(x) \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

т.е. функция $y_1(x) + y_2(x)$ обращает уравнение (2.33) в тождество, и, следовательно, по определению, она является его решением. ■

При нахождении $y_{\text{ч.н}}$ необходимо найти частные решения $y_{\text{ч.н}_1}, y_{\text{ч.н}_2}, \ldots, y_{\text{ч.н}_n}$ линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правыми частями $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ соответственно, потом сложить полученные частные решения. Таким образом, частное решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $z(x)$. Общее решение этого уравнения также можно находить методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной.

Общее решение уравнения Бернулли (1.25) можно сразу находить методом Бернулли (т.е. подстановкой (1.23)), не приводя уравнение к виду линейного дифференциального уравнения первого порядка. При этом решение уравнения сводится к решению системы

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \quad C = 0; \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases} \tag{1.26}$$

Пример 1.9. Найти общее решение уравнения: $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

Δ Разделим обе части уравнения на x^2:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}. \tag{1.27}$$

Очевидно, что это линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида (1.17), где $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим несколько способов решения уравнения (1.27).

Способ 1. Решим уравнение (1.27) методом вариации произвольного постоянного. Составим соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{y}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{x}.$$

Пусть теперь $C = C(x)$, тогда общее решение уравнения (1.27) имеет вид

$$y = \frac{C(x)}{x}. \tag{1.28}$$

Для того чтобы найти неизвестную функцию $C = C(x)$, подставим решение (1.28) в уравнение (1.27):

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)x = -1 \;\Rightarrow\; C'(x) = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; C(x) = -\int \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; C(x) = -\ln|x| + C.$$

Подставив найденную функцию в (1.28), получим общее решение данного уравнения:

$$y = \frac{-\ln|x| + C}{x} = \frac{C - \ln|x|}{x}.$$

Способ 2. Используем формулу общего решения (1.22) уравнения (1.27), подставив в нее $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = -\frac{1}{x^2}$:

$$y = \left(\int (-\frac{1}{x^2}) e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right) e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \left(\int (-\frac{1}{x^2}) e^{\ln x} dx + C\right) e^{-\ln x} =$$

$$\left(\int (-\frac{1}{x^2}) x dx + C\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(C - \int \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(C - \ln|x|\right) = \frac{C - \ln|x|}{x}.$$

Способ 3. Найдем решение уравнения (1.27) методом Бернулли. Пусть $y = uv$. Подставим $p(x) = \frac{1}{x}$ и $q(x) = -\frac{1}{x^2}$ в систему (1.24):

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \quad C = 0; \\ u'v = -\frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Найдем сначала частное решение первого дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|x| \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{x}.$$

Подставим функцию $v = \frac{1}{x}$ во второе уравнение системы. Проинтегрировав, получим:

$$u'v = -\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; u'\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; u' = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; u = -\int \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; u = -\ln|x| + C.$$

Перемножив полученные функции, получим общее решение уравнения (1.27):

$$y = uv = \left(-\ln|x| + C\right)\frac{1}{x} = \frac{C - \ln|x|}{x}. \;\blacktriangle$$

(где каждая функция $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, – это функция специального вида (2.30)) имеет вид

$$y_{\text{ч.н}} = y_{\text{ч.н}_1} + y_{\text{ч.н}_2} + \ldots + y_{\text{ч.н}_n}.$$

Пример 2.12. Решить уравнение $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

Δ Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение будем искать в виде: $y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$.

Запишем линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Составим его характеристическое уравнение: $k^2 + 5k + 6 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим корни: $k_1 = -3$ и $k_2 = -2$. Так как корни действительные и различные, то общее решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y_{\text{о.о}} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Рассмотрим теперь правую часть неоднородного уравнения: $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$. Она представляет собой сумму двух функций специального вида: $f_1(x) = e^{-x}$ и $f_2(x) = e^{-2x}$. Поэтому частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч.н}} = y_{\text{ч.н}_1} + y_{\text{ч.н}_2},$$

где $y_{\text{ч.н}_1}$ – частное решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$, а $y_{\text{ч.н}_2}$ – частное решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$.

Рассмотрим функцию $f_1(x) = e^{-x}$, по её виду определяем: $a = -1$, $b = 0$, $n = k = 0$; $z = -1$, $r = 0$, $s = 0$. Следовательно, по таблице нахождения вида частного решения (см. табл. 2.1), имеем $y_{\text{ч.н}_1} = Ae^{-x}$.

Рассмотрим функцию $f_2(x) = e^{-2x}$, по её виду определяем: $a = -2$, $b = 0$, $n = k = 0$, $z = -2$, $r = 1$, $s = 0$. Следовательно, по таблице нахождения вида частного решения (см. табл. 2.1), можем записать $y_{\text{ч.н}_2} = Bxe^{-2x}$.

Таким образом, частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{ч.н}} = Ae^{-x} + Bxe^{-2x}.$$

Для нахождения коэффициентов A и B найдем производные первого и второго порядка:

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-2x}, \quad y' = -Ae^{-x} + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x},$$

$$y'' = Ae^{-x} - 2Be^{-2x} - 2Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x} = Ae^{-x} - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x}.$$

Теперь подставим y, y', y'' в исходное уравнение:

$$\left(Ae^{-x} - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x}\right) + 5\left(-Ae^{-x} + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x}\right) +$$
$$+ 6\left(Ae^{-x} + Bxe^{-2x}\right) = e^{-x} + e^{-2x},$$

откуда

$$2Ae^{-x} + Be^{-2x} = e^{-x} + e^{-2x}.$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях этого равенства при подобных членах, получим:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ B = 1, \end{cases} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2},\; B = 1.$$

Следовательно,

$$y_{\text{ч.н}} = \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x}.$$

Сложив общее решение однородного уравнения $y_{\text{о.о}}$ и частное решение неоднородного $y_{\text{ч.н}}$, получим общее решение заданного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-2x}. \;\blacktriangle$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения n-го порядка. В каких формах оно может быть задано? Что называется решением уравнения?
2. Сформулируйте задачу Коши для уравнения n-го порядка. Какие условия достаточны для существования решения задачи Коши? Сколько решений может иметь задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка?
3. Что называется общим решением уравнения n-го порядка? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Какое решение называется частным?
4. В каких случаях можно понизить порядок дифференциального уравнения?
5. Какой вид имеет общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$?
6. Что называется промежуточным интегралом k-го порядка?

Пример 1.12. Проинтегрировать уравнение $2xydx+(y-x^2)dy=0$.

Δ В этом уравнении $P(x,y)=2xy$, $Q(x,y)=y-x^2$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x\,,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y-x^2\right)=-2x\,.$$

Получили, что $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах

Функция $P(x,y)=2xy$ – это однородная функция второй степени, а функция $Q(x,y)=y-x^2$ не является однородной (убедитесь в этом самостоятельно!), поэтому дифференциальное уравнение не будет однородным.

Функцию $Q(x,y)=y-x^2$ невозможно представить в виде произведения функций одной переменной $Q(x,y)=Q_1(x)Q_2(y)$, поэтому это не уравнение с разделяющимися переменными.

Найдем общую форму записи данного дифференциального уравнения:

$$2xydx+(y-x^2)dy=0\;\Rightarrow\;2xy+(y-x^2)y'=0\;\Rightarrow\;y'+\frac{2xy}{y-x^2}=0\,.$$

Левая часть полученного уравнения не является линейной относительно y и y'. Поэтому уравнение не является линейным, а также уравнением Бернулли.

В итоге мы не смогли классифицировать дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $y=y(x)$. Тогда попробуем найти решение этого уравнения в виде $x=x(y)$, т.е. будем искать функцию, обратную неизвестной функции $y=y(x)$.

Преобразуем уравнение, записанное в общей форме:

$$y'+\frac{2xy}{y-x^2}=0\;\Rightarrow\;\frac{1}{y'}=-\frac{y-x^2}{2xy}\;\Rightarrow\;x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{1}{2}x^{-1},$$

где $x'=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{dx}{dy}$. Полученное уравнение имеет следующий вид:

$$x'+p(y)x=q(y)x^m,$$

где $p(y)=-\dfrac{1}{2y}$, $q(y)=-1/2$, $m=-1$, т.е. является уравнением Бернулли относительно функции $x=x(y)$.

Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из следующих шагов:

1) Используя вид специальной правой части (2.30), определить числа a,b,n,k.

2) Найти степень новых многочленов $s=\max\{n,k\}$ и записать их общий вид с неизвестными коэффициентами.

Например, если $s=0$, то $P_0^*(x)=A$; если $s=1$, то $P_1^*(x)=Ax+B$; если $s=2$, то $P_2^*(x)=Ax^2+Bx+C$.

3) Записать комплексное число $z=a+bi$. Сравнив его с корнями $k_1,k_2,\ldots,k_n$ характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения, определить кратность r.

Например, если среди корней характеристического уравнения нет чисел, совпадающих с $z=a+bi$, то $r=0$; если есть один корень, совпадающий с $z=a+bi$, то $r=1$ и т.д.

4) Используя найденные величины s и r, записать структуру частного решения (2.31), в котором многочлены $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ имеют неопределенные коэффициенты (можно доказать, что эти коэффициенты определяются однозначно).

5) Неизвестные коэффициенты многочленов определить подстановкой функции $y_{\text{ч.н}}$ в исходное линейное неоднородное дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов подобных членов левой и правой частей уравнения (в результате получается система линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов).

6) Подставляя найденные коэффициенты в (2.31), записать вид частного решения $y_{\text{ч.н}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 2.11. Найти общее решение уравнения $y''-y=xe^x\sin x$.

Δ Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение будем искать в виде: $y_{\text{о.н}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}$.

1) Составим соответствующее линейное однородное уравнение: $y''-y=0$. Его характеристическое уравнение $k^2-1=0$ имеет действительные различные корни $k_1=-1$ и $k_2=1$, потому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^x$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{o.o}=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

3) Тогда общее решение $y_{\text{о.н}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}$ имеет вид

$$y_{o.н}=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{e^x}{25}\left((-10x-2)\cos x+(-5x+14)\sin x\right)$$

или

$$y_{o.н}=C_1e^{-x}+C_2e^x-\frac{e^x}{25}\left((10x+2)\cos x+(5x-14)\sin x\right).\;\blacktriangle$$

Согласно методу неопределенных коэффициентов, частное решение линейного неоднородного уравнения *n*-го порядка находится в виде, похожем на правую часть этого уравнения. При этом используются корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. Представим в виде таблицы наиболее часто встречающиеся случаи (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Нахождение частного решения по виду правой части линейного неоднородного уравнения

Правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения $y_{\text{ч.н}}$
$P_n(x)$	Число $z=0$ не является корнем характеристического уравнения	$P_n^*(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_n$
	Число $z=0$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^rP_n^*(x)$
$P_n(x)e^{ax}$	Число $z=a$ не является корнем характеристического уравнения	$P_n^*(x)e^{ax}$
	Число $z=a$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^rP_n^*(x)e^{ax}$
$P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx$	Число $z=bi$ не является корнем характеристического уравнения	$P_s^*(x)\cos bx+Q_s^*(x)\sin bx$, $s=\max\{n,k\}$
	Число $z=bi$ является корнем характеристического уравнения	$x\left(P_s^*(x)\cos bx+Q_s^*(x)\sin bx\right)$, $s=\max\{n,k\}$

Решение (1.32) является общим интегралом уравнения. Для того чтобы его записать, необходимо найти функцию $U(x,y)$.

Из первого уравнения системы (1.30) следует то, что

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)\,,$$

где $\varphi(y)$ – новая неизвестная функция переменной y; $M_0(x_0,y_0)$ – произвольная точка области D, в которой определены и непрерывны функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Функция $\varphi(y)$ находится из второго уравнения (1.30):

$$Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx\right)+\varphi'(y)\;\Rightarrow\;Q(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)\,.$$

Используя соотношение (1.31), можно записать:

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx=Q(x,y)-(Q(x,y)-Q(x_0,y))\;\Rightarrow\;\varphi'(y)=Q(x_0,y)\,.$$

Интегрируя последнее равенство, получим: $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$.

Таким образом,

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy\,.$$

Тогда, согласно (1.32), общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид

$$\int_{x_0}^{x}P(x,\,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\,y)dy=C\,. \qquad (1.33)$$

Правило решения уравнения в полных дифференциалах:

1) записать уравнение в дифференциальной форме и определить функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$;

2) проверить выполнение признака уравнения в полных дифференциалах, т.е. выполнение условие (1.31);

3) записать общий интеграл уравнения (1.33), выбрав x_0 и y_0 – координаты произвольной точки M_0 области непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ (чаще всего выбирают решение $x_0=y_0=0$).

Пример 1.10. Проинтегрировать уравнение

$$2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$$

Δ Здесь $P(x,y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x,y) = 2y - x^2\sin 2y$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(2x\cos^2 y\right)'_y = 2x\left(\cos^2 y\right)'_y = 2x\,2\cos y(-\sin y) = -2x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(2y - x^2\sin 2y\right)'_x = 0 - \sin 2y\left(x^2\right)'_x = -2x\sin 2y.$$

Получили, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны при любых $x, y \in R$. Поэтому выберем $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, тогда

$$Q(x_0, y) = 2y - 0\cdot\sin 2y = 2y.$$

Подставим все найденные величины в формулу общего решения (1.33), тогда

$$\int_0^x 2x\cos^2 y\,dx + \int_0^y 2y\,dy = C \;\Rightarrow\; 2\cos^2 y\int_0^x x\,dx + 2\int_0^y y\,dy = C \;\Rightarrow$$

$$2\cos^2 y\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x + 2\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y = C.$$

Окончательно получим:

$$x^2\cos^2 y + y^2 = C,$$

это общий интеграл уравнения в полных дифференциалах. ▲

Пример 1.11.. Найти решение задачи Коши

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0,\; y(0) = 2.$$

Δ В этом уравнении $P(x,y) = x + e^{\frac{x}{y}}$, $Q(x,y) = e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})\right) = e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}(1 - \frac{x}{y}) + e^{\frac{x}{y}}(-\frac{1}{y}) = e^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}).$$

Получили, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены и непрерывны при любых $x, y \in R$, кроме $y = 0$. Поэтому выберем $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$, тогда $Q(x_0, y) = e^0(1 - 0) = 1$.

Подставим все найденные величины в формулу общего решения (1.33), тогда

$$\int_0^x\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \int_1^y dy = C \;\Rightarrow\; \int_0^x x\,dx + y\int_0^x e^{\frac{x}{y}}d\left(\frac{x}{y}\right) + \int_1^y dy = C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x + \left.y\cdot e^{\frac{x}{y}}\right|_0^x + \left.y\right|_1^y = C \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2} + y\left(e^{\frac{x}{y}} - e^0\right) + y - 1 = C.$$

Окончательно получим:

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = C_1,$$

где $C_1 = C + 1$. Это общий интеграл уравнения в полных дифференциалах.

Теперь найдем частный интеграл, используя начальное условие. Так как $y = 2$ при $x = 0$, то

$$0 + 2\cdot e^0 = C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 2.$$

Подставляя найденное значение произвольной постоянной в общий интеграл, получим функцию

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2 \;\Rightarrow\; x^2 + 2ye^{\frac{x}{y}} = 4.$$

Это частный интеграл данного дифференциального уравнения. ▲

В заключение приведем еще один характерный пример нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка.

2) Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

а) Правую часть заданного уравнения представим в виде

$$f(x) = e^{1\cdot x}\left(0\cdot\cos(1\cdot x) + x\cdot\sin(1\cdot x)\right).$$

Следовательно, функция $f(x)$ – функция специального вида (2.30), где $a = 1$, $b = 1$; $P(x) = 0$ – это многочлен нулевой степени и $n = 0$; $Q(x) = x$ – это многочлен первой степени и $k = 1$. Частное решение уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов, т.е. в виде (2.31).

б) Определим степень новых неизвестных многочленов:

$$s = \max\{0, 1\} = 1.$$

Следовательно, $P_1^*(x) = Ax + B$ и $Q_1^*(x) = Cx + D$.

в) Запишем комплексное число $z = 1 + i$ и сравним его с корнями характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Среди чисел k_1 и k_2 нет совпадающих с числом z, поэтому $r = 0$.

г) Подставляя все найденные величины в формулу (2.31), запишем вид частного решения:

$$y_{\text{ч.н}} = e^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right). \qquad (2.32)$$

д) Для того, чтобы найти значения неизвестных коэффициентов A, B, C, D, подставим функцию (2.32) в исходное дифференциальное уравнение.

Найдем производные первого и второго порядка, используя правило дифференцирования произведения:

$$y = e^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right),$$

$$y' = e^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+ e^x\left(A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x\right) =$$
$$= e^x\left((Ax + A + B + Cx + D)\cos x + (-Ax - B + C + Cx + D)\sin x\right),$$

$$y'' = e^x\left((Ax + A + B + Cx + D)\cos x + (-Ax - B + C + Cx + D)\sin x\right) +$$
$$+ e^x\left((A + C)\cos x - (Ax + A + B + Cx + D)\sin x + (-A + C)\sin x + \right.$$
$$\left. + (-Ax - B + C + Cx + D)\cos x\right) =$$
$$= e^x\left((2A + 2C + 2Cx + 2D)\cos x + (-2A - 2Ax - 2B + 2C)\sin x\right).$$

Теперь подставим y, y', y'' в исходное уравнение:

$$e^x\left((2A + 2C + 2Cx + 2D)\cos x + (-2A - 2Ax - 2B + 2C)\sin x\right) -$$
$$- e^x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) = xe^x\sin x.$$

Перепишем уравнение в виде

$$(2A - B + 2C + 2D)e^x\cos x + (-A + 2C)xe^x\cos x +$$
$$+ (-2A - 2B + 2C - D)e^x\sin x + (-2A - C)xe^x\sin x =$$
$$= 0\cdot e^x\cos x + 0\cdot xe^x\cos x + 0\cdot e^x\sin x + 1\cdot xe^x\sin x.$$

Приравняем выражения в левой и правой частях уравнения при подобных членах:

$$\begin{cases} 2A - B + 2C + 2D = 0, \\ -A + 2C = 0, \\ -2A - 2B + 2C - D = 0, \\ -2A - C = 1. \end{cases}$$

В результате получили систему для нахождения неизвестных коэффициентов. Рассмотрим отдельно второе и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} -A + 2C = 0, \\ -2A - C = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2C, \\ -4C - C = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{5}, \\ C = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим первое и третье уравнения, в которые подставим найденные значения коэффициентов A и C:

$$\begin{cases} -B + 2D = \frac{6}{5}, \\ 2B + D = \frac{2}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2B + 4D = \frac{12}{5}, \\ 2B + D = \frac{2}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5D = \frac{14}{5}, \\ 2B + D = \frac{2}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{14}{25}, \\ B = -\frac{2}{25}. \end{cases}$$

е) Все найденные коэффициенты подставим в (2.32):

$$y_{ч.н} = e^x\left(\left(-\frac{2}{5}x - \frac{2}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}\right)\sin x\right)$$

или

$$y_{ч.н} = \frac{e^x}{25}\left((-10x - 2)\cos x + (-5x + 14)\sin x\right).$$

Будем искать решение уравнения $x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{1}{2}x^{-1}$ методом Бернулли:

$x = uv$, $x' = u'v + uv'$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$, $u' = \frac{du}{dy}$, $v' = \frac{dv}{dy}$.

Решение уравнения Бернулли относительно неизвестной функции $x = x(y)$ сводится к решению системы дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, аналогичной (1.26):

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{2y} = 0, \quad C = 0; \\ u'v = -\frac{1}{2uv}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение это системы:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{2y} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{dy}{2y} \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{2y} \;\Rightarrow\; \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|y| \;\Rightarrow\; v = \sqrt{y}.$$

Подставим $v = \sqrt{y}$ во второе уравнение системы и проинтегрируем его:

$$u'\sqrt{y} = -\frac{1}{2u\sqrt{y}} \;\Rightarrow\; 2u\,du = -\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; \int 2u\,du = -\int \frac{dy}{y} + \ln|C| \;\Rightarrow\; u^2 = \ln\left|\frac{C}{y}\right|.$$

Для удобства записи решения, будем искать общий интеграл в виде $x^2 = u^2v^2$, тогда $x^2 = \ln\left|\frac{C}{y}\right| y$. ▲

1.7. Математические модели экономического роста

Рассмотрим некоторые экономические модели, базирующиеся на дифференциальных уравнениях первого порядка, в которых искомая функция является функцией времени *t*. Такие модели называются *моделями роста (моделями экономической динамики) с непрерывным временем*. Существуют также дискретные аналоги этих моделей, один из которых будет рассмотрен в последнем разделе.

1.7.1. Модель естественного роста

Пусть $y(t)$ – интенсивность выпуска продукции (величина выпуска на единицу времени) некоторого предприятия. Предположим, что весь выпущенный товар будет продан, объем продаж не влияет на цену товара *p* (*аксиома о ненасыщаемости потребителя*).

Предположим, что происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е. $L' = \alpha L$ $(\alpha = const)$; инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е. $I = K' + \beta K$ (здесь β - норма амортизации).

Пусть $I = vY$, где v – норма инвестиций, тогда $vY = K' + \beta K$, откуда

$$K' = vY - \beta K.$$

Найдем производную от *k* по *t*:

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{L} - K\frac{L'}{L^2} = \frac{vY - \beta K}{L} - \frac{K}{L}\frac{L'}{L} =$$
$$= v\frac{Y}{L} - \beta\frac{K}{L} - \frac{K}{L}\alpha = v\frac{Y}{L} - \beta k - \alpha k = v\frac{Y}{L} - (\beta + \alpha)k.$$

Учитывая среднюю производительность труда $f(k) = \frac{F}{L} \equiv \frac{Y}{L}$, получаем:

$$k' = v f(k) - (\beta + \alpha)k.$$

Это уравнение называется *уравнением неоклассического роста*. Оно является автономным дифференциальным уравнением.

1.7.4. Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть *Y*(*t*), *E*(*t*), *S*(*t*), *I*(*t*) – соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени *t*. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{1.39}$$

где *a*(*t*) – коэффициент склонности к потреблению (0 < *a*(*t*) <1); *b*(*t*) – автономное (конечное) потребление; *k*(*t*) – норма акселерации. Все функции, находящиеся в уравнениях системы (1.39), положительны.

Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу – этот баланс отражен в первом уравнении системы (1.39). Общее потребление состоит из внутреннего потребления, некоторой части национального дохода в народном хозяйстве, плюс конечное потребление – эти состав-

ного уравнения, то они линейно независимые и по теореме 1: $W(x_0) \neq 0$ $\forall x_0 \in (a, b)$. Следовательно, система имеет единственное решение:

$$C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0,\ \ldots,\ C_n = C_n^0.$$

Это означает, что существуют такие значения произвольных постоянных, при которых функция (2.25) определяет частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23), удовлетворяющее заданным начальным условиям (2.27). Что и требовалось доказать. ■

Если известно общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (2.24), то основная задача при интегрировании линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23) состоит в нахождении какого-либо его частного решения $y_{ч.н}$.

Существуют два метода нахождения $y_{ч.н}$: метод вариации произвольных постоянных; метод неопределённых коэффициентов.

Метод вариации произвольных постоянных является универсальным, он применим для уравнений с любой правой частью. При этом частное решение находится в виде, похожем на общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Метод неопределённых коэффициентов применим только для уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью (определение такого типа уравнений будет дано ниже). При этом частное решение находится в виде, похожем на правую часть линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка, т.е. функцию $f(x)$.

Правило нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) для линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23) записать соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение (2.24);

2) найти фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения (2.24) и записать его общее решение:

$$y_{о.о} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n;$$

3) найти какое-либо частное решение $y_{ч.н}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных или методом неопределённых коэффициентов;

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \cos^{-3} x\, d(\cos x) = \frac{\cos^{-2} x}{-2} = -\frac{1}{2\cos^2 x},$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Тогда частное решение имеет вид

$$y_{ч.н} = -\frac{1}{2\cos^2 x}\cos x + \operatorname{tg} x \sin x.$$

3) Складывая полученные решения, находим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y_{о.н} = \left(C_1 - \frac{1}{2\cos^2 x}\right)\cos x + (C_2 + \operatorname{tg} x)\sin x. \ ▲$$

2.5.3. Метод неопределенных коэффициентов

Определение. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

где $a_i = const$, $i = \overline{1, n}$, называется *уравнением со специальной правой частью*, если правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx\right]. \tag{2.30}$$

Здесь $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ – многочлены относительно независимой переменной x степени n и k соответственно, $a, b \in R$.

Функция вида (2.30) встречается во многих инженерных приложениях.

Частное решение $y_{ч.н}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью имеет структуру, аналогичную выражению (2.30). В общем виде частное решение имеет вид

$$y_{ч.н} = x^r e^{ax}\left(P_s^*(x)\cos bx + Q_s^*(x)\sin bx\right), \tag{2.31}$$

где $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени $s = \max\{n, k\}$; r – кратность корня k характеристического уравнения, совпадающего с комплексным числом $z = a + bi$.

Для увеличения интенсивности выпуска $y(t)$ необходимо, чтобы чистые инвестиции $I(t)$ (разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. В случае $I(t) = 0$ общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай $I(t) < 0$ приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению выпуска продукции. Таким образом, скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией от I. Пусть эта зависимость выражается прямой пропорциональностью (*принцип акселерации*): $ky' = I$, где k – норма акселерации. Пусть α - норма чистых инвестиций (часть дохода py, которая тратится на чистые инвестиции), тогда $I = \alpha py$. Следовательно $y' = \dfrac{\alpha p}{k} y$. Если ввести обозначение $m = \dfrac{\alpha p}{k}$, где $m=const$, то уравнение принимает вид

$$y' = my. \tag{1.34}$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением показательного роста (см. раздел 1.3.4), его общее решение имеет вид, аналогичный (1.11):

$$y = Ce^{mt}. \tag{1.35}$$

Пусть задано начальное условие $y(t_0) = y_0$, тогда из (1.35) находим значение $C = y_0 e^{-mt_0}$, частное решение имеет вид

$$y = y_0 e^{m(t-t_0)}. \tag{1.36}$$

Уравнение (1.36) называется *уравнением естественного роста*. С его помощью описывается динамика роста цен при постоянном темпе инфляции. Эту модель лучше всего применять для исследования начальных этапов развития экономической системы в течение ограниченного промежутка времени, так как с течением времени y может неограниченно возрастать по показательному закону, что не может не сказаться на изменении цены (в модели она считалась постоянной).

1.7.2. Логический рост

Предположим, что с увеличением выпуска продукции будет происходить насыщение рынка, тогда цена будет падать. В этом случае $p = p(y)$ – убывающая функция, т.е. $\dfrac{dp}{dy} < 0$. Тогда уравнение (1.34) принимает вид

$$y' = mp(y)y, \tag{1.37}$$

где $m = \alpha/k$. Это уравнение является автономным дифференциальным уравнением. Так как $m > 0$, $p > 0$, $y > 0$, то функция $y(t)$ - возрастающая $(y' > 0)$.

Рассмотрим линейный случай зависимости цены от выпуска продукции. Предположим, что $p(y) = b - ay$, где $a > 0$, $b > 0$. Тогда уравнение (1.37) принимает вид

$$y' = m(b - ay)y. \tag{1.38}$$

Из уравнения (1.38) видно, что $y' = 0$ в двух случаях: $y = 0$ или $y = b/a$.

Уравнение (1.38) – это автономное уравнение. Разделим переменные в уравнении и проинтегрируем его:

$$\frac{dy}{dt} = m(b - ay)y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{(b - ay)y} = mdt \;\Rightarrow\; \frac{dy}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{b - ay}\right) = mdt \;\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{b - ay}\right)dy = \int mbdt \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y} - \int\frac{d(b - ay)}{b - ay} = mb\int dt \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| - \ln|b - ay| = mbt + \ln C \;\Rightarrow\; \frac{y}{b - ay} = Ce^{mbt} \;\Rightarrow\; y = \frac{Cbe^{mbt}}{1 + Cae^{mbt}}.$$

Интегральная кривая уравнения (1.38) называется *логистической кривой*. Из уравнения кривой видно, что при малых t логистический рост похож на естественный рост: интенсивность выпуска продукции возрастает по экспоненциальному закону. Однако при больших t характер роста меняется: темпы роста замедляются, кривая асимптотически приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{Cbe^{mbt}}{1 + Cae^{mbt}} = \dfrac{b}{a}$. Эта прямая является стационарным решением уравнения (1.38) и соответствует случаю $p(y) = 0$.

1.7.3. Неоклассическая модель роста

Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где K – объем капиталовложений (фондов); L – величина затрат труда; $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция: $F(tK, tL) = tF(K, L)$. Обозначим через $f(k)$ производительность труда

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1),$$

где $k = K/L$ – средняя фондовооруженность. Производственная функция называется *неоклассической*, если $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$.

4) записать общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения при помощи соотношения (2.25), т.е. сложить функции $y_{о.о}$ и $y_{ч.н}$:

$$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}.$$

Основной трудностью решения линейного неоднородного дифференциального уравнения является нахождение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения, так как не существует общего метода нахождения решения линейного однородного уравнения (2.24) (исключение составляет случай дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами).

2.5.2. Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из следующих шагов:

1) Пусть найдено общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_{о.о} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Варьируя произвольные постоянные в общем решении однородного уравнения, записать структуру частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{ч.н} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i, \tag{2.28}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ – новые неизвестные функции.

2) Введенные функции $C_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, определить из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{2.29}$$

Данная система уравнений получается при подстановке $y_{ч.н} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)y_i$ в линейное неоднородное дифференциальное уравнение (2.23). Система (2.29) является системой n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$. Определителем

системы будет определитель Вронского $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$, следовательно, система (2.29) имеет единственное решение: $C_i' = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Интегрируя эти равенства (так как это дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными), получим: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$. Так как мы находим частное решение, то постоянные интегрирования здесь будем считать равными нулю.

3) Найденные функции подставить в (2.28) и записать окончательный вид частного решения $y_{ч.н}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 2.10. Решить уравнение: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Δ Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение будем искать в виде: $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$.

1) Составим однородное уравнение, соответствующее исходному: $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$, которым соответствует фундаментальная система решений: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{о.о} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2) Теперь найдем частное решение линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных, т.е. решение будем искать в виде

$$y_{ч.н} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем из системы уравнений (2.29), которая при $n = 2$ имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на $\cos x \neq 0$, а второе – на $\sin x \neq 0$. Сложив полученные уравнения, находим: $C_2' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, тогда из первого уравнения системы $C_1' = \dfrac{-\sin x}{\cos^3 x}$. Интегрируя полученные дифференцированные уравнения первого порядка, имеем:

Докажем сначала, что функция $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$ есть некоторое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23). Для этого подставим функцию $y_{о.о} + y_{ч.н}$ в уравнение (2.23) вместо функции y:

$$a_0(y_{о.о} + y_{ч.н})^{(n)} + a_1(y_{о.о} + y_{ч.н})^{(n-1)} + ... + a_n(y_{о.о} + y_{ч.н}) = f(x)$$

или

$$\left(a_0 y_{о.о}^{(n)} + a_1 y_{о.о}^{(n-1)} + ... + a_n y_{о.о}\right) + \left(a_0 y_{ч.н}^{(n)} + a_1 y_{ч.н}^{(n-1)} + ... + a_n y_{ч.н}\right) = f(x).$$

Так как $y_{о.о}$ – общее решение уравнения (2.24), то

$$a_0 y_{о.о}^{(n)} + a_1 y_{о.о}^{(n-1)} + ... + a_n y_{о.о} \equiv 0.$$

Так как $y_{ч.н}$ – частное решение уравнения (2.23), то

$$a_0 y_{ч.н}^{(n)} + a_1 y_{ч.н}^{(n-1)} + ... + a_n y_{ч.н} \equiv f(x).$$

Таким образом, функция $y_{о.о} + y_{ч.н}$ обращает уравнение (2.23) в тождество: $f(x) \equiv f(x)$, т.е. является решением этого уравнения.

Покажем теперь, что функция (2.26) является общим решением уравнения (2.23), т.е. докажем, что входящие в (2.26) произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (2.27)$$

На основании условий (2.27) и (2.26) будем иметь:

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) + y_{ч.н}(x_0),$$
$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) + y_{ч.н}'(x_0),$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{ч.н}^{(n-1)}(x_0).$$

Получили систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{ч.н}(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{ч.н}'(x_0), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{ч.н}^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского для функций $y_1, y_2, ..., y_n$ в точке $x = x_0$. Так как функции $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциаль-

ляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологий и инфраструктуры данного государства, на определенный национальный доход. Таким образом, масштабы инвестирования прямо пропорциональны приросту национального дохода. Это предположение носит название *принципа акселерации.*

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, и $E(t)$ заданы – они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Требуется найти динамику национального дохода или Y как функцию времени t.

Подставим выражение для $S(t)$ из второго уравнения и $I(t)$ из третьего уравнения системы (1.39) в первое уравнение. После приведения подобных получаем *линейное дифференциальное уравнение первого порядка* для функции $Y(t)$:

$$Y'(t) + \frac{a(t)-1}{k(t)} Y(t) = -\frac{b(t)+E(t)}{k(t)}. \qquad (1.40)$$

Используя формулу общего решения (1.22), можем записать:

$$Y(t) = \left(-\int \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} e^{\int \frac{a(t)-1}{k(t)} dt} dt + C\right) e^{-\int \frac{a(t)-1}{k(t)} dt}.$$

Предположим, что основные параметры a, b, k уравнения (1.40) являются постоянными числами. Интегрируя, получим:

$$Y(t) = \left(-\int \frac{b+E}{k} e^{\int \frac{a-1}{k} dt} dt + C\right) e^{-\int \frac{a-1}{k} dt} = \left(-\frac{b+E}{k} \int e^{\frac{a-1}{k}\int dt} dt + C\right) e^{-\frac{a-1}{k}\int dt} =$$

$$= \left(-\frac{b+E}{k} \int e^{\frac{a-1}{k}t} dt + C\right) e^{-\frac{a-1}{k}t} = \left(-\frac{b+E}{k}\frac{k}{a-1} \int e^{\frac{a-1}{k}t} d\left(\frac{a-1}{k}t\right) + C\right) e^{-\frac{a-1}{k}t} =$$

$$= \left(-\frac{b+E}{a-1} e^{\frac{a-1}{k}t} + C\right) e^{-\frac{a-1}{k}t} = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Частное решение уравнения $Y_p = \dfrac{b+E}{1-a}$ называется *равновесным* решением (в этом случае $Y'(t) = 0$).

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ выражается с помощью производной: $\dfrac{dy}{dx} = tg\alpha$, где $\alpha = \angle BAK$. С другой стороны, так как

$$tg\alpha = -tg\angle BAO \text{ и } tg\angle BAO = \frac{OB}{OA},$$

то

$$tg\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

В результате рассуждений получили дифференциальное уравнение *с разделяющимися переменными.* Разделим переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$, интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C \;\Rightarrow\; \ln y + \ln x = \ln C \;\Rightarrow\; yx = C.$$

Так как кривая должна проходить через точку $M_0(1, 4)$, то, подставляя её координаты в данное уравнение, находим: $1 \cdot 4 = C$; откуда $C = 4$. Таким образом, искомая кривая определяется уравнением $xy = 4$. ▲

Пример 1.16. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость ее 1 м/с. Найти скорость движения лодки через 12 с после начала движения.

Δ Согласно второму закону динамики, дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Уравнение также можно отнести к уравнениям показательного роста. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt,$$

интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} C \;\Rightarrow\; \ln v = -\frac{k}{m} t + \ln C \;\Rightarrow\; v = Ce^{-kt/m}.$$

Чтобы упростить вычисление определителя, от элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки, из третьей строки вынесем общий множитель 2. Далее от элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы второй строки и разложим определитель по элементам третьей строки:

$$W = 2e^{4x}\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 2 & -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 2e^{4x}\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2e^{4x}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 2e^{4x}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 2e^{4x} \ne 0.$$

Так как определитель Вронского $W(y_1, y_2, y_3) \ne 0 \quad \forall x \in R$, то по теореме 1 частные решения уравнения:

$$y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^x \cos x \text{ и } y_3 = e^x \sin x -$$

линейно независимые и образуют фундаментальную систему решений. Поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + e^x\left(C_3 \cos x + C_3 \sin x\right). \;▲$$

Пример 2.9. Найти частное решение уравнения $y^{(5)} + 4y''' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 8, \; y^{(4)}(0) = 32.$$

Δ Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением пятого порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^5 + 4k^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; k^3(k^2 + 4) = 0,$$

откуда $k^3 = 0$ или $k^2 + 4 = 0$. В результате получим корни:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \; k_{4,5} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

Действительному корню $k = 0$ кратности $r = 3$ характеристического уравнения соответствует совокупность линейно независимых решений:

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x, \quad y_3 = x^2 e^{0x} = x^2,$$

а паре комплексно-сопряженных корней $k_4 = 2i$ и $k_5 = -2i$ (действительная часть $\alpha = 0$ и мнимая часть $\beta = 2$) соответствуют решения

$$y_4 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x, \quad y_5 = e^{0x}\sin 2x = \sin 2x.$$

1.8. Составление дифференциальных уравнений

Многие задачи физики, техники, биологии и экономических наук решаются при помощи дифференциальных уравнений. При этом сначала составляется дифференциальное уравнение, которое затем решается определенным методом в зависимости от его типа. Составление дифференциальных уравнений по условию задачи напоминает составление алгебраических уравнений, при этом широко используются геометрический и физический смыслы производной, а также известные законы естественных и экономических наук.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1.13. Найти функцию, имеющую постоянную эластичность k.

Δ Искомую функцию обозначим $y = y(x)$. Следует вспомнить, что эластичность E_y – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Эластичность выражается через производную функцию: $E_y = \frac{x}{y}y'$. Тогда по условию задачи имеем:

$$\frac{x}{y}y' = k \;\Rightarrow\; \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = k.$$

В результате получили дифференциальное уравнение *с разделяющимися переменными*. Разделяя переменные (при естественном предположении $x \neq 0$) и интегрируя, получим:

$$\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y| = k\ln|x| + \ln|C| \;\Rightarrow\; y = Cx^k. \;\blacktriangle$$

Пример 1.14. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа в данный момент времени пропорциональна его фактической стоимости. Начальная стоимость оборудования равна 1000 р. Какова будет его стоимость через 10 лет, если через 1 год она составляла 900 р.?

Δ Пусть стоимость оборудования в момент времени t равна y. Согласно физическому смыслу производной, y' – это скорость обесценивания оборудования вследствие его износа в данный момент времени. Из условия задачи имеем

$$y' = -ky, \tag{1.41}$$

где $k > 0$.

Уравнение (1.41) является дифференциальным уравнением *показательного роста* (это частный случай автономного уравнения). Знак минус

показывает, что стоимость оборудования убывает, а, следовательно, скорость его обесценивания y' отрицательна. Согласно общему решению (1.11) дифференциального уравнения показательного роста, общим решением уравнения (1.41) будет

$$y(t) = Ce^{-kt}.$$

Постоянную C найдем из начального условия $y(0) = 1000$ р.:

$$1000 = Ce^{-k\cdot 0}, \text{ т.е. } C = 1000.$$

Итак, стоимость оборудования на данный момент времени определяется формулой

$$y(t) = 1000e^{-kt}. \tag{1.42}$$

Найдем значение постоянной $-k$. Для этого воспользуемся условием, что при $t = 1$ год стоимость оборудования $y = 900$ р.:

$$900 = 1000e^{-k\cdot 1} \;\Rightarrow\; e^{-k} = \frac{9}{10} \;\Rightarrow\; -k = \ln\frac{9}{10}.$$

Положив в равенстве (1.42) t = 10 лет и $e^{-k} = \frac{9}{10}$, найдем искомую стоимость:

$$y = 1000\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 348{,}7 \text{ р. } \blacktriangle$$

Пример 1.15. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1,\,4)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой её касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Δ Сделаем чертеж (рис. 1.3).

Пусть $M(x,\,y)$ – произвольная точка искомой кривой, AB – отрезок касательной к кривой в данной точке, заключенный между координатными осями. По условию задачи $BM = MA$. Если OP – абсцисса точки M, то $\Delta AMP \sim \Delta ABO$ и $\frac{OA}{PA} = \frac{OB}{MP} = \frac{AB}{MA}$.

Но $\frac{AB}{MA} = 2$, $PA = OP$, поэтому

$$\frac{OA}{OP} = \frac{BO}{MP} = 2,$$

т.е. $OA = 2x$, $OB = 2y$.

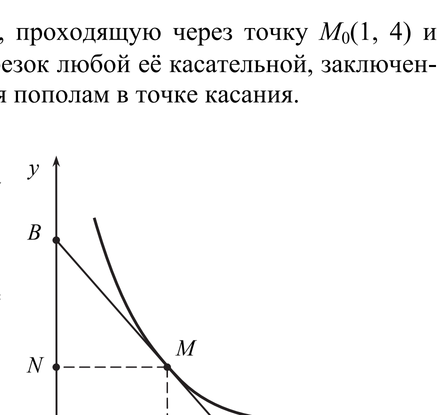

Рис. 1.3

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 + C_5y_5$$

или

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x.$$

Теперь найдем решение задачи Коши. Так как начальные условия накладываются на функцию и ее производные до четвертого порядка включительно, то продифференцируем общее решение четыре раза (приложение 3):

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x,$$
$$y' = C_2 + 2C_3x - 2C_4\sin 2x + 2C_5\cos 2x,$$
$$y'' = 2C_3 - 4C_4\cos 2x - 4C_5\sin 2x,$$
$$y''' = 8C_4\sin 2x - 8C_5\cos 2x,$$
$$y^{(4)} = 16C_4\cos 2x + 16C_5\sin 2x.$$

Далее воспользуемся условиями: $y = 1$, $y' = 1$, $y'' = 0$, $y''' = 8$, $y^{(4)} = 32$ при $x = 0$; в результате получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения значений произвольных постоянных $C_1,\,C_2,\,C_3,\,C_4,\,C_5$:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2\cdot 0 + C_3\cdot 0 + C_4\cos 0 + C_5\sin 0, \\ 1 = C_2 + 2C_3\cdot 0 - 2C_4\sin 0 + 2C_5\cos 0, \\ 0 = 2C_3 - 4C_4\cos 0 - 4C_5\sin 0, \\ 8 = 8C_4\sin 0 - 8C_5\cos 0, \\ 32 = 16C_4\cos 0 + 16C_5\sin 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_4 = 1, \\ C_2 + 2C_5 = 1, \\ 2C_3 - 4C_4 = 0, \\ -8C_5 = 8, \\ 16C_4 = 32. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений системы находим $C_4 = 2$, $C_5 = -1$. Подставляя найденные значения в первые три уравнения системы, получим $C_1 = -1$, $C_2 = 3, C_3 = 4$. Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -1 + 3x + 4x^2 + 2\cos 2x - \sin 2x. \;\blacktriangle$$

2.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

2.5.1. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

Определение. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{2.23}$$

где $n > 1$, $n \in N$; $a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, $f(x)$ – заданные функции переменной x, определенные и непрерывные на некотором промежутке (a,b). Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения* (2.23), поэтому это уравнение также называют линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с правой частью. Функции $a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ называются *коэффициентами* дифференциального уравнения (2.23). Если все коэффициенты уравнения – действительные числа, то уравнение (2.23) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Если правая часть дифференциального уравнения (2.23) равна нулю, то уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2.24}$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (2.23). Решение однородных уравнений (2.24) рассмотрено в подразделах 2.3 и 2.4.

Теорема (*о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка*). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23) имеет вид

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}, \tag{2.25}$$

где $y_{\text{о.о}}$ – общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2.24), $y_{\text{ч.н}}$ – какое-либо частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.23).

□ Исходя из структуры (2.14) общего решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка, общее решение (2.25) неоднородного уравнения, можно записать в другой форме:

$$y_{\text{о.н}} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_{\text{ч.н}}, \tag{2.26}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.24) на промежутке $(a,\,b)$.

Подставляя начальные условия: $t=0$, $v=1{,}5$, находим:

$$1{,}5 = Ce^{-k\cdot 0/m} \;\Rightarrow\; C = 1{,}5.$$

Следовательно, $v = 1{,}5e^{-kt/m}$. Значение *k/m* определим, подставляя второе начальное условие: $t = 4$, $v = 1$, $1 = 1{,}5e^{-4k/m}$. Отсюда следует:

$$\frac{k}{m} = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Итак, получили частное решение данного уравнения:

$$v(t) = 1{,}5e^{(\ln(2/3))t/4} \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{3}{2}e^{(\ln(2/3))t/4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{t}{4}+1}.$$

Подставим в это равенство $t = 12$, окончательно получим:

$$v(12) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44. \;\blacktriangle$$

В первом разделе были рассмотрены методы решения основных, наиболее часто встречающихся в экономической теории типов дифференциальных уравнений первого порядка. Принципы решения других типов уравнений можно найти в специальной литературе по теме «Дифференциальные уравнения».

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
2. Приведите пример простейшего дифференциального уравнения.
3. Что такое порядок дифференциального уравнения?
4. Каковы основные формы записи дифференциального уравнения первого порядка?
5. В чем состоит задача интегрирования дифференциального уравнения?
6. Что называется решением дифференциального уравнения?
7. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
8. Объясните, в чем разница между общим решением и общим интегралом дифференциального уравнения.
9. В чем состоит задача Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? При каких условиях она имеет единственное решение?

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Основные определения и понятия

К дифференциальным уравнениям высших порядков относятся уравнения второго, третьего, четвертого и более порядков. Такой класс уравнений называют дифференциальными уравнениями n-го порядка. Для этих уравнений также можно говорить о совокупности всех решений, об их частных и общих интегралах, об интегральных кривых.

Определение. *Дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = f(x)$ и её производные $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$, $n > 1$, $n \in N$, т.е. уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Для того чтобы дифференциальное уравнение (2.1) было дифференциальным уравнением *n*-го порядка, необходимо наличие старшей производной $y^{(n)}$, а присутствие всех производных порядка меньше, чем *n*, не обязательно.

Форма записи дифференциального уравнения (2.1) называется *общей формой*. Если уравнение можно разрешить относительно n-й производной (старшей производной), то его можно записать в виде

$$y^{(n)} = \Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

Форму записи уравнения (2.2) называют *нормальной формой* дифференциального уравнения.

Определение. *Решением* дифференциального уравнения *n*-го порядка называется такая функция y, зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, что при подстановке её в дифференциальное уравнение получается тождество при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Решение, полученное в явном виде: $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, называется *общим решением,* а решение уравнения, полученное в неявном виде: $Y(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, называется *общим интегралом.*

Теорема (*о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка*). Если в дифференциальном уравнении (2.2) функция $\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области D, содержа-

Таким образом, общее решение уравнения (2.15) в случае комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения имеет вид: $y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \tag{2.22}$$

2.4.5. Правила решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Правило решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) для линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ (для этого в дифференциальном уравнении следует заменить $y^{(m)}$ на k^m, $m = \overline{0, 2}$);

2) найти корни характеристического уравнения k_1 и k_2, используя формулу (2.18); дать их характеристику;

3) в зависимости от характера корней, использовать формулу общего решения (2.19), (2.20) или (2.22).

Пример 2.5. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Δ Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами $p = -6$ и $q = 8$.

Составим характеристическое уравнение, заменяя y'' на k^2, y' на k, y на 1. Тогда

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения, используя формулы (2.18):

$$k_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 8} = 3 \pm 1.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения действительные и различные: $k_1 = 2$, $k_2 = 4$. Фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения образуют функции

$$y_1 = e^{2x} \text{ и } y_2 = e^{4x}.$$

Запишем общее решение уравнения, используя формулу (2.19):

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}. \;\blacktriangle$$

Пример 2.8. Найти общее решение уравнения $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$.

Δ Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно теореме 2, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3,$$

где y_1, y_2, y_3 – фундаментальная система решений уравнения; C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Составим характеристическое уравнение, заменяя y''' на k^3, y'' на k^2, y' на k и y на 1:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0.$$

Для того чтобы найти корни полученного кубического уравнения, применим метод группировки:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(k^3 - 4k^2 + 4k\right) + (2k - 4) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; k\left(k^2 - 4k + 4\right) + 2(k-2) = 0 \;\Rightarrow\; k(k-2)^2 + 2(k-2) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (k-2)(k(k-2)+2) = 0 \;\Rightarrow\; (k-2)\left(k^2 - 2k + 2\right) = 0,$$

откуда $k - 2 = 0$ или $k^2 - 2k + 2 = 0$.

В результате получим: $k_1 = 2$ и по формуле корней квадратного уравнения (2.18)

$$k_{2,3} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Действительному корню характеристического уравнения $k_1 = 2$ соответствует частное решение $y_1 = e^{2x}$, а паре комплексно сопряженных корней $k_{2,3} = 1 \pm i$ (действительная часть $\alpha = 1$ и мнимая часть $\beta = 1$) соответствуют решения: $y_2 = e^x\cos x$, $y_3 = e^x\sin x$.

Убедимся, что функции y_1, y_2, y_3 – линейно-независимые. Для этого составим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x\cos x & e^x\sin x \\ 2e^{2x} & e^x\cos x - e^x\sin x & e^x\sin x + e^x\cos x \\ 4e^{2x} & -2e^x\sin x & 2e^x\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x}e^xe^x\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 2 & \cos x - \sin x & \sin x + \cos x \\ 4 & -2\sin x & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

10. Дайте определение частного решения. Как оно связано с формулой общего решения?

11. Дайте определение понятия «особое решение» дифференциального уравнения.

12. Как определить наклон интегральной кривой уравнения первого порядка в заданной точке (x_0, y_0) по виду уравнения? Что такое поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением? Что такое изоклины?

13. От чего зависит метод решения дифференциального уравнения?

14. Перечислите основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

15. Опишите метод решения уравнений с разделяющимися переменными.

16. Дайте определение и приведите пример автономного уравнения. Сформулируйте свойство, которым обладают решения автономного уравнения. В чем заключается его геометрический смысл? Что такое стационарное решение автономного уравнения?

17. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением? Укажите метод его решения.

18. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? Перечислите методы его решения и укажите их принципиальные различия.

19. Укажите вид подстановки, при помощи которой уравнение Бернулли можно свести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Каков метод интегрирования уравнения Бернулли?

20. При каком условии уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах? Какой вид имеет его общий интеграл?

21. В чем состоит принцип акселерации? Какое дифференциальное уравнение называется уравнением естественного роста? Какие процессы моделирует это уравнение? Что такое логистическая кривая? Дайте определение равновесного решения.

22. Каковы принципы составления дифференциальных уравнений?

23. Сформулируйте геометрический и физический смысл производной.

Задачи

1. Запишите уравнение $y\ln^3 y + y'(x+y) = 0$ в нормальной и дифференциальной формах.

2. Какие из функций являются решениями этого уравнения $y' = 2x$:

а) $y = x^2$, б) $y = x^2 + 3$, в) $y = 3x^2$, г) $y = x^3$, д) $y = x^2 + C$, $C = const.$

Ответ: а), б), д).

3. Найти общее (частное) решение дифференциального уравнения:

а) $\sqrt{1-x^2}\,y' - \cos^2 y = 0$; г) $\left(1+x^2\right)y' + 4xy = 3$; $y(0) = 0$;

б) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$; д) $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2-1}$;

в) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$; е) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$; $y(1) = 1$.

Ответ:

а) $y = arctg(C + \arcsin x)$; б) $\ln\left|tg\dfrac{y}{2}\right| + 2\sin x = C$; в) $x(y-x) = Cy$;

г) $y = \dfrac{x^3+3x}{\left(1+x^2\right)^2}$; д) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{4}\left(\dfrac{4}{7}x^{7/4} + C\right)^2$; е) $\dfrac{x^2}{2} + 2xy + x + y - \dfrac{y^2}{2} = 4$.

4. Считая, что прирост трудовых ресурсов пропорционален самим трудовым ресурсам с коэффициентом пропорциональности 0,1 (годовой прирост трудовых ресурсов), найти трудовые ресурсы через 10 лет, если в начале наблюдения они были равны 1000.

Ответ: 2718.

5. Найти линию, проходящую через точку (2, 3) и обладающую тем свойством, что отрезок её касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Ответ: $xy = 6$.

6. Найти линию, проходящую через точку (2, 0) и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

Ответ: $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\left|\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

Пример 2.6. Найти общее решение уравнения $y'' - y' + 2y = 0$.

Δ Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами $p = -1$ и $q = 2$.

Составим характеристическое уравнение, заменяя y'' на k^2, y' на k, y на 1. Тогда

$$k^2 - k + 2 = 0.$$

Используя формулы (2.18), найдем корни квадратного уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i.$$

Корни характеристического уравнения – комплексно-сопряженные с действительной частью $\alpha = \frac{1}{2}$ и мнимой частью $\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения образуют функции: $y_1 = e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$ и $y_2 = e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$. Запишем общее решение уравнения, используя формулу (2.22):

$$y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right). \quad \blacktriangle$$

Пример 2.7. Найти общее решение уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Δ Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами $p = 10$ и $q = 25$.

Составим характеристическое уравнение, заменяя y'' на k^2, y' на k, y на 1:

$$k^2 + 10k + 25 = 0.$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения «квадрат суммы» и запишем характеристическое уравнение в виде

$$(k+5)^2 = 0 \iff (k+5)(k+5) = 0.$$

Приравняв каждый множитель к нулю, получим $k_1 = -5$, $k_2 = -5$ (те же значения можно было получить при помощи формулы корней квадратного уравнения (2.18)). Корни характеристического уравнения действительные и равные ($k = -5$ – корень уравнения кратности 2 или двукратный корень уравнения). Фундаментальную систему решений данного диффе-

ренциального уравнения образуют функции: $y_1 = e^{-5x}$ и $y_2 = xe^{-5x}$. Запишем общее решение уравнения, используя формулу (2.20):

$$y = e^{-5x}(C_1 + C_2 x). \quad \blacktriangle$$

Аналогично можно находить и общее решение линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами, придерживаясь следующего простого правила.

Правило решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

1) составить характеристическое уравнение, для этого в дифференциальном уравнении

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

следует заменить $y^{(m)}$ на k^m, $m = \overline{0, n}$. В результате получится алгебраическое уравнение степени *n*:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0;$$

2) найти все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения и дать их характеристику;

3) выписать фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, руководствуясь тем, что:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно- независимых решений:

$$e^{kx};\ xe^{kx};\ x^2e^{kx};\ \ldots;\ x^{r-1}e^{kx};$$

в) каждой паре однократных комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствует пара частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

г) каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности s соответствуют $2s$ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

В результате получим , линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (1.36), образующих фундаментальную систему решений этого уравнения;

4) подставить $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в формулу общего решения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

щей значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$, …, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0,\ \ y''(x_0) = y''_0,\ \ \ldots,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2.3)$$

причём это решение единственное.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного пособия.

Условия (2.3) называются *начальными условиями,* а заданные числа $x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – *начальными значениями.*

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (2.3), называется *задачей Коши.* Решение задачи Коши называется *частным решением* (*частным интегралом*) дифференциального уравнения. Начальные условия (2.3) используются для нахождения фиксированных значений произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$.

2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Метод решения дифференциального уравнения n-го порядка также во многом зависит от вида самого уравнения. Существует широкий класс уравнений n-го порядка, решение которых можно осуществить путём их сведения к уравнениям более низкого порядка и, в конечном счёте, к уравнению первого порядка, это так называемые *дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.* Рассмотрим некоторые основные типы таких уравнений.

2.2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка I типа

К уравнениям I типа относятся уравнения, *разрешенные относительно производной порядка n:*

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (2.4)$$

Так как $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f(x)$, то

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

где $f_1(x)$ – первообразная функции $f(x)$; C_1 – произвольная постоянная.

Аналогично

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

где $f_2(x)$ – первообразная функции $f_1(x)$; C_1 – произвольная постоянная.

Воспользуемся формулой (1.22) нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения

$$z = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1\right) e^{-\int p(x)dx},$$

где $p(x) = -\dfrac{1}{x}$, $q(x) = -x^2$. Тогда

$$z = \left(\int (-x^2) e^{\int (-\frac{1}{x})dx} dx + C_1\right) e^{-\int (-\frac{1}{x})dx} = \left(\int (-x^2) e^{-\ln x} dx + C_1\right) e^{\ln x} =$$

$$= \left(\int (-x^2)\frac{1}{x} dx + C_1\right) x = \left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right) x = -\frac{x^3}{2} + C_1 x$$

и промежуточный интеграл имеет вид: $y' = -\dfrac{x^3}{2} + C_1 x$. Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, найдём общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \int \left(-\frac{x^3}{2} + C_1 x\right) dx = -\frac{x^4}{8} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2. \ \blacktriangle$$

2.2.3. Уравнения, допускающие понижение порядка III типа

К уравнениям III типа относятся уравнения, *не содержащие в явном виде переменную x:*

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)}). \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) решают путём подстановки:

$$y' = p(y), \qquad (2.9)$$

где $p(y)$ – новая неизвестная функция от y. Такая замена позволяет понизить порядок исходного уравнения (2.8) на одну единицу.

Найдём производную второго порядка (применяя правило дифференцирования сложной функции):

$$y'' = (y')' = (p(y))'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Таким образом,

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2.4.1. Характеристическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами p и q:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (2.15)$$

Согласно теореме 2 о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения, общее решение уравнения (2.15) при $n = 2$ имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (2.16)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (2.15), т.е. два линейно независимых частных решения этого уравнения.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (2.16), достаточно найти любые два линейно независимых частных решения. Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx},$$

где $k = const$. Тогда

$$y' = ke^{kx},\ \ y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные соотношения в (2.15), находим:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \ \Leftrightarrow\ e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $\forall x \in R$: $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (2.17)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (2.17), то функция e^{kx} будет являться решением уравнения (2.15).

Определение. Уравнение (2.17) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (2.15).

Характеристическое уравнение (2.17) – квадратное уравнение, имеющее два корня:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (2.18)$$

При этом возможны случаи:

1) k_1 и k_2 – действительные различные числа, т.е. $k_1 \neq k_2$;

Это комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (2.15). Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$$

и перепишем y_1 и y_2 в другом виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \\ y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Покажем, что если функция $y = u(x) + iv(x)$ удовлетворяет уравнению (2.15), то этому уравнению удовлетворяют также функции $u(x)$ и $v(x)$:

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0 \ \Rightarrow\ u'' + iv'' + pu' + ipv' + qu + iqv = 0$$

или

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Комплексная функция равна нулю только в том случае, когда её действительная и мнимая части равны нулю, т.е.

$$u'' + pu' + qu = 0 \ \text{ и } \ v'' + pv' + qv = 0.$$

Сравнивая полученные уравнения с уравнением (2.15), делаем вывод, что функции $u(x)$ и $v(x)$ есть решения уравнения (2.15). Следовательно (согласно соотношениям (2.21) и третьему свойству решений линейного однородного дифференциального порядка n-го порядка), частными решениями уравнения (2.15) будут функции: $Y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Эти функции линейно независимы, так как

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}e^{\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}\big(\cos\beta x(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - \sin\beta x(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)\big) =$$
$$= e^{2\alpha x}\big(\beta\cos^2\beta x + \beta\sin^2\beta x\big) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in R.$$

Следовательно, функции Y_1 и Y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.15).

Продолжая интегрировать функции, в конце получим:

$$y = f_n(x) + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $f_n(x)$ – первообразная функции $f_{n-1}(x)$; $C_i\ (i = \overline{1, n})$ – произвольные постоянные.

Нахождение решения дифференциального уравнения (2.4) свелось к n-кратному интегрированию его правой части, т.е.

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n\ раз} f(x) \underbrace{dx \cdot \ldots \cdot dx}_{n\ раз}.$$

Уравнение (2.4) является простейшим примером дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка. Это уравнение не содержит в явном виде функцию y и ее производные y', $y'', \ldots, y^{(n-1)}$, поэтому его еще называют неполным дифференциальным уравнением.

Пример 2.1. Решить дифференциальное уравнение: $y^{(4)} = \sin x$.

Δ Данное уравнение является дифференциальным уравнением четвертого порядка, записанным в нормальной форме. В уравнении не содержатся в явном виде функция y и ее производные первого, второго и третьего порядков. Следовательно, это уравнение, допускающее понижение порядка вида (2.4), где $n = 4$ и $f(x) = \sin x$.

Проинтегрируем данное уравнение четыре раза:

$$y''' = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1 \;\Rightarrow\; y'' = \int \left(-\cos x + C_1\right) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \int \left(-\sin x + C_1 x + C_2\right) dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int \left(\cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) dx = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Получили общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \;\blacktriangle$$

2.2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка II типа

К уравнениям II типа относятся уравнения, *не содержащие искомой функции* y:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (2.5)$$

где $1 \le k < n$. Дифференциальное уравнение (2.5) является неполным. Оно не содержит в явном виде кроме неизвестной функции y также и некоторую часть ее производных $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$.

Уравнение (2.5) решают путём подстановки:

$$y^{(k)} = z(x), \qquad (2.6)$$

т.е. в качестве новой неизвестной функции вводят производную наименьшего порядка, содержащуюся в уравнении, при этом порядок дифференциального уравнения понижается на k единиц.

Сделав в уравнении (2.5) замену (2.6), получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $z = z(x)$ порядка n-k:

$$z^{(n-k)} = f(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k-1)}). \qquad (2.7)$$

Если (2.7) – дифференциальное уравнение первого порядка, то его решение находится методами, описанными в разделе 1. Если уравнение (2.7) не является дифференциальным уравнением первого порядка, то перед нами опять стоит задача решения дифференциального уравнения высшего порядка.

Пусть общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

тогда промежуточный интеграл исходного дифференциального уравнения относительно y будет: $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$. Данное уравнение является дифференциальным уравнением, допускающим понижение порядка вида (2.4). Последовательное интегрирование этого уравнения введет k новых произвольных постоянных. В результате получим функцию, зависящую от n произвольных постоянных, которая и будет являться общим решением уравнения (2.5).

Пример 2.2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' - \frac{y'}{x} + x^2 = 0.$$

Δ Данное дифференциальное уравнение второго порядка является уравнением, допускающим понижение порядка вида (2.5), так как явно не содержит функции y, $k = 1$.

Сделаем замену $y' = z$, $y'' = (y')' = z'$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида (1.17)

$$z' - \frac{z}{x} = -x^2.$$

2) k_1 и k_2 – равные действительные числа, т.е. $k_1 = k_2$;

3) k_1 и k_2 – комплексные числа (комплексно-сопряженные), т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где α и β – действительные числа; $i^2 = -1$ (или $i = \sqrt{-1}$) – мнимая единица.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

2.4.2. Корни характеристического уравнения действительные и различные

В этом случае $k_1 \ne k_2$ и частными решениями уравнения (2.15) будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Выясним, образуют ли эти функции фундаментальную систему решений. Для этого найдем определитель Вронского функций y_1 и y_2, используя (2.13):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} e^{k_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x}.$$

Так как $k_1 \ne k_2$ и $\forall x \in R$: $e^{kx} \ne 0$, то $W(y_1, y_2) \ne 0$ $\forall x \in R$ и, по теореме 1, функции y_1 и y_2 – линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.15).

Следовательно, общее решение (2.16) уравнения в случае различных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (2.19)$$

2.4.3. Корни характеристического уравнения действительные и равные

В этом случае $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$ (следует из (2.18) при $\dfrac{p^2}{4} - q = 0$) и говорят, что k_1 – корень уравнения кратности 2. На основании предыдущих рассуждений одно из частных решений есть $y_1 = e^{k_1 x}$. В качестве второго взять функцию $e^{k_2 x}$ не можем, так как $e^{k_1 x} \equiv e^{k_2 x}$ и функции линейно зависимы. Второе частное решение будем искать в виде $y_2 = u(x) e^{k_1 x}$, где $u(x)$ – неизвестная функция, которую необходимо найти.

Подставим $y_2 = u e^{k_1 x}$ в дифференциальное уравнение (2.15), для этого найдём производные:

$$y_2' = u e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = (u' + k_1 u) e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = \left(u'' + k_1 u'\right) e^{k_1 x} + \left(u' + k_1 u\right) k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u),$$

тогда

$$e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u) + p(u' + k_1 u) e^{k_1 x} + q u e^{k_1 x} = 0$$

или

$$e^{k_1 x}\left(u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + k_1 p + q)u\right) = 0.$$

Так как $k_1 = -\dfrac{p}{2}$, то $2k_1 = -p$, следовательно, $2k_1 + p = 0$; k_1 – кратный корень уравнения $k^2 + pk + q = 0$, поэтому $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. В результате получаем:

$$e^{k_1 x} u'' = 0 \;\Rightarrow\; u'' = 0.$$

Последнее уравнение – это дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка вида (2.4). Интегрируя его, получим: $u' = A$, $u = Ax + B$, где A и B – произвольные постоянные. Так как мы находим частное решение, то можно положить: $A = 1$ и $B = 0$, тогда $u = x$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ – линейно независимы, так как

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} e^{k_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ k_1 & 1 + k_1 x \end{vmatrix} = e^{2k_1 x} \ne 0 \quad \forall x \in R.$$

Следовательно, функции y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.15) и его общее решение, в случае равных действительных корней характеристического уравнения, имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + x C_2) e^{k_1 x}. \qquad (2.20)$$

2.4.4. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные

В этом случае $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, где, согласно (2.18), $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$ (причем $\beta \ne 0$).

Частные решения можем записать в следующей форме:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} \;\text{ и }\; y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Основные свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения:

1^0. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (2.10), то функция $y_1(x)+y_2(x)$ также является решением этого уравнения.

□ Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (2.10). Согласно определению решения дифференциального уравнения, каждая из этих функций обращает уравнение (2.10) в тождество, т.е.

$$y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1\equiv 0$$

и

$$y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2\equiv 0.$$

Функция $y_1(x)+y_2(x)$ будет являться решением уравнения (2.10), если при подстановке ее в это уравнение вместо *y* получится верное равенство. Подставим функцию $y_1(x)+y_2(x)$ в уравнение (2.10). Используя правило дифференцирования суммы функций, получим:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+a_1(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(y_1+y_2)'+a_n(y_1+y_2)=$$
$$=\left(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1\right)+\left(y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2\right).$$

Так как выражения в скобках равны нулю, то функция $y_1(x)+y_2(x)$ обращает уравнение в тождество, следовательно, по определению она является решением дифференциального уравнения (2.10). ■

2^0. Если функция $y_1(x)$ – есть частное решение линейного однородного дифференциального уравнения (2.10) и C_1 – постоянная, то функция $C_1y_1(x)$ также является решением этого уравнения.

□ Подставляя функцию $C_1y_1(x)$ в уравнение (2.10), получим:

$$(C_1y_1)^{(n)}+a_1(C_1y_1)^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(C_1y_1)'+a_n(C_1y_1)=$$
$$=C_1\left(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1\right).$$

Так как функция $y_1(x)$ по условию является решением уравнения (2.10), то выражение в скобках тождественно равно нулю, а это значит, что функция $C_1y_1(x)$ является решением дифференциального уравнения (2.10). ■

3^0. Следствие из первых двух свойств: если функции $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_k(x)$ $(k\ge 2)$ – частные решения линейного однородного диффе-

ренциального уравнения (2.10), то любая их линейная комбинация, то есть функция вида

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ky_k(x), \tag{2.11}$$

также является решением линейного однородного дифференциального уравнения (2.10) при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Доказательство аналогично доказательству первых двух свойств и состоит в их последовательном применении.

Вид линейной комбинации частных решений (2.11) при $k=n$ аналогичен общему решению (так как содержит n произвольных постоянных). Поэтому логично поставить вопрос: нельзя ли так подобрать частные решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, чтобы функция

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

являлась общим решением линейного однородного дифференциального уравнения (2.10).

Одним из необходимых условий того, чтобы функция $y(x)$ являлась общим решением линейного однородного дифференциального уравнения, является условие линейной независимости всех частных решений $y_i(x)$ ($i=\overline{1,n}$), так как если одно решение выражается через другое, то сокращается число произвольных постоянных.

Определение. Совокупность n функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определённых на некотором промежутке (a,b), называется *линейно-независимой системой функций* на этом промежутке, если тождество

$$\lambda_1y_1(x)+\lambda_2y_2(x)+\ldots+\lambda_ny_n(x)\equiv 0$$

выполняется только в случае $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. В противном случае, то есть когда существует хотя бы один коэффициент $\lambda_j\ne 0$, совокупность функций $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно-зависимой системой функций* на промежутке (a,b).

Определение. Пусть дана система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определённая на некотором промежутке (a,b). *Определителем Вронского* или *вронскианом* данной системы функций называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Пусть $x_0\in(a,b)$ и $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ – произвольные начальные условия. Покажем, что произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно подобрать так, что решение

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$$

при этих значениях постоянных будет частным решением, удовлетворяющим заданным начальным условиям.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0), \\ y_0'=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_0^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Данная система является неоднородной системой *n* линейных алгебраических уравнений на *n* неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x_0)$. Так как по условию функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно-независимые на (a,b), то, в силу теоремы 2, $W(x_0)\ne 0$. Поэтому система имеет единственное решение, которое обозначим $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$, …, $C_n=C_n^0$. Подставляя C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 в равенство (2.14), получим искомое частное решение уравнения (2.10) $y(x)=C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)+\ldots+C_n^0y_n(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Это и означает, что решение (2.14) является общим решением уравнения (2.10). ■

Каждой линейно-независимой системе функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, …, $y_n(x)$ соответствует единственное линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого данная система функций является фундаментальной.

Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного однородного дифференциального уравнения (существует только в некоторых частных случаях).

Аналогично можно показать, что

$$\forall k=\overline{1,n}:\ y^{(k)}=\Psi\left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}\right).$$

Поэтому уравнение (2.8) подстановкой (2.9) сводится к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}=F\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{(n-2)}p}{dy^{n-2}}\right).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения даёт промежуточный интеграл:

$$\frac{dy}{dx}=p=\Phi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

Решая полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим общий интеграл исходного уравнения (2.8):

$$\int\frac{dy}{\Phi}=\int dx+C_n.$$

Пример 2.3. Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{y''}{y'}=e^y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Δ Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка вида (2.8), так как явно не содержит переменную x. Сделаем замену $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$. В результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\left(p\frac{dp}{dy}\right):p=e^y \ \Rightarrow\ \frac{dp}{dy}=e^y \ \Rightarrow\ dp=e^ydy.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\int dp=\int e^ydy \Rightarrow\ p=e^y+C_1 \ \Rightarrow\ y'=e^y+C_1.$$

Одновременно с нахождением решения уравнения найдем значение произвольной постоянной C_1, используя начальные условия: $y=0$ и $y'=1$ при $x=0$:

$$1=e^0+C_1 \ \Leftrightarrow\ 1=1+C_1 \ \Rightarrow\ C_1=0.$$

Таким образом, промежуточный интеграл имеет вид:

$$y'=e^y.$$

Полученное уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными, проинтегрируем его:

$$\frac{dy}{dx}=e^{y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{e^{y}}=dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{e^{y}}=\int dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\int e^{-y}d(-y)=\int dx \;\Rightarrow\; -e^{-y}=x+C_2.$$

Значение произвольной постоянной C_2 найдем, используя начальное условие $y=0$ при $x=0$:

$$-e^{0}=0+C_2 \;\Rightarrow\; C_2=-1.$$

Тогда частный интеграл дифференциального уравнения:

$$-e^{-y}=x-1.$$

Для того чтобы получить частное решение, выразим y из получившегося уравнения:

$$e^{-y}=1-x \;\Rightarrow\; -y=\ln(1-x) \;\Rightarrow\; y=-\ln(1-x) \;\Rightarrow\; y=\ln\frac{1}{1-x}. \;\blacktriangle$$

2.2.4. Уравнения, допускающие понижение порядка IV типа

К уравнениям IV типа относятся уравнения, *однородные относительно неизвестной функции y и её производных*:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

(уравнение не изменяется при замене $y,y',\dots,y^{(n)}$ на $ty,ty',\dots,ty^{(n)}$, $\forall t\neq 0$).

Порядок этого уравнения можно понизить на одну единицу путём замены $\frac{y'}{y}=z$, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 2.4. Найти решение уравнения $\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}$.

Δ В данное уравнение подставим вместо y,y',y'' выражения ty,ty',ty'':

$$\frac{ty''}{ty'}=\frac{ty'}{ty} \;\Leftrightarrow\; \frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y} \quad (\forall t\neq 0).$$

Очевидно, что данное уравнение является однородным относительно y, y' и y''. Сделаем замену $z=\frac{y'}{y}$, получим: $y'=zy$ и $y''=z'y+zy'$.

Тогда уравнение принимает вид $\frac{z'}{z}+z=z$, откуда $z'=0$, $z=C_1$. Сделаем обратную подстановку $\frac{y'}{y}=C_1$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, интегрируя его, получим:

$$\int\frac{dy}{y}=\int C_1dx+C_2 \;\Rightarrow\; \ln|y|=C_1x+C_2.$$

Отсюда находим общее решение исходного уравнения: $y=e^{C_1x+C_2}$. $\blacktriangle$

Дифференциальные уравнения, левая и правая части которых являются полными производными или дифференциалами некоторых функций, также являются дифференциальными уравнениями, допускающими понижение порядка.

Например, дифференциальное уравнение $\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}$ можно представить в виде $(\ln y')'=(\ln y)'$, откуда $\ln y'=\ln y+\ln C_1$ или $y'=C_1y$. Интегрируя это уравнение, получим:

$$y=e^{C_1x+C_2}.$$

2.3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \qquad (2.10)$$

где $n>1$, $n\in N$; $a_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ – заданные функции переменной x, определенные и непрерывные на некотором промежутке (a,b).

Функции $a_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ называются *коэффициентами* дифференциального уравнения (2.10). Если все коэффициенты уравнения – действительные числа, то уравнение (2.10) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Левая часть уравнения (2.10) является однородной функцией первой степени относительно $y,y',y'',\dots,y^{(n)}$.

Определитель Вронского является функцией аргумента x, определенной на промежутке (a,b), и обозначается $W(y_1,y_2,\dots,y_n)$ или просто $W(x)$.

Теорема 1 (*об условии линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения*). Если система функций $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$, определённая на некотором промежутке (a,b):

1) является линейно независимой системой;

2) состоит из частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.10);

то $\forall x\in(a,b): W(x)\neq 0$.

□ Используем метод доказательства «от противного». Предположим, что существует некоторая точка $x_0\in(a,b)$, в которой $W(x_0)=0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\lambda_1y_1(x_0)+\lambda_2y_2(x_0)+\dots+\lambda_ny_n(x_0)=0,\\ \lambda_1y_1'(x_0)+\lambda_2y_2'(x_0)+\dots+\lambda_ny_n'(x_0)=0,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ \lambda_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\lambda_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\dots+\lambda_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0.\end{cases} \qquad (2.12)$$

Система (2.12) – это однородная система n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. По предположению определитель этой системы $W(x_0)=0$, следовательно, система (2.12) имеет бесконечное множество решений, т.е. найдётся хотя бы одно $\lambda_j\neq 0$ (найдется нетривиальное решение).

Составим линейную комбинацию:

$$y(x)=\lambda_1y_1(x)+\lambda_2y_2(x)+\dots+\lambda_ny_n(x).$$

В силу третьего свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений, функция $y(x)$ – решение линейного однородного дифференциального уравнения (2.10). Кроме того, в силу равенств системы (2.12) можно записать:

$$\begin{cases}y(x_0)=0,\\ y'(x_0)=0,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\\ y^{(n-1)}(x_0)=0.\end{cases}$$

Полученная система равенств есть совокупность нулевых начальных условий линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка (2.10), следовательно, функция $y(x)$ есть решение задачи Коши. Этой же задаче удовлетворяет (то есть является её решением) и функция $Y(x)\equiv 0$ (справедливы и начальные условия, и линейное однородное дифференциальное уравнение). В силу теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения *n*-го порядка: $y(x)\equiv Y(x)$, т.е.

$$\lambda_1y_1(x)+\lambda_2y_2(x)+\dots+\lambda_ny_n(x)\equiv 0,$$

где $\lambda_j\neq 0$. Следовательно, по определению, система функций $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,y_n(x)$ – линейно-зависимая, что противоречит условию теоремы. Поэтому сделанное предположение неверно, и $\forall x_0\in(a,b)$ выполняется условие $W(x_0)\neq 0$ или $W(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. ■

Определитель Вронского двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеет вид

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

Определение. Линейно-независимая система n частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.10) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 2 (*о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения*). Если $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ – какая-либо фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.10) на промежутке (a,b), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x), \qquad (2.14)$$

где C_i $(i=\overline{1,n})$ – произвольные постоянные.

□ Функция $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)$ является решением дифференциального уравнения (2.10) в силу третьего свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка при любых значениях постоянных $C_1,C_2,\dots,C_n$. Для того чтобы доказать, что эта функция является общим решением уравнения (2.10), достаточно установить, что из него можно выделить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.