Очень сильно уменьшается коэффициент теплопроводности материала при наличии в нем газовых пор. Газовые прослойки между листами в пачке (рулоне) существенно понижают теплопроводность пачки. При этом теплопроводность вдоль листа не меняется.

Для разнородных материалов, соприкасающихся друг с другом, теплопроводность зависит от направления теплового потока. Так, теплопроводность двухслойной пластины, составленной из прижатых друг к другу слоев алюминия и стали, зависит от того, с какой стороны подводится тепло. Теплопроводность в направлении от алюминия к стали примерно на 20 % выше, чем в обратном направлении, из-за влияния термоэлектронных процессов.

1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для определения количества переданной теплоты необходимо знать коэффициент теплопроводности материала и значение температурного градиента, а следовательно, и распределение температур. Последнее относительно просто можно определить только для тел простой конфигурации – пластины, цилиндра, шара, куба и параллелепипеда. Выявление распределения температур сопряжено с отысканием дифференциального уравнения теплопроводности при следующих допущениях:

1) тело однородно и изотропно;

2) физические параметры вещества постоянны и не зависят от температуры;

3) деформация рассматриваемых тел, связанная с изменением температуры, невелика и ею можно пренебречь;

4) макроскопические частицы тела неподвижны друг относительно друга;

5) внутренние источники теплоты в теле распределены равномерно.

С физической точки зрения это уравнение представляет собой закон сохранения энергии, согласно которому приращение внутренней энергии вещества dU в каком-либо объеме равно количеству теплоты, выделяемой внутренними источниками теплоты $dQ_{ист}$ за вычетом количества теплоты, выходящего через поверхность этого объема наружу $dQ_{выт}$:

$$dU = dQ_{ист} - dQ_{выт}. \qquad (1.2)$$

Для определения составляющих уравнения (1.2) выделим в теле элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 1.5). Он расположен так, что его грани параллельны соответствующим координатным плоскостям. Если объемную мощность тепловыделений (источник теплоты) обозначить через q_v, то за время $d\tau$

$$dQ_{ист} = q_v\, dx\, dy\, dz\, d\tau. \qquad (1.3)$$

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Б. М. Соболев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ И ПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2013

6. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ 72
6.1. Характер свободного движения потоков в большом объеме..... 72
6.2. Решение уравнения пограничного слоя для вертикальной пластины и горизонтального цилиндра..... 73
6.3. Экспериментальные зависимости для конвективного теплообмена в большом объеме..... 76
6.4. Теплообмен свободной конвекцией в ограниченном объеме..... 77
7. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ..... 78
7.1. Аналитические решения задачи конвективного теплообмена в каналах..... 78
7.2. Расчетные зависимости для определения коэффициентов теплоотдачи при вынужденном движении теплоносителя в каналах..... 86
7.3. Конвективный теплообмен при вынужденном внешнем обтекании тел 89
7.4. Теплообмен при больших скоростях потока..... 93
7.5. Теплообмен при изменении агрегатного состояния вещества.... 96
8. ТЕПЛООБМЕН В СЛОЕ 100
8.1. Особенности теплообмена в слое..... 100
8.2. Теплообмен в неподвижном слое..... 103
8.3. Нагрев материала при прямоточном и противоточном движениях потоков..... 107
8.4. Теплообмен в кипящем и взвешенном слоях..... 111
9. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ..... 114
9.1. Классификация теплообменных аппаратов..... 114
9.2. Основы теплового расчета рекуператоров..... 115
9.3. Основы теплового расчета регенераторов..... 118
10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ..... 124
10.1. Тепловое излучение..... 124
10.2. Основные понятия и определения..... 124
10.3. Законы излучения абсолютно черного тела..... 125
10.4. Особенности излучения и поглощения лучистой энергии нечерными телами. Законы Кирхгофа и Ламбегта..... 127
10.5. Лучистый теплообмен между двумя поверхностями, разделенными лучепрозрачной средой..... 130
10.6. Лучистый теплообмен между газом и окружающими его стенками..... 137
10.7. Теплообмен излучением в системах из трех и четырех тел..... 142

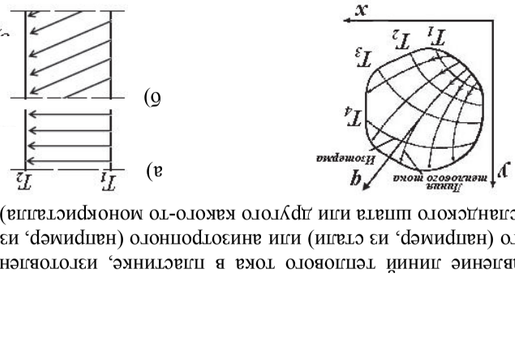


Рис. 1.3. Изотермы и линии теплового тока для плоского температурного поля

Рис. 1.4. Линии теплового тока в плоском слое изотропного (а) и анизотропного (б) материалов

По определению предел, к которому стремится отношение потока вектора q к объему тела V при стягивании объема в точку M, называется *дивергенцией* вектора q, Дж/(м^3·с):

$$div q = lim(\int_F qn_0 dF)/V.$$

Взятая со знаком «минус» дивергенция вектора q равна отношению количества теплоты ΔQ, подводимой к элементарному объему ΔV за время $\Delta\tau$, к ΔV и $\Delta\tau$. Отсюда следует, что $\Delta Q = -(div q)\Delta V\Delta\tau$.

Запишем формулы для вычисления дивергенции вектора q:

- в декартовых координатах

$$div q = \partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z;$$

- в цилиндрических координатах

$$div q = (1/r)(\partial /\partial r)(rq_r) + (1/r)(\partial q_\varphi/\partial\varphi) + \partial q_z/\partial z.$$

Закон Фурье. Основываясь на результатах наблюдений, Фурье высказал гипотезу о том, что вектор плотности теплового потока в данной точке изотропного тела пропорционален градиенту температуры в той же точке. За исключением особых, редко встречающихся случаев эта гипотеза была подтверждена экспериментально, а для газов – и теоретически. В настоящее время гипотеза Фурье формулируется в виде закона:

$$g = -\lambda grad\, T. \qquad (1.1)$$

Знак «минус» в формуле (1.1) объясняется тем, что векторы q, Вт/м, и $grad\ T$, К/м, направлены противоположно друг другу (см. рис. 1.2).

Коэффициент пропорциональности λ, Вт/(м К), в формуле (1.1) называется теплопроводностью вещества. Теплопроводность является физическим параметром вещества, который характеризует интенсивность процесса

УДК 669.045:621.745.3(07)
ББК 34.651.01-51я7
С544

Рецензенты:
Кафедра «Литейное производство и технология металлов»
Тихоокеанского государственного технического университета,
заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор Ри Хосен;
В. В. Черномас, доктор технических наук, заведующий лабораторией
«Новые технологии в металлургии» ИМиМ ДВО РАН

Соболев, Б. М.
С544 Основы теории тепло- и массообменных процессов в нагревательных и плавильных печах : учеб. пособие / Б. М. Соболев. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2013. – 188 с.
ISBN 978-5-7765-1030-4

В учебном пособии излагаются физические основы передачи теплоты теплопроводностью, теплоотдачи при свободной конвекции и при вынужденном движении теплоносителя. Приводятся основные уравнения теплопроводности и теплопередачи при стационарном и нестационарном режимах, конвективного теплообмена при внешнем обтекании тел, теплообмене в слое, расчетные уравнения для теплообменных аппаратов. Анализируется лучистый теплообмен между двумя поверхностями, разделенными лучепрозрачной средой, между газом и окружающими его стенками и др.

Кроме того, излагаются основы теории переноса вещества и рассматриваются законы диффузии, кинетика межфазного переноса, диффеpенциальные уравнения массопереноса, совместных процессов массо- и теплообмена.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений «Металлургия», «Машиностроение» всех форм обучения при изучении курсов «Теплофизика», «Теплотехника», «Металлургическая теплотехника», а также может быть использовано как методическое руководство при выполнении расчетных заданий.

ISBN 978-5-7765-1030-4
© ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……. 6
1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛОТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ ……... 9
1.1. Механизм передачи теплоты теплопроводностью ……... 9
1.2. Основные понятия и определения ……... 10
1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности ……... 16
1.4. Краевые условия ……... 18
2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ …… 20
2.1. Передача теплоты теплопроводностью через стенки …….. 20
2.2. Теплопроводность через пористые и составные стенки ……... 25
2.3. Теплопередача через стенки ……... 26
2.4. Теплопередача через оребренную стенку …… 30
2.5. Теплоотдача стенок с источниками теплоты ……... 31
2.6. Содержание индивидуального задания ……. 33
3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ..…….. 39
3.1. Условия подобия температурных полей при нестационарной теплопроводности …… 39
3.2. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях первого рода..... ……..……... 44
3.3. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях второго рода..... ……..…… 47
3.4. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях третьего рода...…….. 50
4. МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ …….. 53
4.1. Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений. Константы подобия …….. 53
4.2. Критерии подобия ……... 54
4.3. Основные теоремы теории подобия …… 55
4.4. Критерии подобия процессов теплопроводности …… 56
4.5. Критерии подобия процессов теплоотдачи …… 57
5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ……. 61
5.1. Общие сведения о конвективном теплообмене …… 61
5.2. Математическое описание конвективного теплообмена …… 66
5.3. Приложение теории пограничного слоя к явлениям теплообмена.....……..... 69

теплопроводности в веществе и численно равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Закон Фурье позволяет найти плотность теплового потока, а следовательно, и тепловой поток через произвольную поверхность, если известно температурное поле в изучаемой области пространства.

Для высокоинтенсивных нестационарных процессов линейной связи между плотностью теплового потока и температурным градиентом не наблюдается. В этом случае изменению градиента температур не будет соответствовать изменение плотности теплового потока. Изменение этих величин будет происходить не синхронно, а с некоторым запаздыванием, называемым *временем релаксации* τ_p, характеризующим процесс перестройки температурного поля в теле под воздействием изменившегося теплового потока. Поэтому для таких нестационарных тепловых процессов

$$\bar{q} = -\lambda\, grad\, T - \tau_p\, d\bar{q}/d\tau\,.$$

Для определения количества теплоты, прошедшей через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри тела. Нахождение температурного поля и составляет главную задачу теории теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности. Величину $\lambda = -\bar{q}/grad\ T$ называют коэффициентом теплопроводности. Он определяет количество теплоты, которое проходит через единицу поверхности в единицу времени при изменении температуры в один градус на единицу длины. На величину λ влияет много факторов: температура, давление, структура, влажность, плотность и т. д.

Коэффициент теплопроводности газов меняется в пределах 0,006…0,17 Вт/(м °С). С повышением температуры он возрастает. От давления λ практически не зависит, за исключением очень высоких (2000 атм) и очень низких (< 0,026 атм) значений. Для смеси газов λ определяется опытным путем, так как закон аддитивности для определения коэффициента теплопроводности неприменим.

Коэффициент теплопроводности капельных жидкостей меняется от 0,09 до 0,7 Вт/(м·°С). С повышением температуры для большинства жидкостей он убывает, исключая воду, для которой повышение температуры от 0 до 80 °С вызывает изменение λ от 0,11 до 0,67 Вт/(м·°С).

Коэффициент теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов меняется от 0,02 до 3 Вт/(м·°С) (прил. 1). Как правило, материалы с большой объемной массой имеют и более высокие значения λ.

Коэффициент теплопроводности зависит также от состава материала, температуры, его пористости и влажности. Для влажного материала он значительно выше, чем для сухого и воды в отдельности. Например, для сухого красного кирпича λ = 0,35 Вт/(м·°С), для воды λ = 0,6, а для влажного кирпича λ = 1,05 Вт/(м·°С). Во влажном материале при наличии градиента температур влага перемещается в направлении, противоположном потоку теплоты. Этим можно объяснить промерзание стен в сырых помещениях в зимнее время. Следует отметить, что уравнение Био–Фурье для влажных материалов неприемлемо. Коэффициент теплопроводности отнесен к сухим материалам и зависит также от состава, пористости, температуры и направления их прессования. Обычно теплопроводность кирпича в направлении, совпадающем с направлением прессования, всегда больше теплопроводности в перпендикулярном направлении.

Коэффициент теплопроводности металлов меняется от 2,5 до 420 Вт/(м·°С) (прил. 2). Самыми теплопроводными материалами являются серебро, медь, золото и алюминий. С повышением температуры для большинства металлов λ убывает. Так как теплопроводность металла, так же как и электропроводность, определяется свободно диффундирующими электронами, то тепло- и электропроводности чистых металлов связаны пропорциональной зависимостью.

Примеси существенно уменьшают теплопроводность чистых металлов. Так, теплопроводность железа с примесью углерода 0,1 % (по массе) составляет примерно 50 Вт/(м·°С). При повышении содержания углерода до 1 % (по массе) теплопроводность этого сплава понижается на 20 %.

Теплопроводность сплавов зависит не только от наличия примесей, но и от макро- и микроструктуры. У прокатанной стали она выше, чем у литой. Теплопроводность закаленной углеродистой стали на 10 – 25 % ниже, чем незакаленной.

Коэффициент теплопроводности также изменяется с температурой. Поэтому в расчеты процессов нагрева (охлаждения) вводят среднее значение теплопроводности. Наиболее точным будет среднеинтегральное усреднение, но оно сопряжено с большим объемом вычислений. Наиболее часто осуществляют среднеарифметическое усреднение значений коэффициентов теплопроводности, которые и приводятся в справочниках.

Коэффициент теплопроводности углеродистой стали в зависимости от ее химического состава определяется выражением

$$\lambda = 69{,}8 - 10{,}1\ C - 16{,}75\ Mn - 33{,}75\ Si\ \text{Вт/(м·°С)},$$

где C, Mn, Si – содержание углерода, марганца и кремния, % (по массе).

Эта формула справедлива для температуры 0 °С и содержания углерода менее 1,5 % (по массе), марганца и кремния менее 0,5 % (по массе).

Значения λ углеродистой стали при различных температурах определяются соотношением $\lambda = \lambda_0 \cdot k$.

Значение поправочного коэффициента k зависит от температуры:

t, °С	200	400	600	800	1000	1200
k	0,95	0,85	0,75	0,68	0,68	0,73

Градиент температуры – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону повышения температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению, т. е.

$$grad\ T = n_0\, dT/dn = \nabla T,$$

где n_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону повышения температуры; dT/dn (dt/dn) – производная температуры по нормали (рис. 1.2).

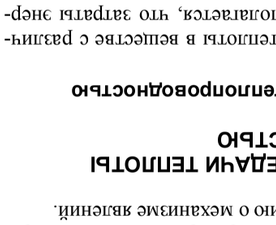


Рис. 1.2. К определению температурного градиента

Скалярное значение dT/dn называют абсолютной величиной (модулем) температурного градиента.

В декартовых координатах

$$gradT = (\partial T/\partial x)i + (\partial T/\partial y)j + (\partial T/\partial z)k;$$

в цилиндрических координатах

$$gradT = (\partial T/\partial r)e_r + 1/r(\partial T/\partial \varphi)e_\varphi + (\partial T/\partial z)\, e_z;$$

в сферических координатах

$$gradT = (\partial T/\partial r)e_r + \\ + 1/(r\ sin\theta)(\partial T/\partial \varphi)e_\varphi + 1/r(\partial T/\partial \theta)\, e_\theta.$$

Наряду со скалярным полем температуры в неравномерно нагретом теле имеется векторное поле *grad T*.

Тепловым потоком Q, Вт, называется количество теплоты, проходящее через произвольную поверхность площадью F в единицу времени.

Плотность теплового потока q, Вт/м, – это отношение теплового потока ΔQ, проходящего через элементарную площадку ΔF, к площади ΔF:

$$q = \Delta Q/\Delta F.$$

Математически тепловой поток представляет собой поток векторного поля q (поток вектора q), где *q – вектор плотности теплового потока.* По определению поток векторного поля q есть поверхностный интеграл от скалярного произведения вектора q и единичного вектора нормали n_0 к элементарной площадке поверхности. Тогда тепловой поток

$$Q = \int_F qn_0 dF = \int_F q_n dF,$$

где q_n – проекция q на направление нормали n_0.

Распространение теплоты в теле наглядно можно представить в виде таких *линий теплового тока,* в каждой точке которых вектор q направлен по касательной к ним. Для *изотропных* тел (в природе их большинство) теплопроводность не зависит от направления и вектор q перпендикулярен к изотермической поверхности. На рис. 1.3 показана картина распределения линий теплового тока в случае плоского температурного поля. На рис. 1.4 дано

11. МЕХАНИЗМ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА И ЗАКОНЫ ДИФФУЗИИ …….. 151
11.1. Основные понятия и определения……... 151
11.2. Массоперенос в однофазном потоке……... 156
12. КИНЕТИКА МЕЖФАЗНОГО ПЕРЕНОСА…… 158
12.1. Двухпленочная модель массопередачи……... 158
12.2. Модель пограничного диффузионного слоя…….. 159
12.3. Модель процессов массопередачи на основе представлений о межфазной турбулентности…….. 160
13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАССОПЕРЕНОСА….. 164
13.1. Уравнения диффузии и неразрывности…….. 164
13.2. Уравнения движения смеси……. 165
13.3. Уравнение энергии. Число Льюиса……. 165
13.4. Диффузионный пограничный слой. Уравнения теории пограничного слоя при наличии массообмена……... 167
13.5. Дифференциальные уравнения совместных процессов массо- и теплообмена…… 168
13.6. Коэффициент массоотдачи. Аналогия процессов переноса массы, теплоты и количества движения…….. 169
13.7. Тепло- и массоперенос в процессе сушки…….. 174
ЗАКЛЮЧЕНИЕ…… 180
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…… 180
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ОГНЕУПОРНЫХ И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ……..…… 182
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СТАЛЕЙ…….. 184
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТОЛЩИНОЙ 2 Δ В РЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА…… 185
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА (СРЕДНЕЙ ПЛОСКОСТИ) БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТОЛЩИНОЙ 2Δ…. 186
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С РАДИУСОМ R В РЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА……... 187
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА (ОСИ) БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С РАДИУСОМ R…….. 188

также процессы переноса при фазовых переходах – испарении жидкости в паротазовую среду или конденсации пара из паротазовой смеси.

Теплообмен излучением включает в себя совокупность процессов: преобразование внутренней энергии вещества в энергию излучения (энергию электромагнитных волн или фотонов); перенос излучения; поглощение излучения веществом. Перенос теплоты одновременно излучением и теплопроводностью называется *радиационно-кондуктивным* теплообменом, а перенос теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией – *радиационно-конвективным* теплообменом.

Для теоретического изучения процессов тепломассопереноса на основе общих законов физики составляется их математическое описание. При этом среду, в которой протекают эти процессы, считают *сплошной*. Это значит, что в физически бесконечно малом элементе ΔV (элементарном объеме) содержится очень большое число микрочастиц. Под ΔV понимается такой объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерным геометрическим размером, привязанным в изучаемой задаче (например, с диаметром трубы). Тогда можно говорить *о локальном* (т.е. в пределах элемента ΔV) *мгновенном значении* в любой момент времени в любой точке материальной среды и рассматривать параметры состояния среды (температуру, давление, плотность, концентрацию компонентов смеси и др.) как непрерывные функции координат точки и времени. Понятие сплошной среды позволяет распространить уравнения термодинамики и законы теплового излучения на термодинамически неравновесные процессы переноса теплоты, импульса и массы вещества.

Понятие локально термодинамического равновесия применимо к большинству реальных процессов тепломассообмена. Исключение составляют сильно разреженные газы и такие особые случаи, как ударные волны, переход газа через скачок уплотнения и др. В этих особых случаях характерное время изменения состояния системы весьма мало. При этом совокупность большого числа микрочастиц в элементе ΔV за это время не успевает притти в состояние термодинамического (статистического) равновесия.

Состояние сплошной среды можно считать полностью определенным, если в каждой точке простраства в любой момент времени известны значения следующих величин: температуры, концентраций компонентов смеси, давления и скорости. Другими словами, из математического описания процессов тепломассообмена должны быть найдены *поля* указанных величин. Знание этих полей позволяет (в этом мы убедимся в дальнейшем) найти количества теплоты и вещества, переносимые через поверхность системы, гидравлическое сопротивление и другие величины, представляющие практический интерес.

Заложив в основу теории тепломассообмена модель сплошной среды, мы тем самым пользуемся термодинамическим методом изучения явлений переноса, т.е. отвлекаемся от внутреннего физического механизма этих явлений и никак не учитываем свойства конкретной среды. Интенсивность процессов переноса в различных средах разная. Поэтому наряду с общими законами физики (законом сохранения и превращения энергии, законом сохранения массы, законом сохранения импульса) при составлении математического описания процессов тепломассообмена должны привлекаться *эмпирические законы* (законы Фурье, Фика, Ньютона), в которых свойства среды учитываются соответствующими *коэффициентами переноса.* Эти коэффициенты переноса, а также коэффициенты, характеризующие излучение реальной среды, получают либо экспериментально, либо с помощью молекулярно-кинетической или электромагнитной теории, либо методами статистической и квантовой физики.

Процессы тепломассообмена широко распространены на практике. Знание их закономерностей имеет первостепенное значение для метеорологии, теплового и ядерной энергетики, промышленной теплоэнергетики, энергомашиностроения, авиации, космонавтики и др.

Наука о тепломассообмене имеет давнюю историю. Ее начало восходит к временам М.В. Ломоносова. Основы теории тепломассообмена были заложены в XIX в. трудами ученых многих стран мира. В связи с практическим потреностями ее интенсивное развитие началось в начале XX в. и продолжается в настоящее время.

Сложность явлений тепломассопереноса приводит к тому, что многие практически важные задачи не могут быть решены аналитическими методами. Тогда прибегают к численным методам с их реализацией на мощных быстродействующих компьютерах.

Наряду с теорией важную роль в изучении процессов тепломассообмена играет эксперимент, с помощью которого проверяют гипотезы и результаты теории, а также получают информацию о механизме явлений.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛОТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

1.1. Механизм переда чи теплоты теплопроводностью

Теплопроводность – процесс переноса теплоты в веществе с различной температурой его точек. При этом предполагается, что затраты энергии на деформацию вещества (тела) при изменении его температуры малы по сравнению с изменением внутренней энергии. Это дает возможность считать, что процесс теплопроводности протекает без изменения объема тела, а приращение внутренней энергии тела пропорционально его теплоемкости [1].

Большинство газов при температурах и давлениях, характерных для металлургической теплотехники, можно считать идеальными. Молекулы этих газов обладают кинетическими энергиями поступательного и вращательного движений. Средняя кинетическая энергия одной молекулы прямо пропорциональна её абсолютной температуре. Передача тепла теплопроводностью в газах обусловлена переносом кинетической энергии при молекулярном движении, вследствие чего происходит постепенное выравнивание температуры в неравномерно нагретом газе. При повышении температуры увеличиваются кинетическая энергия, длина свободного пробега и скорость движения молекул. В результате соударения «горячих» молекул с менее нагретыми происходит передача кинетической энергии от одной их группы к другой. В этом случае «холодные» молекулы начинают двигаться быстрее, что равносильно их нагреву.

Силы молекулярного взаимодействия в жидкостях проявляются сильнее, чем в газах. Однако, как и в газах, молекулы жидкости совершают беспорядочные колебания вокруг хаотически перемещающегося центра равновесия. Если температура молекул будет повышаться, то увеличится и амплитуда их колебаний. Эти упругие колебания будут передаваться смежным молекулам. Таким образом, теплота будет передаваться от слоя к слою жидкости за счет упругих колебаний.

Механизм передачи теплоты при помощи упругих волн можно принять также и для твердых тел, исключая металлы. В металлах передача теплоты осуществляется за счет движения свободных электронов. Поток свободных электронов может быть уподоблен одноатомному идеальному газу. Итак, механизм передачи тепла в газах, жидкостях и твердых телах различен, в силу чего эти вещества, нагретые до одинаковой температуры, будут передавать тепло внутри тела с различной скоростью.

1.2. Основные понятия и определения

Процесс распространения теплоты в теле всегда связан с распределением температур, которые могут меняться как по сечению тела, так и во времени. При этом принято, что материал твердого тела представляет сплошную непрерывную среду. Вследствие этого микрохарактер процесса не рассматривается, а все характеристики процесса переноса теплоты зависят только от координат, времени и температуры.

Совокупность значений температуры во всех точках изучаемого пространства в данный момент времени называется *температурным полем*. Аналитически температурное поле можно представить в виде функции температуры от координат точек пространства и времени.

В зависимости от конфигурации изучаемой области пространства (т.е. от формы тела) выбирают декартову (рис. 1.1, *а*), цилиндрическую

если оно обусловлено действием неоднородного поля массовых сил (сил тяжести, сил инерции), приложенных к частицам среды (жидкости или газа) внутри системы. Типичным случаем свободного движения является *термогравитационная конвекция,* когда более нагретые частицы среды архимедовой силой выталкиваются вверх, а менее нагретые опускаются вниз. В ряде случаев вторичные токи свободной конвекции оказывают существенное влияние на процесс переноса теплоты при вынужденном движении среды. Эти случаи называют теплообменом при *смешанной* конвекции.

На процесс конвективного теплообмена оказывает влияние скорость движения среды и ее распределение в пространстве. В движущейся неравномерно нагретой среде с неоднородным распределением скорости происходит как перенос теплоты, так и перенос количества движения (импульса). Интенсивность переноса теплоты зависит от интенсивности переноса импульса, поэтому первый процесс невозможно рассматривать в отрыве от второго. С этим связан тот факт, что некоторые положения гидродинамики или механики жидкости широко используются в теории тепломассообмена. Конвективный теплообмен между движущейся средой и омываемой ею поверхностью твердого тела называется *теплоотдачей.* Изучение этого процесса имеет большое практическое значение, так как нагревание или охлаждение жидкостей или газов в технике и быту часто происходит либо при внешнем обтекании твердой поверхности теплообмена (например, поверхности трубы), либо при внутреннем обтекании (например, при движении жидкости внутри трубы).

В общем случае под процессом теплоотдачи понимается конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью на границе её раздела с другой средой; причем под границей раздела понимается не только твердое тело, но и жидкость или газ, отличные от движущейся среды. Последний случай характерен для совместно протекающих процессов массо-и теплообмена.

Массообменом называется процесс переноса массы вещества в пространстве с неоднородным распределением концентрации этого вещества (в общем случае – неоднородным распределением химического потенциала вещества, являющегося функцией температуры, давления и концентрации). Явления массопереноса объясняются диффузией компонентов в смеси веществ. Механизмы диффузии и теплопроводности идентичны: оба процесса обусловлены хаотическим тепловым движением молекул. Распространение массы вещества в движущейся смеси веществ, т.е. конвективный массообмен, происходит одновременно как за счет молекулярной диффузии, так и за счет конвективного переноса вещества.

В практике важными являются процессы переноса массы при химических реакциях, протекающих в объеме смеси или на границе раздела фаз, а

Самопроизвольный необратимый процесс перехода теплоты в пространстве с неодинаковыми полем температуры называется *теплообменом.* Пространство может быть заполнено многокомпонентной смесью веществ. Если концентрации компонентов в различных точках пространства разные, то происходит необратимый процесс перехода массы компонентов из одной области в другую. Этот процесс называется *массообменом.* Совместно протекающий процесс перехода теплоты и массы веществ называется *тепломассообменом.*

Как любой реальный самопроизвольный процесс теплообмен является необратимым и продолжается до тех пор, пока в системе не установится термодинамическое равновесие.

Перенос теплоты при непосредственном контакте более нагретых элементов тела (или средыі) с менее нагретыми, осуществляемый посредством хаотического движения и взаимодействия микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов), называется *теплопроводностью.* Интенсивность процесса теплопроводности в различных телах разная.

Металлы обладают наибольшей способностью проводить теплоту. Их теплопроводность при не очень низких температурах в основном объясняется тепловым движением электронов. Чем меньше удельное электрическое сопротивление металла, тем выше его теплопроводность.

Газы – плохие проводники теплоты. Теплопроводность газов обусловлена хаотическим тепловым движением молекул. Она возрастает с увеличением температуры, так как при этом увеличивается скорость теплового движения. При не очень высоких давлениях теплопроводность газов от давления не зависит из-за того, что с увеличением давления, хотя и увеличивается число молекул в единице объема, но одновременно уменьшается длина свободного пробега.

Передача теплоты в твердых телах – диэлектриках происходит посредством колебаний кристаллической решетки, в узлах которой находятся атомы, а в жидкостях – за счет упругих колебаний молекул и их перескока из одной области в другую.

В движущихся жидкостях и газах происходит *конвективный перенос тепла.* В этом случае распространение теплоты в пространстве осуществляется одновременно двумя способами: за счет теплового движения микрочастиц и посредством перемещения макрочастиц (элементов жидкости или газа) из одной точки пространства в другую. Последний способ называется *конвективным переносом* теплоты.

Движение называют *вынужденным,* если оно происходит за счет действия внешних сил, приложенных на границах системы (например, за счет перепада давления, создаваемого насосом или вентилятором), и *свободным,*

(рис. 1.1, *б*) или сферическую (рис. 1.1, *в*) системы координат. Если соответственно этим системам координат назначены функции $T = T(x, y, z,\tau)$, $T = T(r, \varphi, z, \tau)$ или $T(r, \varphi, \theta, \tau)$, то, фиксируя в них момент времени τ, получаем температурное поле при данном значении T. Если с течением времени поле температуры не изменяется, оно называется *стационарным*, в противном случае – *нестационарным*.

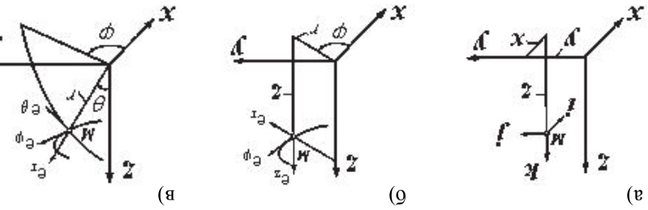


Рис. 1.1. Декартова (а), цилиндрическая (б) и сферическая (в) системы координат: i, j, k; e_r, e_φ, e_θ, e_z – орты

Могут быть случаи, когда температура не зависит от одной из координат. Тогда поле называют *плоским* или двухмерным: $T = T(x, y)$ или $T = T(r,\varphi)$. Если к тому же $\partial T/\partial y = 0$ или $\partial T/\partial\varphi = 0$, то получаем: $T = T(x)$ или $T = T(r)$. Этот частный случай представляет одномерное температурное поле.

Поверхность, во всех точках которой температура одинакова, называется *изотермической*. В плоскости пересечения тела эти поверхности оставляют следы в виде изотерм – линий одинаковой температуры.

Скорость возрастания температуры в данном направлении определяется значением производной от температуры по направлению l_0 dT/dl_0, где l_0 – единичный вектор. Если направление l_0 совпадает с направлениями i, j, k, то производные по этим направлениям равны частным производным $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ и $\partial T/\partial z$.

Температурный градиент. Если соединить точки поля, имеющие одинаковую температуру, то получим изотермическую поверхность. Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство изотерм. Изотермические поверхности и изотермические линии не пересекаются (в одной точке не может быть двух различных температур) и при непрерывном поле не обрываются внутри тела. Все они выходят замкнутыми или кончаются на границах тела. Наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности.

Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температуры.

- условием симметричности температурного поля:

$$(dT/dx)_{x=0} = 0.$$

Для плоской стенки $x_{пов} = s$, а для цилиндра и шара $x_{пов}$ равно r и R соответственно.

После преобразований и первого интегрирования (2.17) получим:

$$x^{k-1}(dT/dx) = -q_v x^k/(\lambda k) + c.$$

Из условий симметрии $c = 0$.

После разделения переменных и второго интегрирования получим:

$$T = -q_v x^2/(2\lambda k) + c_1.$$

Постоянную интегрирования c_1 определяют из граничного условия, тогда

$$T = T_{ср} + [q_v x^2/(2\lambda k)][2\lambda/(\alpha x_n) + 1 - x^2/x_n].$$

Видно, что в теле устанавливается параболическое распределение температур, причем при $q_v > 0$ минимальная температура будет на поверхности тела, а при $q_v < 0$ – в его средней плоскости. Для поверхности тела $x/x_n = 1$, а для средней плоскости пластины, оси цилиндра или центра шара $x/x_n = 0$. Для всех тел разности температуры по сечению $\Delta T = T_{x=0} - T_{x=xn} = q_v x^2_n/2\lambda k$, т. е. разность температур определяется величиной источника теплоты, размером и формой тела и его коэффициентом теплопроводности.

Приведенная выше методика определения температурного поля может быть использована и для полых цилиндров и сфер. В этом случае должны быть заданы два граничных условия третьего рода, что дает возможность определить обе постоянные интегрирования.

Пример 2.1. Рассчитать температуру на границе раздела двуслойной стенки печи, состоящей из магнезита толщиной $\delta_м = 0{,}4$ м и слоя шамота класса А толщиной $\delta_ш = 0{,}4$ м, если температура на внешней поверхности магнезитового слоя равна $T_{п2} = 920$ °С, на внешней поверхности шамотного слоя $T_{п1} = 75$ °С. Определить плотность теплового потока через стенку.

Решение.

1) Формулы для расчета коэффициентов теплопроводности материала каждого слоя при его средней температуре (прил. 1):

$$\lambda_м = 6{,}28 - 0{,}0027 \cdot T^м_{ср}; \quad \lambda_ш = 0{,}88 + 0{,}00023 \cdot T^ш_{ср}.$$

2) Средние температуры каждого слоя равны:

$$T^м_{ср} = 0{,}5(T_{п2} + T), \quad T^м_{ср} = 0{,}5(920 + T);$$
$$T^ш_{ср} = 0{,}5(T + T_{п1}), \quad T^ш_{ср} = 0{,}5(T + 75),$$

где T – неизвестная температура на границе раздела слоев.

3) Плотность теплового потока через слой магнезита:

$$q_2 = \lambda_м/\delta_м(T_{п2} - T), \quad q_2 = (6{,}28 - 0{,}0027 \cdot T^м_{ср})(920 - T)/0{,}4.$$

$$-\lambda(\partial T/\partial x)_{пов} = \alpha(T_{ср} - T_{пов})$$

или

$$-(\partial T/\partial x)_{пов} = -(\alpha/\lambda)(T_{ср} - T_{пов}).$$

Эта форма записи граничных условий наиболее распространена. При $\alpha \to \infty$ ($\lambda \neq 0$) граничные условия третьего рода переходят в условия первого рода. Действительно, при этом $(T_{ср} - T_{пов}) = -(\alpha/\lambda)(\partial T/\partial x)_{пов} \to 0$, откуда

$$T_{ср} = T_{пов}.$$

4) Пространственное краевое условие четвертого рода задается законом теплообмена между двумя твердыми телами посредством теплопроводности. Так как при соприкосновении этих тел температура различных их поверхности является общей, то

$$q = \lambda_1 grad\, T_1 = \lambda_2 grad\, T_2.$$

К этим четырем условиям могут быть сведены все многочисленные случаи нагрева и охлаждения конкретных тел.

2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

2.1. Передача теплоты теплопроводностью через стенки

Рассмотрим решения задач по определению стационарных температурных полей в плоских, цилиндрических и сферических стенках при постоянных температурах поверхностей стенок, т. е. при граничных условиях первого рода. Помимо температур поверхностей, известны также толщины и коэффициенты теплопроводностей стенок (рис. 2.1). При определении температурных полей в стенках требуется также вычислить значения тепловых потоков, проходящих через стенки.

Для рассматриваемых случаев удобно использовать уравнение теплопроводности при $q_v = 0$, т.е.

$$c\rho(\partial T/\partial \tau) = a((\partial^2 T/\partial x^2 + (\partial T/\partial x)(k - 1)/x) \pm q_v.$$

В стационарном режиме температуры отдельных точек стенок постоянны. Поэтому $\partial T/\partial \tau = 0$, что превращает уравнение теплопроводности в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$d/dx(\lambda dT/dx) = -((k - 1)/x)(\lambda dT/dx) \text{ или } dq/dx = -((k - 1)/x)q.$$

После разделения переменных и интегрирования

$$q = c_1/x^{k-1}, \tag{2.1}$$

где c_1 – постоянная интегрирования.

Для вычисления $dQ_{выт}$ рассмотрим сначала процесс в направлении оси x. В этом направлении через левую грань поступает внутрь выделенного объема теплота

$$dQ_x = q_x\, dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

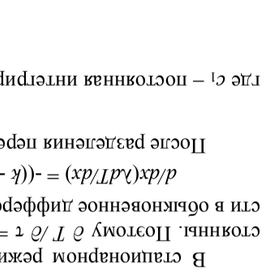


Рис. 1.5. К выводу уравнения теплопроводности

Через противоположную грань в предположении, что на бесконечно малой длине dx тепловой поток меняется по прямой, за тот же промежуток времени «вытечет» теплоты:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx}\, dy\, dz\, d\tau =$$
$$= [q_x + (\partial q_x/\partial x)dx]\, dz\, d\tau.$$

Результирующее количество вытекающей теплоты с учетом того, что $q_x = -\lambda\, \partial T/\partial x$ равно

$$Q_{выт\ x} = dQ_x - dQ_{x+dx} = -(\partial q_x/\partial x)\, dx\, dy\, dz\, d\tau = \lambda(\partial^2 T/\partial x^2)\, dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Полное количество вытекающей теплоты из параллелепипеда во всех трех направлениях:

$$Q_{выт} = \lambda(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2)\, dx\, dy\, dz\, d\tau. \tag{1.4}$$

Приращение внутренней энергии вычисляется через теплоемкость и приращение температуры:

$$dU = c\rho(\partial T/\partial \tau)\, dx\, dy\, dz\, d\tau. \tag{1.5}$$

Подставляя выражения (1.3) – (1.5) в балансовое уравнение (1.2) и проводя сокращения, получим:

$$c\rho(\partial T/\partial \tau) = q_v + \lambda(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2). \tag{1.6}$$

Для обозначения суммы вторых производных по координатам можно использовать символ ∇^2(оператор Лапласа). Тогда уравнение (1.6) окажется записанным в виде:

$$c\rho(\partial T/\partial \tau) = \lambda\nabla^2 T.$$

Введем в рассмотрение новую физическую характеристику вещества – коэффициент температуропроводности $a = \lambda/(c \cdot \rho)$, м^2/с. Он существен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры. Если коэффициент теплопроводности характеризует способность тел проводить теплоту, то коэффициент температуропроводности является мерой теплоинерционных свойств тела. Скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности. Поэтому при прочих равных условиях температуры будут выравниваться быстрее в теле с большим коэффициентом температуропроводности.

ления которого необходимо найти производную по d_3 и приравнять её нулю; при этом величины $1/(\alpha_1 d_1)$ и $0{,}5\lambda_1\, ln\,(d_2/d_1^2)$ являются постоянными:

$$d(R/d_3) = 1/(2\lambda_2 d_3) - 1/(\alpha_2 d_3^2) = 0 \quad \text{или} \quad d_{3\,min} = 2\lambda_2/\alpha_2.$$

Величину внешнего диаметра трубы, соответствующую минимальному термическому сопротивлению теплоотдачи, называют критическим диаметром изоляции. Если диаметр изоляции будет равен критическому, то величина плотности теплового потока q_l будет максимальной.

Критический диаметр изоляции зависит от коэффициента теплопроводности изоляции и коэффициента теплоотдачи в окружающую среду. При этом следует учесть, что при увеличении диаметра изолированной трубы уменьшается коэффициент теплоотдачи α_2, и критический диаметр изоляции несколько увеличивается.

Для эффективной работы тепловой изоляции необходимо, чтобы выполнялось условие: $d_3 > d_{3\,min} < d_2$.

Для многослойной шаровой стенки можно записать, что

$$Q_l = \pi(T_1 - T_2)/\{1/(\alpha_1 d_1^2) + \sum_{i=1}^{n}[(1/(2\lambda_i))ln\,(d_{i+1}/d_i)] + 1/(\alpha_2 d_{n+1}^2)\},$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности слоя изоляции.

Критический диаметр изоляции для шаровой стенки с коэффициентом теплоотдачи в окружающую среду α_2 равен $2\lambda_2/\alpha_2$.

Выше было показано, что $q = cx^{k-1}$. Используя это соотношение и граничные условия, можно определить температуры поверхностей стенок. Зная температуры поверхностей, легко определить также и температуры плоскостей соприкосновения отдельных слоев. При определении температур той или иной поверхности должны использоваться соответствующие этой поверхности граничные условия. Анализируя уравнения для определения q, легко установить, что с целью увеличения плотности теплового потока, передаваемого от одной среды ко второй через разделяющую их стенку, можно увеличить разность температур сред или сумарный коэффициент теплопередачи. Увеличить разность температур сред в рядe случаев нельзя. Поэтому влиять на величину q целесообразно, регулируя термическое сопротивление теплопередачи, за счет изменения толщины и материала стенки или коэффициентов теплоотдачи, что наиболее предпочтительно. Если для плоской стенки пренебречь термическим сопротивлением, т. е. принять $s/\lambda = 0$, то

$$K = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)^{-1} = \alpha_1/(1 + \alpha_1/\alpha_2) = \alpha_2(1 + \alpha_2/\alpha_1).$$

Можно видеть, что при $\alpha_1 << \alpha_2$ K не может быть больше α_1. $K \to \alpha_1$ при $\alpha_2 \to \infty$; $K \to \alpha_2$ при $\alpha_1 \to \infty$. Поэтому увеличение большего коэффициента теплоотдачи практически не приводит к изменению K. Наиболее целесообразно изменять величину меньшего коэффициента теплоотдачи, что скажется на увеличении коэффициента теплопередачи K.

2.4. Теплопередача через оребренную стенку

Один из способов интенсификации передачи теплоты через стенку, разделяющую две жидкие или газообразные среды с температурами $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$ ($T_{ж1} > T_{ж2}$), заключается в увеличении одной из поверхностей стенки путем её оребрения. Эффективность этого способа высока, если термическое сопротивление теплоотдачи на той поверхности, где устанавливаются ребра, значительно больше термического сопротивления на другой поверхности и термического сопротивления теплопроводности стенки.

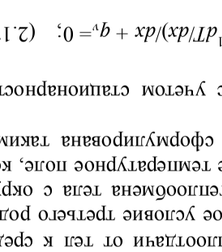


Рис. 2.5. Оребренная плоская стенка

Для оребренной с одной стороны плоской стенки (рис. 2.5) тепловой поток Q, передаваемый от одной жидкой среды к другой, составляет

$$Q = (T_{ж1} - T_{ж2})F/\{1/\alpha_1 + \delta_c/\lambda_c + [\alpha_n(1+(\alpha_p/\alpha_n)E(F_{op}-F)/F)]^{-1}\},$$

где F – площадь гладкой поверхности стенки; α_1 – коэффициент теплоотдачи на гладкой поверхности стенки; δ_c – толщина стенки; λ_c – теплопроводность материала; α_n – коэффициент теплоотдачи на оребренной поверхности стенки в промежутках между ребрами; α_p – коэффициент теплоотдачи на поверхности ребер; $E = (T_{cp} - T_{ж2})/(T_{c2} - T_{ж2})$ – коэффициент эффективности ребра, $0 \le E \le 1$. Здесь T_{cp} – средняя температура поверхности ребра; T_{c2} – температура поверхности стенки в промежутках между ребрами; F_{op} – суммарная площадь оребренной поверхности стенки.

Для приближенных оценок можно полагать $\alpha_p = \alpha_n = \alpha_2$ и $E \approx 1$, тогда

$$Q = (T_{ж1} - T_{ж2})F/(1/\alpha_1 + \delta_c/\lambda_c + 1/(\alpha_2\varepsilon_p)), \qquad (2.13)$$

где $\varepsilon_p = F_{op}/F$ – коэффициент оребрения, $\varepsilon_p \ge 1$. Расчеты по формуле (2.13) приводят к несколько завышенным значениям Q.

Для более точного расчета теплопередачи через оребренную стенку используют результаты решения задачи о теплопроводности стержня, позволяющие определить E; вместе с тем условие $\alpha_p = \alpha_n = \alpha_2$ сохраняется. Расчетное соотношение для теплового потока имеет вид

$$Q = (T_{ж1} - T_{ж2})F/[(1/\alpha_1 + \delta_c/\lambda_c + (\alpha_2(1 + E(\varepsilon_p - 1))^{-1}]. \qquad (2.14)$$

В частности, для прямых тонких ($\delta_p << b$) ребер неизменного сечения (см. рис. 2.5), теплоотдачей на торце которых можно пренебречь, коэффициент эффективности составляет:

$$E = Th(l/\delta_p)(2\alpha_2\delta_p/\lambda_p)^{1/2}) / [(l/\delta_p)(2\alpha_2\delta_p/\lambda_p)^{1/2}], \qquad (2.15)$$

исходное состояние для каждой точки температурного поля (начальные условия), геометрическую форму тела и закон теплообмена на границе твердого тела и окружающей среды (граничные условия).

Начальные и граничные условия называют краевыми. Начальные условия называют временными, а граничные – пространственными краевыми условиями.

Временные краевые условия задают функцией

$$T = f(x,y,z,0),$$

определяющей распределение температуры в начальный момент времени.

В частном случае оно может быть равномерным:

$$T = f(x,y,z) = T_{нач} = \text{const}.$$

Пространственные краевые условия могут быть заданы четырьмя способами.

1) Пространственное краевое условие первого рода состоит в задании температуры на поверхности твердого тела как функции координат и времени:

$$T_{пов} = f_1(x,y,z);\ T_{пов} = f(\tau) \ \text{ или } \ T_{пов} = \text{const}.$$

Граничное условие первого рода может быть реализовано несколькими способами: выдержкой металла в печах с целью уменьшения перепада температур по сечению тела; нагревом или охлаждением металла в жидких средах с небольшой погрешностью, когда можно полагать, что тем-пература поверхности тела мгновенно достигает температуры среды и остается постоянной; нагревом садок металла в термических печах при $T_{пов} = b\cdot\tau$ ($T_{пов}$ – температура поверхности садки; b – скорость ее изменения во времени, °С/с).

2) Пространственное краевое условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока через каждый элемент поверхности как функции координат и времени:

$$q = f_2(x,y,z,\tau); \quad q = f_2(\tau) \ \text{ или } \ q = \text{const}.$$

Постоянство плотности теплового потока на поверхности тела реализуется при нагреве, если температура поверхности тела $T_{пов} \le 0{,}55T_{печ}$.

3) Пространственное краевое условие третьего рода состоит в задании температуры окружающей среды $T_{ср}$ и закона теплового взаимодействия между окружающей средой и поверхностью твердого тела. В качестве такого закона наиболее часто применяют закон Ньютона: $q = \alpha(T_{ср} - T_{пов})$ в котором α – коэффициент теплоотдачи, Вт/м^2·С, а $T_{пов}$ – температура поверхности тела, °С. Реже в качестве закона теплового взаимодействия используют закон Стефана–Больцмана.

Тепловой поток через поверхность распространяется внутрь тела, поэтому, например, для закона Ньютона можно записать:

Если в теле будут равномерно распределены источники $+q_v$ или стоки теплоты $-q_v$, то дифференциальное уравнение теплопроводности примет такой вид:

$$\partial T/\partial\tau = a\nabla^2 T \pm q_v. \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.7) является частным случаем закона сохранения энергии. Левая часть его характеризует скорость изменения температуры некоторой точки со временем, правая – пространственное распределение температуры вблизи этой точки.

Производная $\partial^2 T/\partial x^2$ характеризует интенсивность изменения градиента температур, а последний определяется плотностью теплового потока. Поэтому величина второй производной температуры по координате характеризует разницу между плотностями тепловых потоков, подходящих к данной точке и отходящих от нее. Этой разности плотностей тепловых потоков обусловлено изменение температуры в данной точке. При $q_v = 0$ уравнение (1.7) является частным случаем уравнения Фурье.

Если $\partial T/\partial\tau = 0$ и $q_v = 0$, то уравнение (1.7) называют уравнением Лапласа, т. е. $\nabla^2 T = 0$.

При $q_v \ne 0$ и $\partial T/\partial\tau = 0$ уравнение (1.7) называют уравнением Пуассона.

Дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье может быть записано и в иных системах координат. В частности, это уравнение в цилиндрической системе координат для длинного цилиндра при пренебрежении торцовыми потоками теплоты приобретает вид

$$\partial T/\partial\tau = a(\partial^2 T/\partial r^2 + (1/r)(\partial T/\partial r)$$

и для тел сферической формы

$$\partial T/\partial\tau = a(\partial^2 T/\partial r^2 + (2/r)(\partial T/\partial r),$$

в этих уравнениях r – радиус цилиндра или шара.

Для одномерных температурных полей уравнение Фурье можно записать и в обобщенной форме:

$$\partial T/\partial\tau = a((\partial^2 T/\partial x^2 + (\partial T/\partial x)(k-1)/x) \pm q_v/(c\cdot\rho),$$

где x – координата тела, которой может быть радиус цилиндра или шара; k – коэффициент формы тела, для пластины $k = 1$, для цилиндра $k = 2$ и для шара $k = 3$.

1.4. Краевые условия

Дифференциальным уравнением теплопроводности отражена лишь связь между пространственными и временными изменениями температуры. Чтобы найти распределение температуры внутри тела в любой момент времени, т. е. решить дифференциальное уравнение, необходимо знать

где l, b, δ_p – соответственно длина, ширина и толщина ребра; λ_p – теплопроводность материала ребра.

Графическая зависимость (2.15) приведен на рис. 2.6.

Практические расчеты коэффициента эффективности E' ребер более сложной геометрии сводят к относительно простой формуле (2.15), вводя к полученному по ней значению E поправочный коэффициент ε':

$$E' = E\varepsilon'. \qquad (2.16)$$

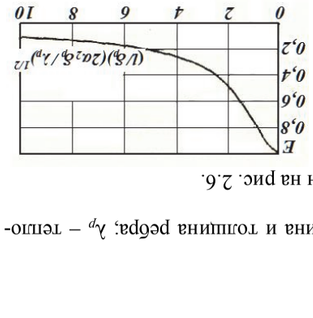


Рис. 2.6. Коэффициент эффективности E прямого ребра постоянного сечения

Для ребер с трапецеидальным и треугольным продольным сечениями E', определяется отношением толщин ребра у основания δ_0 и у торца δ_m, а также комплексом $(l/\delta_p)(2\alpha_2\delta_p/\lambda_p)^{1/2}$. В качестве толщины ребра δ_p в расчете используется её среднеарифметическое значение $(\delta_0 + \delta_m)/2$.

Приведенное соотношение (2.13) и более точные (2.14) – (2.16) применимы и для расчета теплопередачи через оребренные снаружи трубы, толщина стенки которых гораздо меньше диаметра. Для круглых и квадратных ребер, расположенных на внешней поверхности трубы, при расчете по (2.14) полагают, что $l = (D - d)/2$, где D – наружный диаметр круглого ребра или увеличенная в 1,13 раза сторона квадратного ребра; d – внешний диаметр трубы.

2.5. Теплоотдача стенок с источниками теплоты

В плоской стенке, длинном цилиндре и шаре имеется равномерно распределенный источник теплоты q_v. Эти тела омываются средой с постоянной температурой $T_{ср}$. Коэффициент теплоотдачи от тел к среде α = const, т. е. задача имеет постоянное граничное условие третьего рода. Под влиянием внутреннего тепловыделения и теплообмена тела с окружающей средой в нем устанавится стационарное температурное поле, которое следует определить. Задача может быть сформулирована такими уравнениями:

- уравнением теплопроводности Фурье с учетом стационарности процесса

$$\lambda[\partial^2 T/\partial x^2 + (k-1)dT/(xdx)] + q_v = (\lambda/x^{k-1})\,d(x^{k-1}dT/dx)/dx + q_v = 0; \qquad (2.17)$$

- граничным условием

$$(dT/dx)_{x=x_{нов}} = \alpha/\lambda\,(T_{нов} - T_{ср});$$

При наличии в стенке нескольких слоев, имеющих различную толщину s_i и изготовленных из разных материалов λ_i, следует учитывать суммарное тепловое сопротивление стенки. В этом случае тепловые сопротивления слоев, расположенных последовательно в направлении теплового потока, суммируются. Поэтому плотность этого потока

$$q = (T_1 - T_2)/[1/\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n} (s_i / \lambda_i) + 1/\alpha_2].$$

Величину $k = [1/\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n} (s_i / \lambda_i) + 1/\alpha_2]^{-1}$ называют коэффициентом теплопередачи плоской стенки. Численно он равен количеству теплоты, передаваемой через 1 м^2 поверхности стенки в течение 1 с, при разности температур сред, омывающих стенку, в 1 °С.

Для цилиндрической стенки величину теплового потока удобнее относить к единице длины цилиндра, т. е. $q_l = c2\pi\, r$. В этом случае вместо координаты x удобнее использовать наружный и внутренний диаметры цилиндра. Поэтому

$$q_l = \pi(T_1 - T_2)/[1/(\alpha_1 d_1) + (1/(2\lambda))\, ln\, (d_2/d_1) + 1/(\alpha_2 d_2)].$$

Для многослойной стенки

$$q_l = \pi(T_1 - T_2)/\{\, 1/(\alpha_1 d_1) + \sum_{i=1}^{n} [(1/(2\lambda_i))\, ln\, (d_{i+1}/d_i)] + 1/(\alpha_2\, d_{n+1})\}. \quad (2.12)$$

В уравнении (2.12) величину

$$k_l = \{1/(\alpha_1 d_1) + \sum_{i=1}^{n} [(1/(2\lambda_i))\, ln\, (d_{i+1}/d_i)] + 1/(\alpha_2\, d_{n+1})\}^{-1}$$

называют коэффициентом теплопередачи цилиндрической стенки. Он равен плотности теплового потока, проходящего через цилиндрическую стенку длиной в 1 м, при разности температур сред, омывающих стенку внутри и снаружи, в 1 °С.

Уравнение (2.12) можно записать в виде

$$q_l = \pi(T_1 - T_2)/R_\Sigma,$$

где R_Σ – суммарное тепловое сопротивление многослойной стенки, м·°С/Вт, рассчитываемое следующим образом:

$$R_\Sigma = 1/(\alpha_1 d_1) + \sum_{i=1}^{n} (1/(2\lambda_i))\, ln\, (d_{i+1}/d_i) + 1/(\alpha_2 d_{n+1}).$$

Для двухслойных стенок с увеличением внешнего диаметра трубы увеличивается тепловое сопротивление второго (изоляционного) слоя $ln\ (d_3/d_2)\ /(2\lambda_2)$, но уменьшается ее внешнее тепловое сопротивление $1/(\alpha_2 d_3)$. В зависимости от соотношения этих сопротивлений вместе с изменением диаметра d_3 будет меняться величина q_l. Теплоотдача будет максимальной при минимально суммарном тепловом сопротивлении, для опре-

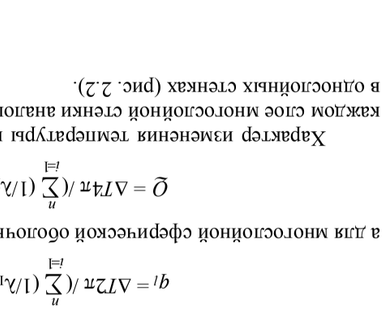


Рис. 2.1. К выводу расчетных формул стационарной теплопроводности: а – плоская стенка; б – цилиндрическая и сферическая стенки

Уравнение (2.1) определяет закон изменения плотности теплового потока по толщине стенки. По толщине плоской стенки величина q не меняется ($k = 1$). По толщине цилиндрической стенки она меняется по гиперболе ($k = 2$), а в сферической оболочке изменение плотности теплового потока происходит по параболе второго порядка ($k = 3$).Определив постоянную интегрирования c_1, можно получить расчетное уравнение для определения плотности потока.

Уравнение (2.1) можно записать и так:

$$-\lambda dT/dx = c_1/x^{k-1} \quad \text{или} \quad -\lambda dT = c_1\, dx\, /\, x^{k-1}. \quad (2.2)$$

Здесь λ – осредненный коэффициент теплопроводности. Уравнение (2.2) интегрируется в зависимости от граничных условий, которые, в частности, следующие: $x = x_1$; $T = T_1$; $x = x_2$; $T = T_2$; $x_2 > x_1$; $T_1 > T_2$.

Следовательно,

$$c_1 = \lambda\, (T_1 - T_2)\, /\, f(x_2, x_1).$$

В этом выражении $f(x_2, x_1) = \int_{x1}^{x2} dx/x^{k-1}$. Для плоской стенки эта функция равна $x_2 - x_1 = s$, для цилиндрической она равна $ln\ (x_2/x_1)$, а для сферической оболочки $f(x_2, x_1) = 1/x_1 - 1/x_2 = (x_2 - x_1)/(x_2\, x_1)$.

С учетом этих замечаний постоянная интегрирования будет иметь следующие значения:

- для плоской стенки $c_1 = \lambda\, (T_1 - T_2)/s$;
- для цилиндрической стенки $c_1 = \lambda\, (T_1 - T_2)/ln(x_2/x_1)$;
- для сферической оболочки $c_1 = \lambda\, (T_1 - T_2)(1/x_1 - 1/x_2)$.

Подставив значения постоянных интегрирования в уравнение (2.1), получим расчетные уравнения для определения плотности теплового потока, Вт/м^2:

нием. Последнее определяет величину падения температуры стенки при прохождении через нее теплового потока единичной плотности.

Для цилиндрической и сферической стенок соответственно тепловые сопротивления равны: $(1/\lambda)\ ln\ (d_2/d_1)$, м °С/Вт; $(1/\lambda)\ (1/r_{вн} - 1/r_н)$, °С/Вт.

Использование понятия теплового сопротивления позволяет получить расчетные уравнения для вычисления количества теплоты, передаваемого через многослойную стенку, состоящую из слоев различной толщины (рис. 2.2). При этом каждый слой имеет свое собственное значение коэффициента теплопроводности.

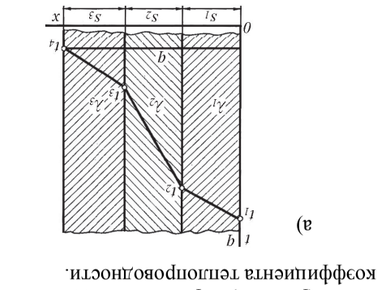


Рис. 2.2. Изменения температуры и плотности теплового потока по толщине плоской (а) и цилиндрической (б) многослойных стенок

Тепловые сопротивления в многослойной стенке располагаются последовательно по направлению распространения тепла. Поэтому все тепловые сопротивления такой стенки суммируются. Вследствие этого для многослойных плоской и цилиндрической стенок соответственно:

$$Q = \Delta TF/(\sum_{i=1}^{n} (s_i/\lambda_i)),$$

$$q_l = \Delta T2\pi\, /(\sum_{i=1}^{n} (1/\lambda_i) ln(d_{i+1}/d_i)),$$

а для многослойной сферической оболочки

$$Q = \Delta T4\pi\, /(\sum_{i=1}^{n} (1/\lambda_i)(hr_{i+1}/r_i)).$$

Характер изменения температуры и плотностей тепловых потоков в каждом слое многослойной стенки аналогичен изменению этих же величин в однослойных стенках (рис. 2.2).

В большинстве случаев на наружных и внутренних поверхностях печных ограждений имеет место разное давление газов. Керамические стенки без специального уплотнения газонепроницаемы. Под действием избыточного давления газ перемещается через такую стенку в сторону пониженного давления, оказывая при этом влияние на количество теплоты, проходящей через стенку. Если на горячей стороне стенки печи имеется избыточное давление, то фильтрация газов через стенку будет сопровождаться переносом массы и теплоты нагретым газом, что приведет к увеличению плотности теплового потока.

При избыточном давлении на наружной (холодной) стороне стенки (что характерно для котлов) или при движении газов в боровах печей направление фильтрационного движения газов будет обратным. Газы будут перемещаться от холодной поверхности к горячей навстречу тепловому потоку. При таком движении газов они будут нагреваться, и воспринимаемое ими тепло будет возвращаться в среду, омывающую горячую поверхность стенки. Поэтому плотность теплового потока, проходящего через стенку, будет уменьшаться на величину, уносимую из стенки газами. В общем случае плотность теплового потока с учетом фильтрации газов через стенку

$$q = q_m \pm Vc_p\, (T_1 - T_2),$$

где q_m – плотность теплового потока, Вт/м^2, передаваемого теплопроводностью; V – объем фильтрующегося газа, м^3/(м^2 с); c_p – средняя удельная теплоемкость газа в интервале температур T_1 - T_2; T_1 и T_2 – температуры поверхностей стенки, °С. Знак плюс в уравнении ставят в том случае, когда направление движения газа совпадает с направлением падения температур в стенке.

Объем газа, проходящий через стенку, зависит от её пористости и толщины, а также от величины разности давлений с обеих сторон стенки. В первом приближении $V = 0{,}01\varepsilon \cdot h/s$. Здесь h – разность давлений, мм вод. ст.; s – толщина стенки, м; ε – коэффициент проницаемости, зависящий от вида материала и состояния кладки стенки. Он может меняться от 1 до 20, т. е. в довольно широких пределах. Для тщательно выложенной кладки, не имеющей трещин, $\varepsilon = 1$, для кладки после длительной эксплуатации $\varepsilon = 20$.

При фильтрации газов через стенку плотность теплового потока в ряде практических случаев может меняться весьма существенно.

В металлургической теплотехнике иногда используют плоские стенки (рис. 2.3), сложенные из нескольких параллельных векторов теплового потока слоев разнородных материалов.

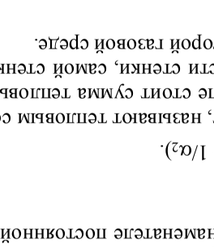


Рис. 2.3. Стенка, сложенная из нескольких параллельных вектору теплового потока слоев разнородных материалов

Предположим, что толщина всех слоев равна s, температуры поверхностей T_1 и T_2, причем $T_1 > T_2$. Обычно принимают, что температуры наружных и внутренних поверхностей не меняются по высоте стенки. Но в действительности, вследствие различия в коэффициентах теплопроводности слоев, температуры поверхностей стенки по высоте будут меняться. Если этим пренебречь, то количество теплоты, Вт, проходящее через каждый слой, составит:

$$Q_2 = \lambda_2 \Delta T F_2 / s; \quad Q_3 = \lambda_3 \Delta T F_3 / s.$$

Общее количество теплоты Q, проходящее через всю составную стенку с поверхностью $F = F_2 + F_3$, равно:

$$Q = Q_2 + Q_3 = (\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3)\Delta T / s .$$

Довольно часто стенки печей делают составными. Наличие слоев с большим коэффициентом теплопроводности, например выводов нагревательных элементов в электрических печах, различных металлических элементов в механизированных печах и т.п., вызывает особые потери теплоты кладкой в окружающее пространство, так называемых потерь на тепловые короткие замыкания. Коэффициент теплопроводности стали примерно в 30 – 100 раз превышает коэффициент теплопроводности огнеупорных и теплоизоляционных материалов. Поэтому даже при малой площади теплопроводящего материала, уложенного в кладку, потери теплоты могут быть весьма существенными.

2.3. Теплопередача через стенки

Определение в стационарном режиме плотности теплового потока, проходящего через стенки при граничных условиях третьего рода, и температуры поверхности слоев очень важно для оценки тепловых потерь в окружающую среду печами и другими тепловыми агрегатами (рис. 2.4).

Сущность этих задач сводится к тому, что теплота от одной газовой среды с температурой T_1 передается в другую газовую среду с температурой $T_2 < T_1$,причем эти среды разделены стенкой, которая может быть одно- или многослойной. Тепловое взаимодействие между средами и поверхностями стенки осуществляется в соответствии с законом Ньютона.

- при плоской стенке

$$q = (\lambda/s)\,(T_1 - T_2); \tag{2.3}$$

- при цилиндрической стенке

$$q = (\lambda/r)\,(T_1 - T_2)\,/ln(d_2/d_1); \tag{2.4}$$

- при сферической оболочке

$$q = (\lambda/r^2)\,(T_1 - T_2)\,(1/r_1 - 1/r_2), \tag{2.5}$$

где s – толщина плоской стенки; d_2 и d_1 – наружный и внутренний диаметры цилиндрической стенки; r_1 и r_2 – внутренний и наружный радиусы сферической оболочки; r – текущее значение радиуса.

Запишем выражения, определяющие тепловой поток, проходящий через стенки.

В случае плоской стенки площадью F

$$Q = (\lambda/s)\,(T_1 - T_2)F.$$

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку, удобнее отнести к 1 погонному метру стенки, для чего уравнение (2.4) следует умножить на $2\pi\ r$.

Поэтому для цилиндрической стенки рассчитывают линейную плотность теплового потока q_l, Вт/м, по формуле

$$q_l = 2\pi\lambda\,(T_1 - T_2)\,/ln(d_2/d_1). \tag{2.6}$$

В уравнении (2.4) следует значению q и r присваивать индекс, соответствующий внутренней или наружной поверхности стенки (внутренему или наружному радиусу). Поэтому для 1 м^2 внутренней поверхности стенки

$$q_{вн} = \lambda\,(T_1 - T_2)\,/(r_{вн} ln\,(d_2/d_1)), \tag{2.7}$$

а для 1 м^2 наружной поверхности

$$q_н = \lambda\,(T_1 - T_2)\,/(r_н\,ln\,(d_2/d_1)). \tag{2.8}$$

Следует отметить, что $q_{вн}$ и $q_н$ измеряют в ваттах на квадратный метр (Вт/м^2).

Выражая из (2.7), (2.8) и уравнения (2.6) отношение $\lambda(T_1 - T_2)\,/ln(d_2/d_1)$, получим, что

$$q_{вн}\,r_{вн} = q_н r_н = q_l/2\pi.$$

Площадь поверхности сферической оболочки равна $4\pi R^2$, следовательно, количество теплоты, проходящее через оболочку:

$$Q = 4\pi\lambda\,(T_1 - T_2)\,/(1/r_{вн} - 1/r_н).$$

Если принять, что коэффициенты теплопроводности стенок не зависят от температуры, то можно получить формулы для распределения температур внутри стенок.

а) б)

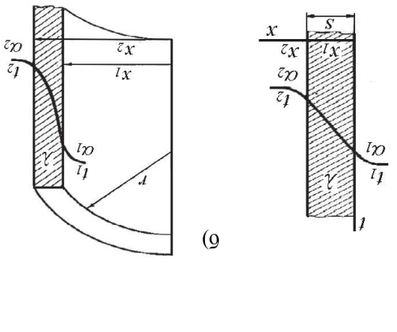


Рис. 2.4. Схема теплопередачи через плоскую (а) и цилиндрическую (б) стенки

При стационарном режиме $\partial\ T / \partial\ \tau = 0$. Следовательно, при решении задач достаточно ограничиться только левой частью уравнения теплопроводности:

$$d/dx\ (\lambda dT/dx) = -((k - 1)/x)\lambda\ dT / dx. \tag{2.9}$$

По тем же причинам отпадает необходимость в учете начальных условий. Граничные условия на поверхностях стенки будут:

$$-\lambda\ dT / dx\,|_{x=x1} = \alpha_1\ (T_1 - T_2);\ -\lambda\ dT / dx\,|_{x=x2} = \alpha_2\ (T_1 - T_2). \tag{2.10}$$

После разделения переменных и интегрирования уравнения (2.9)

$$q = c/x^{k-1};\ dT/dx = -c\lambda x^{k-1};\ T = -c/\lambda \int x^{1-k} dx + c_1. \tag{2.11}$$

Используя уравнения (2.10) и (2.11), можно записать, что

$$x_1^{1-k} c = \alpha_1\ (T_1 - c_1);\quad x_2^{1-k} c = \alpha_2 (c_1 - c/\lambda \int_{x1}^{x2} dx/x^{k-1} + T_2.$$

Тогда

$$c = (T_1 - T_2)\ /\ [(1/\alpha_1 x_1^{k-1}) + 1/\lambda \int_{x1}^{x2} dx/x^{k-1} + (1/\alpha_2 x_2^{k-1})].$$

Подставляя постоянную c в уравнение (2.11), можно получить выражения для величины плотности теплового потока q.

Для плоской стенки $k = 1$ величина интеграла в знаменателе постоянной c будет равна s, где s – толщина плоской стенки.

Поэтому для плоской стенки

$$Q = qF = (T_1 - T_2)/\ (1/\alpha_1 + s\ /\lambda + 1/\alpha_2).$$

В этом уравнении отношение $1/\alpha$, (м^2·°С)/Вт, называют тепловым сопротивлением теплоотдачи. Поэтому в знаменателе стоит сумма тепловых сопротивлений теплоотдачи от среды к поверхности стенки, самой стенки и теплоотдачи от второй поверхности стенки ко второй газовой среде.

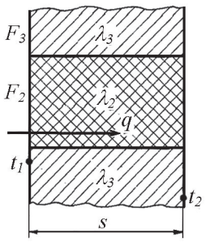


Рис. 2.3. Стенка, сложенная из нескольких параллельных вектору теплового потока слоев разнородных материалов

Предположим, что толщина всех слоев равна s, температуры поверхностей T_1 и T_2, причем $T_1 > T_2$. Обычно принимают, что температуры наружных и внутренних поверхностей не меняются по высоте стенки. Но в действительности, вследствие различия в коэффициентах теплопроводности слоев, температуры поверхностей стенки по высоте будут меняться. Если этим пренебречь, то количество теплоты, Вт, проходящее через каждый слой, составит:

$$Q_2 = \lambda_2 \Delta T F_2 / s; \quad Q_3 = \lambda_3 \Delta T F_3 / s.$$

Общее количество теплоты Q, проходящее через всю составную стенку с поверхностью $F = F_2 + F_3$, равно:

$$Q = Q_2 + Q_3 = (\lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3)\Delta T / s .$$

Довольно часто стенки печей делают составными. Наличие слоев с большим коэффициентом теплопроводности, например выводов нагревательных элементов в электрических печах, различных металлических элементов в механизированных печах и т.п., вызывает особые потери теплоты кладкой в окружающее пространство, так называемых потерь на тепловые короткие замыкания. Коэффициент теплопроводности стали примерно в 30 – 100 раз превышает коэффициент теплопроводности огнеупорных и теплоизоляционных материалов. Поэтому даже при малой площади теплопроводящего материала, уложенного в кладку, потери теплоты могут быть весьма существенными.

2.3. Теплопередача через стенки

Определение в стационарном режиме плотности теплового потока, проходящего через стенки при граничных условиях третьего рода, и температуры поверхности слоев очень важно для оценки тепловых потерь в окружающую среду печами и другими тепловыми агрегатами (рис. 2.4).

Сущность этих задач сводится к тому, что теплота от одной газовой среды с температурой T_1 передается в другую газовую среду с температурой $T_2 < T_1$,причем эти среды разделены стенкой, которая может быть одно- или многослойной. Тепловое взаимодействие между средами и поверхностями стенки осуществляется в соответствии с законом Ньютона.

Из выражения $-\lambda \int_{t1}^{tx} dT = c_1 \int_{x1}^{x} dx/x^{k-1} = c_1 f(x_1, x)$, где T_x – значение температуры для точки с координатой x, получим, что

$$T_x = T_1 - (c_1/\lambda)\,f(x_1, x) = T_1 - \Delta T\,f(x_1, x)/\,f(x_2,x_1).$$

Очевидно, что в плоской стенке распределение температуры по толщине линейное. В цилиндрической стенке температура по толщине меняется по логарифмической кривой, а в сферической – по сложной кривой, близкой к гиперболе. Все приведенные зависимости справедливы при среднем значении коэффициента теплопроводности, которое легко вычисляется, например, при линейном его изменении с изменением температуры. В этом случае среднее значение коэффициента теплопроводности можно принять равным среднеарифметическому значению, вычисленному по температурам поверхностей стенок, т. е.

$$\bar{\lambda} = 0{,}5\ (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Здесь λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности при температурах T_1 и T_2.

Подобное усреднение величины коэффициента теплопроводности мало сказывается на величинах плотностей тепловых потоков. Оно проявляется при определении температурного поля стенки. Поэтому в последнем случае целесообразно воспользоваться действительным значением коэффициента теплопроводности, соответствующим температурам отдельных точек. Для этого рассмотрим, например, задачу, когда $\lambda = \lambda_0 + b\ T$.

Известно, что $-\lambda \int_{t}^{t1} dT = c_1 \int_{x1}^{x} dx/x^{k-1}$ или $\lambda_0\ T + bT^2/2\,\big|_{t}^{t1} = c_1 f(x_1, x)$.

Из этого выражения получается квадратное уравнение относительно температуры

$$T^2 + (2\lambda_0/b)T - (2\lambda_0/b)T_1 - T^2 + (2/b)\ c_1 f(x_1,x) = 0,$$

корень которого

$$T = ((\lambda_1{}^2 - 2b\ c_1 f(x_1, x))^{1/2} - \lambda_0)/b.$$

В этом выражении λ_1 – значение коэффициента теплопроводности, вычисленное при T_1, а значения постоянных интегрирования и функций $f(x_1,x)$ для всех стенок приведены ранее.

Используя эту методику, можно получить выражения для определения температурного поля в стенках, для которых коэффициент теплопроводности уменьшается при увеличении температуры также по линейному закону. Возможно ввести в расчет и другие законы изменения коэффициента теплопроводности с температурой.

Отношение λ/s, Вт/(м^2 °С), называют тепловой проводимостью, а обратное отношение s/λ, м^2 °С/Вт, – тепловым или термическим сопротивле-

$$Fo = 0,\ T(X) + \Phi(X,0) = 0;$$
$$X = 0,\ dT/dX + \partial\Phi/\partial X = 0;$$
$$X = 1,\ dT/dX + \partial\Phi/\partial X = Ki.$$

Таким образом, исходная система дифференциальных уравнений разделяется на две более простые. Функция $T(X)$ находится из решения стационарной задачи:

$$d^2T/dX^2 = \beta; \qquad (3.25)$$

$dT/dX = 0$ при $X = 0$; $dT/dX = Ki$ при $X = 1$, а Φ (X, Fo) описывается следующей системой уравнений:

$$\partial\,\Phi/\partial Fo = \partial^2\Phi/\partial\,X^2; \qquad (3.26)$$
$$Fo = 0,\quad \Phi = -T(X); \qquad (3.27)$$
$$X = 0,\quad \partial\,\Phi/\partial\,X = 0; \qquad (3.28)$$
$$X = 1,\ \partial\,\Phi/\partial\,X = 0. \qquad (3.29)$$

Величина β в уравнении (3.25) – мощность равномерно распределенных по объему пластины внутренних источников теплоты, под действием которых возможно изменение температуры. Общее количество теплоты, выделяемое этими источниками, составляет $Q = \beta\, c\rho\, sF$, где F – поверхность пластины. Через поверхность пластины поступает $Q = q_{пов}F$. Приравнивая эти выражения, находим:

$$\beta = q_{пов}/(c\rho\, s) = q_{пов}\, a/(\lambda s).$$

Согласно выражению (3.24),

$$T - T_{нач} \sim \beta\tau = (q_{пов}/\lambda)\,(a\tau/s) = (q_{пов}\, s/\lambda)Fo = Ki \cdot Fo\ (T_{печ} - T_{нач}).$$

Следовательно, $\theta \sim Ki \cdot Fo$, откуда получаем $\beta = Ki$. Проинтегрировав уравнение (3.25), находим $T(X) = Ki\,X^2/2 + C_1X + C_2$. Из условия симметричности $C_1 = 0$. Это же равенство является следствием и второго граничного условия. Постоянную интегрирования C_2 определяем из выражения

$$\int_0^1 T(X)dX = 0 = (Ki/2)\int_0^1 X^2dX + C_2,$$

откуда $C_2 = -Ki/6$. Таким образом, $T(X) = 0{,}5\,Ki\,(X^2 - 1/3)$. Решение системы (3.26) – (3.29) ищем методом разделения переменных. Подставляя в (3.26) произведение $\varphi(Fo)f(X)$, находим:

$$\varphi(Fo) = C\,exp(-\delta^2Fo),$$
$$f(X) = A\cos(\delta X) + B\sin(\delta X).$$

По условию симметричности $B = 0$. Согласно второму граничному условию, $\delta\sin\delta = 0$ или $\delta_n = \pi\, n$, где $n = 0, 1, 2, ..., \infty$.

При этом краевые условия также разделяются. В частности, граничные условия (3.12) и (3.13) относятся теперь ко второму уравнению (3.15).

Решение первого уравнения (3.15) легко находится разделением переменных

$$d\varphi/\varphi = -\delta^2\,dFo;\ ln\varphi = -\delta^2\,dFo + lnC$$

и дает простую экспоненциальную функцию

$$\varphi(Fo) = C\,exp(-\delta^2Fo).$$

Второе уравнение (3.15) хорошо известно из курсов физики и теоретической механики – это уравнение свободных колебаний. Его решение имеет вид

$$f(X) = A\cos(\delta X) + B\sin(\delta X).$$

Из условия симметричности находим:

$$(df/dX)_{X=0} = \delta\,(-A\sin 0 + B\cos 0) = \delta B = 0,\ B = 0.$$

Граничное условие (3.13) дает

$$A\cos\delta = 0,\ \text{т. е. } \delta_n = \pi\,(2n - 1)/2,$$

где n =1, 2, ..., ∞. Поскольку значений δ_n бесконечное число, то общее решение задачи представляет собой бесконечную сумму частных решений:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos(\delta_nX)\exp(-\delta_n^2F_o).$$

Здесь $D_n = CA_n$. При $Fo = 0$ имеем:

$$\theta\,(X,0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos(\delta_nX).$$

Это разложение единицы в ряд Фурье по косинусам. Из теории рядов Фурье известно, что если $\delta_n = \pi\, n$ или $\delta_n = \pi\,(2n - 1)/2$, то коэффициенты разложения функции $f(X)$ в ряд по косинусам на интервале от 0 до 1

$$D_n = 2\int_0^1 f(X)\cos(\delta_nX)dX. \qquad (3.16)$$

В данном случае $f(X) = 1$, поэтому $D_n = 2\sin\delta_n/\delta_n = 2(-1)^{n+1}/\delta_n$.

Тогда общее решение задачи имеет вид:

$$\theta\,(X,Fo) = \sum_{n=1}^{\infty}[2(-1)^{n+1}/\delta_n]\cos(\delta_nX)\exp(-\delta_n^2Fo). \qquad (3.17)$$

Так как величины δ_n представляют собой ряд возрастающих чисел, то сумма (3.17) быстро сходится. Уже при $Fo > 0{,}3$ при вычислении расчетов можно ограничиться одним первым слагаемым суммы.

В ряде случаев требуется определить среднеинтегральную температуру тела, которую часто называют температурой массы тела

$$\theta_{мас} = (T_{нов} - T_{мас})/(T_{нов} - T_{нач}):$$

$$\theta_{мас} = 1/s\int_0^s\sum_{n=1}^{\infty}[2(-1)^{n+1}/\delta_n]\cos(\delta_nx/s)\exp(-\delta_n^2Fo) = \sum_{n=1}^{\infty}(2/\delta_n^2)\exp(-\delta_n^2Fo). \qquad (3.18)$$

печи составляла около 10 % от температуры на внутренней поверхности печи. При меньших значениях ухудшается стойкость футеровки, при больших – увеличивается потери тепла.

2.6.3. Системы сухопутных футеровок камерных нагревательных печей, работающих на газе

Огнеупорная футеровка камерной нагревательной печи для термической обработки отливок, работающей на газе, включает в себя футеровку стен, свода и пода [12].

В стенах камерных нагревательных печей (рис. 2.7), работающих на газе, принимают однослойные футеровки из шамотного кирпича – системы 1, 2; двухслойные из шамотного и диатомового кирпичей – системы 3 – 5; шамотного кирпича и диатомовой засыпки; шамотного кирпича и каолинового легковесного кирпича – система 6; шамотного и строительных кирпичей – система 7; шамотного кирпича и легковесного – системы 8, 9; трехслойные из шамотного, диатомового кирпичей и диатомовой засыпки – системы 10, 11.

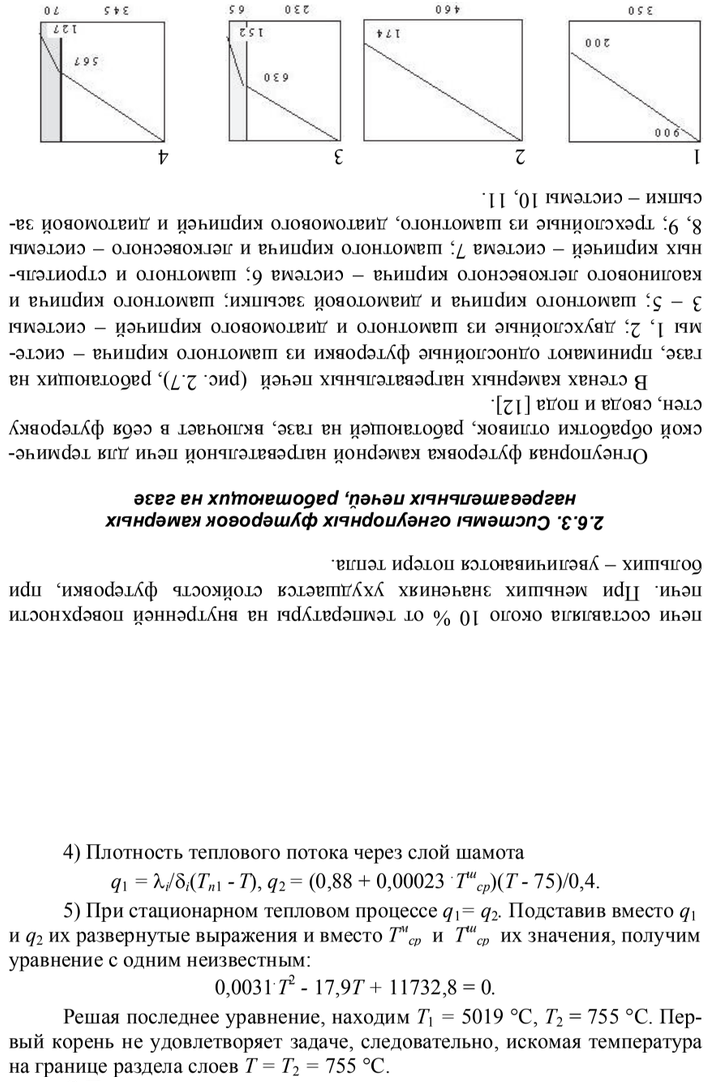


Рис. 2.7. Системы футеровок стен камерных нагревательных печей, работающих на газе

4) Плотность теплового потока через слой шамота

$$q_1 = \lambda_ш/\delta_ш(T_{п1} - T),\ q_2 = (0{,}88 + 0{,}00023 \cdot T^{ш}_{ср})(T - 75)/0{,}4.$$

5) При стационарном тепловом процессе $q_1 = q_2$. Подставив вместо q_1 и q_2 их развернутые выражения и вместо $T^{ш}_{ср}$ и $T^{ш}_{ср}$ их значения, получим уравнение с одним неизвестным:

$$0{,}0031 \cdot T^2 - 17{,}9T + 11732{,}8 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $T_1 = 5019$ °С, $T_2 = 755$ °С. Первый корень не удовлетворяет задаче, следовательно, искомая температура на границе раздела слоев $T = T_2 = 755$ °С.

6) Плотность теплового потока через стенку

$$q_1 = q_2 = q = [(755 - 75)/04][0{,}88 + 0{,}00023\ 0{,}5(755 + 75) = 1658{,}3\ \text{Вт/м}^2.$$

2.6. Содержание индивидуального задания

Выполнение индивидуальных заданий позволяет студентам показать как уровень теоретической и практической подготовки, так и умение пользоваться законами термодинамики для анализа конкретных технологических процессов. В течение семестра необходимо выполнить задание на тему «Расчет распределения температуры на границах многослойной стенки печи и потерь тепла в окружающую среду».

Необходимо определить температуры на границах слоев многослойной футеровки, температуру на наружной поверхности футеровки, а также тепловой поток через плоскую и цилиндрическую футеровку и сравнить эффективность работы плоской и цилиндрической стенок. Варианты задания приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Варианты задания

Вариант	Внутренняя температура футеровки $t_{вн}$, °С	Система (рисунок, схема)		Диаметр цилиндрической футеровки, м	Вариант	Внутренняя температура футеровки $t_{вн}$, °С	Система (рисунок, схема)		Диаметр цилиндрической футеровки, м
		Рис.	Схема				Рис.	Схема	
1	1000	2.7	3	5	10	950	2.9	10	5
2	1100	2.7	5	5	11	900	2.9	11	5
3	1000	2.7	6	5	12	950	2.9	8	5
4	1150	2.7	9	5	13	1650	2.10	1	3
5	1120	2.7	10	5	14	1700	2.10	3	4
6	1180	2.7	11	5	15	1700	2.10	4	5
7	1100	2.7	7	5	16	1700	2.10	6	6
8	950	2.9	4	3	17	1300	2.8	9	5
9	900	2.9	6	2	18	1200	2.8	10	5

Для длинного цилиндра решение можно получить также методом разделения переменных. Расчетное уравнение имеет такой вид:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r/R)\, exp(-\mu_n^2 Fo), \qquad (3.19)$$

где $A_n = (2/\mu_n) J_1(\mu_n)$; $\theta = (T_{пов} - T)/(T_{пов} - T_{нач})$.

Корни характеристического уравнения μ_n определяются из уравнения $J_0(\mu_n) = 0$. $J_0(\mu_n)$ и $J_1(\mu_n)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков. Эти функции периодические. При изменении аргумента период функций не меняется, а амплитуда постоянно уменьшается.

Поэтому решение (3.19) представляет собой также сходящийся знакопеременный ряд, так как $\mu_1 = 2{,}4048$; $\mu_2 = 5{,}5201$; $\mu_3 = 8{,}6537$; $\mu_4 = 11{,}7915$.

Температура массы длинного цилиндра может быть определена по уравнению

$$\theta_{мас} = (T_{пов} - T_{мас})/(T_{пов} - T_{нач}) = 2/R \int_0^R r\theta\,(r,\tau)dr,$$

где R – радиус цилиндра.

Аналогичным методом может быть получено и решение для шара.

Если в пластине или цилиндре в начальный момент времени имеется в поперечном сечении параболическое распределение температур, определяемое зависимостями

$$T_{\tau=0} = f(x) = T_0 + \Delta T_0 x^2/s^2; \quad T_{\tau=0} = f(r) = T_0 + \Delta T_0 r^2/R^2; \quad \Delta T_0 = T_{пов} - T_0,$$

то соответствующие расчетные уравнения имеют такой вид ($\theta = (T_{пов} - T)/(T_{пов} - T_0)$):

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} [4(-1)^{n+1}/\delta_n]\ \cos(\delta_n/s)\, exp(-\delta_n^2 Fo);$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} 8/[\mu^3_n J_1(\mu_n)]\, J_0(\mu_n r/R)\, exp(-\mu_n^2 Fo).$$

Эти уравнения описывают процесс выравнивания первоначальной неравномерности температур. Отношение разности температур поверхности и середины тела в процессе выравнивания ΔT к начальной разности этих температур ΔT_0 принято называть степенью выравнивания температур $\delta = \Delta T/\Delta T_0$. При $Fo > Fo_*$ имеем:

- для пластины $\delta = 1{,}03\ exp(-2{,}47\ Fo)$, $Fo_* = 0{,}3$;
- для цилиндра $\delta = 1{,}11\ exp(-5{,}78\ Fo)$, $Fo_* = 0{,}25$;

По известной или заданной величине δ последние два уравнения позволяют определять время выдержки.

В термических печах изделия часто нагревают с постоянной скоростью изменения температуры поверхности, т. е. при

$$T_{x=\pm s} = T_{нач} + b\tau; \quad T_{r=\pm R} = T_{нач} + b\tau.$$

Затем находятся уточненные значения температур на границах раздела слоев футеровки:

- для плоской стенки

$$t_j = t_{вн} - q\sum_{i=1}^{n} (\delta_i/\lambda_i); \quad t_{нар} = t_{ок} + q/\alpha_2,$$

- для цилиндрической стенки

$$t_i = t_{вн} - (q/\pi)\sum_{i=1}^{n} (1/2\lambda_i) ln(d_{i+1}/d_i); \quad t_{нар} = t_{ок} + (q/\pi)(1/(\alpha_2 d_{нар})),$$

где $t_{ок}$ – температура окружающей среды, °С; $d_{нар}$ – наружный диаметр футеровки корпуса, м.

Потом снова определяют среднюю температуру каждого слоя и по уточненным значениям средних температур слоев рассчитывают теплопроводности слоев λ_i и коэффициент теплоотдачи α_2. Вновь определяют удельную плотность теплового потока. Расчет таким методом проводят до тех пор, пока расхождение между двумя последними значениями плотности теплового потока через стенку станет менее 5 %. Тогда последнее значение удельной плотности теплового потока, а также распределение температур по толщине стенки и температура наружной стенки считаются окончательными. Таким образом, тепловой поток через плоскую стенку равен $Q_{14} = q\ F$, через цилиндрическую стенку – $Q_{14} = q\ \ h_н$, где $h_н$ – высота наружной поверхности печи, м.

2.6.2. Системы огнеупорных футеровок печей

В зависимости от конструкции и технологического процесса в печи для её футеровки выбирают виды огнеупорных материалов, количество слоев футеровки, толщины и расположение слоев в футеровке. При этом учитывают химический состав, огневые и физические свойства, а также надежность и долговечность службы огнеупоров в конкретных условиях эксплуатации. Все эти требования могут быть объединены общим понятием: система футеровок, под которой понимают число слоев, материалы слоев, толщину каждого слоя и футеровки в целом [12]. На рис. 2.7 – 2.10 приведены схемы систем огнеупорных футеровок некоторых плавильных и нагревательных печей. На этих схемах вверху над каждой системой указан её номер, на первой системе каждого ряда рисунка указана температура внутренней поверхности футеровки печи, а на каждой системе указана температура на границах слоев и темература наружного слоя, °С. Под каждой системой указана также толщина слоя системы, мм.

На основе анализа работы футеровок, потерь тепла, градиентов в стенке печи получено эмпирическое правило, по которому футеровка должна быть выбрана такой, чтобы температура на внешней поверхности

Оценка знаний по темам индивидуальных заданий проводится по рейтинговой системе, при которой учитывается своевременность сдачи заданий и уровень знаний при его защите.

Оформляются задания в соответствии с требованиями РД ФГБОУ ВПО «КнАГТУ» 013-2012 «Текстовые студенческие работы. Правила оформления» [14].

2.6.1. Расчет температуры на границах слоев футеровки

Для расчета температуры на границах слоев футеровки необходимо знать теплопроводности каждого слоя (λ_i) при их средней температуре и температуру наружной стенки печи. Определить среднюю температуру каждого слоя и температуру наружной стенки печи можно методом последовательного приближения. Сначала выбирается материал и толщина каждого слоя в соответствии с назначением печи и служебными свойствами огнеупорных материалов. Считая внутреннюю температуру кладки печи заданной ($t_{вн}$) (в действительности необходимо рассчитывать теплообмен в печи между стенкой и газом, между стенкой и электрической дугой), а наружную температуру принятой ($t_{нар}$) и принимая в первом приближении распределение температуры по толщине кладки линейным, из геометрических соотношений найдем температуры на границах разделла слоев:

$$t_j = t_{нар} + (t_{вн} - t_{нар})(\sum_{i=1}^{j} \delta_i)/\sum_{i=1}^{n} \delta_i,$$

где t_j –температура на границах разделла i-го и $(i+1)$-го слоев (за первый принимается слой, находящийся у корпуса печи); δ_i – толщина i-го слоя, м; n – количество слоев ($i = 1, 2...n$).

Температуру наружной поверхности стенки следует принимать равной 10 % от внутренней температуры печи.

Затем определяется средняя температура каждого слоя

$$t^{cp}_i = 0{,}5(t_{j+1} + t_j).$$

Для первого слоя $t_{j+1} = t_{нар}$, для последнего слоя $t_j = t_{вн}$. При температуре слоя t^{cp}_i определяют коэффициент теплопроводности λ_i (прил. 1) и коэффициент теплоотдачи конвекцией α_2.

Рассчитывается удельная плотность теплового потока:

- для плоской стенки по формуле

$$q = (t_{вн} - t_{нар})/(\sum_{i=1}^{n} (\delta_i/\lambda_i) + (1/\alpha_2)),$$

- для цилиндрической стенки по формуле

$$q = \pi(t_{вн} - t_{нар})/(\sum_{i=1}^{n} ((1/2\lambda_i) ln(d_{i+1}/d_i)) + (1/\alpha_2 d_{нар})).$$

Для этого случая решения для пластины и цилиндра имеют соответственно следующий вид:

$$T = T_{нач} + bt + (bs^2/2a)(x^2/s^2 - 1) + (bs^2/2a)\sum_{n=1}^{\infty} [2(-1)^{n+1}/\delta_n^3]\cos(\delta_n x/s) exp(-\delta_n^2 Fo),$$

$$T = T_{нач} + bt + (bR^2/4a)(r^2/R^2 - 1) + (bR^2/a)\sum_{n=1}^{\infty} 2/(\mu_n^3 J_1(\mu_n)) J_0(\mu_n r/R)\, exp(-\mu_n^2 Fo).$$

При $Fo > 0{,}5$ всеми членами, объединяемыми знаком суммы, можно пренебречь вследствие их малости.

3.3. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях второго рода

Рассмотрим симметричный нагрев пластины в случае, когда к ее поверхности подводится тепловой поток плотностью $q_{пов}$. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\partial\theta/\partial Fo = \partial^2\theta/\partial X^2,\ Fo > 0,\ 0 < X < 1; \qquad (3.20)$$

$$Fo = 0,\ \theta = 0; \qquad (3.21)$$

$$X = 0,\ \partial\theta/\partial X = 0; \qquad (3.22)$$

$$X = 1,\ \partial\theta/\partial X = Ki. \qquad (3.23)$$

Здесь в отличие от предыдущего случая $\theta = (T - T_{нач})/(T_{пч} - T_{нач})$.

Физическое содержание данной задачи существенно отличается от рассмотренных. Основное отличие состоит в том, что в силу непрерывного подвода теплоты в данном случае невозможно стационарное состояние. Можно ожидать, что по истечении достаточно большого промежутка времени в пластине установится температурное поле, при котором кривая $\theta(X)$ перестанет зависеть от времени, а в любой точке пластины температура будет линейно изменяться во времени. Такое тепловое состояние называется регулярным (или регулярным).

В начале нагрева на форму температурной кривой влияет первоначальное распределение температур $\theta(X, 0)$, поэтому решение задачи следует искать в виде зависимости:

$$\theta(X, Fo) = \beta Fo + T(X) + \Phi(X, Fo), \qquad (3.24)$$

где функция $T(X)$ характеризует установившийся профиль температур. Она не вносит вклада в среднюю по массе температуру пластины, т. е. $\int_0^1 T(X)dX = 0$. Зависимость $\Phi(X, Fo)$ учитывает поправку на нестационарность процесса, т. е. влияние начальных условий. Подставив выражение (3.24) в систему (3.20) – (3.23), находим:

$$\beta + \partial\Phi/\partial Fo = d2\,T/dX2 + \partial^2\Phi/\partial X^2,$$

$$\partial T/\partial\tau = a\,\partial^2 T/\partial x^2; \qquad (3.1)$$

$$\tau > 0;\ T_{нов} = \text{const}; \qquad (3.2)$$

$$(\partial T/\partial x)_{x=0} = 0; \qquad (3.3)$$

$$\tau = 0;\ T = T_{нач}. \qquad (3.4)$$

Условие (3.3) определяет симметрию температурного поля. Преобразуем уравнение (3.1), для чего разделим правую и левую его части на a и умножим на s^2. Тогда получим:

$$\partial T/\partial (a\tau/s^2) = \partial^2 T/\partial (x/s^2).$$

При $T_{нов}$ = const можно записать, что

$$\partial T = -\partial (T_{нов} - T);\ \partial^2 T = -\partial^2 (T_{нов} - T).$$

Далее разделим числитель последнего выражения на постоянную величину $(T_{нов} - T_{нач})$, которую введем под знаки производных. Получим, что

$$[\partial ((T_{нов} - T)/(T_{нов} - T_{нач}))/\partial (a\tau/s^2)] = [\partial^2((T_{нов}-T)/(T_{нов} - T_{нач}))/\partial (x/s)^2].$$

Обозначив относительную температуру $\theta = (T_{нов} - T)/(T_{нов} - T_{нач})$ и относительное время (число Фурье) $Fo = a\tau/s^2$, запишем дифференциальное уравнение теплопроводности в безразмерной форме:

$$\partial\theta/\partial Fo = \partial^2\theta/\partial (x/s)^2.$$

С использованием новых переменных θ и Fo граничные (3.2), (3.3) и начальные (3.4) условия преобразуются к следующему виду:

$$Fo > 0;\ \theta_{x=s} = 0,\ \partial\theta/\partial (x/s)_{x=0} = 0,\ Fo = 0;\ \theta = 1{,}0.$$

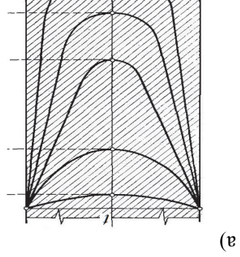
Таким образом, для рассмотренных краевых условий решение системы (3.1) – (3.4) в безразмерных координатах примет вид

$$\theta = f(Fo, x/s), \qquad (3.5)$$

т. е. температурное поле пластины будет зависеть от относительного времени (числа Фурье) и относительных координат точек.

Характер изменения температур при симметричном нагреве пластины толщиной $2s$ приведен на рис. 3.1, *а*. Процесс нагрева заключается в выравнивании температур по толщине пластины, так как температура на ее поверхностях все время одинакова. Температура средней плоскости $T_{ср.пл}$ изменяется по достижении тепловым потоком центрального слоя пластины. С самого начала нагрева отмечается непрерывное уменьшение градиента температуры как по толщине пластины, так и по ходу нагрева. За счет этого (рис. 3.1, *б*) тепловой поток, проходящий в глубь пластины, а также скорость повышения температуры средней плоскости и других точек, кроме расположенных на поверхности, уменьшаются.

а)



б)

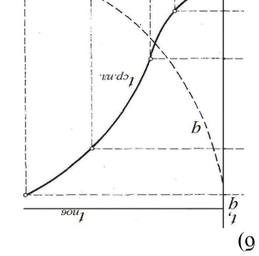


Рис. 3.1. Симметричный нагрев пластины при постоянной температуре поверхности

Такой характер изменения температурного поля позволяет выделить в процессе нагрева три режима: нерегулярный (начальный), регулярный и режим теплового равновесия, или стационарный.

Первый режим охватывает время от начала нагрева до момента достижения тепловым потоком средней плоскости пластины; он характеризуется тем, что скорость роста температуры в каждой точке пластины, а поле температур существенно зависит от начального состояния, которое в общем случае может быть довольно сложным, например при затвердевании стального слитка. При втором режиме влияние начального температурного поля исчезает, а относительная скорость изменения температур во всех точках становится постоянной. Третий режим наступает в конце нагрева, по истечении бесконечно большого времени, причем при симметричном нагреве тела устанавливается тепловое равновесие, а при несимметричном – стационарное тепловое состояние.

Граничные условия второго рода. Полагаем, как и ранее, что пластина имеет одинаковую по всему сечению начальную температуру, толщину $2s$ и равномерно нагревается с двух сторон тепловым потоком постоянной плотности $q_{нов}$. Характер изменения температурного поля для этого случая показан на рис. 3.2, *а*, из которого следует, что температуры точек тела начинают меняться, как только тепловой поток достигнет соответствующих точек пластины. Постоянные значения плотности теплового потока и коэффициента теплопроводности в пластине обеспечивают постоянный градиент температур ($q_{нов}/\lambda$) = - *grad T*. Поэтому прямые, характеризующие температуры поверхности и средней плоскости, располагаются параллельно (рис. 3.2, *б*).

результате изменения граничных условий при нагреве (охлаждении) пластины изменяются переменные обобщенного уравнения, а следовательно, и расчетные уравнения. В обобщенных уравнениях для тел иной формы – цилиндра, шара – при одинаковых с пластиной граничных условиях будут аналогичные переменные с той лишь разницей, что вместо координаты s при расчете чисел Кирпичева, Био следует использовать величину радиуса. Однако из-за различия исходных дифференциальных уравнений теплопроводности Фурье, даже при одних и тех же граничных условиях, расчетные уравнения для пластины, цилиндра и шара будут различными.

Уравнения типа (3.9) широко используют при моделировании процессов тепло- и массопереноса на основе теории подобия.

3.2. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях первого рода

Рассмотрим аналитическое решение задачи симметричного нагрева пластины (см. рис. 3.1) при граничных условиях первого рода, когда в начальный момент времени температура её поверхности скачкообразно повысилась от $T_{нач}$ до $T_{пов}$ = const. Математическая постановка задачи в безразмерной форме имеет вид

$$\theta = (T_{пов} - T)/(T_{к.пов} - T_{нач}),\ X = x/s:$$

$$\partial\theta/\partial Fo = \partial\theta^2/\partial X^2,\ Fo > 0,\ 0 < X < 1; \qquad (3.10)$$

$$Fo = 0,\ \theta = 1; \qquad (3.11)$$

$$X = 0,\ \partial\theta/\partial X = 0; \qquad (3.12)$$

$$X = 1,\ \theta = 0. \qquad (3.13)$$

Для решения задачи воспользуемся методом разделения переменных. Представим искомое решение θ (X, Fo) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, т. е. θ (X, Fo) = = φ (Fo) f (X). Подставив это произведение в уравнение теплопроводности и разделив получившееся выражение на φ (Fo) f (X), находим:

$$(1/\varphi(Fo))\cdot \varphi'(Fo) = (1/f(X))\cdot f''(X), \qquad (3.14)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной ($\varphi'(Fo) = d\varphi/d\,Fo$;

$$f''(X) = d^2 f/dX^2).$$

Поскольку левая и правая части уравнения (3.14) зависят от разных аргументов, то равенство возможно лишь в том случае, когда каждая из них равна некоторой постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\delta^2$. Тогда равенство (3.14) разделится на два уравнения:

$$d\varphi/dFo + \delta^2\varphi = 0 \quad \text{и} \quad d^2 f/dX^2 + \delta^2 f = 0. \qquad (3.15)$$

В своде (рис. 2.8) применяют однослойные футеровки из шамотного кирпича – системы 1, 2; двухслойные из шамотного и диатомового кирпичей – системы 5, 8; шамотного кирпича и диатомовой засыпки – системы 3, 6; шамотного и легковесного кирпичей – система 4; шамотного кирпича и шлака – система 7; трехслойные футеровки из шамотного, диатомового кирпичей и диатомовой засыпки – системы 9, 10.

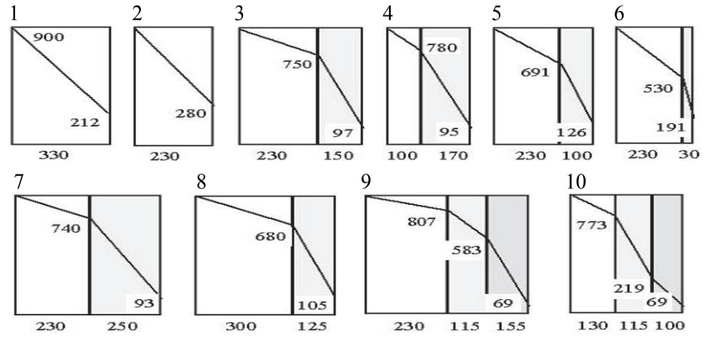


Рис. 2.8. Системы футеровок свода камерных нагревательных печей, работающих на газе

В поду (рис. 2.9) применяют однослойные футеровки из шамотного кирпича – системы 2, 3; двухслойные из магнезитового и шамотного кирпичей – система 1; шамотного и диатомового кирпичей – системы 4, 5, 8;

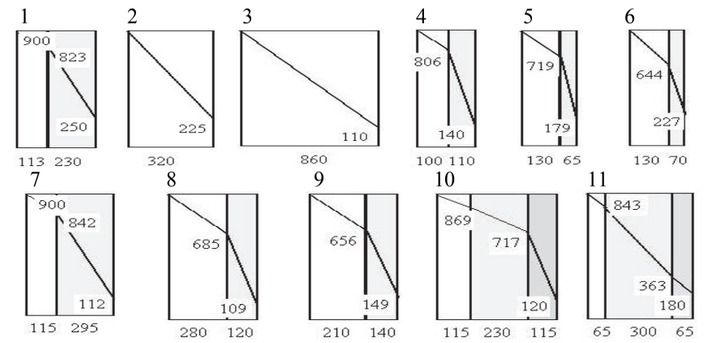


Рис. 2.9. Системы футеровок пода камерных нагревательных печей, работающих на газе

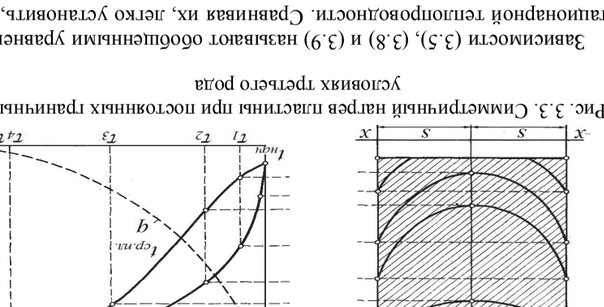


Рис. 3.2. Симметричный нагрев пластины при постоянной плотности теплового потока

Распространение тепла в пластине так же, как в предыдущем случае, описывается дифференциальным уравнением Фурье (3.1), остаются прежними граничные условия на средней плоскости пластины (3.3) и начальные условия (3.4). Граничные условия на поверхностях пластины естественно будут иными, а именно:

$$q_{пов} = -\lambda\,(\partial\,T/\partial\,x)_{x=s}. = \text{const}. \qquad (3.6)$$

Чтобы получить уравнение в общем виде, подобное (3.5), следует ввести характерную температуру $T_{печ}$, которая, в частности, может быть равна

$$T_{печ} = T_{нач} + q_{пов}s/\lambda. \qquad (3.7)$$

Если принять, что $\theta = (T_{печ} - T)/\,(T_{печ} - T_{нач})$, то уравнение (3.6) можно преобразовать, заменив T на θ и разделив на s.

Таким образом:

$$(\partial\theta\,/\partial\,(x/s))_{x=s} = q_{пов}s\,/[\lambda\,(T_{печ} - T_{нач})].$$

Правая часть полученного выражения является числом Кирпичева – *Ki*. Поэтому граничное условие примет вид:

$$\partial\theta\,/\partial\,(x/s) = Ki.$$

С учетом преобразованных уравнений Фурье, граничных и начальных условий уравнение температурного поля в общем виде

$$\theta = f\,(Ki,\,Fo,\,x/s). \qquad (3.8)$$

Анализ уравнения (3.8) показывает, что для данной формы тела температурное поле зависит и определяется относительным временем *Fo,* координатой x и величиной числа Кирпичева.

Граничные условия третьего рода. Самый простой случай нагрева пластины – при постоянных температуре печи и коэффициенте теплоотдачи, т. е. при соответствии закона взаимодействия между средой и поверхностью тела, воспринимаемого поверхностями пластины, равная плотности теплового потока, входящего внутрь тела, но ходу нагрева будет уменьшаться за счет уменьшающейся разности температур $\Delta T = T_{печ} - T_{пов}$ (величина q пропорциональна температурному напору ΔT). Поэтому уменьшается скорость изменения температуры поверхности и, как следствие, градиент температур по сечению пластины. Температура средней плоскости начинает повышаться по истечении определенного периода (рис. 3.3, *а, б*).

Математическая формулировка задачи для рассматриваемого случая включает уравнение теплопроводности (3.1), граничное условие на средней плоскости пластины (3.3) и начальное условие (3.6). Преобразовав новое граничное условие, в котором совмещены законы Ньютона и Био–Фурье

$$-\lambda\,(\partial\,T/\partial\,x)_{x=s}. = \alpha\,(T_{пов} - T_{печ}),$$

т. е. разделив обе части равенства на λ и умножив на s, заменив T на θ, окончательно получим:

$$(\partial\theta\,/\partial\,(x/s))_{x=s} = Bi\theta_{x=s},$$

где $Bi = \alpha\,s/\lambda$ – число Био.

Решение (3.1) с условиями (3.2), (3.3) и (3.4) в общем виде будет:

$$\theta = f(Bi,\,Fo,\,x/s). \qquad (3.9)$$

Рис. 3.3. Симметричный нагрев пластины при постоянных граничных условиях третьего рода

Зависимости (3.5), (3.8) и (3.9) называют обобщенными уравнениями нестационарной теплопроводности. Сравнивая их, легко установить, что в

шамотного и строительного кирпичей; шамотного кирпича и пеношамотного легковесного огнеупора – система 9; хромомагнезитового кирпича и пеношамотного легковесного огнеупора – система 7; трехслойные из магнезитового, хромомагнезитового и диатомового кирпичей – система 10; шамотного, диатомового кирпичей и асбеста; хромомагнезитового, шамотного кирпичей и каолинового легковесного кирпича – система 11.

2.6.4. Огнеупорные футеровки электродуговых плавильных печей

Футеровка электродуговой печи предназначена для создания теплоизоляционного плавильного пространства, а также для надежной и прочной ванны, служащей для технологической обработки расплавленного металла.

Основными элементами футеровки печи являются подина, стенки и свод. Системы футеровок пода, стен и свода электродуговой печи приведены на рис. 2.10.

Подина (рис. 2.10, система 1) состоит из трех основных слоев: теплоизоляционного, огнеупорного и рабочего. Для теплоизоляции используют асбестовый картон, толщиной 10...20 мм, выравнивающий слой шамотного порошка толщиной 20...30 мм, на который укладывают один-два ряда шамотного или пеношамотного кирпича на “плашку” толщиной 65...130 мм. Общая толщина теплоизоляционного слоя 75...200 мм. На теплоизоляционный слой укладывают огнеупорный, который состоит из магнезитовых или динасовых кирпичей, устанавливаемых на ребро в несколько рядов (до 4...5). Зазоры между кирпичами заполняют магнезитовым или кварцевым песком. Толщина огнеупорного слоя составляет 295...475 мм. Иногда огнеупорный слой изготавливают набивным из магнезитового порошка или кварцевого песка. На огнеупорный слой укладывают рабочий слой в виде набивки из магнезитового порошка или кварцевого песка, молотого динаса и отеупорной глины.

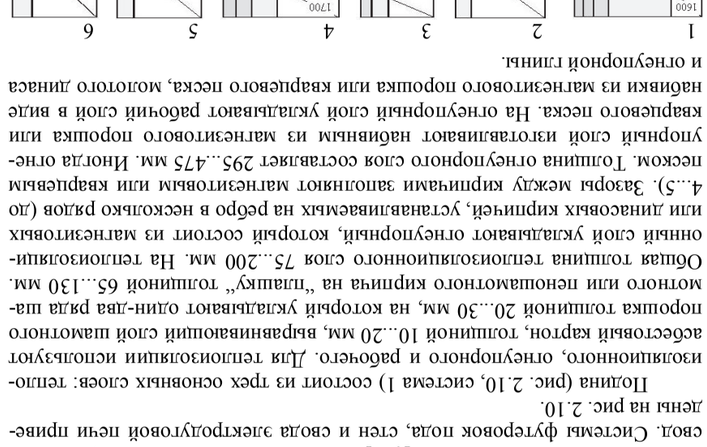


Рис. 2.10. Системы огнеупорных футеровок электродуговых печей

Толщина рабочего слоя составляет 100...200 мм. Отсосы ванны печи выкладывают из прямых клиновых кирпичей на “плашку”. Срок службы футеровки подины достигает 1500...2500 плавок.

Футеровку стен выполняют кирпичом или набивкой. Кирпичная футеровка стен может быть выполнена из периклаза (схема 2), толщиной до 450 мм и асбеста толщиной до 300 мм, теплоизоляционного слоя из шамота и асбеста и рабочего слоя из динаса или магнезита (периклаза) (система 3). При повышенной тепловой нагрузке увеличивается количество теплоизоляционных слоев (система 4), приготавливаемых из асбеста, диатомитового порошка и шамота. Рабочий слой выполняют из динаса или периклаза толщиной не менее 250 мм. Набивную футеровку стен применяют на печах емкостью от 0,5 до 6 т. Набивная футеровка может быть как новая (система 5), так и со слоем старой футеровки (система 6) (см. рис. 2.10). Состав кислой набивной футеровки: 85…94 % SiO_2, 3…6 % огнеупорная глина, 6,0…6,5 % жидкое стекло, 2 % едкий натр, 5…7 % вода сверх 100 %.

3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

3.1. Условия подобия температурных полей при нестационарной теплопроводности

Конечной целью расчета нестационарной теплопроводности является или определение температурного поля тела, или вычисление количества теплоты, отданной или воспринятой телом в процессах охлаждения или нагрева. В ряде случаев требуется вычислить и поле, и тепловой поток. Аналитические решения задач по нагреву или охлаждению получены для тел относительно простой формы и указанных выше граничных условий. Но даже в этих случаях расчетные уравнения оказываются довольно сложными функциями многих переменных, что затрудняет их использование в инженерных расчетах. Упростить эти функции можно на основе теории подобия, объединяя величины, влияющие на температурное поле, в безразмерные числа (комплексы) подобия. Такой подход позволяет выделить определяющие величины, от которых существенно зависит формирование температурного поля, и облегчает графическое или табличное представление результатов решения задачи.

Рассмотрим граничные условия первого, второго и третьего рода при нагреве пластины – параллелепипеда, у которого один из размеров значительно меньше двух других. Температурное поле такой пластины одномерно. Граничные условия четвертого рода встречаются довольно редко: при описании нагрева или охлаждения слитка кипящей стали, изделий из биметалла и пр.

Граничные условия первого рода. При нагреве в условиях постоянной температуры на каждой поверхности пластины температурное поле является нестационарным и описывается дифференциальным уравнением теплопроводности с учетом граничных и начального условий:

где υ – кинематическая вязкость жидкости; a – температуропроводность жидкости.

У вязких жидкостей толщина $\delta_{в.п}$ теплового пограничного слоя оказывается значительно меньше, чем гидродинамического. У газов толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев практически совпадают. В пределах теплового пограничного слоя при ламинарном гидродинамическом пограничном слое возможно распространение теплоты только теплопроводностью.

При $x > x_{к1}$ ламинарный характер движения в пограничном слое нарушается, и после участка переходного течения (при $x = x_{к2}$) возникает турбулентный пограничный слой, толщина которого $\delta_{турб}$ также возрастает по длине пластины ($\delta_{турб} > \delta_{лам}$).

Турбулентный пограничный слой состоит из внешней области *А* (рис. 5.2) и пристенной области *Б*. Толщина внешней области составляет примерно 0,8 $\delta_{турб}$, а толщина пристенной области 0,2$\delta_{турб}$.

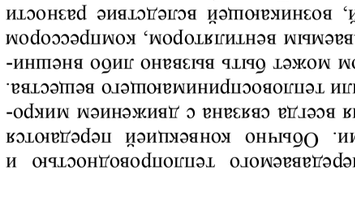


Рис. 5.2. Структура турбулентного гидродинамического пограничного слоя

Пристенная область турбулентного пограничного слоя включает в себя вязкий подслой *1*, внешняя граница которого, показанная волнистой линией, является мощным генератором пульсационного движения, и промежуточный (буферный) слой *2*.

Внешняя граница турбулентного пограничного слоя постоянно меняет свои очертания, потому что во внешнюю область слоя *А* периодически проникают массы жидкости внешнего потока. Если интенсивность турбулентности во внешнем потоке невысокая, то вблизи внешней границы в турбулентном пограничном слое образуется область перемежаемого течения. Наиболее высокая интенсивность турбулентности наблюдается в пристенной области *Б.* Течение в вязком подслое *1*, толщина которого на один-два порядка меньше толщины области *Б,* не является строго ламинарным из-за периодического проникновения крупномасштабных (низкочастотных) пульсаций в вязкий подслой.

Одновременно с турбулентным гидродинамическим пограничным слоем развивается *тепловой пограничный слой,* при этом толщины теплового и гидродинамического пограничных слоев вследствие интенсивного турбулентного переноса количества движения и теплоты практически совпадают. Непосредственно у стенки аналогично вязкому подслою можно выделить *тепловой подслой,* в котором перенос теплоты теплопроводностью преобладает над турбулентным переносом, но все же не является

Таким образом, $\Phi(X,Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\delta_n X)\, exp(-\delta_n^2 Fo)$.

При $Fo = 0$ получаем ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\delta_n X) = -T(X) = -(Ki/2)(X^2 - 1/3).$$

В соответствии с разложением функции в ряд по косинусам:

$$D_n = -2(Ki/2)\int_0^1 (X^2 - 1/3)\cos(\delta_n X)dX,$$

откуда $D_0 = 0$, а для $n \geq 1$

$$D_n = -2Ki\cos\delta_n/\delta_n^2 = 2Ki(-1)^{n+1}/\delta_n^2.$$

Суммируя полученные результаты, запишем решение задачи в окончательном виде:

$$\theta(X,Fo) = Ki[Fo - X^2/2 - 1/6] + \sum_{1}^{\infty} [2(-1)^{n+1}/\delta_n^2]\cos(\delta_n X)exp\,(-\delta_n^2 Fo)$$

или

$$T(x\tau) = T_{нач} + (q_n s/\lambda)[Fo + 0{,}5(x/s)^2 - 1/6 + \Phi(x/s),Fo)]. \qquad (3.30)$$

Суммой ряда Φ можно пренебречь вследствие ее малости при $Fo > 0{,}4$. Поэтому

- при $X = s$: $T_{пов} = T_{нач} + q_n s(Fo + 1/3)/\lambda$;
- при $X = 0$: $T_{ср.пл} = T_{нач} + q_n s(Fo - 1/6)/\lambda$.

Вычитая из первого уравнения второе, получим, что

$$\Delta T = T_{пов} - T_{ср.пл} = q_{пов} s/(2\lambda).$$

Для цилиндра известно такое решение:

$$T(r,\tau) = T_{нач} + (0{,}5q_n R/\lambda)\,[4Fo + (r/R)^2 - 0{,}5 + \Phi\,(r/R,\ Fo)]. \qquad (3.31)$$

Суммой Φ $(r/R,\ Fo)$ можно пренебречь при $Fo > 0{,}25$. Для цилиндра можно записать

$$\Delta T = T_{пов} - T_{ось} = q_{пов} R/(2\lambda).$$

Ниже приведены значения функций, входящих в уравнения (3.30) и (3.31): для поверхности и оси цилиндра соответственно $\Phi_{пц}$ и $\Phi_{оц}$, для поверхности и средней плоскости пластины соответственно $\Phi_{пп}$ и $\Phi_{сп}$. Функции вычислены И. Д. Семикиным:

Fo	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40
$\Phi_{пп}$ (< 0)	0,67	0,38	0,30	0,23	0,19	0,15	0,06	0,02	0,01
$\Phi_{сп}$ (> 0)	0,33	0,29	0,26	0,21	0,18	0,15	0,06	0,02	0,01
$\Phi_{пц}$ (< 0)	0,50	0,24	0,16	0,12	0,09	0,06	0,02	–	–
$\Phi_{оц}$ (> 0)	0,50	0,42	0,34	0,26	0,19	0,11	0,02	0,01	–

пластины при $Fo > 0{,}3$ можно ограничиться в расчетах её нагрева или охлаждения только одним членом ряда, что существенно уменьшает трудоемкость вычислений.

4) При определении распределения температур по толщине пластины в $\cos(bs)$ уравнения (3.38) нужно подставлять различные значения относительной координаты.

Разделением переменных можно получить решения и для других тел, например цилиндра и шара. Решения получаются также при использовании периодических функций в форме быстро сходящихся знакопеременных рядов:

- для цилиндра:

$$\theta_{мас} = (T_{нач} - T)/(T_{нач} - T_{нач}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r/R)\, exp(-\mu_n\, Fo), \qquad (3.42)$$

где $A_n = 2\,J_1\,(\mu_n)/\{(\mu_n[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]\}$, μ_n – корни характеристического уравнения $\mu\, J_1(\mu) = Bi\, J_0(\mu)$;

- для шара:

$$\theta_{мас} = (T_{нач} - T)/(T_{нач} - T_{нач}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,(R/r\varepsilon_n)\sin(\varepsilon_n r/R)\, exp(-\varepsilon_n^2 Fo),$$

где $A_n = 2\,(\sin\varepsilon_n - \varepsilon_n\cos\varepsilon_n)/(\varepsilon_n - \sin\varepsilon_n\ \varepsilon_n\cos\varepsilon_n)$, ε_n – корни характеристического уравнения $\mathrm{tg}\,\varepsilon = -\varepsilon/(Bi - 1)$.

Выше уже отмечалось, что ряды в решениях (3.10) и (3.42) быстро сходятся. Поэтому можно записать следующие уравнения:

- для пластины при $Fo > 0{,}3$

$$\theta_{пов} = D\cos\delta\, exp(-\delta^2 Fo) = P\, exp(-\delta^2 Fo),$$
$$\theta_{ср.пл} = D\, exp(-\delta^2 Fo) = N\, exp(-\delta^2 Fo),$$
$$\theta_{мас} = D\,(\sin\delta/\delta)\, exp(-\delta^2 Fo) = M\, exp(-\delta^2 Fo),$$

- для цилиндра при $Fo > 0{,}25$

$$\theta_{пов} = P_0\, exp(-\mu^2 Fo),$$
$$\theta_{ср.пл} = N_0\, exp(-\mu^2 Fo),$$
$$\theta_{мас} = M_0\, exp(-\mu^2 Fo).$$

Значения постоянных коэффициентов P, N, M, P_0, N_0, M_0, также δ^2 и μ^2 в зависимости от числа Bio можно найти в таблицах и номограммах, составленных Л.В. Будриным (приложения 3 – 6).

Пример 3.1. Определить время двухстороннего нагрева поверхности слоя углеродистой стали толщиной 150 мм до $T_п = 1200$ °С, если начальная температура слоя равна $T_н = 20$ °С, температура газов в печи $T_ж = 1400$ °С, коэффициент теплоотдачи $\alpha = 180$ Вт/(м^2·К). Какую температуру при этом будет иметь центр слоя? Какая температура поверхности и центра будет по истечении половины времени нагрева?

обязательно возникает естественное свободное движение, которое будет турбулизировать поток. Влияние свободного движения на теплообмен будет тем сильнее, чем меньше скорость вынужденного движения потока. Особенно сильно свободное движение проявляется при вертикальном направлении движения теплоносителя. Поэтому в теории конвективного теплообмена поток, у которых величина числа Рейнольдса для закрытых каналов менее 2300, называют потоками со слабо развитой турбулентностью, а потоки, у которых число Рейнольдса более 10 000, называют потоками с сильно развитой турбулентностью. Между этими потоками, определяемыми величиной числа Рейнольдса, находится зона переходных течений.

5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

5.1. Общие сведения о конвективном теплообмене

Конвективная передача тепла осуществляется за счет перемешения микро- и макрообъемов (вихрей), а молекулярная передача тепла – теплопроводностью в газах и жидкостях – за счет движения молекул. В большинстве случаев скорости движения вихрей оказываются значительно выше скоростей движения молекул. Кроме того, каждый вихрь содержит значительное число молекул.

Поэтому количества тепла, переадаваемого теплопроводностью и конвекцией, могут быть различными. Обычно конвекцией передается большие количества тепла. Конвекция всегда связана с движением микро- и макрообъемов теплопередающего или тепловоспринимающего вещества. Движение жидкости или газа при этом может быть вызвано любо внешними силами, например напором, создаваемым вентилятором, компрессором или насосом, либо подъемной силой, возникающей вследствие разности плотностей нагретых и холодных частиц. Теплообмен между поверхностью твердого тела и движущимся потоком при воздействии на поток внешних сил называют вынужденной конвекцией.

Теплообмен между поверхностью твердого тела и жидкостью или газом, которые перемещаются под влиянием разности плотностей нагретых и холодных частиц, называется свободной или естественной конвекцией. В ряде случаев наряду с вынужденным движением может быть естественное (свободное) движение. Влияние последнего будет тем больше, чем меньше скорость вынужденного движения.

При движении жидкости (газа) возможны два основных режима течения: ламинарный и турбулентный. При *ламинарном режиме* отдельные струйки жидкости, перемещаясь в одном и том же направлении, не перемешиваются. При *турбулентном режиме* каждая частица потока, участвуя в общем поступательном движении, кроме того, совершает различные

поперечные движения, вследствие чего мгновенная скорость w в определенной неподвижной точке потока пульсирует около некоторого среднего по времени значения w. Помимо изменения абсолютной величины w, происходит изменение направления мгновенной скорости. Поэтому турбулентный поток часто представляют состоящим из регулярного течения, описываемого осредненным значением скоростей, и наложенного на него хаотического пульсационного течения. Обстановка усложняется периодическим появлением в различных областях течения двух- и трехмерных вихревых структур, возникающих при обтекании потоком различного рода препятствий (выступов шероховатости, прилипших к стенкам частиц загрязняющих отложений, местных сопротивлений и т.д.), а также при столкновениях соседних пульсирующих частиц. При пульсациях скорости и перемещении вихрей из одной области течения в другую происходит перенос энергии. Если в движущемся потоке наблюдается неоднородность температурного поля, то упомянутые явления приводят и к переносу теплоты, вследствие чего возникают пульсации температуры потока в рассматриваемых неподвижных точках.

Характер течения жидкости предопределяет механизм переноса теплоты в потоке. При ламинарном режиме перенос теплоты в направлении, нормальном к направлению течения, осуществляется теплопроводностью, поскольку частицы жидкости перемещаются только в попутном потоку направлении. При турбулентном режиме перенос теплоты в направлении, нормальном к направлению течения, осуществляется теплопроводностью и конвекцией. При этом в одних областях течения перенос теплоты теплопроводностью играет более существенную роль, чем конвективный теплоперенос, а в других областях, наоборот, турбулентный перенос теплоты преобладает над молекулярным.

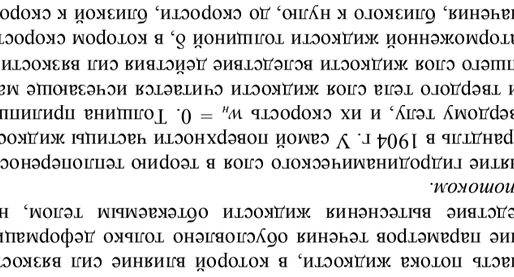


Рис. 5.1. Схема развития пограничного слоя:
1 – ламинарный гидродинамический пограничный слой;
2 – переходное течение; 3 – турбулентный пограничный слой;
4 – эпюры скоростей

При $Fo = 0$ получаем ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\delta_n X) = 1.$$

Для отыскания коэффициентов ряда D_n умножим это выражение $cos\ (\delta_n X)dX$ и проинтегрируем все члены ряда в пределах от 0 до 1. Учитывая, что при $k \neq n$ все интегралы типа

$$\int_0^1 \cos(\delta_k X)\cos(\delta_n X) = 0,$$

получим: $\int_0^1 \cos(\delta_n X)dX = D_n \int_0^1 \cos^2(\delta_n X)dX.$

Левый интеграл равен $(\sin\delta_n)/\delta_n$. Интеграл при коэффициенте D_n равен

$$\int_0^1 \cos^2(\delta_n X)dX = 0{,}5\int_0^1 [1+\cos(2\delta_n X)]dX = 0{,}5\{X + [\sin(2\delta_n X)]/(2\delta_n)\}\Big|_0^1 =$$

$$= (\delta_n + \sin\delta_n \cos\delta_n)/(2\delta_n).$$

Таким образом: $D_n = 2\sin\delta_n / (\delta_n + \sin\delta_n \cos\delta_n)$, и окончательное решение задачи имеет вид

$$\theta(X,Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} [2\sin\delta_n /(\delta_n + \sin\delta_n \cos\delta_n)][\cos(\delta_n X)exp(-\delta_n^2 Fo). \quad (3.38)$$

Для средней плоскости пластины при $X = 0$

$$\theta_{ср.пл} = (T_{печ} - T_{ср.пл})/(T_{печ} - T_{нач}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, exp(-\delta_n^2 Fo). \quad (3.39)$$

Для поверхности пластины при $X = \pm 1$

$$\theta_{пов} = (T_{печ} - T_{пов})/(T_{печ} - T_{нач}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\, exp(-\delta_n^2 Fo). \quad (3.40)$$

Относительная температура массы пластины (при нагреве $T_{ср.пл} < T_{мас} < T_{пов}$):

$$\theta_{мас} = (T_{печ} - T_{мас})/(T_{печ} - T_{нач}) = (1/s)\int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\delta_n x/s)\, exp(-\delta_n^2 Fo)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n (\sin\delta_n)/\delta_n\, exp(-\delta_n^2 Fo). \quad (3.41)$$

Следует сделать несколько замечаний относительно уравнений (3.39) – (3.41):

1) Все аргументы тригонометрических функций выражены в радианной мере.

2) Решения представлены в форме знакопеременных рядов.

3) Так как каждое последующее значение δ больше предыдущего примерно на π, то абсолютная величина каждого последующего члена ряда меньше предыдущего вследствие сильного уменьшения экспоненциального сомножителя. Поэтому полученные ряды сходятся очень быстро. Для

Температуры масс пластины и цилиндра можно определить по формулам

$$T^{п1}_{мас} = T^{п1}_{нов} - 0{,}67\Delta T; \quad T^{ч}_{мас} = T^{ч}_{нов} - 0{,}5\Delta T.$$

Температуру печи, °С, позволяющую реализовать условие q = const, можно определить по уравнению

$$T_{печ} = 100[(q_{нов}/C_{г.к.м}) + (T_{нов}/100)^4]^{1/4} - 273.$$

3.4. Нагрев и охлаждение тел при граничных условиях третьего рода

При симметричном нагреве пластины в среде с постоянной температурой

$$\theta = (T_{печ} - T)/(T_{печ} - T_{нач}).$$

Поэтому

$$\partial\theta/\partial Fo = \partial^2\theta/\partial X^2,\ Fo > 0,\ 0 < X < 1; \quad (3.32)$$

$$Fo = 0,\ \theta = 1; \quad (3.33)$$

$$X = 0,\ \partial\theta/\partial X = 0; \quad (3.34)$$

$$X = 1,\ \partial\theta/\partial X = -Bi\,\theta. \quad (3.35)$$

Решив уравнения (3.32) – (3.35) методом разделения переменных, получим:

$$\varphi(Fo) = C\,exp(-\delta^2 Fo);\ f(X) = A\cos(\delta X) + B\sin(\delta X).$$

Из условия симметричности $B = 0$. Граничное условие (3.35) приводит к соотношению

$$-A\,\delta\sin\delta = -A\,Bi\cos\delta \quad \text{или} \quad \delta/Bi = \mathrm{ctg}\,\delta. \quad (3.36)$$

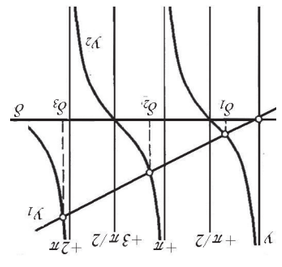


Рис. 3.4. Графический способ определения корней трансцендентного (характеристического) уравнения

Трансцендентное уравнение (3.36) может быть решено численно методом последовательных приближений либо графическим. Обозначив левую часть y_1, а правую y_2 и нанеся эти линии на графики, получим корни уравнения (3.36) (рис. 3.4). Таких корней имеется бесчисленное множество для любого значения числа Био. Первые шесть корней уравнения (3.36) приводятся в литературе по теплопроводности [8, 10, 11, 13], а все последующие корни отыскиваются из соотношения $\delta_{n+1} \approx \delta_n + \pi$, где $n > 5$.

Таким образом, общее решение задачи имеет вид бесконечного ряда:

$$\theta = \sum_{m}^{\infty} D_n \cos(\delta_n X)\, exp\,(-\delta_n^2 Fo). \quad (3.37)$$

Поток жидкости, омывающий твердое тело, может быть разбит на две области: пограничный слой I и внешний поток II (рис. 5.1).

В теории теплопереноса *пограничным слоем* называют область течения вязкой теплопроводной жидкости у поверхности твердого тела, характеризуемую малой толщиной и большим перепадом градиентов скорости и температуры, что определяет перенос количества движения и теплоты.

Область потока жидкости, в которой влияние сил вязкости мало и возмущение параметров течения обусловлено только деформацией линий тока вследствие вытеснения жидкости обтекаемым телом, называется *внешним потоком*.

Понятие гидродинамического слоя в теорию теплопереноса впервые ввел Л. Прандтль в 1904 г. У самой поверхности частицы жидкости прилипают к твердому телу, и их скорость $w_н = 0$. Толщина прилипшего к поверхности твердого тела слоя жидкости считается исчезающе малой. Около прилипшего слоя жидкости вследствие действия сил вязкости образуется слой заторможенной жидкости толщиной δ, в котором скорость изменяется от значения, близкого к нулю, до скорости, близкой к скорости внешнего потока. Этот слой называют *гидродинамическим пограничным слоем*.

Наравду с гидродинамическим пограничным слоем в потоке может образовываться *температурный пограничный слой*. Впервые понятие температурного слоя было введено Г.Н. Кружилиным. Это слой жидкости или газа, непосредственно участвующий в теплообмене, благодаря чему температура в слое меняется от температуры, близкой к температуре стенки, до температуры, близкой к температуре среды во внешнем потоке. Тепловой пограничный слой характеризуется большим перепадом температуры, под действием которого и осуществляется процесс переноса теплоты.

Структура гидродинамического пограничного слоя изменяется по длине обтекаемой поверхности. На начальном участке этой поверхности толщина этого слоя по длине обтекаемого тела постепенно увеличивается и на расстоянии $x_{к1}$ от передней кромки достигает максимального значения:

$$\delta_{нач} = 5x\,Re^{-1/2},$$

где x – расстояние от передней кромки; Re – число Рейнольдса.

Если температуры поверхности обтекаемого тела и внешнего потока неодинаковы, то одновременно с образованием гидродинамического пограничного слоя на начальном участке поверхности образуется тепловой пограничный слой, толщина которого δ_T по длине обтекаемого тела также увеличивается. В общем случае толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев различны и их соотношение определяется из выражения

$$\delta_T/\delta_{нач} = 1/(\upsilon/a),$$

трубах; температура потока, обтекающего тело, T_x; температура поверхности тела (T_m) или температура, значение которой зависит от $T_{ж}$, (T_∞) и $T_{ст}$.

Входящие в критерии подобия характерные значения длины l, скорости w и разности температур ΔT выбираются с учетом физического смысла и конкретных условий теплоотдачи. Так, при расчете теплоотдачи в трубах и каналах за характерный размер принимается внутренний диаметр трубы или эквивалентный диаметр канала (если сечение канала некруглое)

$$d_э = 4A/П,$$

где A – площадь поперечного сечения канала; $П$ – периметр сечения.

Характерной скоростью является осредненное по сечению канала значение w. При внешнем обтекании тел характерным размером обычно считается координата, направленная вдоль контура обтекаемого тела, а характерной скоростью – скорость невозмущенного набегающего потока. Аналогичным образом выбирается характерная разность температур (ΔT), входящая в критерии Gr и Ra. Например, в зависимости от конкретных условий величина ΔT может быть равна следующим разностям температур: тела и среды; стенок щели, в которой исследуется теплообмен; во входном и расчетном сечениях трубы (канала).

Обобщенное уравнение конвективного теплообмена имеет вид:

$$Nu = f(Re, Pr, Gr, l/d). \qquad (4.9)$$

Число Нуссельта содержит искомую величину; в отличие от остальных чисел оно является определяемым.

Обычно уравнение (4.9) записывают в виде

$$Nu = f(Re, Pr, Gr),$$

а геометрию системы оговаривают особо.

В зависимости от конкретных условий форма обобщенного уравнения (4.9) изменяется. Так, например, в условиях естественной конвекции

$$Nu = f(Pr, Gr)$$

В вынужденных турбулентных потоках, когда выполняется условие $Gr/Re^2 << 1$, критерий Gr из уравнения можно исключить, и обобщенное уравнение примет вид

$$Nu = f(Re, Pr).$$

В вынужденных высокотемпературных ламинарных потоках подъемные силы могут оказывать на коэффициент теплоотдачи определенное влияние. Поэтому обобщенное уравнение для этого случая запишется как

$$Nu = f(Re, Pr, Gr).$$

Разделение потоков по режиму движения на ламинарные и турбулентные справедливо только для изотермических течений. Если же течение неизотермическое, то вследствие разности температур внутри потока

Решение.

1) Для углеродистой стали средний коэффициент теплопроводности в интервале 20…200 °С равен [3, 7]:

$$\lambda = 1/2(49{,}4 + 29{,}6) = 39{,}5 \text{ Вт/(м·К)},$$

а средний коэффициент температуропроводности

$$a = 1/2(4{,}7 + 2{,}0)\ \cdot 10^{-2} = 3{,}35 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{ч}.$$

2) Расчетная толщина сляба при двустороннем нагреве равна половине геометрической ($\mu = 0{,}5$):

$$s = 0{,}5 \cdot 150 = 75 \text{ мм} = 0{,}075 \text{ м}.$$

3) Критерий Био $Bi = \alpha s/\lambda$, $Bi = 180 \cdot 0{,}075/39{,}5 = 0{,}342$.

4) Температурный критерий для поверхности

$$\theta = (T_{ж} - T_{пов})/(T_{ж} - T_{нач}), \quad \theta = (1400 - 1200)/(1400 - 20) = 0{,}145.$$

5) По номограммам [3, 7] для поверхности пластины при $\theta_n = 0{,}145$ и $Bi = 0{,}342$ находим, что критерий Фурье равен $Fo = 5{,}8$.

Так как $Fo = a\tau/s^2$, то время нагрева поверхности равно

$$\tau = Fo \cdot s^2/a, \quad \tau = 5{,}8 \cdot 0{,}075^2/3{,}35 \cdot 10^{-2} = 0{,}974.$$

6) При $Fo = 5{,}8$ и $Bi = 0{,}342$ для центра пластины находим температурный критерий $\theta_ц = (T_{ж} - T_ц)/(T_{ж} - T_{нач})$, $\theta = 0{,}17$; отсюда температура центра пластины

$$T_ц = T_{ж} - \theta_ц(T_{ж} - T_н) = 1400 - 0{,}17(1400 - 20) = 1165 \text{ °С}.$$

7) За время, равное половине времени нагрева $\tau' = 0{,}974 / 2 = 0{,}487$ ч, т.е. при $Fo' = a\tau'/s^2$, $Fo' = 3{,}35 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}487/0{,}075^2 = 2{,}9$ температурный критерий для поверхности по номограмме [3, 7] равен $\theta_n' = 0{,}35$ и для центра $\theta_ц' = 0{,}43$.

Отсюда

$$T_n' = T_{ж} - 0{,}35(T_{ж} - T_н) = 1400 - 0{,}35 \cdot (1400 - 20) = 917 \text{ °С};$$
$$T_ц' = T_{ж} - 0{,}43(T_{ж} - T_н) = 1400 - 0{,}43 \cdot (1400 - 20) = 807 \text{ °С}.$$

4. МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

4.1. Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений. Константы подобия

Понятие подобия можно использовать не только в геометрии, но и распространить на физические явления. Подобными могут быть явления, имеющие одну и ту же физическую природу. Для подобия физических явлений необходимо, чтобы поля всех физических величин, характеризующих исследуемые явления, отличались только масштабом. Рассмотрим в качестве примера подобие процессов нестационарной теплопроводности. Из дифференциального уравнения теплопроводности с учетом геометрических, физических, граничных и начальных условий следует, что явление тепло-

Критерии подобия могут быть выведены как из дифференциальных уравнений, описывающих данное явление, так и из размерных величин, характеризующих это явление, если точно известен их полный перечень.

Определяющие критерии подобия – числа подобия, составленные из величин, заданных при математическом описании процесса.

Определяемые безразмерные комплексы – числа подобия, содержащие определяемую величину.

Критериальные уравнения подобия – функциональные зависимости между критериями подобия, характеризующими явление.

Следует отметить, что любые степенные комбинации известных критериев также являются правильно составленными критериями подобия. Тем не менее число их для каждого конкретного случая вполне определенное и соответствует следующему общему принципу теории размерности: функция, связывающая m размерных величин, содержащих n основных единиц измерения, приводится к зависимости между $m - n$ безразмерными комплексами. Для процесса теплопроводности в соответствии с перечнем величин (4.1) $m = 8$ при числе основных единиц измерения $n = 4$ (длина, время, масса и температура), поэтому зависимость (4.4) должна содержать четыре критерия подобия ($m - n = 4$).

4.4. Критерии подобия процессов теплопроводности

Уравнения, описывающие процессы теплопроводности в модели (′) и натурном объекте (″), имеют вид

$$\partial T'/\partial \tau' = a' \partial^2 T'/\partial x'^2;$$
$$\alpha'(T'_{ст} - T'_{ж}) = -\lambda'(\partial T'/\partial x')_{ст}; \qquad (4.5)$$

$$\partial T''/\partial \tau'' = a'' \partial^2 T''/\partial x''^2;$$
$$\alpha''\ (T''_{ст} - T''_{ж}) = -\lambda''\ (\partial T''/\partial x'')_{ст}. \qquad (4.6)$$

В соответствии с условиями (4.2), (4.3) уравнения (4.6) можно преобразовать:

$$(C'_1/C'_1)(\partial T'/\partial \tau') = C'_a C'_1/C'^2_1\ a'\partial^2 T'/\partial x'^2;$$
$$C'_a C'_\tau (T'_{ст} - T'_{ж}) = -(C'_\lambda C'_1/C'_l)\lambda'(\partial T'/\partial x)'_{ст}. \qquad (4.7)$$

Одна и та же неизвестная функция T (x, T) может быть найдена из решения уравнений как (4.5), так и (4.7). Однако это возможно только в том случае, когда уравнения (4.7) и (4.5) тождественно совпадают. Тогда очевидна взаимосвязь констант подобия, которая в рассматриваемом случае выражается следующим образом: $C'_1/C_1 = C'_a C'_1/C'^2_l$; $C'_a C'_\tau = C'_\lambda C'_1/C'_l$. Возвращаясь теперь к размерным переменным с помощью соотношений (4.2), (4.3), получим

$$a'\tau'/l'^2 = a''\tau''/l''^2, \quad \alpha' l'/\lambda = \alpha'' l''/\lambda''.$$

Следовательно, безразмерные комплексы $Bi = \alpha\, l/\lambda$ (*критерий Био*) и $Fo = a\tau\ /l^2$ (*критерий Фурье*), критерии подобия для подобных явлений должны сохранять одно и то же значение.

4.5. Критерии подобия процессов теплоотдачи

Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена позволяют получить безразмерные комплексы, характеризующие процесс теплоотдачи.

Остановимся на более общем методе, который применим и в том случае, когда математического описания явления еще не существует.

Из опыта известно, что интенсивность теплоотдачи при обтекании твердого тела потоком однофазной химически однородной изотропной несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами (при отсутствии переноса теплоты излучением) зависит от следующих восьми размерных величин, входящих в уравнения, описывающие процесс теплоотдачи при условии пренебрежения работой сил внутреннего трения, переходящей в теплоту:

- характерного размера тела l, м [L];
- скорости потока, омывающего тело w, м/с [LT^{-1}];
- плотности жидкости (или газа) ρ, кг/м^3 [$L^{-3}M$];
- динамической вязкости μ, Па·с [$L^{-1}MT^{-1}$];
- теплопроводности λ, Вт/(м·К) [$LMT^{-3}\,\theta^{-1}$];
- удельной теплоемкости c, Дж/(кг·К)[$L^2T^{-2}\theta^{-1}$].
- подъемной силы, отнесенной к единице массы $g\beta\Delta T$, м/с^2 [LT^{-2}];
- коэффициента теплоотдачи α, Вт/(м^2·К) [$MT^{-3}\theta^{-1}$].

За основные (первичные) величины здесь приняты: длина L, масса M, время T и температура θ.

Безразмерные комплексы процесса теплоотдачи должны быть представлены произведением степеней основных размерных величин, существенных для процесса,

$$l^s w^T \rho^u \mu^v \lambda^\omega c^x (g\beta\Delta T)^y \alpha^z,$$

где s, T, u, v, ω, x, y, z – неизвестные показатели степени. Если в приведенном выражении заменить каждую величину соответствующей ей размерностью, то для размерности самой переменной получим:

$$L^s[LT^{-1}]^T[ML^{-3}]^u[ML^{-1}T^{-1}]^v[MLT^{-3}\theta^{-1}]^\omega\,[L^2T^{-2}\theta^{-1}]^x[LT^{-2}]^y[MT^{-3}\theta^{-1}] =$$
$$= L^{(s+T-3u-v+\omega+2x+y)} \cdot T^{-(T+v+3\omega+2x+2y+3z)} \cdot M^{(u+v+\omega+z)} \cdot \theta^{-(\omega+x+z)}.$$

Условием безразмерности выражения в целом является равенство нулю сумм показателей степени при каждой размерности. Для определения показателей степени необходимо составить уравнения, число которых должно быть равно числу основных единиц измерения:

для длины $s+T-3u-v+\omega+2x+y=0;$
для времени $T+v+3\omega+2x+2y+3z=0;$
для массы $u+v+\omega+z=0;$
для температуры $\omega+x+z=0.$ (4.8)

Число показателей степени, для которых значения могут быть выбраны произвольно, равно 4 (8 - 4). Пусть, например, это x, y, z и v. Тогда из уравнений (4.8)

$$s = x + y + z - v;$$
$$T = x - 2y - v;$$
$$u = x - v;$$
$$\omega = -(x + z)$$

и общее выражение для безразмерных переменных примет вид

$$l^{(x+y+z-v)}\,\omega^{(x-2y-v)}\rho^{(x-v)}\mu^{v}\lambda^{-(x+z)}\,c^{x}(g\beta\Delta T)^{y}\,\alpha^{z}.$$

С учетом свободы выбора x, y, z, v можно получить четыре следующих критерия подобия:

1) при $z = 1, x = y = v = 0$ число Нуссельта $Nu = \alpha l/\lambda$;
2) при $v = -1, x = y = z = 0$ критерий Рейнольдса $Re = w\rho l/\mu = wl/\upsilon$;
3) при $x = 1, v = 1, y = z = 0$ критерий Прандтля $Pr = \mu c/\lambda = \upsilon/a$;
4) при $y = 1, v = -2, x = z = 0$ критерий Грасгофа

$$Gr = (g\beta\Delta T)l^3\rho^2\mu^{-2} = g\beta\Delta T\, l^3\upsilon^{-2},$$

где υ – кинематическая вязкость ($\upsilon = \mu/\rho$).

При выборе любых других конечных значений x, y, z и v определяются безразмерные комплексы, представляющие лишь различные степенные комбинации из тех, которые уже получены. Число критериев подобия рассматриваемого процесса $(m - n) = 4$, что соответствует сформулированному выше общему принципу теории размерности.

Наряду с полученными критериями подобия в теории подобия используются также следующие безразмерные комплексы.

1) Число Стантона $St = Nu/(Re\,Pr) = \alpha/(c\rho w)$ характеризует соотношение между изменением температуры жидкости по длине обтекаемого тела и температурным напором.

2) Критерий Пекле $Pe = Re\,Pr = wl/a$.

Так как $Pe = \rho cw\,\Delta T/(\lambda\Delta T/l)$, этот критерий характеризует отношение плотности теплового потока, переносимого движущейся жидкостью, к плотности теплового потока, переносимого теплопроводностью.

3) Критерий Релея $Ra = Gr\,Pr = gl^3\beta\Delta T/(v\,a)$.

Конкретная форма безразмерных комплексов в каждом случае выбирается с учетом физического смысла.

Число Nu содержит неизвестную функцию – коэффициент теплоотдачи α и является определяемым безразмерным комплексом. Поскольку число Nu определяется выражением $\alpha\Delta T/[(\lambda/l)\Delta T]$, его можно рассматривать как отношение плотности теплового потока, переносимого путем конвекции, к плотности теплового потока, проходящего через плоский неподвижный слой жидкости толщиной l в условиях теплопроводности.

От определяющих критериев подобия Re, Gr и Pr (кроме числа Nu) зависят безразмерная скорость, температура и давление. Эти определяемые безразмерные комплексы появляются при анализе размерности в тех случаях, когда в число исходных размерных величин кроме α входят неизвестные функции (скорость, температура и перепад давлений).

Поскольку каждый из критериев соответствует определенному дифференциальному уравнению, физический смысл критериев подобия связан с физической сущностью уравнений конвективного теплообмена. Например, критерий Re характеризует отношение сил инерции, действующих в жидкости ($\rho w^2/l$), к силам внутреннего трения ($\mu w/l^2$). Критерий Gr можно рассматривать как безразмерный комплекс, пропорциональный подъемной силе $\rho g\beta\Delta T$, силе инерции и обратно пропорциональный квадрату сил внутреннего трения, вызванных вязкостью $\rho g\beta\Delta T(\rho\, w^2/l)/(\mu\, w/l^2)^2$.

Критерий Pr – безразмерный физический параметр, зависящий от μ, λ и c и характеризующий связь скоростного и температурного поля в жидкости. Для газов $0,6 < Pr < 1$; для капельных жидкостей (вода, различные органические и неорганические жидкости) $1 < Pr < 200$; для очень вязких жидкостей значение Pr достигает нескольких тысяч. Для жидкометаллических теплоносителей $0,005 < Pr < 0,05$.

Критерии подобия процессов теплоотдачи были выведены в предположении, что физические свойства среды постоянны. В действительности величины λ, μ, c и ρ зависят от температуры и давления, и их изменение влияет на интенсивность теплоотдачи. При перемещении свойствах жидкостей система уравнений, описывающих процессы теплоотдачи, становится более сложной. Влияние на процесс теплоотдачи изменения физических свойств жидкости при изменении её температуры может быть учтено введением в критериальное уравнение безразмерных отношений

$$(\mu_{cm}/\mu_{ж}),\ (\lambda_{cm}/\lambda_{ж}),\ (\rho_{cm}/\rho_{ж}),\ (c_{cm}/c_{ж}).$$

Это влияние становится особенно существенным при больших разностях $|T_{cm} - T_{ж}|$, а также в околокритической области состояния вещества.

Учет влияния всех аргументов достаточно сложен, поэтому при расчете процесса теплоотдачи, например капельной жидкости, принимается во внимание только наиболее сильно изменяющаяся с температурой динамическая вязкость.

При построении критериальных уравнений подобия величины μ, λ, c и ρ относят к некоторой определяющей температуре, которой может быть например, среднемассовая температура жидкости $T_{ж}$ при теплоотдаче в

шение времени протекания процесса (τ) ко времени изменения температурного поля в теле (l^2/a).

В связи с этим необходимо, чтобы соотношения между эффектами, существенными для развития процесса, были одинаковы.

Чтобы использовать теорию подобия, необходимо иметь математическое описание явления. Критерии подобия можно получить из дифференциальных уравнений, описывающих явление.

Практически важно, что критерии подобия, полученные из исходных дифференциальных уравнений, описывающих явление, и соотношений, представляющих результаты их решения, одни и те же.

4.3. Основные теоремы теории подобия

Основные теоремы теории подобия можно сформулировать следующим образом.

1) У подобных явлений критерии подобия равны.

Определяющими критериями подобия в рассмотренном примере являются критерии Bi и Fo, а также безразмерная координата x/l.

Определяемый безразмерный комплекс для процесса теплопроводности может быть представлен в виде отношения

$$\theta = [T(x, \tau) - T_{ж}]/(T_1 - T_{ж}),$$

где $T(x, T)$ – определяемая функция.

2) Связь между определяемыми и определяющими безразмерными комплексами может быть представлена в виде некоторой функции от критериев подобия.

Критериальное уравнение подобия выражается в виде

$$\theta = \theta\,(Bi, Fo, x/l). \qquad (4.4)$$

По результатам обработки опытных данных, полученных на модели, можно определить конкретный вид функции (4.4) и таким образом обобщить полученные результаты, распространив их на все подобные между собой явления. Полученную зависимость затем можно использовать для расчета распределения температур в натурном объекте. Она будет справедлива в том диапазоне изменения определяющих критериев подобия, который был исследован в опытах на модели.

3) Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений состоят в подобии условий однозначности и равенстве одноименных определяющих критериев.

Значение теории подобия особенно велико для изучения таких явлений, как теплообмен, поскольку исследование этого процесса основано на экспериментальных данных. Согласно теории подобия, в опытах должны измеряться те величины, которые входят в состав критериев подобия.

4.2. Критерии подобия

Критерии подобия с физической точки зрения выражают соотношения между различными физическими эффектами.

Константы подобия – отношения однородных физических величин в соответственных точках модели и натурного объекта.

Критерии подобия – безразмерные числа, составленные из размерных физических величин, определяющих рассматриваемые физические явления, характеризующие данное явление.

Например, критерий Био можно рассматривать как отношение теплового сопротивления стенки (l/λ) к термическому сопротивлению теплоотдачи ($1/\alpha$), в то время как критерий Фурье рассматривается как отношение времени протекания процесса (τ) ко времени изменения температурного поля в теле (l^2/a).

В связи с этим необходимо, чтобы соотношения между эффектами, существенными для развития процесса, были одинаковы.

Чтобы использовать теорию подобия, необходимо иметь математическое описание явления. Критерии подобия можно получить из дифференциальных уравнений, описывающих явление.

Практически важно, что критерии подобия, полученные из исходных дифференциальных уравнений, описывающих явление, и соотношений, представляющих результаты их решения, одни и те же.

4.3. Основные теоремы теории подобия

Основные теоремы теории подобия можно сформулировать следующим образом.

1) У подобных явлений критерии подобия равны.

Определяющими критериями подобия в рассмотренном примере являются критерии Bi и Fo, а также безразмерная координата x/l.

Определяемый безразмерный комплекс для процесса теплопроводности может быть представлен в виде отношения

$$\theta = [T(x, \tau) - T_{ж}]/(T_1 - T_{ж}),$$

где $T(x, T)$ – определяемая функция.

2) Связь между определяемыми и определяющими безразмерными комплексами может быть представлена в виде некоторой функции от критериев подобия.

Критериальное уравнение подобия выражается в виде

$$\theta = \theta\,(Bi, Fo, x/l). \qquad (4.4)$$

По результатам обработки опытных данных, полученных на модели, можно определить конкретный вид функции (4.4) и таким образом обобщить полученные результаты, распространив их на все подобные между собой явления. Полученную зависимость затем можно использовать для расчета распределения температур в натурном объекте. Она будет справедлива в том диапазоне изменения определяющих критериев подобия, который был исследован в опытах на модели.

3) Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений состоят в подобии условий однозначности и равенстве одноименных определяющих критериев.

Значение теории подобия особенно велико для изучения таких явлений, как теплообмен, поскольку исследование этого процесса основано на экспериментальных данных. Согласно теории подобия, в опытах должны измеряться те величины, которые входят в состав критериев подобия.

Здесь предполагается несжимаемость среды (ρ = const). В общем случае, при больших перепадах давления и значительных скоростях, к уравнению (5.7) добавляются еще два слагаемых, характеризующих работу сжатия и теплоту трения. Таким образом, задача конвективного теплообмена описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (5.3) – (5.6). Эта система имеет бесконечное множество решений. Чтобы получить единственное решение, систему необходимо дополнить условиями однозначности:

1) *геометрическими условиями*, задающими размеры и форму поверхности твердого тела, омываемого потоком жидкости, газа или пара. Такими условиями могут быть, например, диаметр d и длина l канала;

2) *временными условиями*, определяющими изменение процессов теплоотдачи во времени. При изучении конвективного теплообмена обычно задача предполагается стационарной, т. е. режим процесса во времени не изменяется;

3) *граничными условиями*, которые определяют распределение температур и скоростей на поверхности тела, участвующего в теплообмене. Очень часто распределение температур и скоростей на поверхности тела принимается равномерным. В этом случае коэффициент теплоотдачи будет одинаковым для всей поверхности;

4) *физическими условиями*, которые содержат данные о параметрах потока, входящих в дифференциальные уравнения: коэффициенте объемного расширения β, разности температур стенки и потока ΔT и др.

Аналитическое решение системы уравнений (5.3) – (5.6), описывающей процесс конвективного теплообмена, возможно лишь для некоторых весьма специфических случаев. Обычно это связано с возможностью разделения задач движения (5.3) – (5.4) и теплообмена (5.5) – (5.6). О таких задачах говорят как о несвязанных или несопряженных. В большинстве случаев конвективного теплообмена процессы движения и теплообмена сопряжены. При этом возможно только численное решение задачи конвективного теплообмена на ЭВМ или приближенное решение с использованием различного рода упрощающих предположок. В настоящее время аналитические методы исследования конвекции с использованием понятий пограничных слоев разработаны до такой степени, что на долю экспериментальных исследований остается лишь небольшая доля работы. Поэтому мечта все чаще остается его классическая роль – проверка достоверности теоретической модели. Это, конечно, не означает, что прямые опытные данные утратили значение для инженерной практики, но сфера полной зависимости от них значительно сузилась. Теплотехники представляют теперь явление конвекции намного лучше и могут с уверенностью анализировать решать задачи, опытное исследование которых длительно и дорого-

единственно возможным. При ν/a = 1 толщина вязкого подслоя $\delta_{в.п}$ примерно равна толщине теплового подслоя $\delta_{т.п}$, при ν/a > 1 $\delta_{в.п} > \delta_{т.п}$, при ν/a < 1 $\delta_{в.п} < \delta$.

Для газов, имеющих малую плотность ($\upsilon/a \sim 1$), интенсивность теплоотдачи, даже в сравнении с вязкими жидкостями, в большинстве случаев невысокая, что объясняется низкими значениями теплоёмкости и теплопроводности большей части используемых в технике газов.

Приведенные сведения о формировании гидродинамического пограничного слоя справедливы для плоских тел с удобнообтекаемой входной кромкой при невысокой степени турбулентности набегающего потока. Между тем, на формирование пограничного слоя оказывают влияние форма входной кромки, степень турбулентности набегающего потока, а также форма и размеры всего тела. В некоторых случаях, например у удобнообтекаемых тел, ламинарный пограничный слой занимает всю поверхность или большую её часть, в других случаях переход ламинарного течения в турбулентное затягивается или, наоборот, осуществляется скачкообразно. При высокой степени турбулентности набегающего потока или при неудобнообтекаемой входной кромке тела на его поверхности сразу образуется турбулентный пограничный слой, интенсивность теплоотдачи в котором выше, чем в ламинарном пограничном слое.

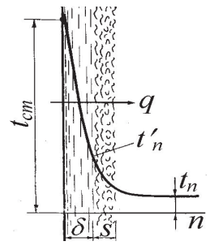


Рис. 5.3. Характер изменения температур в пограничном слое теплоносителя

Конечной целью любого теплотехнического расчета конвективного теплообмена является определение плотности теплового потока на поверхности $q_{ст}$. Рассмотрим с этой целью поле температур в турбулентном потоке. Характер изменения температур показан на рис. 5.3. Из рисунка видно, что в ламинарном подслое толщиной δ температура потока резко меняется от температуры стенки $T_{ст}$ до температуры T'_n. В турбулентном подслое толщиной s она падает от T'_n до температуры потока T_n. Учитывая, что через ламинарный подслой тепло передается теплопроводностью, плотность теплового потока можно определять на основании следующего уравнения:

$$q_{ст} = \lambda(T_{ст} - T'_n)/\delta = -\lambda(grad\ T)_{ст}. \qquad (5.1)$$

Измерить $(grad\ T)_{ст}$ или δ трудно,так как эти параметры зависят от режима движения, размеров и состояния поверхности нагрева, от условий входа потока в канал и др. Поэтому конвективный теплообмен рассчитывают на основе закона Ньютона–Рихмана:

$$q_{ст} = \alpha(T_{ст} - T_n). \qquad (5.2)$$

7.1.2. Теплообмен в термическом начальном участке круглой трубы

Относительная длина термического начального участка

$$l_{н.т}/d = 0{,}055Re,$$

где $l_{н.т}$ – отсчитываемая от входа в трубу длина участка; $Re = w_{ср}d/a$; $a = \lambda/c\rho$.Таким образом, длина $l_{н.т}$ зависит от диаметра d трубы, скорости $w_{ср}$ и физических свойств жидкости (λ, c, ρ). Будем по-прежнему полагать течение гидродинамически стабилизированным, а теплообмен осесимметричным. Тогда исходное дифференциальное уравнение

$$\partial^2 T/\partial r^2 + (1/r)(\partial T/\partial r) + (\partial^2 T/\partial x^2) = (w_x/a)(\partial T/\partial x). \qquad (7.10)$$

Приведем уравнение (7.10) к безразмерному виду, для чего введем новые переменные:

$$r^+ = r/R;\ \ u^+ = w_x/V;\ x^+ = x/(R\cdot Re\cdot Pr);\ \ \vartheta = (T_{ст} - T)/(T_{ст} - T_0),$$

где V – средняя скорость движения жидкости в трубе; T_0 – однородная температура жидкости во входном сечении трубы.

Подставляя эти безразмерные переменные в уравнение (7.10), полагая, что профиль скорости гидродинамически стабилизированного ламинарного течения является параболическим и определяется по уравнению

$$u^+ = 2[1 - (r^+)^2],$$

получаем окончательную форму диффренциального уравнения энергии:

$$\partial^2\vartheta/\partial(r^+)^2 + (1/r^+)\,\partial\vartheta/\partial r^+ = [1 - (r^+)^2]\,\partial\vartheta/\partial x^+ \qquad (7.11)$$

при граничных условиях

$$\vartheta(0, r^+) = 1;\ \ \vartheta(x^+, 1) = 0.$$

Плотность теплового потока на стенке в произвольном сечении x^+ можно определить по наклону профиля температуры у стенки трубы:

$$q_{ст}(x^+) = -\lambda(\partial T/\partial r)_{r=R} = \lambda[(T_{ст} - T_0)/R](\partial\vartheta/\partial r^+)_{r+=1}.$$

При расчетах теплообменников пользуются осредненными по длине трубы коэффициентами теплоотдачи. Поэтому для практики больший интерес представляет среднее число Нуссельта:

$$Nu = (1/x^+)\int_0^{x+} Nu_x\, d\,x^+. \qquad (7.12)$$

Решение уравнения (7.11) при указанных граничных условиях:

$$q_{ст} = (2\lambda/R)\sum_{n0}^{\infty} G_n(T_{ст} - T_0)\,exp(-\mu_n^2 x^+), \qquad (7.13)$$

где $G_n = (G_n/2)(d\psi_n/dr^+)_{r+=1}$.

Здесь $C = 0{,}52$ и $n = 0{,}25$ при $10^2 \le Gr \le 10^9$ и $C = 0{,}106$, $n = 0{,}33$ при $10^9 \le Gr \le 10^{13}$.

За определяющую температуру здесь принята средняя температура пограничного слоя, т. е. $T_{оп} = (T_n + T_{ст})/2$, а за определяющий размер при-нятьі: для вертикальных плит их высота, а для горизонтальных труб – их внешний диаметр.

Пример 6.1. Определить потерю теплоты вертикальным неизолированным паропроводом диаметром d = 100 мм и высотой H = 4 м при конвекции, если температура наружной стенки $T_{ст}$= 170 °С, а температура среды (воздуха) T_n = 30 °С.

При T_n = 30 °С λ_n = 0,0267 Вт/(м·°С); $\beta = (T_{оп} + 273)^{-1}$; ν_n = = 16,0 10^{-6} м^2/с; Pr_n = 0,70; $Pr_n/Pr_{ст}$ = 1; тогда

$$Gr = \beta H^3 g_B \Delta T/\nu^2 = [303^{-1}\cdot 4^3\cdot 9{,}81\ (170 - 30)]/(16{,}0\cdot 10^{-6})^2 = 1{,}135\cdot 10^{12},$$

$$Gr\,Pr = 1{,}135\cdot 10^{12}\cdot 0{,}70 = 8{,}0\cdot 10^{11}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (6.8), получаем:

$$Nu = 0{,}15\ (8{,}0\cdot 10^{11})^{0{,}33} = 1400,$$

откуда $\alpha = Nu\,\lambda_n/H = 1400\cdot 0{,}0267/4 = 9{,}3$ Вт/(м^2·°С).

Искомая потеря теплоты

$$Q = \alpha F\,(T_{ст} - T_n) = 9{,}3\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1 - 4\cdot(170 - 30) = 1620\ \text{Вт}.$$

6.4. Теплообмен свободной конвекцией в ограниченном объеме

В ограниченном объеме теплообмен свободной конвекцией между поверхностью твердого тела и средой имеет некоторые особенности. Прежде всего, характер перемещения среды зависит от величины, формы и расположения не только нагретых, но и холодных поверхностей. Для одной и той же системы тел в зависимости от расположения нагретой поверхности мениска и характер движения среды. Замечено также, что количество теплоты, переносимое от горячей поверхности к холодной через вертикальный слой жидкости, иногда увеличивается, если простран-ство между вертикальными стенками разделено тонкими горизонтальными перегородками на меньшие объемы. Экспериментально установлено, что в условиях ограниченного объема передача теплоты в значительной степени осуществляется теплопроводностью чере3 пограничный слой. Поэтому расчет теплообмена свободной конвекцией в ограниченном объеме проводится по формулам, полученным для расчетов передачи тепла теплопроводностью веществ в эти формулы вкиваляентного коэффициента теплопроводности $\lambda_{эк} = \varepsilon_к\,\lambda$, где $\varepsilon_к$ – поправочный коэффициент.

В приближенных расчетах для $Gr \cdot Pr > 10^3$ можно принять зависимость

$$\varepsilon_к = 0{,}18(Gr\,Pr)^{0{,}25}.$$

7. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

Различают два типа конвективного теплообмена при вынужденном движении теплоносителей: в трубах (каналах) и при внешнем обтекании тел.

Размеры динамического и теплового пограничных слоев непрерывно изменяются по мере продвижения потока вдоль омываемой им стенки. При движении газов (жидкостей) в трубах или каналах максимальный размер гидродинамического пограничного слоя лимитируется радиусом трубы (канала).

Поэтому по длине трубы выделяют гидродинамический начальный участок или участок стабилизации, в пределах которого пограничные слои формируются независимо друг от друга, и область полностью развитого течения, где динамические слои от противоположных стенок сомкнулись на оси трубы и более не изменяются.

В области развитого или, как еще говорят, стабилизированного течения устанавливается неизменный профиль скорости, уравнение которого определяется геометрией канала и режимом течения.

7.1. Аналитические решения задачи конвективного теплообмена в каналах

В цилиндрической системе координат уравнение энергии для ламинарного течения в круглой трубе имеет вид

$$(1/r)\partial(r\partial T/\partial r)/\partial r = (w_x/a)\,\partial T/\partial x. \qquad (7.1)$$

Полностью развитое ламинарное течение в круглой трубе. Опыты показали, что для некоторых способов обогрева стенки в трубе устанавливается безразмерный профиль температуры по сечению, не изменяющийся по длине трубы.

Если среднемассовую температуру жидкости (газа) определить из выражения

$$T_м = [2/(VR^2)]\int_0^R w_x \cdot T \cdot r \cdot dr, \qquad (7.2)$$

где V – средняя скорость движения жидкости в трубе, и выразить разность между температурами стенки и потока в данной точке (т. е. профиль температуры) в долях перепада $T_{ст} - T_м$, то можно записать следующее условие существования полностью развитого профиля температуры:

$$\partial\,[(T_{ст} - T)/(T_{ст} - T_м)]/\partial\, x = 0.$$

При плотности теплового потока на стенке трубы $q = \alpha\,(T_{ст} - T_ц) =$ $=$ const и α = const получаем $T_{ст} - T_м$ = const.

Следовательно,

$$d\,T_{ст}/d\,x - d\,T_м/d\,x = 0 \quad \text{или} \quad d\,T/d\,x = d\,T_{ст}/d\,x = d\,T_м/d\,x. \qquad (7.3)$$

При постоянной температуре стенки $dT_{ст}/dx = 0$ и

$$d\,T/d\,x = [(T_{ст} - T)/(T_{ст} - T_м)]\,d\,T_м/d\,x\,. \qquad (7.4)$$

7.1.1. Решение уравнения энергии при постоянной плотности теплового потока на стенке

Исходное уравнение

$$(1/r)\,\partial(r\partial\,T/\partial\,r)/\partial\,r = (w_x/a)(d\,T_м/d\,x), \qquad (7.5)$$

граничные условия

$$T = T_{ст}\,(x) \text{ или } q = -\lambda\partial\,T/\partial\,r = \text{const при } r = R,\ \partial\,T/\partial\,r = 0 \text{ при } r = 0.$$

Уравнение профиля гидродинамически стабилизированного течения в круглой трубе имеет вид

$$w_x = 2V(1 - r^2/R^2),$$

где V – средняя скорость движения жидкости в трубе.

Подставляя это выражение в уравнение (7.5), имеем:

$$(1/r)\,\partial(r\partial T/\partial r)/\,\partial r = (2V/a)\,(1 - r^2/R^2)\,(d\,T_м/d\,x).$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по r и определив постоянные интегрирования из граничных условий, получим:

$$T = T_{ст}(x) - (2V/a)\,(d\,T_м/d\,x)[(3/16)R^2 + r^4/4]. \qquad (7.6)$$

Уравнение (7.6) и является искомым уравнением для профиля температуры. Среднюю массовую температуру потока равна

$$T_м = [2/(VR^2)]\int_0^R w_x T r dr = T_{ст}(x) - (11/96)(2V/a)\,(d\,T_м/d\,x)R^2, \qquad (7.7)$$

а плотность теплового потока на стенке

$$q_{ст} = -\lambda(\partial\,T/\partial\,r)\,\big|_{r=R} = 0{,}5RV\rho c\,dT_м/d\,x. \qquad (7.8)$$

Тогда

$$\alpha = q_{ст}/(T_{ст} - T_м) = 96\lambda/(44R) = 48\lambda/(11D) = 4{,}364\lambda\,/D, \qquad (7.9)$$

где $D = 2R$ – диаметр трубы.

Таким образом, выражение для α оказалось довольно простым. Использовав коэффициент теплоотдачи, можно записать решение в комплексной форме, так как оно не зависит от абсолютных значений температур, а величина $q_{ст}$ прямо пропорциональна температурному напору.

$$\rho(Dw_x/\partial\tau) = \rho g_x - \partial p/\partial x + \mu[(\partial^2 w_x/\partial x^2) + (\partial^2 w_x/\partial y^2) + (\partial^2 w_x/\partial z^2);$$
$$\rho(Dw_y/\partial\tau) = \rho g_y - \partial p/\partial y + \mu[(\partial^2 w_y/\partial x^2) + (\partial^2 w_y/\partial y^2) + (\partial^2 w_y/\partial z^2); \qquad (5.4)$$
$$\rho(Dw_z/\partial\tau) = \rho g_z - \partial p/\partial z + \mu[(\partial^2 w_z/\partial x^2) + (\partial^2 w_z/\partial y^2) + (\partial^2 w_z/\partial z^2).$$

Здесь $D/\partial\tau = \partial/\partial\tau + w_x\,(\partial/\partial x) + w_y\,(\partial/\partial y) + w_z\,(\partial/\partial z)$ – полная или субстанциональная производная, характеризующая скорость изменения параметра в точке, движущейся вместе с жидкостью; w_x, w_y, w_z – проекции скорости на оси координат; g_x, g_y, g_z – проекции ускорения свободного падения на оси координат.

Уравнение (5.3) называют уравнением неразрывности (сплошности), оно выражает закон сохранения массы. Уравнения Навье–Стокса (5.4) представляют собой закон сохранения количества движения (импульса). Поскольку у поверхности твердого тела имеется тонкий (динамический пограничный) слой малоподвижной жидкости, то для него справедлив закон Фурье:

$$q_{ст} = -\lambda(\partial\,T/n)_{n=0},$$

где n – нормаль к поверхности тела.

Приравнивая правые части уравнений Фурье и (5.1), получим дифференциальное уравнение теплообмена, описывающее процесс теплоотдачи на поверхности тела ($n = 0$);

$$\alpha = -[\lambda_ж/(T_{ст} - T_ж)]\cdot(\partial\,T/n)_{n=0}. \qquad (5.5)$$

Таким образом, для того чтобы найти коэффициент теплоотдачи, необходимо знать градиент температуры в жидкости, т. е. знать температурное поле потока. Уравнение энергии, описывающее закономерности изменения температур в потоке газа (жидкости), выводится аналогично уравнению теплопроводности. Как известно, для случая твердого тела или неподвижной среды уравнение теплопроводности имеет вид

$$\partial\,T/\partial\tau = a[(\partial^2 T/\partial x^2) + (\partial^2 T/\partial y^2) + (\partial^2 T/\partial z^2)].$$

Здесь $\partial\,T/\partial\tau$ характеризует так называемую локальную или местную скорость изменения температуры, т. е. скорость изменения температуры некоторого объема газа (жидкости), находящегося в данной точке в данный момент времени. Перенос тепла движущейся средой при конвективном теплообмене описывается выражением

$$w_x(\partial T/\partial x) + w_y(\partial T/\partial y) + w_z(\partial T/\partial z).$$

Поэтому уравнение энергии при конвективном теплообмене для случая движения газа (жидкости) с умеренными скоростями принимает вид

$$\partial\,T/\partial\tau + w_x(\partial T/\partial x) + w_y(\partial T/\partial y) + w_z(\partial T/\partial z) = a[(\partial^2 T/\partial x^2) + (\partial^2 T/\partial y^2) + (\partial^2 T/\partial z^2)], \quad (5.6)$$

или

$$DT/\partial\tau = a\nabla^2 T. \qquad (5.7)$$

Следует отметить, что величина α меняется в очень широких пределах. Коэффициент теплоотдачи является гидродинамической характеристикой системы, тогда как разность температур – величина, несомненно, термодинамическая. Смысл применения уравнения (5.2) состоит в том, что во многих случаях плотность теплового потока $q_{ст}$ почти прямо пропорциональна $T_{ст} - T_ж$. Но весьма часто встречаются и нелинейные задачи, когда коэффициент теплоотдачи α зависит от разности температур. В этом случае уравнение (5.2) остается справедливым, однако использование коэффициента теплоотдачи при решении таких задач уже не столь целесообразно. Приравняв уравнения (5.1) и (5.2), можно получить, что

$$\alpha \approx \lambda_ж/\delta.$$

Это соотношение удобно использовать для качественной оценки влияния некоторых факторов на величину коэффициента теплоотдачи конвекцией. Так, например, увеличение скорости движения потока приведет к уменьшению турбулентности и уменьшению толщины ламинарного подслоя, а следовательно, к увеличению коэффициента теплоотдачи. Увеличение вязкости потока приводит, наоборот, к возрастанию δ. Меняя коэффициент теплопроводности потока, можно при прочих равных условиях менять величину коэффициента теплоотдачи конвекцией.

Физические свойства теплоносителей зависят от температуры, которая особенно сильно меняется по толщине теплового слоя. Поэтому изменение физических свойств приводит к температурной неизбежно приведет также и к изменению скоростного поля динамического пограничного слоя. Вследствие этого интенсивность теплообмена между потоком и стенкой оказывается различной в условиях нагрева и охлаждения потока. Величина плотности теплового потока оказывается зависящей от направления передачи тепла.

5.2. Математическое описание конвективного теплообмена

Конвективный теплообмен определяется не только тепловым, но и гидродинамическими явлениями. Поэтому при решении практически всех задач конвективного тепло- и массообмена вначале должна быть решена гидродинамическая задача, если только она не является существенно зависящей от соответствующей задачи тепло- или массообмена.

Математическое описание конвекции представляет собой объединение законов сохранения с соответствующими законами переноса. Гидродинамическое состояние системы выясняется решением известных из курса механики жидкостей и газов уравнений неразрывности и движения, которые для жидкости с постоянной вязкостью имеют вид:

$$\partial\rho/\partial\tau + (\partial/\partial x)(\rho w_x) + (\partial/\partial y)(\rho w_y) + (\partial/\partial z)(\rho w_z) = 0, \qquad (5.3)$$

6.3. Экспериментальные зависимости для конвективного теплообмена в большом объеме

Исследования интенсивности теплообмена в условиях свободного движения были проведены с различными телами и жидкостями. В результате обработки опытных данных получены обобщенные зависимости для средних значений коэффициента теплоотдачи. В этих формулах в качестве определяющей температуры принята температура окружающей среды T_n. В качестве определяющего размера для горизонтальных труб принят диаметр d, а для вертикальных поверхностей – высота H. Поскольку закономерности свободной конвекции существенно зависят от разности температур среды, то для учета влияния резкого изменения температур в пределах пограничного слоя введено отношение Pr/Pr_{cm}, где Pr_{cm} определяют по температуре стенки. Согласно данным М. А. Михеева и И. М. Михеевой, закономерность средней теплоотдачи для горизонтальных труб диаметром d при $10^3 \le Gr\,Pr \le 10^8$ имеет вид:

$$Nu = 0{,}5(Gr\,Pr)^{0,25}(Pr/Pr_{cm})^{0,25}, \qquad (6.6)$$

а закономерность средней теплоотдачи для вертикальных поверхностей (трубы, пластины) следующая:

а) при $10^3 \le Gr\,Pr \le 10^9$ (ламинарный режим)

$$Nu = 0{,}76(Gr\,Pr)^{0,25}(Pr/Pr_{cm})^{0,25}; \qquad (6.7)$$

б) при $Gr\,Pr \ge 10^3 \ldots 10^9$ (турбулентный режим)

$$Nu = 0{,}15(Gr\,Pr)^{1/3}(Pr/Pr_{cm})^{1/4}. \qquad (6.8)$$

Некоторое отличие коэффициентов этих уравнений от полученных ранее в теоретическом анализе объясняется тем, что при решении уравнений пограничных слоев теплофизические свойства среды принимались неизменными. Для газов Pr = const, а $Pr/Pr_{cm} = 1$, потому все приведенные выше расчетные формулы упрощаются.

Формула (6.6) применима и для расчета коэффициента теплоотдачи горизонтальных плит. Если при этом нагретая поверхность обращена вверх, то вычисленное значение коэффициента теплоотдачи следует увеличить на 30 %. Если же поверхность обращена вниз, то величину α следует уменьшить на 30 %. За основной размер в этих случаях принимают наименьший размер плиты. Необходимо иметь в виду, что из уравнений (6.6) – (6.8) можно найти лишь средние значения коэффициента теплоотдачи.

Для определения коэффициентов теплоотдачи при свободном движении щелочных и тяжелых металлов, а также их сплавов можно воспользоваться следующим уравнением:

$$Nu = C\,Gr^n\,Pr^{0,4}.$$

5.3. Приложение теории пограничного слоя к явлениям теплообмена

Значительный успех в исследовании течений вязкой жидкости был достигнут после того, как для больших чисел Re на основе теории гидродинамического слоя Л. Прандтля удалось существенно упростить систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена.

Для газов и многих жидкостей коэффициент вязкости мал (например, для воды при 293 К $\mu = 10^{-3}$ Па·с, а для воздуха $\mu = 18\cdot10^{-6}$ Па·с). Однако в непосредственной близости от поверхности обтекаемого тела вязкость жидкости (газа) имеет существенное значение, так как реальная (вязкая) жидкость не скользит по поверхности твердого тела, а прилипает к ней. Переход от нулевой скорости на поверхности тела к скорости внешнего течения совершается в очень тонком динамическом пограничном слое. В связи с этим все поле течения можно условно разделить на тонкий слой жидкости (или газа) у поверхности тела (пограничный слой) и область внешнего течения.

Согласно элементарному закону трения касательное напряжение между двумя слоями движущейся жидкости пропорционально градиенту скорости $\partial w_x / \partial y$, т. е. скорости деформации

$$\tau = \mu\,(\partial w_x/\partial y),$$

где ∂w_x – продольная составляющая скорости, множителем пропорциональности является динамическая вязкость μ; y – нормаль к поверхности скольжения (поперечная координата). Поскольку в области пограничного слоя значения $\partial w_x / \partial y$ велики, касательные напряжения трения и, следовательно, силы внутреннего трения в этой области несмотря на то, что μ мало, могут достигать таких больших значений, что они становятся соизмеримыми с силами инерции, действующими в жидкости. В области внешнего течения $\partial w_x / \partial y \approx 0$, поэтому вне пограничного слоя действие вязкости не проявляется, течение происходит без трения. В этой области преобладают силы инерции и жидкость можно считать невязкой.

С учетом указанных выше особенностей при достаточно больших числах Re скоростное и температурное поле в пограничном слое может быть описано более простой системой дифференциальных уравнений.

Результаты измерений показывают, что относительная толщина пограничного слоя δ / l уменьшается с увеличением скорости потока, протяженности обтекаемой поверхности и уменьшением вязкости жидкости. Поэтому при больших $Re = w_\infty l/\nu$ $\delta << 1$ (l – некоторый размер обтекаемого тела, характеризующий протяженность обтекаемой поверхности).

После приведения дифференциальных уравнений к безразмерной форме с помощью собственных масштабов оказалось возможным сделать следующие выводы.

Чтобы теплопроводность была одного порядка с конвекцией, должно выполнятся условие $\lambda \sim A^2$. Но тогда слагаемое $\partial\, T^2/\partial\, x^2$ окажется на два порядка меньшим слагаемого $\partial\, T^2/\partial\, y^2$ и, следовательно, может быть отброшено. Физически это означает, что теплопроводность жидкости в направлении течения пренебрежимо мала (обычно ее полагают равной нулю) по сравнению с теплопроводностью в направлении, перпендикулярном течению, поэтому уравнение теплового погранслоя сама преобразуется к виду

$$c_p\rho[(\partial\, T/\partial\, \tau) + w_x(\partial\, T/\partial x) + w_y(\partial\, T/\partial y)] = \lambda(\partial^2 T/\partial y^2). \qquad (5.14)$$

Граничные условия уравнений (5.11) и (5.14):

$y = 0$, $w_x = w_y = 0$, $T = T_{cm}$;

$y = \infty$, $w_x = w$, $T = T_n$.

Если температура поверхности (стенки) не задана и рассматривается случай, когда поверхность не получает и не отдает тепла (теплоизолированная), то на границе имеем условие:

$$\partial\, T/\partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Это условие заменяется на $\partial\, T/\partial\, y = -q_{cm}/\lambda$, если на границе задана плотность теплового потока. Решить уравнения для пограничных слоев много легче, чем исходные уравнения конвективного теплообмена.

6. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

6.1. Характер свободного движения потоков в большом объеме

Свободное движение газов может развиваться в сушилах, а также вокруг нагружных поверхностей отражения печей, возухопроводов, газоходов и т.п. Оно вызывается местным неравномерным нагревом или охлаждением теплоносителя.

Многочисленными опытами установлен характер движения потоков относительно поверхностей твердых тел. На рис. 6.1 показан характер свободного движения воздуха вдоль нагретой вертикальной стенки. У нижнего конца стенки наблюдается четко выраженное ламинарное движение. На некотором расстоянии от него ламинарное движение нарушается. Помимо ламинарного подслоя, примыкающего к поверхности стенки, на периферии движущегося потока появляются отдельные искривленные струйки. Затем искривление струек усиливается, и ламинарный характер движения сменяется локонообразным, а затем турбулентным.

В соответствии с формулой $\alpha \approx \lambda/\delta$ величина коэффициента теплоотдачи по высоте трубы или вертикальной стенки будет переменной.

Характер движения потоков у горизонтальных плит зависит от их размеров, а также от того, куда обращена теплоотдающая поверхность. Безусловно, приведенная выше схема движения воздуха в неограниченном объеме является далеко не единственной. В зависимости от формы тела и расположения теплоотдающих поверхностей возможны и иные схемы перемещения воздуха. Очевидно, что характер обтекания твердых тел и режим движения потока должны учитываться расчетными уравнениями.

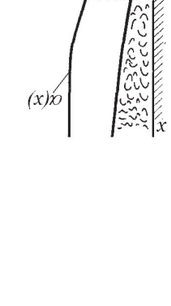
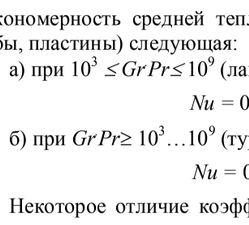
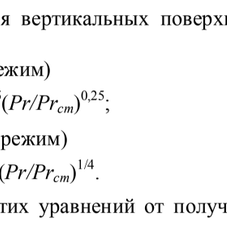


Рис. 6.1. Изменение α при свободном движении воздуха по вертикальной стенке

Интерферограмма поля течения при естественной конвекции в прямоугольной полости с нагретым выступом на нижнем основании (рис. 6.2, *а*) дает представление о характере изотерм и температурном пограничном слое на поверхности выступа и вверху основания полости.



а)



б)

Рис. 6.2. Интерферограммы поля течения в полости:
а – с нагретым выступом на нижнем основании, $Gr = 1{,}3*10^8$; $Pr = 0{,}71$;
б – конвекцией, $Gr = 5{,}8*10^4$; $Pr = 0{,}71$

Расшифровка интерферограмм позволяет получить данные о локальных коэффициентах теплоотдачи. Аналогичная интерферограмма для конвекцией полости показана на рис. 6.2, *б* (нагрет внутренний цилиндр).

6.2. Решение уравнения погранслоя для вертикальной пластины и горизонтального цилиндра

Физическая картина свободной конвекции хорошо удовлетворяет основным предпосылкам теории погранслоя, так как движение среды вызвано только разницей в температуру у поверхности тела и в отдалении от него. Отраничная скорость движения газа при свободной конвекции позволяет не учитывать тепло трения. Давление в погранслоем

слое в поперечном направлении к поверхности не изменяется (dp/dy = 0). Поскольку за пределами пограничного слоя среда неподвижна, то отсутствует изменение давления и вдоль поверхности (dp/dx = 0). Допуская, что в пограничном слое течение ламинарно, уравнения движения, энергии и неразрывности (5.11), (5.12) и (5.14) для однородной среды с неизменными физическими свойствами применительно к простейшему случаю обтекания вертикальной плоской стенки можно записать в следующем виде:

$$w_x(\partial w_x/\partial x) + w_y(\partial w_y/\partial y) = \nu(\partial^2 w_x/\partial y^2) + g_x\vartheta\,(T_{cm} - T_n)/T_n; \qquad (6.1)$$

$$\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y = 0; \qquad (6.2)$$

$$w_x(\partial\vartheta/\partial x) + w_y(\partial\vartheta/\partial y) = a\,(\partial^2\vartheta/\partial y^2). \qquad (6.3)$$

Здесь $\vartheta = (T - T_n)/(T_{cm} - T_n)$, T_n – температура потока. В уравнение движения (6.1) по сравнению с (5.11) добавлено слагаемое, характеризующее подъемную силу, причем коэффициент теплового (объемного) расширения равен

$$\beta = \rho\partial\,(1/\rho)\,\partial T = 1/T_n.$$

Такая постановка задачи предполагает настолько малое изменение плотности среды, что можно не учитывать ее сжимаемости. Однако этих изменений вполне достаточно для существования тепловой подъемной силы, соизмеримой с силами инерции и трения.

Граничные условия для уравнений (6.1) – (6.3):

$w_x = w_y = 0$, $\vartheta = 1$ при $y = 0$;

$w_x = 0$, $(\partial w_x/\partial y) = 0$, $\vartheta = 0$ при $y = \infty$.

Если ввести функцию тока $\psi\,(x, y)$ так, чтобы $w_x = \partial\psi/\partial x$ и $w_y = -\partial\psi/\partial y$, то уравнение неразрывности (6.2) будет тождественно удовлетворяться.

Введем, следуя Е. Польгаузену, новые переменные:

$$\eta = cy/(x)^{1/4};\ \ \psi(x,y) = 4\upsilon\, c\, x^{3/4}\,\zeta(\eta);\ \ \vartheta(x,y) = \theta(\eta).$$

Тогда три уравнения в частных производных (6.1) – (6.3) преобразуются в два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\zeta''' + 3\zeta\zeta'' - 2(\zeta')^2 + \theta = 0, \qquad (6.4)$$

$$\theta'' + 3Pr\,\theta'\,\zeta = 0 \qquad (6.5)$$

с граничными условиями:

при $\eta = 0$ ($y = 0$), $\zeta = \zeta' = 0$, $\theta = 1$;

при $\eta = \infty$, $\zeta' = \zeta'' = 0$, $\theta = 0$.

В уравнениях (6.4) и (6.5) $\zeta' = d\zeta/d\eta$; $\theta' = d\theta/d\eta$ и т.д.

Выражения для скоростей в новых переменных имеют вид:

$w_x = \partial\psi/\partial y = 2(\nu/x)Gr_x^{1/4}\zeta'$; $w_y = \partial\psi/\partial x = (\nu/x)\,(\eta\zeta' - 3\zeta)\,Gr_x^{1/4}/2^{1/2}$.

Дифференциальные уравнения (6.4) и (6.5) можно решить, воспользовавшись разложением в ряд по степеням η вблизи точки $\eta = 0$ или, что

Диссипативная функция должна учитываться в тех случаях, когда значение безразмерного комплекса $(k - 1)M^2_\infty\, T_\infty / (\Delta T)_0$ соизмеримо с единицей. Это означает, что теплота, выделяющаяся при трении, играет существенную роль при условиях, когда скорость набегающего невозмущенного потока w_∞ близка к скорости звука $a_\infty = (kRT)^{1/2}$, а разность температур поверхности обтекаемого тела и потока $T_{ст} - T_\infty = (\Delta T)_0$ имеет один порядок с температурой T_∞. Однако при анализе теплообмена в условиях работы металлургических печей и промышленных теплоагрегатов работой сжатия и диссипативной функцией можно пренебречь, так как в них скорости потока газа (жидкости) относительно невелики.

Следует также отметить, что для большинства случаев конвективного теплообмена приемлемым оказывается предположение о несжимаемости потока движущейся среды. Уравнения пограничного слоя (5.8) – (5.10) содержат три неизвестные функции $w_x(x,y)$, $w_y(x,y)$, $T(x,y)$. Они при ламинарном течении жидкости в пограничном слое могут быть решены различными методами. Граничные условия к системе уравнений (5.8) – (5.10) зависят от постановки задачи.

Уравнения гидродинамического и теплового пограничных слоев получаются из уравнений движения Навье–Стокса и уравнения энергии, исключая слагаемые пренебрежимо малого значения. При этом учитывается, что размеры пограничного слоя по нормали к поверхности крайне незначительны. Вывод уравнения гидродинамического пограничного слоя впервые выполнил Л. Прандтль. Этот вывод подробно излагается в курсе механики жидкостей и газов и поэтому здесь не приводится. Для случая движения потока вдоль плоской или слабо искривленной поверхности уравнения динамического пограничного слоя имеют вид (при p = const):

$$\partial w_x/\partial\tau + w_x\,(\partial w_x/\partial x) + w_y(\partial w_x/\partial y) = (1/\rho)(\partial\rho/\partial x) + \upsilon\,(\partial^2 w_x/\partial y^2), \qquad (5.11)$$

$$(\partial w_x/\partial x) + (\partial w_y/\partial y) = 0. \qquad (5.12)$$

Уравнение теплового пограничного слоя впервые получено и решено Е. Польгаузеном. Предположим, что плоская или слабо искривленная поверхность омывается двумерным потоком. Пусть температура поверхности T_{cm} постоянна, а температура жидкости на большом удалении равна T_n. Для двумерного потока в соответствии с уравнением (5.6)

$$c_p\rho[(\partial T/\partial\tau) + w_x(\partial T/\partial x) + w_y(\partial T/\partial y)] = \lambda[(\partial^2 T/\partial x^2) + (\partial^2 T/\partial y^2)]. \qquad (5.13)$$

Тогда, обозначив толщину теплового пограничного слоя через Δ, а толщину динамического пограничного слоя через δ, можно оценить порядок отдельных слагаемых уравнения энергии. С учетом того, что силы вязкости и температурные неоднородности сосредоточены в тонком слое вдоль поверхности, $w_x \sim 1$, $T \sim 1$, $x \sim 1$, $w_y \sim \delta$, $y \sim \delta$ (или Δ), $\partial T/\partial x \sim 1$, $\partial T/\partial y \sim 1/\Delta$, $\partial T^2/\partial x^2 \sim 1$, $\partial T^2/\partial y^2 \sim 1/\Delta^2$.

1) Порядок членов дифференциальных уравнений, содержащих производные $\partial^2 w_x/\partial x^2$, $\partial^2 w_y/\partial x^2$, $\partial^2 T/\partial x^2$ мал по сравнению с порядком других членов соответствующих уравнений, в связи с чем при расчете течения в пограничном слое их можно исключить.

2) Разность давлений поперек пограничного слоя имеет порядок $(\delta/l)^2$, т. е. пренебрежимо мала. Следовательно, $p(y)$ = const и равно статическому давлению во внешнем течении: частицы жидкости при движении вдоль оси, нормальной к поверхности тела, не обладают массой и не задерживаются вследствие трения. Таким образом, давление по длине пограничного слоя $p(x)$ изменяется так же, как во внешнем течении.

3) Параметры течения вне пограничного слоя могут быть определены при помощи теории невязкой жидкости или в результате эксперимента, т.е. их можно считать известными.

4) При течении в пограничном слое силы внутреннего трения имеют тот же порядок, что и силы инерции. Это условие выполняется, если безразмерная толщина δ/l динамического пограничного слоя имеет порядок

$$1/Re^{1/2} = (\nu/w_\infty l)^{1/2},$$

где w_∞ – скорость невозмущенного потока.

5) В пределах пограничного слоя интенсивности переноса теплоты путем конвекции и теплопроводности имеют одинаковый порядок при условии, что δ_m/l имеет порядок $1/(Re{\cdot}Pr)^{1/2}$ (δ_m – толщина тонкого пристенного слоя жидкости, в котором наблюдается резкое изменение температуры, т. е. температурного пограничного слоя). Поэтому отношение толщин $\delta/\delta_m \approx Pr$. При $Pr < 1$ $\delta < \delta_m$; при $Pr > 1$ $\delta > \delta_m$.

В соответствии с приведенными выводами система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена в ламинарном слое получит вид

$$w_x(\partial w_x/\partial x) + w_y(\partial w_y/\partial y) = -\partial p/\rho\,\partial x + g_x\beta\Delta T + \nu(\partial^2 w_x/\partial y^2); \qquad (5.8)$$

$$\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y = 0; \qquad (5.9)$$

$$w_x(\partial T/\partial x) + w_y(\partial T/\partial y) = a\,(\partial^2 T/\partial y^2) + (\nu/c_p)(\partial w_x/\partial y)^2. \qquad (5.10)$$

Уравнения (5.8) – (5.10) описывают течение жидкости в тонком пристенном слое и называются уравнениями пограничного слоя, причем уравнение (5.8) является уравнением движения (5.9) – неразрывности потока и (5.10) – энергии. Они справедливы для двухмерных ламинарных стационарных течений несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами. В эти уравнения введена дисситативная функция $\Phi = (\partial w_x/\partial y)^2$, появление которой при выводе уравнения энергии, если при этом учитывается работа сил внутреннего трения, вызванного вязкостью жидкости или газа. Эта работа в конечном счете превращается в теплоту. Диссипация энергии потока – необратимое преобразование кинетической энергии жидкости в тепловую вследствие трения.

дает лучшие результаты, численно на ЭВМ. Результаты решения зависят лишь от чисел Pr и Gr_x (рис. 6.3).

Локальное значение коэффициента теплоотдачи α определяется из выражения

$$\alpha = -\lambda\theta'(0)\,Gr_x^{1/4}/(2^{1/2}x).$$

Согласно теоретическому решению, $\theta'(0)$ определяется лишь значением числа Прандтля. В частности, при Pr = 0,73 (для воздуха) $\theta'(0) = 0{,}508$. Тогда

$$\alpha(x) = 0{,}3592(\lambda/x)\,Gr_x^{1/4} \quad \text{или} \quad Nu(x) = 0{,}3592\,Gr_x^{1/4}.$$

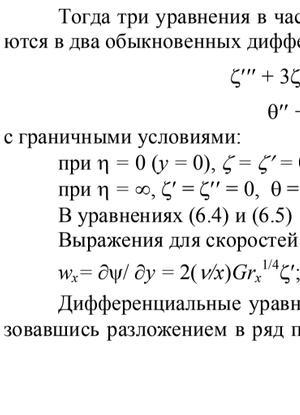


Рис. 6.3. К решению задачи свободной конвекции

Отсюда путем интегрирования по высоте стенки находится средний коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \int_0^H \alpha(x)\,dx/H = 0{,}4789(\lambda/H)\,Gr^{1/4}$$

или $Nu = 0{,}4789\,Gr_x^{1/4}$.

При других значениях Pr имеем: $Nu = A(Gr\,Pr)^{1/4}$, где коэффициент A определяется числом Прандтля:

Pr	.....	0,73	.....	10	.....	100	.....	1000
A	.....	0,517	.....	0,612	.....	0,652	.....	0,653

Полученные формулы хорошо подтверждаются экспериментальными исследованиями теплоотдачи вертикальных пластин в неограниченном свободном потоке, для которого сохраняется ламинарный режим течения. Для горизонтально расположенного цилиндра диаметром d теоретическое решение приводит к соотношению

$$Nu = \alpha d/\lambda = 0{,}372\,Gr^{1/4}.$$

Сравнение теплоотдачи вертикальной пластины и горизонтального цилиндра дает

$$Nu_H / Nu_d = 1{,}29,$$

т. е. при равных значениях числа Gr и при $H = d$ коэффициент теплоотдачи α для пластины в 1,29 раза больше, чем для цилиндра. Для равенства средних коэффициентов теплоотдачи должно быть $H/d = 2{,}76$.

Приведенные зависимости характеризуют ламинарный режим течения, который сохраняется до $Gr \le 10^9$. Теории турбулентной теплоотдачи при свободной конвекции до сих пор не существует. Поэтому для значений $Gr \ge 10^9$ необходимо использовать экспериментальные данные.

где T_e – адиабатная температура стенки, $T_e = T_\infty + r\, w^2_\infty/c_p$; r – коэффициент восстановления температуры. Коэффициент восстановления температуры (при турбулентном режиме течения) r_m зависит практически только от критерия Pr: $r_m \approx Pr^{1/3}$.

7.5. Теплообмен при изменении агрегатного состояния вещества

7.5.1. Теплообмен при кипении

В процессе кипения происходит интенсивное парообразование во всем объеме кипящей жидкости с образованием паровых пузырьков. Этот процесс протекает при температуре насыщения $T_н$ или несколько превышающей это значение и сопровождается поглощением теплоты фазового перехода. Различают кипение жидкости в большом объеме и кипение на поверхности твердого тела. В отличие от процесса теплообмена, при конвекции однофазной жидкости процесс теплообмена при кипении является более интенсивным, поскольку сопровождается дополнительным переносом теплоты и массы с помощью паровых пузырьков или паровой пленки. Существуют три основных режима кипения: пузырьковый, переходный и пленочный.

Пузырьковый режим кипения сопровождается образованием на поверхности теплообмена паровых пузырьков. При больших тепловых потоках паровые пузырьки сливаются, образуя на поверхности нагрева сплошную пленку, и режим кипения становится пленочным.

Пленочный режим кипения характеризуется меньшей интенсивностью теплоотдачи, чем пузырьковый. Кипение возможно при условии некоторого перегрева жидкости относительно температуры насыщения при наличии центров парообразования.

Минимальный радиус $R_к$ парового пузырька в момент зарождения соответствует размеру неровностей на поверхности теплообмена. Чем больше перегрев жидкости и чем выше давление p, тем меньше $R_к$. Если жидкость смачивает стенку, то кипение протекает при незначительном перегреве. Это означает, что на образование пузырей, помимо перегрева и давления, влияет также характер физико-химического взаимодействия жидкости с твердой стенкой.

Число действующих центров парообразования увеличивается с уменьшением $R_к$. Рост числа центров парообразования приводит к увеличению интенсивности теплоотдачи за счет перемешивания жидкости при движении пузырьков. На поверхности нагрева

$$R_к = 2\sigma\, T_н [r\rho_п (T_{ст} - T_н)],$$

Интегрируя уравнение (7.13) от 0 до x^+ вычисляем:

$$\vartheta = 8\sum_{n0}^{\infty} (G_n/\mu_n^2)\, exp(-\mu_n^2 x^+). \qquad (7.14)$$

Воспользовавшись уравнением (7.12), легко определить локальное и среднее число Нуссельта:

$$Nu_x = [\sum_{n0}^{\infty} G_n\, exp(-\mu_n^2 x^+)]/2\sum_{n0}^{\infty} (G_n/\mu_n^2)\, exp(-\mu_n^2 x^+); \qquad (7.15)$$

$$\bar{N}u = (-0{,}5/x^+)\, ln[8\sum_{n0}^{\infty} (G_n/\mu_n^2)\, exp(-\mu_n^2 x^+)]. \qquad (7.16)$$

Для облегчения расчетов ниже представлены собственные значения μ_n и постоянные решения G_n задачи теплообмена при ламинарном течении в круглой трубе:

n ……..	0	1	2	3	4
μ_n^2……	7,316	44,62	113,8	215,2	348,5
G_n ……	0,749	0,544	0,463	0,414	0,382

$\mu_n = 4n + 8/3$, $G_n = 1{,}011276/(\mu_n)^{1/3}$ при $n > 2$.

Ниже приведены значения локального и среднего чисел Нуссельта и средней массовой температуры жидкости (газа) в зависимости от продольной координаты x^+ при $T_{ст}$ = const:

x^+……	0	0,001	0,004	0,01	0,04	0,08	0,10	0,20	∞
Nu_x……..	∞	12,86	7,91	5,99	4,18	3,79	3,71	3,66	3,66
$Nu_{ср}$…….	∞	22,96	12,59	8,99	5,87	4,89	4,66	4,16	3,66
$\vartheta_м$ ……..	1,00	0,956	0,904	0,836	0,626	0,457	0,394	0,190	0

При больших значениях x^+ ряды в выражениях (7.15) и (7.16) быстро сходятся. Уже при $x^+ > 0{,}1$ расчеты можно проводить, оставляя лишь первый член ряда. При этом уравнение (7.15) принимает вид:

$$Nu_x = G_0 [exp(-\mu_0^2 x^+)]/[2\sum_{n0}^{\infty} (G_0/\mu_0^2)\, exp(-\mu_0^2 x^+)] = \mu_0^2/2 = 3{,}658.$$

Это значение соответствует числу Нуссельта для развитого профиля температуры. Таким образом, для безразмерной длины термического начального участка получаем соотношение

$$x^+ = (x/R)/(Re\cdot Pr) = 2(x/D)/(Re\cdot Pr) \geq 0{,}1.$$

Тогда

$$(x/D)_{нач} \approx 0{,}05\, Re\cdot Pr. \qquad (7.17)$$

Например, $(x/D)_{нач}$ = 17,5 при ламинарном течении воздуха (Pr = 0,7 и Re = 500). Но при движении масла (Pr = 100) и том же числе Рейнольдса $(x/D)_{нач}$ = 2500. Следовательно, в масляных теплообменниках стабилизиро-

Перейдем к безразмерной координате $y^+ = y\,(\tau_0\rho)^{1/2}/\nu$. Тогда

$$T - T_{cm} = (q_{cm}/cp)(\tau_0/\rho)^{-1/2} \int_0^{y^+} \{[1 - (y/R)]/[(\varepsilon_м/\nu) + (1/Pr)]\} dy^+. \qquad (7.22)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо знать зависимость $\varepsilon_м$ от y^+. Известно, что касательное напряжение в потоке при ламинарном и турбулентном течении изменяется вдоль радиуса трубы линейно от τ_0 на стенке до 0 на оси трубы, т. е.

$$\tau = (1 - y/R)\tau_0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7.18), получаем:

$$(\tau_0/\rho)(1 - y/R) = (\varepsilon_и + \nu)\partial u/\partial y$$

или в безразмерных переменных y^+ и $u^+ = u\sqrt{\tau_0/\rho}$:

$$\varepsilon_и/\nu = (1 - y/R)/(\partial u^+/\partial y^+) - 1. \qquad (7.23)$$

Воспользуемся теперь для вычисления интеграла в уравнении (7.22) универсальным профилем скорости. При этом примем допущение, что $\varepsilon_м = \varepsilon_и$. Разделим интеграл в (7.22) на три части, соответствующие трем областям схемы Никурадзе–Мартинелли, и вычислим отдельно изменение температуры в каждой области.

1) Ламинарный подслой $0 < y^+ < 5$. Так как $y << R$; $u^+ = y^+$; $du^+/dy^+ = 1$; $1 - (y/R) \approx 1$; $\varepsilon_и/\nu = \varepsilon_м/\nu = 0$, то, следовательно,

$$T - T_{cm} = q_{cm}/[cp(\tau_0/\rho)^{1/2}] \int_0^{y^+} Pr\, dy^+ = q_{cm}\, Pr\, y^+/[cp(\tau_0/\rho)^{1/2}];$$

$$T_л - T_{cm} = 5[q_{cm}/(cp)]\, Pr(\tau_0/\rho)^{-1/2}, \qquad (7.24)$$

где $T_л$ – температура жидкости (газа) на внешней границе ламинарного подслоя.

2) Промежуточный (буферный) слой $5 < y^+ < 30$. Так как $y << R$; $u^+ = -3{,}05 + 5ln\, y^+$; $du^+/dy^+ = 5/y^+$; $1 - (y/R) \approx 1$; $\varepsilon_и/\nu = \varepsilon_м/\nu = (y^+/5) - 1$, то, следовательно,

$$T - T_л = q_{cm}/[cp(\tau_0/\rho)^{1/2}] \int_5^{y^+} [(y^+/5) - 1 + (1/Pr)]^{-1} dy^+ = [q_{cm}/(cp)](5(\tau_0/\rho)^{-1/2} ln\,(5Pr + 1);$$

$$T_б - T_л = [q_{cm}/(cp)]\,(5(\tau_0/\rho)^{-1/2} ln\,(5Pr + 1), \qquad (7.25)$$

где $T_б$ – температура жидкости (газа) на внешней границе буферного слоя.

3) Турбулентное ядро $y^+ > 30{\cdot}u^+ = 5{,}5 + 2{,}5\, ln\, y^+$; $du^+/dy^+ = 2{,}5/y^+$. В этом случае нельзя уже пренебречь y/R, и уравнение (7.23) принимает вид

$$\varepsilon_и/\nu = y^+ [1 - (y/R)]/2{,}5 - 1. \qquad (7.26)$$

Вместе с тем следует помнить, что в турбулентном ядре турбулентная вязкость ~ в 10^3 раз больше молекулярной. Поэтому в уравнении (7.26)

7.4. Теплообмен при больших скоростях потока

При высоких скоростях потока анализ процесса теплообмена необходимо осуществлять с учетом не только теплоты трения, но и сжимаемости газа, а также влияния изменения физических свойств газа в зависимости от температуры. Уравнения конвективного теплообмена в этом случае усложняются. В частности, в уравнении энергии появляется дополнительный член $[w_x(\partial p/\partial x)]$, учитывающий выделение теплоты вследствие работы сил давления.

Распределение скорости и давления в поле течения вне пограничного слоя зависит от формы обтекаемого тела. В отличие от пластины на телах с криволинейным контуром продольный градиент давления $\partial p/\partial x \neq 0$. При этих условиях среди определяющих безразмерных комплексов появляются: число Маха ($M = w/a_\infty$, где a_∞ – скорость звука); температурный фактор; безразмерный продольный градиент давления (или скорости); показатель адиабаты $k = c_p/c_v$ и отношения ($\mu_{см}/\mu_\infty$), ($\lambda_{см}/\lambda_\infty$), ($\rho_{см}/\rho_\infty$), ($c_{см}/c_\infty$).

Для решения уравнений ламинарного пограничного слоя используются точные и приближенные методы.

Результаты существующих теоретических решений задач теплообмена могут быть представлены в виде обобщенных зависимостей – критериальных уравнений подобия, которые используются при расчете теплоотдачи.

Для расчета локальных коэффициентов теплоотдачи при безотрывном обтекании плоских и осесимметричных тел различной формы потоком высокой скорости может быть рекомендована следующая формула, справедливая при ламинарном режиме течения в пограничном слое (при обтекании затупленных тел $4{,}5{\cdot}10^6 < Re_{кр} < 6{,}5{\cdot}10^6$):

шение ε_s учитывает влияние относительных шагов расположения труб в пучке, причем для глубинных рядов коридорного пучка $\varepsilon_s = (S_2/d)^{-0{,}15}$, для шахматного пучка $\varepsilon_s = (S_1/S_2)^{1/6}$ при $S_1/S_2 < 2$; при $S_1/S_2 \geq 2$ $\varepsilon_s = 1{,}12$.

Формула (7.43) позволяет вычислить средний коэффициент теплоотдачи i-го ряда пучка. Для первого ряда обоих пучков при невысокой начальной степени турбулентности $\varepsilon_1 = 0{,}60$; для второго ряда шахматного пучка $\varepsilon_2 = 0{,}70$; коридорного $\varepsilon_2 = 0{,}90$, $\varepsilon_i = 1$ при $i \geq 3$. При проведении расчета теплоотдачи пучка вычисляют средние значение коэффициента теплоотдачи пучка

$$\alpha_{ср} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

где α_i – средний коэффициент теплоотдачи i-го ряда; A_i – общая площадь поверхности теплообмена трубок i-го ряда; n – число рядов.

ванный профиль температуры достигается в очень редких случаях. Поэтому эту рассмотренные ранее решения для развитого профиля температуры при высоких числах Прандтля малопригодны.

7.1.3. Теплообмен при турбулизированном течении в трубах

Особенности турбулентного потока (с точки зрения математического описания и физических свойств) проявляются наиболее четко именно при анализе движения в каналах с градиентами скорости. Учет шероховатости легко осуществить, воспользовавшись соотношением

$$Nu_{wep}/Nu_{zл} = (f_{wep}/f_{zл})^{1/2},$$

где f – локальный коэффициент трения.

Прежде чем приступить к решению задачи, укажем некоторые известные из курса механики жидкостей и газов общие характеристики турбулентного течения в трубах. Известно, что у стенки трубы существует универсальный турбулентный профиль скорости («закон стенки»), который согласно схеме Никурадзе–Мартинелли описывается следующими уравнениями:

- для ламинарного подслоя ($y^+ < 5$)

$$\varepsilon_u/\upsilon = 0,\ u^+ = y^+;$$

- для промежуточного (буферного) слоя ($5 < y^+ < 30$)

$$\varepsilon_u/\upsilon \approx 1,\ u^+ = -3,05 + 5,0\ ln\ y^+;$$

- для турбулентного ядра ($y^+ > 30$)

$$\varepsilon_u/\upsilon \to \infty,\ u^+ = 5,5 + 2,5\ ln\ y^+.$$

В этих уравнениях $u^+ = \bar{w}/u^*$; $y^+ = y\,u^*/\nu$, $u^+ = (\tau_0/\rho)^{1/2}$; $\bar{w}$ – среднее (усредненное по времени) значение x – компоненты скорости жидкости (газа); τ_0 – касательное напряжение на стенке трубы; y – расстояние от стенки трубы; ε_u – кинематический коэффициент турбулентного переноса импульса (турбулентной вязкости).

Разрушение ламинарной структуры течения и образование турбулентных вихрей приводят к резкому возрастанию турбулентной вязкости жидкости (газа). Увеличение вязкости сопровождается существенным увеличением турбулентной теплопроводности. Математически это выражается известными соотношениями для касательного напряжения и плотности теплового потока, в которых, помимо коэффициентов ν и a, фигурируют коэффициенты турбулентного переноса импульса и тепла:

$$\tau/\rho = (\varepsilon_u + \upsilon)(\partial\ \bar{w}_x/\partial y); \qquad (7.18)$$

$$q/(c\rho) = (\varepsilon_m + a)(\partial\ T/\partial y). \qquad (7.19)$$

Степень турбулентности ε является одной из важных характеристик турбулентных течений. Она определяется соотношением

$$\varepsilon = \{0,5[(w_x'^{cp})^2 + (w_y'^{cp})^2]\}^{0,5}/w_\infty,$$

где $(w_x'^{cp})^2$ и $(w_y'^{cp})^2$ – осредненные во времени квадраты пульсационных составляющих скорости; w_∞ – скорость невозмущенного потока.

Для простоты рассуждений все соотношения здесь записаны в двухмерном приближении. В действительности картина течения трехмерна. От значения ε в набегающем на тело потоке существенно зависят критическое число Re, соответствующее переходу ламинарной формы течения в потрачиное слое в турбулентную, а также интенсивность теплоотдачи.

При наличии пульсаций в потоке появляется дополнительное напряжение трения

$$\tau_m = -[(\rho\, w_y)'/(w_x)']^{cp} = \mu_m(\partial w_x{}^{cp}/\partial y)$$

и дополнительный перенос энергии

$$q_m = [(\rho\, w_y)' c_p\, T']^{cp} = -\lambda_m(\partial T^{cp}/\partial y),$$

где μ_m, λ_m – коэффициенты турбулентной (кажущейся) вязкости и теплопроводности.

Общее напряжение трения в турбулентном потоке состоит из напряжения трения, вызванного молекулярной (μ) и турбулентной (μ_m) вязкостью, поэтому

$$\tau_m = (\mu + \mu_m)(\partial w_x{}^{cp}\ /\ \partial y).$$

Аналогично

$$q_m = -(\lambda + \lambda_m)(\partial T^{cp}/\partial y).$$

На некотором расстоянии от стенки в турбулентном ядре $\mu << \mu_m$ и $\lambda << \lambda_m$ вблизи стенки в ламинарном подслое роль μ и λ становится существенной.

В отличие от уравнений (5.8) – (5.10) уравнения турбулентного пограничного слоя, записанные для осредненных величин, кроме w_y, $w_x{}^{cp}$, T^{cp}, содержат неизвестные значения μ_m и λ_m, зависящие от пульсационных составляющих.

В основе приближенных полуэмпирических теорий турбулентного тепло- и массообмена лежат эмпирические гипотезы, связывающие каждую вязкость и теплопроводность с осредненными во времени скоростями и температурами. Каждая из таких теорий содержит опытные константы и может быть использована для расчета определенного вида турбулентного течения.

Для расчета локальных коэффициентов теплоотдачи при турбулентном режиме течения в погранично слое на телах различной формы может быть использовано критериальное уравнение

$$Nu_{cm} = 0,0296 Re_{cm}^{0,8} Pr_{cm}^{0,43} (T_{cm}/T_e)^{0,4} [1 + 0,5(k - 1)\ M_1{}^2]^{0,11},$$

$$Nu_{cm} = 0,322 Re^{0,5}{}_{cm}\, Pr^{1/3}{}_{cm}\, [(\mu^{(0)}\rho^{(0)})\ /\ (\mu_{cm}\rho_{cm})]^{\ 0,5} \times$$
$$\times\ (Pr_{cm}/\ Pr^{(0)})\ \{1 + 0,16\ (1 + T_{cm}/\ T_{01})\ [2m/(m + 1)]^{1/3}\}^{0,5}, \qquad (7.44)$$

где $Nu_{cm} = \alpha\ x_{эф}/\lambda_{cm}$; $Re_{cm} = w_1\ \rho_{cm}\ x_{эф}/\mu_{cm}$; $\rho_{cm} = P_1/(RT_{cm})$; параметры, отмеченные индексом (0), отнесены к температуре $T^{(0)} = 0,5(T_{cm} + T_1) + 0,22\omega$; $\omega = 0,5(k - 1)M_1{}^2$; $m = (dw_1/\ dx)(x/w_1)$, x – криволинейная координата, направленная вдоль контура обтекаемого тела и отсчитываемая от точки начала развития пограничного слоя; индексом 1 отмечены параметры внешнего течения в сечении x, в котором предстоит вычислить коэффициент теплоотдачи α.

Эти параметры, включая dw_1/dx, предварительно определяются путем аэрогазодинамического расчета с учетом влияния головной ударной волны или скачка уплотнения.

Эффективная длина некоторой плоской пластины, на которой при параметрах внешнего течения w_1, ρ_1 образуется такой же температурный пограничный слой, как и в сечении x данного тела с криволинейным контуром, определяется по формуле

$$x_{эф} = (\int_0^x\ \rho_{cm} w_1 R^2 dx) / (\rho_{cm} w_1 R^2),$$

где $R = R(x)$ – расстояние от плоскости (или оси) симметрии данного тела до точки поверхности тела с координатой x. Здесь для расчета используется равенство интегральных тепловых потоков на пластине и рассматриваемом теле с учетом предыстории развития пограничного слоя.

Формула для определения получена методом локального подобия и справедлива при T_{cm} = const. Для случая $T_{cm} = T_{cm}\ (x)$ существует более сложная формула. В формуле (7.44) отношения, содержащие произведение $\mu\rho$ и критерий Pr, учитывают изменение физических свойств газа в зависимости от температуры, а множитель в квадратных скобках – влияние продольного градиента давления $dp_1\ /dx_1 = -\rho_1\ w_1\ (dw_1/dx)$ и температурного фактора $(T_{cm}/\ T_{01})$; $T_{01} = T_1\ (1 + 05(k - 1)M_1{}^2)$. При $Re > 10^6$ течение в пограничном слое на пластине становится турбулентным и закономерности переноса импульса и энергии резко изменяются. В этих условиях решение задач теплообмена возможно лишь при ряде упрощающих предположений с использованием не только теоретических, но и экспериментальных данных.

Высокочастотные пульсации скорости, давления и температуры в турбулентных потоках существенно влияют на развитие течения. При анализе течения используются осредненные во времени величины w_x^{cp}, w_y^{cp}, P^{cp}, T^{cp} и пульсационные составляющие w_x', w_y', P', T'. При этом мгновенные значения скорости, давления и температуры могут быть определены в виде сумм:

$$w_x = w_x^{cp} + w_x';\ \ w_y = w_y^{cp} + w_y';\ \ P = P^{cp} + P';\ T = T^{cp} + T'.$$

Опыты показывают, что между ε_u и ε_m существует определенное соотношение. Очень часто полагают, что $\varepsilon_u = \varepsilon_m$. В дальнейшем мы также воспользуемся этим равенством. Кроме того, с целью упрощения записи обозначим $\bar{w}$ через u. Теплообмен при полностью развитом турбулентном течении жидкостей (газов) с умеренными числами Pr (q_{cm}= const). Ограничимся, как и прежде, анализом стабилизированного течения (w = 0) при осесимметричном обогреве ($\partial\ T/\partial\varphi$) = 0). Не будем также учитывать аксиальную теплопроводность ($\partial\ ^2T\ /\partial\ x^2\ = 0$). Тогда уравнение энергии для случая постоянных теплофизических свойств (c, ρ) можно записать в виде

$$(1/r)\ \partial\ [r\ (\varepsilon_m + a)\ \partial\ T/\partial\ r]\ /\partial\ r\ = u\ \partial\ T/\partial\ x. \qquad (7.20)$$

При стабилизированном течении и постоянной плотности теплового потока на стенке $\partial\ T\ /\partial\ x\ = \partial\ T_м\ /\partial\ x$. В этом случае уравнение (7.20) после замены независимой переменной $y = R - r$ запишется следующим образом:

$$[1/(R - y)]\ \partial[(R - y)(\varepsilon_m + a)\ (\partial\ T/\partial y)]\partial y = u\ \partial\ T_м\ /\partial\ x. \qquad (7.21)$$

Проинтегрируем уравнение (7.21) с учетом граничных условий:

$$T = T_{cm}(x)\ \ \text{при}\ \ y = 0;\quad \partial\ T/\partial y = 0\ \ \text{при}\ \ y = R.$$

После первого интегрирования получим:

$$(R - y)(\varepsilon_m + a)(\partial\ T/\partial y) = (dT_м/dx)\int_0^y\ u(R - y)dy + C_1.$$

Наиболее точные результаты получаются при численном интегрировании этого выражения. Однако чтобы получить решение в замкнутой форме, положим, что $u = V$ = const. Так как профиль скорости при турбулентном течении в большей части сечения трубы почти плоский, это допущение не приводит к заметной ошибке. Тогда

$$(R - y)(\varepsilon_m + a)(\partial\ T/\partial y) = (dT_м/dx)V(Ry - 0,5y^2)C_1.$$

С помощью второго граничного условия находим C_1:

$$C_1 = -(dT_м/dx)\ V(R^2 - 0,5R^2) = -0,5VR^2\ dT_м/dx.$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получаем

$$\partial\ T/\partial y = -0,5V\ [(R - y)/(\varepsilon_m + a)]\ dT_м/dx.$$

Интегрируя второй раз и выражая $\partial\ T_м\ /\partial\ x$ через плотность теплового потока на стенке согласно выражению $q_{cm} = RVc\rho\ dT_м/dx$, имеем:

$$T = (q_{cm}/c\rho)\int_0^y\ \{[1 - (y/R)]/(\varepsilon_m + a)\}dy + C_2.$$

Согласно первому граничному условию, $C_2 = T_{cm}\ (x)$, следовательно:

$$T - T_{cm} = (q_{cm}/c\rho)\int_0^y\ \{[1 - (y/R)]/(\varepsilon_m + a)\}dy.$$

Коэффициенты A_u и A_o зависят от физических свойств различных газов, а так как эти свойства зависят от температуры, то A_u и A_o являются функциями температуры и выбираются по табл. 7.1.

Таблица 7.1

Зависимости коэффициентов A_u и A_o от температуры

Температура среды, °С	для воздуха		для дымовых газов	
	A_u	A_o	A_u	A_o
0	2,86	3,74	2,89	3,76
400	3,48	4,55	3,92	5,16
800	3,98	5,19	4,67	6,14
1200	4,31	5,65	5,19	6,88

Экспериментально установлено, что в изогнутых трубах (при прочих равных условиях) коэффициент теплоотдачи выше, чем в прямых трубах, вследствие дополнительной турбулизации потока, вызываемой центробежными силами. Поэтому теплоотдача в змеевиках выше, чем в прямых трубах, несмотря на то, что переход ламинарного режима движения в турбулентный затягивается до значений $Re = 20\,000\ldots30\,000$. Критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр}$ зависит от относительной кривизны канала – отношения внутреннего диаметра трубы к радиусу закругления R, т. е. d/R. Для змеевиков при $3 < R/d < 12$

$$Re_{кр} = 2300 + 10500\,(d/R)^{0,3}. \qquad (7.38)$$

При расчете теплоотдачи труб змеевиков при $Re > Re_{кр}$ можно воспользоваться формулами для прямых труб с введением поправочного коэффициента ε_R, величина которого определяется кривизной трубы и может быть определена по формуле

$$\varepsilon_R = 1 + 1,77(d/R). \qquad (7.39)$$

Теплоотдачу в жидких металлах, помимо приведенных выше соотношений, можно рассчитать также по формуле

$$N_u = 4,5 + 0,014Pe^{0,8}. \qquad (7.40)$$

Формула (7.40) проверена для турбулентного режима движения потока и круглых прямых труб при $500 < Pe < 15000$.

Теплофизические свойства металла выбираются по его среднеарифметической температуре.

Если $l/d < 30$, то вычисленное значение коэффициента теплоотдачи α умножается на поправочный коэффициент ε_l, величина которого определяется по формуле

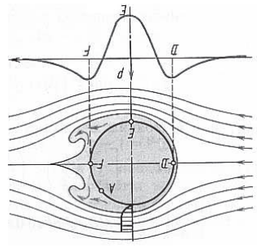
$$\varepsilon_l = 1,72(d/l)^{0,16}. \qquad (7.41)$$

7.3. Конвективный теплообмен при вынужденном внешнем обтекании тел

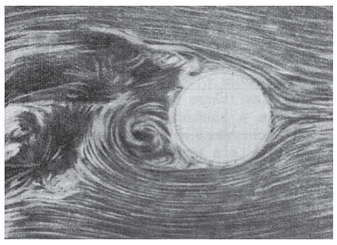
Зачастую, например в рекуператорах, трубы омываются внешним потоком газа. В низкотемпературных печах для интенсификации конвективного теплообмена устраивают искусственную шероховатость. Характерная особенность конвективного теплообмена при внешнем обтекании тел заключается в явлении отрыва (разрушения) пограничного слоя. В процессе обтекания плоской поверхности пограничный слой отрывается при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному; при обтекании цилиндров и сфер пограничный слой отрывается практически всегда.

7.3.1. Поперечное обтекание одиночной круглой трубы

При обтекании тел с тупой кормовой частью тонкий пристеночный слой жидкости, заторможенной вследствие трения (пограничный слой), образуется только на передней половине поверхности тела. Для частиц жидкости, находящихся вне пограничного слоя, на пути от точки B к точке E (рис. 7.1, *а*) потенциальная энергия давления преобразуется в кинетическую.



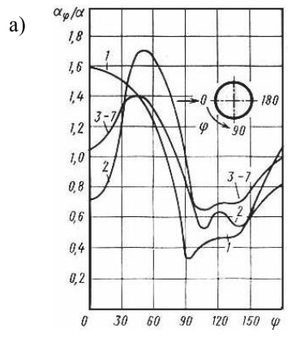
а)



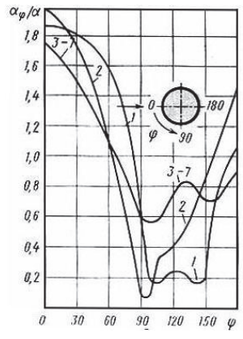
б)

Рис. 7.1. Возникновение возвратного течения и образование вихрей при поперечном обтекании круглого цилиндра: а – схема отрыва потраничного слоя и кривая изменения статического давления p вдоль контура тела; б – мгновенная фоторафия течения

На пути от точки E к точке F, наоборот, кинетическая энергия опять преобразуется в энергию давления, причем в точку F частица приходит со скоростью, равной скорости в точке D. В непосредственной близости к поверхности цилиндра на пути потока от точки D к точке E часть кинетической энергии расходуется на внутреннее трение, вызванное вязкостью. В результате, кинетической энергии потока оказывается недостаточно, чтобы



а)



б)

Рис.7.4. Изменение относительных коэффициентов α_φ/α теплоотдачи по поверхности труб ($Re = 14\cdot10^3$; 1 - 7 – номера рядов пучка): а – коридорный пучок; б – шахматный пучок

На поверхности труб второго и последующих рядов коридорных пучков максимум коэффициента теплоотдачи находится не в передней критической точке, соответствующей $\varphi = 0$, а смещен вниз по течению и соответствует месту срыва струй с труб предыдущего ряда. В шахматных пучках труб всех рядов максимум коэффициента теплоотдачи, так же, как и для одиночного цилиндра, находится в передней критической точке. Уровень средней теплоотдачи по поверхности труб выше у шахматного пучка. Это объясняется лучшим перемешиванием жидкости в этом пучке.

При проектировании теплообменных устройств учитываются гидравлическое сопротивление пучка, его засоряемость, а также величина термических напряжений материала, связанных с резким изменением теплоотдачи вдоль поверхности.

Турбулентный режим течения в пограничном слое, на передней половине труб пучка, появляется при $Re > Re_к \approx 10^5$. Средние коэффициенты теплоотдачи в пучках могут быть определены на основе критериальной зависимости, справедливой при $10^3 < Re_{ж} < 10^5$,

$$Nu_{ср} = C\,Re_{ж}^{n} Pr_{ж}^{1/3} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0,25} \varepsilon_s\,\varepsilon_i, \qquad (7.43)$$

где $C = 0,26$, $n = 0,65$ – для коридорных пучков и $C = 0,41$, $n = 0,60$ – для шахматных.

За характерный размер принимают диаметр труб пучка; значение $Re_{ж}$ вычисляют по скорости в самом узком поперечном сечении пучка (пучок обычно помещают в канал). За определяющую температуру принимается средняя температура жидкости; Pr – рассчитывается при $T_{ст}$; коэффициентом по сравнению с первым слагаемым можно пренебречь и записать:

$$\varepsilon_u/\upsilon = \varepsilon_m/\upsilon = 0,4y^+[1 - (y/R)]. \qquad (7.26а)$$

По этой же причине для жидкостей (газов) с числом Прандтля порядка 1 и более можно пренебречь слагаемым $1/Pr$ в знаменателе уравнения (7.22). Для жидких металлов это допущение явно неприемлемо, так как в них молекулярная теплопроводность является основным механизмом переноса тепла и ею нельзя пренебречь даже при рассмотрении турбулентного ядра потока.

Итак, для жидкостей (газов) с $Pr \geq 1$

$$T - T_б = q_{ст}/[c\rho(\tau_0/\rho)^{1/2}] \int_{30}^{y+} \{[1 - (y/R)]\,2,5/\,y^+[1 - (y/R)]\}dy^+;$$

$$T - T_б = [2,5\,q_{ст}/\,(c\rho(\tau_0/\rho)^{1/2})]\,ln(y^+/30); \qquad (7.27)$$

$$T_c - T_б = [2,5\,q_{ст}/\,(c\rho(\tau_0/\rho)^{1/2})]\,ln[R\,(\tau_0/\rho)^{1/2}/30\upsilon)], \qquad (7.28)$$

где T_c – температура жидкости (газа) на оси трубы.

Теперь мы располагаем полностью сведениями о профиле температуры. Если учесть, что $\tau_0/\rho = fV^2/2$, то уравнение этого профиля можно записать в виде

$$T_c - T_{ст} = [q_{ст}/[(c\rho V(0,5f)^{1/2})][5Pr + 5ln(5Pr + 1)] + 2,5ln[Re\,(0,5f)^{1/2}/60)]. \qquad (7.29)$$

Здесь $Re = 2RV/\upsilon$.

Коэффициент теплоотдачи определяется из соотношения

$$q_{ст} = \alpha(T_м - T_{ст}).$$

Таким образом, для расчета α необходимо знать $T_м$. В принципе, имея уравнения профиля температуры и профиля скорости, нетрудно вычислить $T_м$ по уравнению

$$T_м = [x^2/(VR^2)] \int_0^R w_x T \cdot r \cdot dr,$$

причем

$$V = (2/\,R^2) \int_0^R u\,r\,dr. \qquad (7.30)$$

Тогда, решая уравнение для $q_{ст}$ относительно α и учитывая, что $\alpha/(Vc\rho) = Nu/(Re \cdot Pr)$, окончательно находим:

$$Nu = 1,2Re \cdot Pr\,(0,5f)^{1/2}/[5Pr + 5ln(5Pr + 1) + 2,5ln(Re(0,5f)^{1/2}/60)]. \qquad (7.31)$$

Уравнение (7.31) хорошо согласуется с опытными данными при значениях $Pr = 0,5\ldots30$ в широком диапазоне значений Re. По рассмотренным выше причинам оно неприменимо при очень малых числах Pr. При больших

чисел Прандтля уравнение (7.31) дает заниженные (по сравнению с опытными данными) значения числа Нуссельта. Причиной этих расхождений является неправомочность допущения Никурадзе–Мартинелли о равенстве нулю отношения ε_u/γ в пламенарном подслое.

Следует отметить, что при турбулентном течении число Нуссельта не постоянно, как при ламинарном течении, а является функцией числа Рейнольдса и Прандтля. Объясняется это влиянием на коэффициент теплоотдачи коэффициентов турбулентного переноса импульса и тепла, зависящих от данных чисел.

Уравнение (7.31) неудобно для практических расчетов, поскольку искомый коэффициент трения f, определяющий число Nu, в свою очередь зависит от числа Рейнольдса.

Однако если выполнить расчеты по этому уравнению, а также по уравнению, являющемуся решением задачи конвективного теплообмена при турбулентном течении и постоянной температуре стенки, то результаты этих расчетов аппроксимируются простыми формулами:

- для жидких металлов ($Pr < 0{,}1$), загрязненных примесями
$$Nu_q = 6{,}3 + 0{,}003\ Re\ Pr; \quad Nu_t = 4{,}8 + 0{,}003\ Re\ Pr;$$
- чистых
$$Nu_q = 4{,}82 + 0{,}003\ (185 Re\ Pr)^{0{,}827},$$
- для газов ($0{,}5 < Pr < 1{,}0$)
$$Nu_q = 0{,}022 R e^{0{,}8}\ Pr^{0{,}6}; \quad Nu_t = 0{,}021 R e^{0{,}8}\ Pr^{0{,}6};$$
- для водных и легких жидкостей ($1{,}0 < Pr < 20$):
$$Nu_q = 0{,}0155 R e^{0{,}83} Pr^{0{,}5}; \qquad (7.32)$$
- для масел и других вязких жидкостей ($Pr > 20$):
$$Nu = 0{,}0118 R e^{0{,}9} Pr^{0{,}3}. \qquad (7.33)$$

Индексы q и t характеризуют решения, полученные при постоянных плотности теплового потока на стенке и температуре стенки. При $Pr > 1$ различие между этими решениями несущественно, поэтому приводится лишь одно уравнение.

7.2. Расчетные зависимости для определения коэффициентов теплоотдачи при вынужденном движении теплоносителя в каналах

Характерная особенность рассмотренных выше задач конвективного теплообмена при пламинарном движении в трубах: $Nu = \text{inv}(Re, Pr)$ в области стабилизированного профиля температуры (от произведения $Re{\cdot}Pr$ зависит лишь длина термического начального участка). Опыты показывают, что при $l/d > 50$ влияние начального участка практически не сказывается на величине коэффициента теплоотдачи. Поэтому в этой области можно пользоваться формулами, полученными для стабилизированного профиля температуры.

преодолеть повышение давления на пути от точки E к точке F. Частицы жидкости, не достигая точки F, под действием распределения давления во внешнем течении начинают двигаться против потока, и пограничный слой отрывается от тела. Обратное течение обусловливает образование правильной последовательности вихрей за телом, вращающихся попеременно то вправо, то влево (рис. 7.1, *б*). При $Re > 10^3$ частота n отрыва вихрей в секунду подчиняется закономерности $nd/w = 0{,}21$ (w – скорость набегающего потока и d – диаметр цилиндра). Регулярные вихревые дорожки существуют при $60 < Re < 5000$. При этом течение за цилиндром остается ламинарным. При $Re > 5000$ течение становится турбулентным. Положение точки отрыва зависит от режима течения в пограничном слое.

При $Re > Re_к \approx 5{\cdot}10^5$ точка отрыва несколько смещается вниз по течению, это приводит к заметному снижению сопротивления при обтекании цилиндра.

По мере роста толщины пограничного слоя местный коэффициент теплоотдачи на передней половине поверхности цилиндра уменьшается, а на задней половине (в вихревой зоне) увеличивается. Характер распределения по поверхности цилиндра в значительной мере зависит от числа .

На рис. 7.2 показано изменение местного числа по поверхности цилиндра в полярной системе координат.

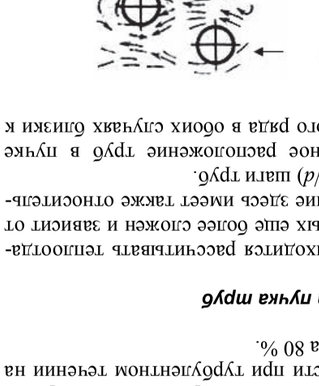


Рис. 7.2. Изменение местного числа Nu по поверхности цилиндра (в полярной системе координат):
$1 - Re = 3{,}98{\cdot}10^4$; $2 - Re = 10{,}1{\cdot}10^4$;
$3 - Re = 17{\cdot}10^4$; $4 - Re = 25{,}8{\cdot}10^4$;
$5 - Re = 42{,}6{\cdot}10^4$

На основании опытных данных средний коэффициент теплоотдачи на поверхности поперечно обтекаемого кругового цилиндра (трубы) может быть вычислен по формулам

при $5 < Re_{ж} < 10^3$

$$Nu_{ср} = 0{,}5\ Re_{ж}^{0{,}5} Pr_{ж}^{0{,}38} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0{,}25};$$

при $10 < Re_{ж} = 2{\cdot}10^5$

$$Nu_{ср} = 0{,}25\ Re_{ж}^{0{,}6} Pr_{ж}^{0{,}38} (Pr_{ж}/Pr_{ст})^{0{,}25} \qquad (7.42)$$

В качестве характерных величин выбраны диаметр цилиндра и скорость набегающего потока, а определяющей температурой является $T_{ж}$. Эти значения определяются при средней температуре поверхности цилиндра. Отношение критериев Прандтля ($Pr_{ж}/Pr_{ст}$) учитывает изменение физических свойств теплоносителя в зависимости от температуры.

На интенсивность теплоотдачи кроме критериев Re и Pr существенное влияние оказывает начальная турбулентность набегающего потока. Так, повышение среднего квадратичного значения составляющих скорости при турбулентном течении на пульсационных составляющих скорости при турбулентном течении на 2,5 % приводит к увеличению числа Nu на 80 %.

7.3.2. Теплоотдача пучка труб

В теплообменных устройствах приходится рассчитывать теплоотдачу пучка труб, характер обтекания которых еще более сложен и зависит от компоновки пучка. Существенное значение здесь имеет также относительный поперечный (S_1/d) и продольный (S_2/d) шаги труб.

Различают коридорное и шахматное расположение труб в пучке (рис. 7.3). Условия обтекания труб первого ряда в обоих случаях близки к условиям обтекания одиночной трубы.

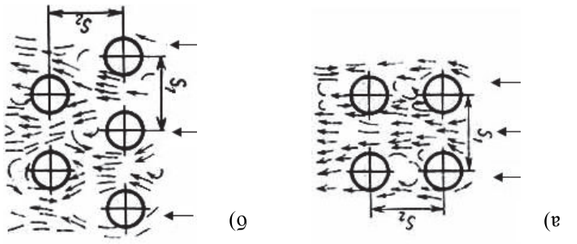


Рис. 7.3. Схемы расположения труб в пучках:
а – коридорное; б – шахматное

В коридорных пучках каждая последующая труба находится в вихревой зоне, образованной предыдущей трубой. Взаимодействие различных условий обтекания трубы коридорного и шахматного пучков характер распределения местных коэффициентов теплоотдачи по поверхности труб в этих двух случаях неодинаков.

Изменение относительных значений коэффициентов теплоотдачи по поверхности трубы можно оценить по данным рис. 7.4.

важных случаев приходится иметь дело с пленочной конденсацией. Средний коэффициент теплоотдачи при пленочной конденсации неподвижного насыщенного пара на плоской поверхности длиной L может быть вычислен по следующей приближенной формуле:

$$\bar{N}u = 2/(2/3)^{1/2}(Ga\,K\,Pr\sin\beta)^{1/4},$$

где $\bar{N}u = \bar{\alpha}L/\lambda$; $Ga = gL^3\rho_{ж}(\rho_{ж} - \rho_{п})/\mu^2_{ж}$; $K = r^*/c_{ж}(T_{н} - T_{п})$.

8. ТЕПЛООБМЕН В СЛОЕ

8.1. Особенности теплообмена в слое

Процессы теплообмена в слое имеют место в аппаратах металлургической, энергетической, химической промышленности и других отраслях народного хозяйства (например, в регенеративных теплообменниках, рекуператорах, при нагреве и тепловой обработке сыпучих материалов в теплообменниках различного назначения, при нагреве шихты в шахтных печах). В зависимости от поведения частиц в слое различают плотный и кипящий (взвешенный) слои.

Под плотным слоем понимают такое состояние частиц в слое, при котором частицы в процессе тепловой обработки постоянно соприкасаются между собой, хотя через такой слой и продувается газ. Параметром, определяющим состояние слоя, является порозность ε – отношение объема пустот между частицами ко всему объему слоя. Для плотного слоя $\varepsilon = 0{,}35\ldots0{,}55$.

Кипящим слоем называют такое состояние частиц, когда они беспорядочно циркулируют в камере, но не выносятся из нее потоком газа, с помощью которого эти частицы переведены во взвешенное состояние. Для кипящего слоя порозность превышает 0,60. В зависимости от величины скорости движения частиц плотный слой подразделяют на неподвижный, когда частицы в аппарате, камере остаются неподвижными по отношению к стенкам аппарата, сечениям входа и выхода потока газа; движущийся, когда частицы, составляющие слой, движутся в одном направлении, не теряя контакта друг с другом. Для этого случая в зависимости от соотношения направлений векторов скоростей частиц и потока газов выделяют:

1) слой перекрестного тока движения теплоносителей, когда векторы скоростей перемещения частиц и потока газов направлены под некоторым углом φ ($0 < \varphi < 180°$). В металлургии наиболее часто встречается перекрестный ток при ($\varphi = 90°$ (аглопроцесс, обжиг окатышей на машинах и др.);

2) слой прямоточного движения теплоносителей, для которого $\varphi = 0$, хотя различия в скоростях могут быть весьма существенными. Такой слой используется как первая ступень теплообменников при погашении высокого температурного потенциала греющих газов;

Здесь Y_0 рассчитывается на полную высоту слоя H_0.

Решение задачи будем искать в форме

$$\vartheta = A\,exp(rY) \;\text{ и }\; \theta = B\,exp(rY),$$

где Y – текущая координата.

Подставив значения ϑ и θ в систему уравнений (8.17) и (8.18), будем иметь:

$$rm\,A\,exp(rY) + A\,exp(rY) - B\,exp(rY) = 0;$$
$$rB\,exp(rY) - B\,exp(rY) + A\,exp(rY) = 0;$$

или

$$\begin{aligned}(rm + 1) - B &= 0,\\ A + (r - 1)B &= 0.\end{aligned} \qquad (8.20)$$

Система (8.20) позволяет определить постоянную r. Для однородной системы определитель, составленный из коэффициентов при A и B, должен быть равен нулю, т. е. получим уравнение для определения корней r:

$$r(1 - m + rm) = 0. \qquad (8.21)$$

Решая уравнение (8.21), получим, что $r_1 = 0$, а $r_2 = (m - 1)/m$. По известным значениям корней r_1 и r_2 можно определить предэкспоненциальные множители. Их число будет равно числу корней, т. е. в решении будет по два значения A и B. Если принять, что $A_1 = A_2 = 1$, то, подставив последовательно значения корней r_1 и r_2, а коэффициентов A_1 и A_2 в первое уравнение системы (8.20), определим коэффициенты B_1 и B_2. Если $r_1 = 0$ и $A_1 = 1$, то $B_1 = 1$. При известных r_2 и A_2 найдем, что $B_2 = m$. Поэтому решение исходной задачи имеет вид:

$$\vartheta = C_1 + C_2\,exp\,[-(1 - m)Y/m]; \qquad (8.22)$$

$$\theta = C_1 + C_2 m\,exp[-(1 - m)Y/m]. \qquad (8.23)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий: $\vartheta = 0$ при $Y = 0$, т. е. $C_1 = -C_2$. Если $Y = Y_0$, то $\theta = 1$. Поэтому

$$1 = C_1\,\{1 - m\,exp\,[-(1 - m)\,Y_0/m]\}.$$

Таким образом:

$$C_1 = -C_2 = 1/\{1 - m\,exp\,[-(1 - m)Y_0/m]\}.$$

Тогда расчетные уравнения примут такой вид:

$$\vartheta = (T - T')/(T'' - T') = \{1 - exp[(m\text{-}1)Y/m]\}/\{1\text{-}m\,exp[(m\text{-}1)Y_0/m]\}; \qquad (8.24)$$

$$\theta = (T - T')/(T'' - T') = \{1 - m\,exp[(m - 1)Y/m]\}/\{1 - m\,exp[(m - 1)Y_0/m]\}. \qquad (8.25)$$

Для прямоточного движения потоков шихты и газа (см. рис. 8.4, *д*) изменится уравнение теплообмена для газа, а также граничные условия. Они примут вид:

$$-W_г\,dT = \alpha_V(T - y)dy; \qquad (8.26)$$

$$Y = 0;\quad T = T';\quad y = 0;\quad T = T'. \qquad (8.27)$$

мелких частиц. Поэтому их еще иногда называют зернистыми слоями. При относительно небольших скоростях газа, проходящего через зернистый слой, последний остается неподвижным, и порозность слоя сохраняется неизменной. Однако при определенном увеличении скорости слой перестает быть неподвижным. Возникшее повышения порозности до 0,6…0,7 его высота увеличивается, слой приобретает свойства текучести. Частицы внутри слоя начинают двигаться по всевозможным направлениям с различной скоростью (рис. 8.4, *а*). Слой переходит в кипящее состояние, характеризующееся тем, что сила трения газового потока о частицы становится достаточной, чтобы преодолеть их силу тяжести. При этом происходит соударение частиц друг с другом, но они потоком из слоя не выносятся. Верхний уровень слоя не постоянен, а колеблется вследствие прохождения через него газовых пузырей и сплошных частиц.

Теоретически кипящим слоем называют особое состояние мелкозернистого материала, продуваемого через подъемерживающую решетку, когда беспорядочно циркулирующие частицы не выносятся из камеры.

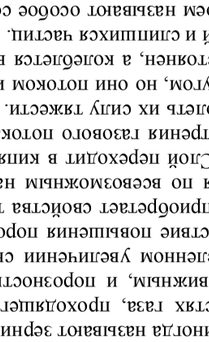


Рис. 8.4. Возможные состояния зернистого слоя при продувке его газом:
а – кипящее; *б* – взвешенное

Она существует в широком диапазоне скоростей движения газового потока – от скорости начала кипения (псевдоожижения) $W_к$ до скорости витания частиц $W_в$. Обе скорости зависят от размера и плотности частиц, вязкости и плотности газового потока. Очевидно, что $W_в > W_к$. При скорости газового потока, равной скорости витания, частицы слоя будут находиться во взвешенном состоянии (рис. 8.4, *б*), перемещаясь вместе с газом и интенсивно перемешиваясь под действием турбулентных пульсаций. Перемещение частиц во взвешенном слое может быть попутным или встречным. В первом случае направление движения частиц совпадает с направлением газового потока. Частицы могут двигаться и по спирали (например, в циклонных камерах).

Движение слоя является интенсифицирующим фактором теплообмена. При соударении частиц твердого материала с них срываются потрапинчый слой неподвижного газа, препятствующий передаче теплоты или массы твердому материалу.

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Показано, что работа, которую необходимо затратить на образование пузырька, уменьшается по мере увеличения перегрева жидкости. Поэтому вероятность возникания увеличивается с ростом температурного напора $\Delta T = T_{сл} - T_{н}$.

Скорость роста паровых пузырьков является одной из основных характеристик процесса кипения и зависит от безразмерного комплекса $c_{ж}\Delta T\rho_{ж}/(r\rho_{п})$, где $c_{ж}$ – массовая удельная теплоемкость жидкости; $\rho_{ж}$ и $\rho_{п}$ – плотности соответственно жидкости и пара; r – скрытая теплота парообразования. Скорость роста пузырьков повышается по мере увеличения этого комплекса. Это особенно заметно при низких давлениях. Паровой пузырек отрывается от поверхности нагрева и всплывает при определенном диаметре, который зависит от способности жидкости смачивать поверхность. Жидкость, не смачивающая поверхность, отсекается от нее, и интенсивность теплоотдачи уменьшается. Теплоносители, обычно применяемые в теплоэнергетических установках, а также кипотенные жидкости смачивают металлические поверхности. К несмачивающим жидкостям относятся, например, ртуть.

Процесс теплоотдачи от перегретой жидкости к поверхности отравляется пузырька отличается высокой интенсивностью. Турбулизация пароожидкостной смеси движущимися пузырями существенно сказывается на интенсивности теплоотдачи только при небольших ΔT.

Интенсивность теплоотдачи при пузырьковом кипении в основном определяется толщиной тонкой жидкостной прослойки, остающейся непосредственно на поверхности теплообмена вследствие смачивания. Линия, характеризующая зависимость теплового потока от температурного напора, называется кривой кипения. На рис. 7.5 зависимость плотности теплового потока от температурного напора ΔT представлена в логарифмической системе координат. Область *I* на этом графике соответствует конвективному теплообмену. В области *2*, благодаря малой плотности центров парообразования, процесс кипения неустойчив.

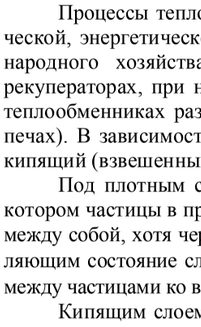


Рис. 7.5. Зависимость плотности теплового потока q от температурного напора ΔT в логарифмической системе координат

Область *3* соответствует развитому пузырьковому режиму кипения. В этой области плотность теплового потока достигает максимума. Дальнейшее повышение перегрева жидкости приводит к появлению переходной области *4*, а затем области *5* устойчивого пленочного кипения. В области *6* становится существенным перенос теплоты излучением. При низких давлениях и тщательной дегазации жидкости область *1*

Вместе с уравнением (8.11) граничные условия образуют систему, решение которой аналогично приведенному выше для противотока. В итоге можно получить:

$$\vartheta = (T - T')/(T' - T') = \{1 - exp[-(1 + m)Y/m]\}/(1 + m); \qquad (8.28)$$

$$\theta = (T - T')/ (T' - T') = \{1 + m\, exp[-(1 + m)Y/m]\}/(1 + m). \qquad (8.29)$$

Анализ полученных для противотока и прямотока уравнений показывает, что изменения температур газа и материала зависят от коэффициента теплоотдачи, высоты слоя и теплоемкостей потоков. Этими уравнениями можно пользоваться не только для расчетов процессов нагрева слоя, но и его охлаждения. Они справедливы для термически тонких кусков. Учет термической массивности кусков будет рассмотрен ниже.

Анализ уравнений (8.24) и (8.25) показывает, что, в зависимости от величины отношения теплоемкостей потоков, формирующиеся температурные поля в слое принимают различную форму. Так, при $m < 1{,}0$ и достаточных высотах слоя материал практически нагреется до температуры поступающего газа. Газ же при этом покинет слой с высокой температурой (см. рис. 8.3, *а*). Такое тепловое состояние слоя легко установить с помощью теплового баланса:

$$W_м(T'' - T') = W_г(T' - T''),$$

из которого следует очевидность сделанных выводов для принятых условий по *m, T'', T'*. При $m = 1{,}0$ теплоемкости потоков материала и газа равны. Это означает, что охлаждению потока газов на один градус соответствует нагрев потока материалов также на один градус. Как следствие такого явления, линии, характеризующие температуры газа и материалов по высоте слоя, превращаются в прямые (см. рис. 8.3, *б*), а разность температур между материалом и газом будет постоянной по высоте. Попутно отметим, что для данного случая найденные формулы (8.24) и (8.25) неприменимы, так как в них при $m = 1{,}0$ возникает неопределенность, которая может быть раскрыта известными методами.

Решение получается более простым при решении конкретной задачи. Действительно, уравнения теплообмена для потоков материалов и газа эквивалентны уравнениям (8.11) и (8.12), так же, как и граничные условия. Решения их упрощаются при следующих очевидных условиях: $w_м = w_г$, а также $T' - T'' = T'' - T'$. Поэтому в окончательной форме можно получить:

$$T = T' + (T' - T'')\, \alpha_V y/W_м, \qquad (8.30)$$

$$T = T'' + (T' - T'')\, \alpha_V y/W_г. \qquad (8.31)$$

При $m > 1{,}0$, достаточно развитых поверхности теплообмена и высоте слоя поток газа успевает охладиться практически до температуры поступающей шихты (см. рис.8.3, *г*), а материал никогда не нагревается до температуры газа на входе в слой: различие температур на этом уровне

будет тем больше, чем дальше значение m отстоит от 1, что также подтверждается анализом уравнения теплового баланса для слоя.

Пример 8.2. Вычислить температурное поле слоя железорудных окатышей, охлаждаемых воздухом в противотоке. Высота слоя $H_0 = 3$ м, а диаметр окатыша $d = 0{,}02$ м. Начальная температура окатышей $T' = 600$ °С, а конечная $T'' = 100$ °С. Начальная температура воздуха $T' = 0$ °С, а конечная $T''' = 400$ °С. Скорость воздуха на свободное сечение шахты $w_г = 2$ м/с. Средняя теплоемкость воздуха при 200 °С $c_г = 1{,}31$ кДж/(м^3·°С). Величина объемного коэффициента теплоотдачи $\alpha_V = 2450$ Вт/(м^3·°С). Требуется также вычислить температурное поле газа.

Отношение теплоемкостей потоков

$$m = (T'' - T')/(T' - T'''),\ m = (400 - 0)/(600 - 100) = 0{,}8.$$

Полная относительная высота слоя

$$Y_0 = \alpha_V H_0/(w_г c_г),\ Y_0 = 2450 \cdot 3{,}0/(2 \cdot 1{,}31 \cdot 1000) = 2{,}805.$$

Всю высоту слоя можно поделить на элементарные слои по 0,5 м и последующий расчет вести для выделенных точек с заданными координатами (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Температурное поле слоя железорудных окатышей

Формулы для расчета	Координата y, м				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$Y = \alpha_V y/(w_г c_г)$	0,467	0,935	1,402	1,870	2,337
$exp\,[(m - 1)\ Y/m]$	0,890	0,791	0,704	0,627	0,557
$1 - exp\,[(m - 1)\ Y/m]$	0,110	0,209	0,296	0,373	0,443
$\vartheta = \{1 - exp[(m - 1)Y/m]\}\{1 - m\ exp\,[(m - 1)Y_0/m\}$	0,183	0,347	0,491	0,618	0,734
$T = T' + (T' - T')\ \vartheta$, °С	490	392	305	229	160
$m\ exp\,[-(1 - m)Y/m]$	0,712	0,633	0,663	0,502	0,446
$1 - m\ exp\,[-(1 - m)Y/m]$	0,288	0,367	0,437	0,498	0,554
$\theta = \{1 - m\ exp\,[(m - 1)Y/m]\}\{1 - m\ exp\,[(m - 1)Y_0/m\}$	0,478	0,609	0,725	0,826	0,919
$T = T' + (T' - T')\ \theta$, °С	313	234	165	104	49

Здесь рассмотрены лишь относительно простые задачи нагрева материала в слое. Для более сложных задач – при неравномерном начальном распределении температур, наличии источников или стоков тепла и других условиях – решения и их анализ можно найти в специальной литературе.

8.4. Теплообмен в кипящем и взвешенном слоях

Помимо плотного слоя, в технике нашли применение также кипящий и взвешенные слои. Их используют для сушки и обжига материала, для нагрева сталей и т. д. В ряде случаев их используют в теплообменных аппаратах, а также в химической технологии. Эти слои обычно образуются из

конвективного теплообмена может быть расширена и зависимость q (ΔT) будет соответствовать линии АБ (см. рис. 7.5).

В случае несжимающих жидкостей пленочный режим кипения может появиться при небольших ΔT (линия ВГ).

Характер кривой кипения может также резко измениться при изменении граничных условий. Так, при оборотре поверхности теплообмена электрическим током (q_{cm} = const) наблюдается скачкообразный переход пузырькового режима кипения в пленочный. При условии T_{cm} = const такого скачка не наблюдается. На интенсивность теплообмена при кипении существенное влияние оказывают давление, теплофизические свойства жидкости, параметры шероховатости поверхности нагрева и теплофизические свойства стенки. К последним относится комплекс, называемый коэффициентом аккумуляции теплоты $(\lambda c\rho)^{1/2}$.

Связь коэффициента теплоотдачи с числом центров парообразования, частотой отрыва пузырей, физическими свойствами жидкости и другими факторами устанавливается экспериментально.

Расчет теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкости в большом объеме в условиях свободного движения можно выполнить, воспользовавшись следующим приближенным уравнением подобия:

$$Nu = 0{,}082\, Kz^{0{,}33} Kq^{0{,}7} Pr^{-0{,}45},$$

где $Kz = R_к\, c_{ж}\, \Delta T \rho_{ж} / (2\delta\, r\rho_п)$; $Kq = q\, \delta^2/\rho_п\, r\, a_{ж} l)$; $Pr = \upsilon/a$. Здесь $\delta = (\sigma\, g(\rho_{ж} - \rho_п))^{1/2}$ – капиллярная постоянная; $\Delta T = T_{cm} - T_н$ – температурный напор; $l = c_{ж}\, (\sigma\rho_{ж}\, T_п)/(r\rho_п)^2 = R_к c_{ж}\, \Delta T\rho_{ж}/(2r\rho_п)$ – некоторый характерный размер, пропорциональный радиусу; σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – пар.

K_z и K_q учитывают число центров парообразования и частоту отрыва пузырей. Если пренебречь влиянием ускорения свободного падения, то можно получить более простое уравнение для расчета теплоотдачи

$$Nu = CRe^n Pr^m,$$

где $Re = wl/\nu_{ж}$; $w = q/(r\rho_п)$ – приведенная скорость парообразования.

Значения C, m, n найдены путем обработки большого числа экспериментальных данных, полученных при кипении реальных жидкостей. Для немеждународных теплоносителей $C = 0{,}0625$, $n = 0{,}5$, $m = 0{,}33$ при $Re \le 0{,}01$. Пределы применимости этого уравнения: $10^{-5} \le Re \le 10^4$; $0{,}86 \le Pr \le 7{,}6$; $w \le 7$ м/с. При плотности теплового потока, большей первой критической $q_к$, чистая форма пузырькового кипения невозможна.

Первая критическая плотность теплового потока для неметаллических теплоносителей с малой вязкостью

$$q_{к1} = (k\, r)^{1/2} g\sigma(\rho_{ж} - \rho_п).$$

Первая критическая плотность теплового потока – максимально возможная (при данных условиях) плотность теплового потока при пузырьковом кипении.

В литературных источниках имеются данные, необходимые для расчета теплообмена при кипении и в других условиях: при пленочном и переходном режимах, в условиях вынужденного течения, в ограниченном объеме (в том числе в различно ориентированных трубах и каналах).

7.5.2. Теплообмен при конденсации пара

Конденсация протекает с выделением теплоты и всегда сопровождается теплообменом. Явление теплообмена при конденсации встречается в конденсаторах паротурбинных, холодильных и опреснительных установок, теплообменных аппаратах и других устройствах. Наиболее характерной для этих установок является поверхностная конденсация пара, реже встречается явление конденсации во всем объеме.

Конденсация насыщенного или перегретого пара на поверхности твердого тела возможна, если температура поверхности меньше температуры насыщения $T_{ст} < T_н$. Конденсация жидкости на твердой поверхности начинается в углублениях или трещинах.

Пленочная конденсация – образование сплошной пленки конденсата на смачиваемой поверхности.

Теплота, выделяющаяся на поверхности раздела фаз, отводится в стенку через пленку конденсата. В процессе конденсации температура $T_п$ поверхности жидкой пленки остается несколько ниже температуры $T_н$ насыщения. Для обычных и криогенных жидкостей $T_п$ незначительно отличается от $T_н$. Термическое сопротивление при передаче теплоты от пара к стенке равно сумме термического сопротивления пленки конденсата и термического сопротивления, связанного со скачком температуры на границе раздела паровой и жидкой фаз. При заданной разности температур пара и стенки интенсивность процесса теплообмена при пленочной конденсации определяется условиями отвода конденсата с поверхности и режимами течения пленки и пара. Термическое сопротивление пленки зависит от ее толщины, теплопроводности жидкости, степени турбулизации потока и наличия поверхностных волн.

Капельная конденсация возникает на несмачиваемой поверхности и имеет коэффициент теплоотдачи на порядок выше, чем пленочная. Для получения капельной конденсации на поверхность теплообмена наносятся специальные покрытия. Использование капельной конденсации позволяет значительно сократить габариты и массу конденсаторов.

Примеси неконденсирующихся газов в паре существенно снижают интенсивность теплоотдачи при конденсации. В большинстве практически

этой задаче необходимо знать теплоемкости потоков, Вт/°С, представляющие произведение расходов шихты и газа на их теплоемкости, т. е.

$$W_м = G_м c_м, \quad W_г = V_г c_г.$$

Теплоемкость потока (водяной эквивалент) показывает, какое количество теплоты следует подвести (отвести) к потоку, чтобы данный поток нагреть (охладить) до 1 град.

Выделим элементарный участок слоя, расходы материала и газа через который составляют в единицу времени $G_м$ и $V_г$.

Увеличение энтальпии материала при его опускании должно быть пропорциональным количеству теплоты, передаваемой материалу газами, т. е.

$$W_м dT = \alpha_V (T - T) dy, \tag{8.11}$$

где dy характеризует объем материала, имеющего площадь поперечного сечения 1 м^2.

Рассматривая теплоотдачу охлаждающегося газа, можно по аналогии заключить, что

$$W_г dT = \alpha_V (T - T) dy. \tag{8.12}$$

Уравнение (8.12) можно записать и так:

$$-dT/dY = T - T, \tag{8.13}$$

где $Y = \alpha_V y / W_г$ – относительная высота.

Величина T' постоянна. Поэтому $dT = d(T - T')$. Правую часть формулы (8.13) можно преобразовать следующим образом:

$$T - T' = T - T' - T + T'.$$

Таким образом, формула (8.13) примет вид:

$$d(T - T')/dy = T - T' - (T - T'). \tag{8.14}$$

Разделив обе части уравнения (8.14) на ($T' - T'$), получим:

$$d\theta/dY = \vartheta - \theta. \tag{8.15}$$

Здесь $\theta = (T - T')/(T' - T')$ – относительная температура газа; $\vartheta = (T - T')/(T' - T')$ – относительная температура материала.

Обозначив отношение $W_м / W_г = m$ и преобразуя аналогичным образом уравнение (8.11), получим, что

$$m\, d\vartheta/dY = \theta - \vartheta. \tag{8.16}$$

Следовательно, система двух уравнений, описывающая изменение температур материала и газа, имеет вид:

$$m\, d\vartheta/dY - \theta + \vartheta = 0; \tag{8.17}$$

$$d\theta/dY - \theta + \vartheta = 0. \tag{8.18}$$

Граничные условия

$$Y = 0; \ \vartheta = 0; \ Y = Y_0, \ \theta = 1. \tag{8.19}$$

3) слой противоточного движения теплоносителей, для которого $\varphi = 180°$. Принципы противоточного слоя реализованы практически во всех шахтных печах — доменных, для обжига извести и др.

Различия в скоростях, а также в направлениях движения частиц в слое являются определяющими характеристиками при рассмотрении задач теплообмена. Действительно, для неподвижного слоя термически тонких частиц, продуваемых газом, температура какой-либо частицы определяется расстоянием от места ввода потока газа в слой, а также временем тепловой обработки слоя, т. е. зависит от двух переменных. Для движущихся прямоточного или противоточного слоев после установления стационарного теплового состояния температура любой частицы будет определяться только временем пребывания ее в слое или расстоянием от места загрузки частиц, так как эти параметры жестко связаны между собой соотношением

$$\tau = w_м y,$$

в котором $w_м$ – скорость движения частиц в слое.

Теплообмен в плотном слое – сложное явление, характеризующееся тремя главными особенностями:

1) температура на поверхности слоя кускового материала определяется не только передачей тепла от газа к куску (внешний теплообмен), но и отводом тепла внутрь его (внутренний теплообмен);

2) внешний теплообмен в шахтных печах и слоевых установках включает теплообмен теплопроводностью от куска к куску излучением и конвекцией;

3) внутренний теплообмен определяется размером и формой куска, его теплопроводностью и интенсивностью развития тепловых явлений на его поверхности.

Не все из указанных факторов действуют на развитие теплообменных процессов в слое с одинаковой силой. В некоторых случаях возможно исключение одного или нескольких факторов, что значительно облегчает решение задач.

Так, для кусков с правильной сферической поверхностью можно пренебречь теплопроводностью между кусками, так как при точечном контакте между ними тепло этим способом практически не передается. Такой слой следует считать идеальным. В реальном слое часть кусков соприкасается, и между ними происходит теплообмен теплопроводностью. Количественная характеристика этого явления может быть найдена экспериментально. Таким образом, внешний теплообмен в плотном слое заключается в теплообмене излучением от одного куска слоя к другому и конвекции. Роль излучения газа при нагреве слоя невелика вследствие небольшого размера каналов между кусками и невысоких концентраций излучающих газов. Экспериментальные и расчетные данные показывают, что с процес-

где $c_м$ – удельная (массовая) теплоемкость материала; $\rho_{нас} = \rho_м (1 - \varepsilon)$ – насыпная плотность слоя, состоящего из материала с плотностью $\rho_м$.

Полученные уравнения (8.3) и (8.4) вполне описывают явления теплообмена. Для однозначности решения эту систему следует дополнить граничными и начальными условиями, которые могут быть заимствованы любым образом: температура газа на входе в слой является постоянной величиной при $y = 0$, $T = T'$, а температура материала в начале процесса одинакова во всем объеме слоя, т. е. $T = T_0$ при $\tau = 0$.

Для упрощения системы и представления решения в виде графиков целесообразно ввести новые переменные:

$$Z' = [\alpha_V / [(c_м \rho_{нас})](\tau - \varepsilon y / w_1); \quad Y = \alpha_V y / (c_г W_{г.о}); \quad \vartheta = (T_0 - T)/(T_0 - T');$$

$$\theta = (T_0 - T)/(T_0 - T'). \tag{8.5}$$

Для переменной Y учтено, что

$$c_г \rho_г w_г = c_г [\rho_{г.о} / (1 + \beta T)]\, w_{г.о} (1 + \beta T)$$

или $c_г \rho_г w_г = C_г w_{г.о}$,

где $C_г$ – теплоемкость 1 м^3 газа, а $w_{г.о}$ – скорость газа, отнесенная к нормальным условиям. Для неподвижного слоя ($\varepsilon y / w_г << \tau$, поэтому

$$Z' = Z = \alpha_V \tau / (c_м \rho_{нас}) = \alpha_V \tau / [c_м \rho_м)(1 - \varepsilon)]. \tag{8.6}$$

В итоге после преобразований получим:

$$\partial\vartheta/\partial Z = \theta - \vartheta; \tag{8.7}$$

$$\partial\theta/\partial Y = \vartheta - \theta \tag{8.8}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$Y = 0, \ \theta = 1, \tag{8.9}$$

$$Z = 0, \ \vartheta = 0. \tag{8.10}$$

Уравнения (8.7) – (8.10) выражают математическую формулировку задачи по охлаждению (нагреву) газом неподвижного слоя кусковых материалов, известную также как задача Т. Шумана.

Решение задачи по В. Н. Тимофееву [1] имеет следующий вид:

$$\vartheta = [exp\ (-Y)] \int_0^Z exp(-\varepsilon) J_0 (2(\varepsilon Y)^{1/2}) d\varepsilon,$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка, мнимого аргумента:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x/Z)^{2k} / (k!)^2.$$

Аналогично решая (8.8), получим:

$$\theta = 1 - exp(-Z)] \int_0^Y exp(-\varepsilon) J_0 (2(\varepsilon Z)^{1/2}) d\varepsilon.$$

Для облегчения расчетов были построены графики зависимости температуры газа и материала от относительных времени и высоты. Один из таких графиков для определения температуры материала приведен на рис. 8.2. По этому графику можно находить и температуры газа в слое.

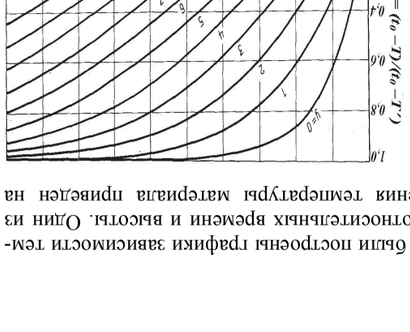


Рис. 8.2. График для расчета температуры на в неподвижном слое

Величиной, определяющей интенсивность теплообмена в слое, является объемный коэффициент теплоотдачи α_V. Связь этого коэффициента с общепринятым, отнесенным к 1 м^2 поверхности, устанавливается через F – площадь поверхности частиц в 1 м^3 слоя. Действительно:

$$\alpha_V = \alpha_F F = \alpha_F \Phi (1 - \varepsilon)/d,$$

где Φ – коэффициент формы частицы (куска), равный 6,0 для частиц сферической формы.

Значения коэффициентов теплоотдачи получают экспериментально и обобщают в уравнении. Для плотного слоя – неподвижного и движущегося – наиболее распространено полученное формулы В. Н. Тимофеева:

$$Nu_{ca} = 0,106 Re_{ca} \ \text{при} \ Re < 200, \quad Nu_{ca} = 0,61 Re_{ca}^{0,67} \ \text{при} \ Re > 200.$$

Особенности расчета чисел Нуссельта и Рейнольдса для слоя состоят в том, что в качестве линейного размера используется диаметр частиц (куска), а скорость движения газа определяется в свободном сечении слоя. Таким образом:

$$Nu_{ca} = \alpha_f d / \lambda_г, \quad Re_{ca} = w_{г.о} d / \upsilon_T.$$

Теплофизические свойства газа: теплопроводность $\lambda_г$ и кинематическая вязкость ν_T рассчитываются или выбираются по его средней температуре.

Пример 8.1. Неподвижный слой толщиной $H_0 = 0,2$ м состоявших из сухих рудных окатышей. Пористость слоя $\varepsilon = 0,4$, а диаметр окатыша равен 0,02 м. Их теплоемкость $c_м = 0,878$ кДж/(кг·°С), теплопроводность $\lambda_г = 2,5$ Вт/(м·°С), насыпная масса – $\rho_{нас} = 1800$ кг/м^3. Охлажден продувается слой газа с температурой $T = 500$ °С и скоростью на свободное сечение $w_{г.о} = 0,5$ м/с. Теплоемкость и кинематическая вязкость газа соответственно равны $c_г = 1,3 \cdot 10$ кДж/м^3·°С), $\nu_T = 40,61 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Теплопроводность газа составляет $\lambda_г = 4,27 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·°С).

Температура слоя окатышей перед началом нагрева по всему объему была 0 °С. Определить для этих условий изменение температур материала слоя во времени, а также распределение температур материала слоя через каждые 5 мин от начала нагрева.

Первоначально следует определить коэффициенты теплоотдачи. Так как число Рейнольдса $Re_{сл} = w_{г.о}d/\upsilon_T$, $Re_{сл} = (0{,}5{\cdot}0{,}02/40{,}61)10^6 = 246$, то следует воспользоваться формулой $Nu = 0{,}61Re^{0{,}67}$,

$$Nu = 0{,}61{\cdot}246^{0{,}67} = 24{,}4;$$

$$\alpha_F = 24{,}4\lambda_г/d,\ \alpha_F = 24{,}4 \cdot 4{,}27/(0{,}02{\cdot}10^2) = 52{,}1\ \text{Вт/(м}^2{\cdot}^\circ\text{С)};$$

$$Bi = \alpha_F R/\lambda_м,\ Bi = 5{,}21{\cdot}0{,}01/2{,}5 = 0{,}208,$$

что характеризует окатыши как термически тонкие тела.

Далее следует определить коэффициент теплоотдачи α_V. для окатышей сферической формы:

$$\alpha_V = \alpha_F 6(1 - \varepsilon)/d,\ \alpha_V = 52{,}1 \cdot 6\ (1 - 0{,}4)/0{,}02 = 9380\ \text{Вт/(м}^3{\cdot}^\circ\text{С)}.$$

По формулам (8.5) определим величину Z и Y:

$$Z = \alpha_V\tau/(c_м\rho_{нас}),\ Z = 9380{\cdot}60\ \cdot\tau'/(0{,}878{\cdot}1000{\cdot}1800) = 0{,}356\ \tau';$$

$$Y = \alpha_V H_o\ /(c_г w_{г.о}),\quad Y = 9380{\cdot}0{,}2/(0{,}5{\cdot}1{,}31{\cdot}1000) = 2{,}864.$$

Здесь τ' отсчитывается в минутах.

Задавая значения промежутков времени τ' от начала нагрева, получим величины относительного времени Z:

τ', мин ……..	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
Z……..	0,0	1,78	3,56	5,34	7,12	8,90

Для горизонтов слоя выберем значения и через 0,05 м. Тогда относительные высоты Y будут:

h, м ……	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20
Y……	0,0	0,716	1,432	2,148	2,864

Таблица 8.1

Изменение температур окатышей*

Y	Температура окатышей при Z					
	0	1,78	3,56	5,34	7,12	8,90
0,0	0	0,830/450	0,975/487	0,990/495	1,000/500	1,000/500
0,716	0	0,625/313	0,865/432	0,960/480	0,980/490	0,995/497
1,432	0	0,460/230	0,765/383	0,915/457	0,960/480	0,980/490
2,148	0	0,330/165	0,662/331	0,835/418	0,930/465	0,965/483
2,864	0	0,220/110	0,552/276	0,750/375	0,885/443	0,950/475

*В числителе относительные, а в знаменателе действительные температуры, °С

8.2. Теплообмен в неподвижном слое

Нагрев кусковых материалов в неподвижном слое обычно встречается в некоторых способах агломерации руд, охладителей агломерата, установках по подогреву сыпучих материалов перед загрузкой их в плавильные печи и т. п.

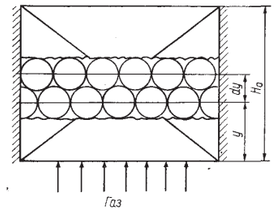


Рис. 8.1. К решению задачи о прогреве неподвижного слоя

Рассмотрим неподвижный слой термически тонких частиц, для которых $Bi < 0{,}25$. Закономерности формирования температурных полей в таком слое при его нагреве или охлаждении могут быть установлены из анализа теплообмена в слое (рис. 8.1) с порозностью ε и поперечным сечением 1 м^2. Для этого выделим элементарный слой dy на расстоянии y от места ввода газа в слой.

Через этот элемент слоя, состоящий из частиц бесконечно большой теплопроводности, газ проходит за время $d\tau$, имея скорость на свободное сечение, равную $W_г$. Полное изменение энтальпии газа в элементарном слое будет определяться изменением ее по направлению потока газов и во времени, например при охлаждении

$$d^2Q = c_г\,\rho_г\varepsilon\ (dT/d\tau)\ dyd\tau = c_г\rho_г\varepsilon\ (\partial T/\partial y)\ (\partial y\partial\tau)\ dyd\tau +$$

$$+ c_г\rho_г\varepsilon\ (\partial T/\partial\tau)\ dyd\tau = c_г\rho_г w_г(\partial T/\partial y)dyd\tau + c_г\rho_г\varepsilon(\partial T/\partial\tau)dyd\tau, \qquad (8.1)$$

где $(\partial\ y/\partial\tau) = \upsilon_г$, $\varepsilon\upsilon_г = w_г$ ($v_г$ – скорость газа в пространстве между частицами).

Но количество тепла, которое газ получает при охлаждении слоя от материала, равно:

$$d^2Q = \alpha_V(T - T')dyd\tau, \qquad (8.2)$$

где α_V – коэффициент теплоотдачи на единицу объема слоя.

Здесь использованы, кроме уже известных, следующие обозначения: T и T' – температуры газа и частицы; $c_г$ – удельная (массовая) теплоемкость; $\rho_г$ – плотность газа.

Приравнивая правые части (8.1) и (8.2), после сокращения получим уравнение теплообмена для газа:

$$\alpha_V(T - T) = c_г\rho_г(w_г\partial T/\partial y + \varepsilon\partial T/\partial\tau). \qquad (8.3)$$

Рассматривая таким же образом теплообмен со стороны материала слоя и имея в виду, что изменение энтальпии материала будет происходить в элементарном слое только во времени, можно записать:

$$\alpha_V(T - T) = -c_м\,\rho_{нас}\partial\ T/\partial\tau), \qquad (8.4)$$

сами излучения от куска к куску следует считаться при температурах выше 500 °С. При более низких температурах теплообмен в слое определяется преимущественно конвекцией, интенсивность которой значительна из-за сильной турбулизации газового потока в межкусковых каналах за счет непрерывного изменения их формы и размеров.

Внешнее тепловое сопротивление от газа к слою будет управлять процессами теплообмена при малых значениях внутреннего теплового сопротивления. Если $Bi < 0{,}25$, то куски, составляющие слой, можно рассматривать как термически тонкие, а в тепловых расчетах не учитывать влияние внутреннего теплового сопротивления. Ошибка, связанная с таким допущением, составляет не более 5 %, что считается приемлемым в инженерных расчетах слоевых печей и установок.

Для кипящего слоя указанные особенности также справедливы, хотя увеличный вес отдельных видов теплоперадачи в зависимости от уровня различных температур и других параметров процесса может несколько изменить.

При рассмотрении процессов теплообмена в слое частиц обычно исходят из допущений, которые в ряде случаев хорошо согласуются с опытом:

1) слой частиц однороден по своему фракционному составу;

2) тепловой поток от газа к частицам в любой точке слоя пропорционален разности температур между газом и поверхностью частиц, т. е. определяется законом Ньютона;

3) коэффициент теплоотдачи от газа к частицам одинаков не только для всех точек поверхности частиц, но и по всей высоте и сечению слоя;

4) теплофизические свойства частиц слоя и газа не зависят от температуры; они принимаются средними;

5) передача тепла в газе и в слое от частицы к частице путем теплопроводности отсутствует;

6) изменения в объеме газа и слоя, связанные с изменениями температуры, невелики, что позволяет пренебречь ими;

7) поток газа равномерно распределен по поперечному сечению слоя (шахты), и расход его во времени неизменен;

8) стенки аппарата, шахты, где размещается слой, непроницаемы для газа и идеально теплоизолированы.

При этих допущениях удается описать процессы теплообмена в слое относительно простыми аналитическими зависимостями.

Воспользовавшись графиком (см. рис. 8.2), определим сначала относительные, а затем и абсолютные температуры для соответствующих значений Z и Y (см. табл. 8.1). По приведенным значениям Z и Y можно также определить температуры газа, воспользовавшись тем же графиком.

8.3. Нагрев материала при прямоточном и противоточном движениях потоков

Закономерности теплообмена при противоточном движении газа и материала могут быть найдены после решения следующей задачи (рис. 8.3). Слой, состоящий из кусков, опускается в шахту постоянного сечения высотой H_0.

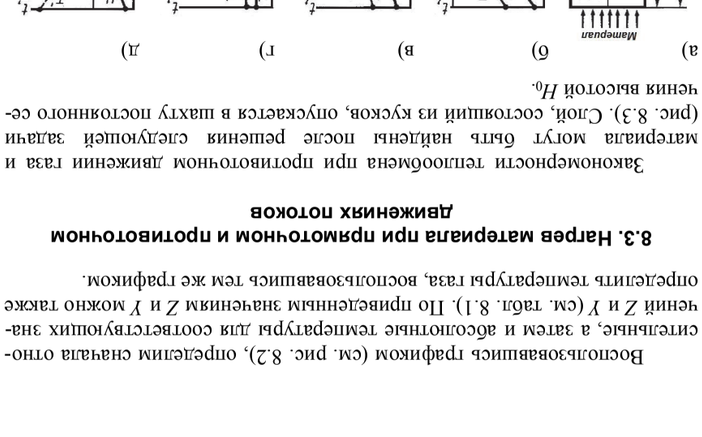


Рис. 8.3. Схемы теплообмена (а) и распределение температур в движущемся слое при противотоке: б – $m < 1{,}0$; в – $m = 1{,}0$; г – $m > 1{,}0$ и прямотоке (д)

Скорость движения кусков $w_м$ постоянна, что возможно, если массовый расход их $G_м$ = const. Загружаемые сверху куски имеют одинаковую температуру T'. Опускаясь, куски нагреваются и выходят из теплообмена на глубине H_0, имея среднюю температуру T''. Начальная температура газа, продуваемого снизу через слой, T', а на выходе из слоя T''. Расход газа постоянен и равен $V_г$. Теплоемкости материала $c_м$ и газа $c_г$ в процессе теплообмена не изменяются и равны средним теплоемкостям. Принято также, что величина коэффициента теплоотдачи от газов к поверхности куска постоянна.

Здесь рассматривается случай стационарного процесса, когда температуры на любом горизонте слоя не меняются во времени. Для рассматриваемой задачи необходимо определить температурное поле материала и газа по высоте слоя. Примем, что слой состоит из термически тонких кусков сферической формы. Для определения интересующих нас температур в

нения вводят коэффициент ε называемый интегральной степенью черноты и численно равный коэффициенту поглощения. Поэтому

$$J_\lambda = \varepsilon J_0 \quad \text{и} \quad E = \varepsilon C_0 (T/100)^4.$$

Несколько сложнее обстоит дело с телами, обладающими селективным излучением. Для таких тел, не подчиняющихся законам Планка и Стефана–Больцмана, принято считать, что степень черноты тела является функцией длины волны и температуры, т. е. $\varepsilon = f(\lambda T)$. Это дает возможность проводить расчеты лучистого теплообмена, пользуясь законом Стефана–Больцмана, а все отклонения от него учесть выбором нужной функции $\varepsilon\,(\lambda T)$.

Обычно произведение εC_0 называют коэффициентом излучения тела C, т. е. $\varepsilon = C/C_0$. Поэтому закон Стефана–Больцмана для серых тел имеет вид: $E = C\,(T/100)^4$.Значения коэффициентов излучения или степеней черноты приведены в литературе. Однако значения этих характеристик излучения справедливы только для условий их определения. Степень черноты металлов с полированной и неокисленной поверхностью мала и пропорциональна абсолютной температуре металла. Коэффициент пропорциональности в этих формулах равен корню квадратному из значения электросопротивления при комнатной температуре. При повышении температуры металла и окислении его поверхности коэффициент излучения может измениться весьма значительно. Например, для неокисленных железа и стали коэффициент излучения равен 0,3…0,4 Вт/(м^2·К^4). При окислении поверхности он может увеличиться в 10 раз и более. Коэффициент излучения диэлектриков, например огнеупоров, обычно уменьшается с повышением температуры. Так, при повышении температуры с 1000 до 1500 °С коэффициент излучения огнеупоров понижается на 20 – 25 %. На величину этого коэффициента влияет также шероховатость поверхности изделия. Ошлаковывание поверхности огнеупорных изделий сопровождается уменьшением коэффициента излучения.

Понятие «степень черноты» справедливо только в отношении теплового излучения и ничего общего не имеет с оптическим свойством тела поглощать те или иные световые лучи. Например, серые штукатурка или листовой асбест имеют примерно такую же степень черноты, как сажа и бархат. Степень черноты влажного снега близка к 0,8.

В отличие от черного серое тело не полностью поглощает падающую на него лучистую энергию. Часть лучистого теплового потока, не поглощенного серым телом, отражается его поверхностью.

Закон Кирхгофа устанавливает связь между способностями серого тела излучать и поглощать лучистую энергию. Его записывают в виде

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = E_3/A_3 = E_0$$

Механизм тепло- и массопереноса в зернистых слоях полностью еще не выяснен, однако несомненным является твердо установленный факт резкого увеличения (в 20 – 30 раз) коэффициента теплоотдачи в кипящем слое по сравнению с его величиной в плотном слое.

С уменьшением размера частиц резко увеличивается их суммарная поверхность. Увеличение коэффициента теплоотдачи и повышение теплоотдающей (тепловоспринимающей) поверхности приводят к значительной интенсификации теплоотдачи от газов к материалу. Поэтому второе преимущество псевдоожиженного слоя состоит в отсутствии перепада температур по высоте слоя, что повышает качество тепловой обработки материала.

Теплоту в слой подают различными способами, в том числе и за счет сжигания жидкого или газообразного топлива, при этом в слое можно не только создавать как окисленную, так и восстановительную атмосферу, но и обеспечить постоянство температур в нем. В этом случае расчет прогрева деталей целесообразно проводить с использованием граничных условий третьего рода.

Пример 8.3. Определить средний коэффициент теплоотдачи и тепловой поток при течении воды в горизонтальной трубе диаметром d = 12 мм и длиной L = 800 мм, если скорость движения воды w = 0,4 м/с, температура воды в начале трубы $T'_{ж}$ = 60 °С, в конце T'' = 54 °С; средняя температура поверхности $T_{п\,ср}$ = 20 °С.

Решение.

1) Средняя температура воды в трубе $T_{ж\,ср}$= 0,5(60 + 54) = 57 °С.

2) При средней температуре воды 54 °С [7]:

λ = 0,647 Вт/(м·К); $\nu = 0{,}517\cdot10^{-6}$ м^2/с; $a = 15{,}73\cdot10^{-8}$м^2/с; Pr = 3,29;

при средней температуре поверхности $T_п$ = 20 °С

$$\nu = 1{,}006\cdot10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с};\ a = 14{,}3\cdot10^{-8}\ \text{м}^2/\text{с};\ Pr_п = 7{,}03.$$

3) Число Рейнольдса $Re = wd/\nu$, $Re = 0{,}4\cdot12\cdot10^{-3}/0{,}517\cdot10^{-6} = 9284$.

Так как движение жидкости в трубе турбулентное, то используем формулу

$$Nu_{ср} = 0{,}021\cdot Re^{0,8}\cdot Pr^{0,43}\cdot(Pr/Pr_п)^{0,25}\cdot\varepsilon\,.$$

Поскольку L/d = 800/12 = 66,6 > 50, то ε = 1. Следовательно,

$$Nu_{ср} = 0{,}021\cdot9284^{0,8}\cdot3{,}29^{0,43}\cdot(3{,}29/7{,}03)^{0,25}\cdot1 = 43{,}3.$$

4) Средний коэффициент теплоотдачи $\alpha = Nu\cdot\lambda/d$,

$$\alpha_{ср} = 43{,}3\cdot0{,}647/12\cdot10^{-3} = 2335\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

5) Тепловой поток $Q = \alpha_{ср}F\Delta T$, $F = \pi dL$, $\Delta T = T_{ж\,ср} - T_{п\,ср}$,

$$Q = 2335\cdot3{,}14\cdot12\cdot10^{-3}\,(57 - 20) = 3255\ \text{Вт}.$$

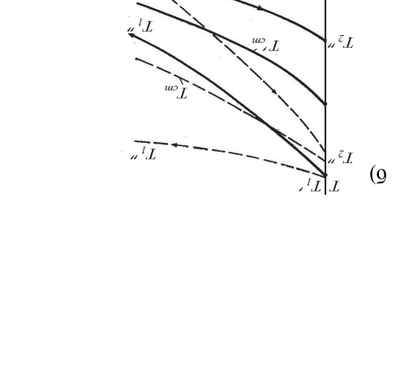


Рис. 9.1. Распределение температур в рекуперативных теплообменниках при прямоточном (а) и противоточном (б) движении теплоносителей ($w_2 > w_1$ – сплошные; $w_2 < w_1$ – штриховые линии)

Однако температура стенки прямоточного рекуператора ниже, чем противоточного, и она не так сильно меняется по направлению движения греющего потока. Снижение температуры стенки увеличивает продолжительность службы рекуператора.

Использование вначале по ходу греющего потока прямотока, а затем противотока, т. е. комбинированной схемы движения потоков, позволяет улучшить показатели работы рекуператора по сравнению с простыми схемами.

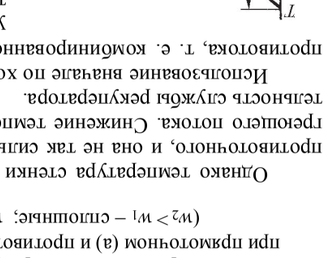


Рис. 9.2. К выводу формулы среднелогарифмической разности температур

При анализе схем теплообмена легко заметить, что разность температур потоков меняется по направлению движения потока. Чем она меньше, тем при прочих равных условиях меньше будет плотность теплового потока через стенку. При расчетах рекуператоров в формулу теплопередачи подставляют среднюю логарифмическую разность температур. Формулу для ее определения выведем для прямотока (рис. 9.2).

Можно записать, что изменение температуры греющего потока

$$dT_1 = -dQ/w_1. \tag{9.3}$$

Изменение температуры нагреваемого потока

$$dT_2 = -dQ/w_2. \tag{9.4}$$

Разность температур потоков $\delta = T_1 - T_2$. Дифференцируя это уравнение и подставляя в полученное выражение значения $d\,T_1$ и $d\,T_2$, получим, что

$$d\delta = -dQ(1/w_1 + 1/w_2) = -dQn, \tag{9.5}$$

жения и проохлаждения теплового излучения называется лучистым теплообменом. Несколько тел, которые обменивается лучистой энергией, называют излучающей системой. Лучистый теплообмен происходит и между телами с одинаковой температурой. Тела системы в этом случае излучают ровно столько энергии, сколько ее поглощают.

10.2. Основные понятия и определения

Количество лучистой энергии (в ваттах), проходящей через поверхность тела в единицу времени, называют лучистым тепловым потоком или мощностью излучения Q. Лучистый поток, отнесенный к единице поверхности, называют плотностью излучения или излучательной способностью E, т. е. $E = Q/F$.

Плотность излучения учитывает всю энергию, излучаемую единицей поверхности тела по всем направлениям в пределах полусферы во всем диапазоне длин волн. Поэтому ее часто называют плотностью полусферического излучения. Спектральной (монохроматической) интенсивностью излучения J_{λ}, Вт/м^3, называют энергию, излучаемую единицей поверхности тела в единицу времени в интервале длин волн $d\lambda$, т. е.

$$J_\lambda = dE\,/\,d\lambda.$$

Так как $E = \int_0^\lambda J_\lambda\ d\lambda$, то величину E называют интегральной интенсивностью излучения. Если на тело падает лучистый поток Q, то часть его Q_A поглощается телом, Q_R отражается и Q_D проникает. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии

$$Q_A + Q_R + Q_D = Q \quad \text{или} \quad Q_A/Q + Q_R/Q + Q_D/Q = 1.$$

Обозначая левые части уравнения соответственно через A, R и D, получим, что $A + R + D = 1$. Здесь $A = Q_A/Q$ – коэффициент поглощения или поглощательная способность; $R = Q_R/Q$ – коэффициент отражения или отражательная способность; $D = Q_D/Q$ – коэффициент пропускания или пропускная способность. Эти соотношения справедливы для интегрального и монохроматического излучений.

В зависимости от характера взаимодействия тел с лучистыми потоками в теории лучистого теплообмена все тела подразделяют на абсолютно белые ($R = 1$), абсолютно прозрачные ($D = 1$) и абсолютно черные ($A = 1$).

Абсолютно белых, черных или прозрачных тел в природе не существует. Отдельные тела в какой-то мере приближаются к этим категориям. Например, хорошо полированный алюминий близок по характеру взаимодействия с лучистыми потоками к абсолютно белым телам, сажа – к черным, а сухой воздух – к прозрачным.

В смесительных аппаратах передача теплоты от горячей среды к холодной происходит при смешении обоих потоков. Аппараты такого типа в металлургии обычно не применяются.

9.2. Основы теплового расчета рекуператоров

При расчете рекуператора используют уравнения теплопередачи и теплового баланса.

Уравнение теплопередачи имеет вид

$$Q = K\,\Delta T\,F, \qquad (9.1)$$

где K – средний коэффициент теплопередачи, Вт/(м^2 °С); ΔT – разность температур потоков, °С; F – поверхность нагрева рекуператора, м^2.

При отсутствии тепловых потерь и фазовых переходов в потоках уравнение теплового баланса можно записать так:

$$Q = w_1\,\Delta T_1 = w_2\,\Delta T_2. \qquad (9.2)$$

Здесь w_1 – водяной эквивалент греющего потока, например дымовых газов, Вт/°С; ΔT – изменение температур потоков, °С; w_2 – водяной эквивалент нагреваемого потока, например воздуха, Вт/°С.

Известно, что $w_2/w_1 = (T'_1 - T''_1)/(T''_2 - T'_2) = m$.

Одним штрихом обозначены температуры потоков при входе в рекуператор, а двумя – на выходе из него. Это отношение было использовано при анализе теплообмена в слое.

Математическое описание теплообмена между теплоносителями в рекуператоре аналогично описанию теплообмена между движущимся слоем и газовым потоком. Поэтому распределение температур потоков по длине поверхности теплообмена аналогично температурным полям в слое по его высоте.

На рис. 9.1 пунктирными линиями нанесены температурные поля потоков при условии, если теплоемкость (водяной эквивалент) греющего потока значительно (в 4 – 5 раз) превышает теплоемкость нагреваемого потока, т. е. $w_1 > w_2$. Сплошными линиями нанесены поля температур при условии, если $w_1 < w_2$. Для этих случаев для прямотока и противотока на графиках приведено изменение температур стенки.

Из рис. 9.1 легко заметить, что при противоточном движении при $w_1 > w_2$ конечная температура холодного потока может быть значительно выше конечной температуры горячего потока. Противоток выгодно отличается от прямотока возможностью получения более высокого подогрева холодного потока. Кроме того, он отличается также и по предельному значению КПД, равному для противотока w_1/w_2, а для прямотока – $w_1/(w_1 + w_2)$.

10.3. Законы излучения абсолютно черного тела

Закон Планка определяет спектральную интенсивность излучения в зависимости от температуры тела и длины волны, излучаемой нагретым абсолютно черным телом. Закон Планка записывают в следующей форме:

$$J_{0\lambda} = (c_1\lambda^{-5}) / \{exp\,[c_2/(\lambda T)] - 1\}. \qquad (10.1)$$

Здесь $J_{0\lambda}$ – интенсивность монохроматического излучения, Вт/м^3, с длиной волны λ при температуре абсолютно черного излучателя * T, К; постоянная $c_1 = 3{,}73\cdot10^{-16}$ Вт·м^2, а $c_2 = 1{,}673\cdot10^{-2}$ м·К; λ – длина волны излучения, м. (* Здесь и далее характеристики абсолютно черного тела обозначены нижним индексом «0»). Зависимость (10.1) на рис. 10.1 представлена графически.

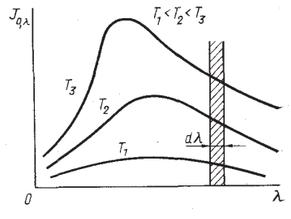


Рис. 10.1. К определению яркости излучения

Видно, что изотермы имеют сложную форму и что интенсивность спектрального излучения для очень коротких волн быстро возрастает до максимума, а затем медленно убывает, но не достигает нуля при больших длинах волн. Площадь, ограниченная изотермой, осью абсцисс и ординатами: λ и $\lambda + d\lambda$ (эта площадь на рисунке заштрихована), определяет величину интегральной интенсивности излучения $dE_{\lambda T} = J_{\lambda T}\,d\lambda$.

Из анализа рис. 10.1 следует, что при любой температуре существует максимальное значение интенсивности спектрального излучения. Для его отыскания следует определить из закона Планка производную $J_{0\lambda}/d\lambda$ и приравнять ее нулю. Решив найденное таким образом уравнение относительно λT, получим соотношение $\lambda_{max}\,T = \text{const}$, названное законом смещения Вина. Из него вытекает, что произведение длины волны, соответствующей максимуму спектральной интенсивности излучения, на абсолютную температуру является величиной постоянной, т. е. по мере увеличения температуры длина волны максимума излучения смещается в сторону коротких волн.

Зная длину волны, соответствующую максимуму излучения, можно на основании закона смещения Вина определить температуру излучающего тела. Подставив в уравнение закона Планка константу из уравнения закона Вина, равную 2,8978 мм·К, можно определить максимум спектральной интенсивности излучения $J_{0\ max} = c_3 T^5$, где $c_3 = 1{,}31\cdot10^{-5}$ Вт/(м^3·К^4). Следовательно, максимум спектральной интенсивности излучения пропорционален абсолютной температуре излучающего тела в пятой степени.

9. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

9.1. Классификация теплообменных аппаратов

Теплообменный аппарат – устройство, в котором теплота от жидкой или газообразной среды передается другой среде. По принципу работы теплообменные аппараты подразделяются на рекуперативные, регенеративные и смесительные. Широкое распространение в металлургии получили аппараты непрерывного действия – рекуператоры. Рекуператор представляет систему элементов, образующих каналы, по одной части которых течет горячая среда, а по другой – холодная. Поэтому теплота от одной среды к другой передается через разделяющую их металлическую или керамическую стенки. В первом случае тепловое сопротивление стенки из-за незначительной толщины ее и высокой теплопроводности металла невелико. Керамическую стенку для обеспечения той же прочности обычно изготовляют значительно толще металлической. С учетом малой теплопроводности керамики, в 20 – 30 раз меньшей теплопроводности металлов и сплавов, ее тепловое сопротивление будет значительным, что существенно снижает коэффициент теплопередачи от одной среды к другой. Поэтому габариты керамического рекуператора при одинаковом количестве передаваемой теплоты будут значительно больше габаритов металлического рекуператора.

Однако применение керамических стенок в сравнении с металлическими позволяет повысить температуру обменивающихся теплотой сред, а также обеспечить более продолжительную работу рекуператора при использовании высокотемпературных теплоносителей.

Помимо конструктивных особенностей, рекуперативные аппараты подразделяют по схемам движения потоков на аппараты прямоточные, противоточные и перекрестного тока. В некоторых аппаратах могут иметь место сочетания элементов всех трех основных схем движения. Рекуператоры являются основными теплообменными устройствами нагревательных металлургических печей. В этих устройствах за счет теплоты дымовых газов обеспечивается нагрев воздуха, а иногда и воздуха и газа, поступающих на горение.

В регенераторах горячая среда отдает теплоту аккумулирующему устройству (насадке). После того как насадка будет достаточно нагрета, через нее пропускают горячую среду, нагрев которой будет сопровождаться охлаждением насадки. После охлаждения насадки ее вновь нагревают, пропуская через нее горячий поток. Таким образом, в регенераторах происходят повторяющиеся циклы охлаждения горячей и нагрев холодной среды. Аппараты такого типа используются для нагрева дутья доменных печей, нагрева воздуха в мартеновских печах, нагревательных колодцах и др.

Закон Стефана–Больцмана определяет интегральную интенсивность излучения абсолютно черного тела по всем длинам волн E_0. Этот закон имеет большое практическое значение, так как с монохроматическим излучением приходится встречаться редко. Для того чтобы определить величину E_0, необходимо проинтегрировать уравнение Планка, так как $dE_0 = J_0\,d\lambda$. Тогда

$$E_0 = \int_0^\infty J_0\,d\lambda = \sigma_0 T^4,$$

где σ_0 – универсальная постоянная Стефана–Больцмана, равная $5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4). Чаще применяют иную форму записи этого закона:

$$E_0 = C_0\,(T/100)^4,$$

где C_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела, равный 5,67 Вт/(м^2·К^4).

10.4. Особенности излучения и поглощения лучистой энергии непрозрачными телами. Законы Кирхгофа и Ламберта

Все выше приведенные законы справедливы для абсолютно черных тел. В технике имеют дело обычно с нечерными телами, характеризующимся лишь долей излучения, либо отражательным или селективным излучением. Селективно излучающие тела называют иногда цветными. Серые тела излучают лучи тех же длин волн, что и абсолютно черные, т. е. их спектры излучения одинаковы. Но интенсивности излучения серых тел при всех длинах волн меньше интенсивностей излучения абсолютно черного тела в ε раз. Максимум излучения серого тела для данной температуры приходится на ту же самую длину волны λ, что и для черного тела. К серым телам относят все твердые тела, имеющие шероховатые или окисленные поверхности. Многие серые тела имеют значительные коэффициенты поглощения.

Селективным или избирательным называют такое излучение, когда коэффициенты поглощения и излучательные способности тел в равенении с абсолютно черным телом зависят от длины волны. Интенсивность излучения чистых металлов (Au, Ag, Cu) в коротковолновой части спектра составляет более половины интенсивности излучения абсолютно черного тела. При увеличении длины волны излучения это отношение уменьшается. Так, в длинноволновой части, спектра отношение интенсивности излучения этих металлов к интенсивности излучения абсолютно черного тела равно примерно 0,05. Особенно заметно селективность излучения и поглощения проявляется у газов. Для расчетов излучения серых тел используют закон Планка и Стефана–Больцмана. Для этих тел в расчетные урав-

При нагреве насадки прогревается каждый элемент (кирпич) ее, благодаря чему она аккумулирует теплоту (+Q). При охлаждении насадки аккумулированная теплота отдается воздуху (газу). Для ускорения этих процессов кирпичи нагревают и охлаждают сниметрично с обеих поверхностей. Изменение температур движущихся через насадку газовых сред хорошо согласуется с изменением температуры поверхности кирпича. Различие между этими температурами обусловлено условиями внешнего по отношению к кирпичу теплообмена.

Обращает на себя внимание также факт отставания температуры средней плоскости кирпича от температуры поверхности.

Это явление наступает не сразу после начала дымового или воздушного периодов и определяется не продолжительностью периодов, а теплофизическими свойствами материала кирпича и его размерами.

Отмеченные особенности влияют и на формирование температурных полей по сечению кирпича, которые приведены на рис. 9.5. Желательно, чтобы весь кирпич насадки аккумулировал и отдавал теплоту. Степень такого участия оценивается коэффициентом аккумуляции тепла или, как иногда называют его, коэффициентом использования кирпича в насадке η. Коэффициент η представляет собой отношение количества теплоты, полученной кирпичом в реальном процессе, к теплоте, которая могла бы быть аккумулирована при отсутствии внутреннего теплового сопротивления кирпича. О его величине можно судить по отношению площадей двух фигур (см. рис. 9.5):

$$\eta = F_{abeo} / F_{a2o}$$

Следует иметь в виду, что при нагреве кирпича в условиях постоянства тепловых потоков на его поверхности распределение температур по сечению кирпича в начале и в конце каждого периода будет близким к параболическому. Из этого следует, что в конце периодов нагрева и охлаждения насадки разность температур в кирпиче будет равна

$$\Delta T = 0{,}5\, qs/\lambda.$$

Так как площади на рис. 9.5, ограниченные осью абсцисс и соответствующими температурными кривыми, пропорциональны теплосодержанию кирпича в соответствующие моменты процесса, то для насадки, отнесенной к 1 м^2 поверхности:

- площадь

$$F_{abeo} = F_{a2o} - 2\cdot(2/3)\,\Delta T s\rho c = F_{a2o} - (2/3) qs^2 \rho c/\lambda;$$

- площадь

$$F_{a2o} = q_o \tau_o = 0{,}5\, q_o \tau_\xi.$$

Имея в виду что $q_o = \eta q_o$, после подстановки и преобразований будем иметь:

$$\eta = 1/[1 + 1{,}33(3)\, Fo_\xi].$$

Здесь в $Fo_\xi = s^2/(a\tau_\xi)$ $\tau_\xi = \tau_o + \tau_a$ – время одного цикла работы регенератора; a – коэффициент температуропроводности кирпича. Отметим, что эта формула впервые была получена И. Л. Семикиным.

В соответствии с определением η и рис. 9.5 можно также записать для 1 кг насадки:

$$\eta = 1 - 4\,\Delta T/ [3(T_{n\ max} - T_{n\ min})].$$

Приравняв формулы для η, получим:

$$\eta = [1 + 4/ (3Fo_\xi)]^{-1} = 1 - 4\,\Delta T/ [3(T_{n\ max} - T_{n\ min})],$$

откуда

$$(T_{n\ max} - T_{n\ min}) = \delta T = (4/3 + Fo_\xi)\,\Delta T = \Delta T Fo_\xi/\eta,$$

т. е. данная разность температур определяется условиями нагрева, толщиной кирпича, его теплофизическими свойствами и продолжительностью периода нагрева.

Формулы для η строго справедливы для $Fo_\xi > 0{,}66$.

Анализ полученных для η формул показывает, что середина кирпича не аккумулирует теплоту, если $\eta \le 1/3$. За счет увеличения продолжительности периода нагрева можно увеличить ε или, наоборот, определить продолжительность периода нагрева для $\eta > 1/3$.

Методика расчета регенераторов совпадает с методикой расчета рекуператоров; она также базируется на двух уравнениях: теплообмена и теплового баланса. Так же, как и для рекуператоров, вычисляется среднелогарифмическая разность температур. Однако из изложенного выше вытекают и отличия, заключающиеся в особом учете нестационарности теплообмена по высоте насадки и во времени, а также аккумуляции и деаккумуляции теплоты насадкой. Эти отличия отражаются в расчете итогового коэффициента теплопередачи χ, кДж/(м^2·°С·период), вывод формулы для которого приводится ниже.

По Б.И. Китаеву количество теплоты, передаваемой дымовыми газами для аккумуляции насадки в период ее нагрева:

$$Q_o = K_\xi (\ \overline{T}_o - \ \overline{T}_{nac.o}) F\tau_o.$$

Здесь $\overline{T}_o$ и $\overline{T}_{nac}$ – усредненные по обьему насадки и по времени температуры дыма и насадки, F – поверхность насадки; K_ξ –суммарный коэффициент теплопередачи:

$$1/ K_\xi = 1/\alpha_o + \varphi\, r/\lambda,$$

в котором α_o учитывает передачу тепла конвекцией и излучением, φ – форму кирпича насадки. Первое слагаемое, таким образом, характеризует внешнее тепловое сопротивление кирпича, а второе – внутреннее. Следовательно:

$$Q_o = (T_o - \ \overline{T}_{nac.o})\, F\tau_o/(1/\alpha_o + \varphi\, r/\lambda).$$

10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

10.1. Тепловое излучение

Все нагретые тела излучают электромагнитные волны. Излучение осуществляется за счет преобразования энергии теплового движения частиц тел в энергию излучения. Характеристики излучения определяются температурой тела и длиной волны.

Помимо волновых свойств, излучение обладает также и корпускулярными свойствами, состоящими в том, что излучение и поглощение энергии телами происходит отдельными порциями – квантами или фотонами, обладающими энергией, количеством движения и электромагнитной массой. Поэтому процессы излучения и поглощения лучистой энергии описываются законами квантовой механики, а процессы распространения энергии объясняются законами волновой теории электромагнитных колебаний. Электромагнитные колебания с длинами волн 0,004…0,800 мм получили общее название теплового излучения.

Энергия в окружающее пространство излучается от всей массы тела через его поверхность. Однако для непрозрачных тел принято считать, что энергия генерируется и поглощается в весьма тонких поверхностных слоях.

Тепловое излучение может быть непрерывным и селективным. Непрерывное излучение энергии телом происходит во всем диапазоне длин волн, селективное – только в нескольких узких диапазонах. Непрерывное излучение свойственно твердым телам и жидкостям, а селективное – газам и парам. Тепловое излучение может быть диффузным или направленным. При диффузном излучении лучистая энергия излучается равномерно во всех направлениях. Переносом лучистой энергии называют процесс распространения электромагнитных колебаний в окружающей среде. Характер этого процесса определяется свойствами среды, в которой происходит перенос, а также спектральным составом излучения.

Поглощение лучистой энергии присуще всем телам. Оно характеризуется тем, что лучистая энергия, попавшая на тело, превращается в его внутреннюю энергию.

Падающая на тело лучистая энергия частично поглощается им, частично отражается его поверхностью, а какая-то часть ее проходит через тело без превращения в другие виды.

Отражение лучистой энергии может быть зеркальным или диффузным. При зеркальном отражении угол отражения равен углу падения. Оно характерно для гладких поверхностей. Диффузное отражение чаще наблюдается для тел с шероховатыми поверхностями. Отражение лучистой энергии в этом случае происходит равномерно по всевозможным направлениям. Вся совокупность процессов излучения, переноса, поглощения, отра-

тогда

$$dQ = -d\delta\ /n \tag{9.6}$$

или с учетом (9.1)

$$-d\delta\ /n = KdF\delta. \tag{9.7}$$

Разделив переменные, интегрируя при постоянных значениях K и n получим:

$$ln\ (\delta_1\ /\delta_2) = K\, n\, F. \tag{9.8}$$

Интегрируя уравнение (9.6), получим:

$$Q = (\delta_1 - \delta_2)/n. \tag{9.9}$$

Подставив в уравнение (9.9) значение n из (9.8), получим:

$$Q = (\delta_1 - \delta_2)\, KF/ln\ (\delta_1\ /\delta_2). \tag{9.10}$$

Сравнивая формулу (9.10) с формулой (9.1), легко установить, что ΔT является среднелогарифмической разностью температур, т. е.

$$\Delta T = (\delta_1 - \delta_2)/\ ln(\delta_1\ /\delta_2).$$

Здесь δ_1 и δ_2 – разности температур потоков при входе в рекуператор и на выходе из него. Для прямоточных рекуператоров

$$\Delta T = [(T'_1 - T'_2) - (T''_1 - T''_2)]\ /\ ln[T'_1 - T'_2)/(T''_1 - T''_2)]. \tag{9.11}$$

Для противоточных рекуператоров

$$\Delta T = [(T'_1 - T''_2) - (T''_1 - T'_2)]\ /\ ln[T'_1 - T''_2)/(T''_1 - T'_2)]. \tag{9.12}$$

Формулы (9.11) и (9.12) справедливы также и для регенераторов. При одинаковых значениях температур потоков на входе и выходе из рекуператора величина средней логарифмической разности для противотока будет выше, чем для прямотока. Среднелогарифмическую разность температур для комбинированного тока вычисляют по формуле

$$\Delta T = \varphi(\delta_1 - \delta_2)\ /\ ln(\delta_1\ /\delta_2). \tag{9.13}$$

Поправочный коэффициент $\varphi = f\,(P, R)$, где

$$P = (T''_2 - T'_2)/\ (T'_1 - T''_1),\ \text{а}\ \ R = (T'_1 - T''_1)/(T''_2 - T'_2).$$

Значения $\varphi = f\,(P, R)$ выбирают по справочникам в зависимости от принятой схемы движения потоков.

Наиболее часто встречается задача определения величины поверхности теплообменника при нагреве определенного количества воздуха (газа) до заданной температуры. Дополнительными условиями этой задачи – температура греющего газа на входе в теплообменник и его тип. Основная расчетная формула получена из (9.1).

$$F = Q/(K\ \Delta T).$$

Аналогично можно получить для периода охлаждения

$$Q_в = (\ \bar{T}_{нас.в} - \bar{T}_в)\, F\tau_в/(1/\alpha_в + \varphi\, r/\lambda).$$

Из принципа работы регенератора вытекает, что $Q_д = Q_в = Q_{пер}$. Если принять в первом приближении, что в дымовой и воздушный периоды $T_{нас.д} = T_{нас.в}$, то после преобразований можно получить:

$$Q_{пер} = (T_д - \bar{T}_в)\, F/[1/(\alpha_д\tau_д) + (\varphi\, r/\lambda)(1/\tau_д + 1/\tau_в) + 1/(\alpha_в\tau_в)].$$

Если сопоставить это выражение с общим:

$$Q_{пер} = (T_д - \bar{T}_в)\, F\chi, \qquad (9.14)$$

то итоговый коэффициент теплопередачи будет представлен выражением, стоящим за F в правой части. Для условий плавильных и нагревательных печей обычно $T_д = T_в = 0{,}5\ T_\Sigma$, тогда

$$\chi = [1/(\alpha_д\tau_д) + 4\varphi\, r/(\lambda\tau_\Sigma) + 1/(\alpha_в\tau_в)]^{-1}.$$

Слагаемое $4\varphi\, r/(\lambda\tau_\Sigma)$ характеризует тепловое сопротивление аккумуляции для условий нагрева и охлаждения кирпича постоянным тепловым потоком.

В действительности условия отличаются от $q_{пов}$ = const, поэтому средняя температура насадки в дымовой период больше аналогичной температуры в воздушный период на величину Δ, названную температурным гистерезисом средней по массе температуры насадки (рис. 9.6):

$$\Delta = (T_{нас.д} - \bar{T}_{нас.в}) = \Delta T_{пер}/\zeta_*, \qquad (9.15)$$

где $\Delta T_{пер}$ – максимальный перепад средних по массе температур насадки, а ζ_* – коэффициент температурного гистерезиса. Для регенераторов плавильных и нагревательных печей $\Delta T_{пер}$ = 10,0, а для доменных воздухонагревателей $\Delta T_{пер}$ = 2,0…5,0. Из уравнения (9.15) следует, что $\zeta_* = \Delta T_{пер}/\Delta$. С учетом этого получим:

$$Q_{пер} = \chi[(\ \bar{T}_д - \bar{T}_в) - \Delta]. \qquad (9.16)$$

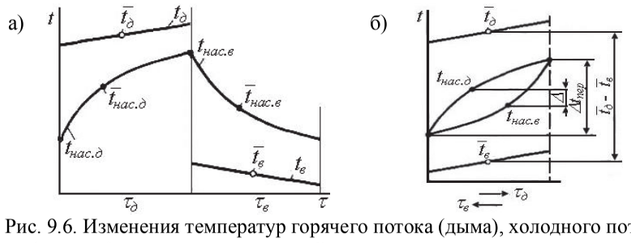


Рис. 9.6. Изменения температур горячего потока (дыма), холодного потока (воздуха) и температуры средней по массе насадки: а – при нагреве и охлаждении; б – совмещенный график

Далее составление баланса тепловых потоков в насадке дает:

$$r\cdot F\rho\cdot c\Delta\zeta_* = q\tau_д\cdot F.$$

Выражая величину q через (9.14), после преобразования будем иметь:

$$\Delta = \chi\ (T_д - \bar{T}_в)/r\rho c\zeta_*.$$

Таким образом, величина Δ оказалась выражена через параметры, определяющие тепловую работу регенератора. Подставив это значение Δ в (9.16) и проведя соответствующие преобразования, получим при равенстве дымового и воздушного периодов:

$$\chi = \{1/(\alpha_д\tau_д) + [4\varphi\, r/(\lambda\tau_\Sigma) + 1/(r\rho c\zeta_*)] + 1/(\alpha_в\tau_в)\}^{-1}.$$

Из последнего уравнения отчетливо видно, что тепловое сопротивление кирпича состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое в квадратных скобках связано с продвижением теплового потока по толщине кирпича, а второе – с процессом аккумуляции тепла. Одно слагаемое с увеличением толщины кирпича уменьшается, а второе увеличивается. Для вполне конкретных условий работы насадки (λ, s, $T_о$, ρ, c) существует оптимальная толщина кирпича.

Методика теплового расчета регенераторов не отличается от приведенной выше для рекуператоров. Разница состоит в способе определения коэффициента теплопередачи. Значение коэффициента теплопередачи меняется по высоте насадки. Поэтому в расчетах используют среднеарифметическое значение для верха и низа насадки. Обычно исходной величиной для расчета является количество теплоты, которое регенератор должен передавать нагреваемой среде, равное $w_2\,\Delta T_2$. Конечной целью расчета является определение поверхности нагрева регенератора, величина которой зависит от условий теплообмена, а также конструктивных особенностей насадки.

В реальных регенераторах характер изменения температурных полей газовых потоков и кирпича насадки по высоте и во времени значительно сложнее. Он будет определяться отношениями водяных эквивалентов потоков, а также зависимостью теплофизических свойств кирпича и газов от температуры. Изменение температурных полей усложнится также не равенстве периодов нагрева и охлаждения, как это имеет место, например, при работе воздухонагревателей доменной печи. Участь многие факторы, влияющие на теплообмен, трудно, но возможно, особенно при наличии современной вычислительной техники.

Величина Q подсчитывается по секундному расходу воздуха V_{2c}, начальной и конечной температурам воздуха T_2' и T_2'' и его теплоемкости c_2:

$$Q = V_{2c}\, c_2\ (T_2'' - T_2').$$

Средний коэффициент теплопередачи можно рассчитать:

- для плоской стенки

$$K = (1/\alpha_1 + s/\lambda + 1/\alpha_2)^{-1},$$

- для цилиндрической стенки

$$K = [1/(\alpha_1 d_1) + (0{,}5/\lambda)\ ln\ (d_2/d_1) + 1/(\alpha_2 d_2)]^{-1},$$

приняв коэффициенты теплообмена от греющего газа к стенке α_1 и от стенки к нагреваемой среде α_2 учитывают суммарное действие и конвекции, и излучения, если, конечно, газовые среды способны излучать и поглощать тепловую энергию. Если рекуператоры металлические, то (s/λ) → 0, и приведенное выражение для K упрощается.

Для подсчета по формулам (9.11) и (9.12) среднелогарифмической разности температур должны быть заданы температуры нагреваемой среды T_2' и T_2'', а также начальная температура греющей среды T_1'. Неизотермическая конечная температура T_1'' может быть найдена из уравнения теплового баланса (9.2) с учетом вероятных тепловых потерь рекуператора. Обычно для рекуператоров принимают КПД η = 0,85…0,9, тогда

$$(0{,}85\ldots0{,}9)\ w_1\ (T_1' - T_1'') = w_2(T_2'' - T_2').$$

а искомая температура, если $m = w_2/w_1$:

$$T_1' = T_1' - m\ ((T_2'' - T_2') / (0{,}85\ldots0{,}9).$$

Так получают исходные данные для определения общей поверхности нагрева F. Если известна поверхность одного элемента $f_э$, то можно определить количество элементов

$$N = F/f_э.$$

Компоновка этого числа элементов в теплообменник представляет конструкторскую задачу, которая должна решаться с учетом того, что действительные скорости газовых сред и принятые для определения α_1 и α_2 были бы близки друг к другу.

9.3. Основы теплового расчета регенераторов

В регенераторах горячие и холодные потоки проходят через насадку поочередно. В начале, например сверху, проходит горячий поток (дымовые газы), температура которого на входе в насадку равна T_1' (рис. 9.3). Затем после прогрева насадки через нее пропускают холодный поток с начальной температурой T_2', отнимающий теплоту от насадки. После этого остывшая насадка вновь нагревается горячим потоком, и так циклы нагрева и охлаждения следуют непрерывно один за другим.

Насадка может быть кирпичной или металлической, представлять собой слой керамических кусков или шаров. Применение для насадки огнеупорных материалов позволяет нагревать холодный поток в регенераторах до температуры более 1000 °С, чего не позволяет ни один рекуператор.

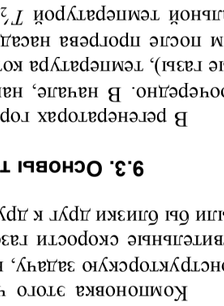


Рис. 9.3 Схема регенеративного теплообменника

Обычно для непрерывной подачи в печь нагретой среды регенераторы подключают попарно (один регенератор нагревается дымовыми газами, другой нагревает воздух (или газ)).

Использование в металлургических печах нагретых до высокой температуры воздуха и газа или только воздуха позволяет существенно повысить температуру рабочего пространства печей.

Для большинства металлургических печей продолжительность дымового периода $\tau_д$ (нагрева насадки) равна продолжительности воздушного (газового) периода $\tau_н$ (охлаждения насадки). С учетом того, что элементы насадки нагреваются и охлаждаются при граничных условиях второго рода, т. е. при постоянном тепловом потоке на поверхности элемента, изменение тепловых потоков и температур в насадке можно характеризовать кривыми, представленными на рис. 9.4.

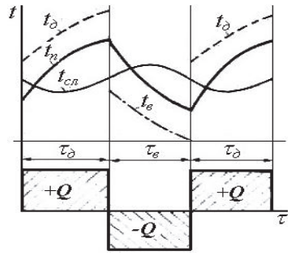


Рис. 9.4. Изменение температур горячего потока (дыма) $t_д$ поверхности t_n и средней плоскости $t_{сл}$ кирпича насадки и холодного потока (воздуха) $t_в$ во времени при граничных условиях второго рода

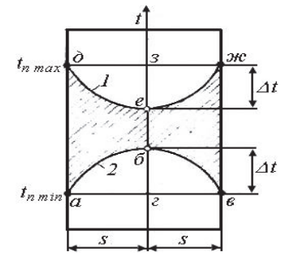


Рис. 9.5. Распределение температур по толщине насадочного кирпича в конце периодов нагрева (кривая 1) и охлаждения (кривая 2)

и формулируют следующим образом: отношение излучательной способности тела при какой-либо температуре к его коэффициенту поглощения является величиной постоянной и равной излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре. Отсюда следует, что чем больше тело излучает лучистой энергии, тем больше оно может ее поглотить.

Часто закон Кирхгофа представляют в виде

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda;\ \varepsilon \approx A,$$

т. е. он строго выполняется для монохроматического излучения и лишь приближенно для интегрального. Для серых тел строго выполняется равенство $\varepsilon = A$. Учет неравномерности излучения энергии в различных направлениях учитывают с помощью угловой плотности излучения B_φ, представляющей количество энергии, излучаемой единицей поверхности тела в единицу времени в пределах телесного угла, ось которого составляет угол φ с нормалью к данной поверхности. Закон Ламберта устанавливает зависимость между угловой плотностью излучения B_φ и яркостью B_n в направлении нормали к излучающей поверхности. В соответствии с этим законом $B_\varphi = B_n \cos\varphi$, причем это равенство выполняется тем точнее, чем ближе излучение к диффузному.

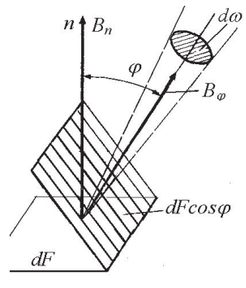


Рис. 10.2. Зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны излучения и температуры

Угловую плотность излучения можно изобразить в векторной форме. Если все векторы изображать в одном масштабе, то геометрическим концом всех векторов будет сферическая поверхность, имеющая радиус 0,55 B_n (рис. 10.2). Нормальная яркость излучения может быть определена путем интегрирования угловых плотностей излучения по поверхности сферы. Тогда $B_n = E/\pi$. Таким образом, для любых тел, подчиняющихся закону Ламберта, $B_n = E(\cos\varphi)/\pi$. Поэтому величина лучистого потока, излучаемого элементом поверхности тела dF в пределах телесного угла $d\omega$, ось которого составляет угол φ с нормалью к dF, равна:

$$d^2 Q = EdF\cos\varphi\, d\omega/\pi .$$

Приближенно величина коэффициента φ_{12} может быть вычислена по уравнению

$$\varphi_{12} = L/(L + l).$$

где l – расстояние между поверхностями 1 и 2, м; $L = 4V/F$. Здесь V – объем, м^3, пространства между поверхностями 1 и 2; F – площадь поверхности, м^2, ограничивающей этот объем.

На основании изложенного можно заключить, что коэффициент диафрагмирования зависит как от соотношения длины канала к его поперечному сечению, так и от формы канала.

В реальных условиях футеровка не будет обладать такими свойствами, о которых говорилось выше. Теплота от кладки печи передается теплопроводностью, вследствие чего температура кладки вблизи излучающей поверхности будет несколько ниже, а вблизи воспринимающей поверхности 2 выше, чем в системе с идеальной футеровкой. Поэтому к тепловому потоку, передаваемому излучением с одной поверхности на вторую, добавится тепловой поток, отдаваемый кладкой в окружающее пространство. В силу этого реальные тепловые потери будут несколько больше. На величину потерь также влияют: металлическая арматура окон, которая с целью скрепления с кладкой входит в нее; расширение площади поперечного сечения окна в сторону рабочего пространства, вследствие чего возрастает угловой коэффициент φ_{12}.

В расчетное уравнение для реальных случаев должен входить приведенный коэффициент излучения $C_{пр}$, учитывающий отличие излучения реальных поверхностей от излучения абсолютно черного тела, и по величине меньший коэффициента C_0. Так как в приведенном уравнении для расчета потерь тепла через окна указан коэффициент $C_0 > C_{пр}$, то таким образом косвенно учтены дополнительные потери теплоты, и расчеты по этому уравнению дают удовлетворительные результаты.

Пример 10.2. Определить величину лучистого теплового потока, теряемого излучением из рабочего пространства через окно в цех. Размер окна $a \times b = 0{,}5 \times 0{,}7$ м. Толщина футеровки $l = 0{,}35$ м. Температура рабочего пространства печи $T_1 = 1500$ К, а цеха 300 К.

$$L = 4\,a\,b\,l/(2ab + 2al + 2bl) =$$

$$= 2{,}05 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}35/(0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}35 + 0{,}7 \cdot 0{,}35) = 0{,}245/0{,}77 = 0{,}318.$$

Поэтому $\varphi_{12} = 0{,}318/(0{,}318 + 0{,}35) = 0{,}476.$

Тогда

$$Q = C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]\,ab \cdot 0{,}5\,(1 + \varphi_{12}) =$$
$$= 5{,}67\,(15^4 - 3^4)\,0{,}35 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}476 = 74\ \text{кВт}.$$

Так как все входящие в систему тела выпуклые, то самооблучение отсутствует, следовательно,

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0 \quad \text{или} \quad H_{11} = H_{22} = H_{33} = 0.$$

На основании свойства взаимности можно также записать:

$$F_1\varphi_{12} = F_2\varphi_{21};\quad F_1\varphi_{13} = F_3\varphi_{31};\quad F_2\varphi_{23} = F_3\varphi_{32}. \qquad (10.5)$$

Складывая все уравнения системы (10.4) и имея в виду уравнения системы (10.5), получим

$$F_1\varphi_{12} + F_1\varphi_{13} + F_2\varphi_{23} = 0{,}5(F_1 + F_2 + F_3) \qquad (10.6)$$

или $\varphi_{23} = 0{,}5\,(F_2 + F_3 - F_1)/F_2$.

Решая совместно систему уравнений (10.4) с уравнением (10.5), будем иметь:

$$\varphi_{12} = (F_1 + F_2 - F_3)/(2F_1);\quad \varphi_{13} = (F_1 + F_3 - F_2)/(2F_1). \qquad (10.7)$$

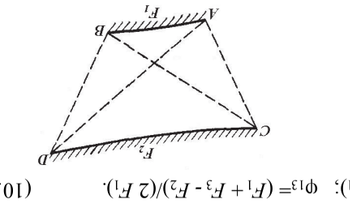


Рис. 10.4. Замкнутая система трех тел

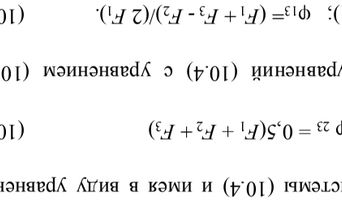


Рис. 10.5. Незамкнутая система двух тел

Если система не замкнута, то ее замыкают дополнительными поверхностями так, чтобы они не загораживали заданные поверхности друг от друга. Этот прием замыкания дополнительными поверхностями носит название метода «натянутых нитей» Г.Л. Подobка. Его применение можно проиллюстрировать задачей определения угловых коэффициентов для незамкнутой системы двух тел (рис. 10.5), имеющих поверхности F_1 и F_2. Для этого замкнем систему дополнительными поверхностями. Тогда получим, что

$$\varphi_{12} = 1 - \varphi_{AC,\,BD} - \varphi_{AB,\,AC}.$$

На основании уравнений (10.7) можно записать:

$$\varphi_{AB,\,BD} = 0{,}5(AB + BD - AD)/AB;$$
$$\varphi_{AB,\,AC} = 0{,}5(AB + AC - BC)/AB.$$

Поэтому

$$\varphi_{12} = 0{,}5(AB + BC - BD - AC)/AB;$$
$$\varphi_{12}AB = H = 0{,}5(AD + BC) - 0{,}5(BD + AC).$$

Таким образом, взаимная излучающая поверхность лучистого теплообмена между двумя произвольно расположенными поверхностями равна

чесского кислорода, а применение других сопряжено с усложнением конструкции печи и в конечном итоге с повышением эксплуатационных расходов (на установку автоматики для регулирования соотношения топлива и воздуха, теплообменных аппаратов и т. д.). Следует отметить, что температуру газов можно повышать до известных пределов, определяемых стойкостью огнеупорования и другими технологическими причинами. Интенсификость теплообмена можно повысить также, увеличив приведенный коэффициент излучения (изменяя степень черноты твердых поверхностей и степень черноты газов). Степень черноты поверхности отечественных изделий и окисленных черных металлов равна примерно 0,8, и ее практически изменить нельзя. Степень черноты газов является функцией парциального давления газов, эффективной длины луча и температуры газов. Парциальное давление газов зависит от состава топлива, условий его сжигания, состояния кладки и условий эксплуатации печи. За счет улучшения условий сжигания топлива (выбора оптимального коэффициента избытка воздуха, введения подогрева дутья, применения кислорода в дутье) можно повысить парциальные давления излучающих газов. Увеличение эффективной длины лучей в работающих печах невозможно, так как оно должно сопровождаться изменением размеров рабочего пространства. Кроме того, увеличение размеров печи будет сопровождаться увеличением тепловых потерь вследствие поверхностями кладки, что в ряде случаев может привести к ухудшению показателей работы печей. Поэтому, хотя для изменения степени черноты газов и имеется много факторов, но характер их влияния относительно невелик и они не в состоянии сильно изменить коэффициент ослабления газового излучения $k_г$.

Степени черноты продуктов горения любого газа, кокосодержащих смесей, а при некоторых условиях сжигания природного и коксового газов относительно невелики (0,10…0,25 при обычных условиях сжигания указанных топлив). Чтобы повысить степень черноты газов, применяют карбюрацию – особый способ отопления, заключающийся в том, что в печи одновременно с бедным углеводородами топливом сжигают в небольшом количестве тощего, богатое углеводородами, например мазут или смолу. В зависимости от конкретных условий эти добавки приносят 3…5 % тепла к общему количеству химической энергии топлива. При сжигании мазута или смолы с недостатком воздуха происходит крекинг (разложение) углеводородов с выделением большого количества мельчайших частичек (до10 мкм) в 1 см^3 сжигаемого углерода диаметром около 0,5…3,0 мкм. Движущейся в газовом потоке эти частицы очень быстро прогреваются конвекцией и лучистым потоками от нагретого газа до температуры, близкой к температуре потока. Естественно, что нагретые частицы сами начинают излучать тепловую энергию.

10.5. Лучистый теплообмен между двумя поверхностями, разделенными лучепрозрачной средой

10.5.1. Угловые коэффициенты, их свойства и методы определения

В расчетах лучистого теплообмена большой интерес представляет определение тепловых потоков, которыми обмениваются между собой тела той или иной системы, имеющие различные и произвольно ориентированные относительно друг друга поверхности. Влияние размеров тел и их взаимной ориентации относительно друг друга при лучистом теплообмене позволяют учесть угловые коэффициенты.

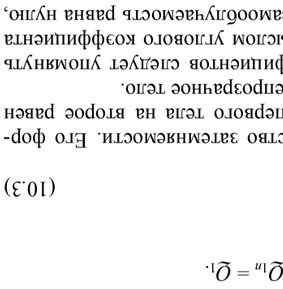


Рис. 10.3. Схема расположения двух тел, обменивающихся лучистой энергией

С целью определения физического смысла этого понятия рассмотрим рис. 10.3, на котором представлены два выпуклых черных тела, адиабатически изолированных от окружающей среды и расположенных в пространстве произвольно. Температуры поверхностей тел F_1 и F_2 соответственно равны T_1 и T_2 и поддерживаются постоянными. Пространство между телами заполнено лучепрозрачной средой. На основании закона Ламберта можно записать, что количество лучистой энергии, передаваемой с площадки dF_1 на dF_2, равно:

$$d^2Q_{12} = E_1\, dF_1 \cdot \cos\varphi_1\, d\omega_1 /\pi.$$

Индекс $_{12}$ читается один, два. Он определяет направление переноса лучистой энергии.

С площадки dF_2 на dF_1 передается лучистый поток

$$d^2Q_{21} = E_2\, dF_2 \cos\varphi_2\, d\omega_2 /\pi.$$

Величины пространственных (телесных) углов:

$$d\omega_1 = (dF_2 \cos\varphi_2)/r^2; \quad d\omega_1 = (dF_1 \cos\varphi_1)/r^2,$$

где r – расстояние между центрами площадок; φ_1 и φ_2 – углы, образованные линией r и нормалями к площадкам dF_1 и dF_2. Тогда

$$d^2Q_{12} = E_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\, dF_1 dF_2/(\pi r^2);$$
$$d^2Q_{21} = E_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\, dF_1 dF_2 /(\pi\, r^2).$$

Последние уравнения содержат общие сомножители $\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot dF_1\, dF_2 /(\pi r^2)$, которые обозначим через d^2H и назовем взаимной излучающей поверхностью.

видно, что часть отраженного футеровкой потока попадает на поверхность F_2, а также и на футеровку.

В силу этого обстоятельства система теплообмена состоит из трех тел: поверхностей F_1 и F_2 и футеровки F_3. Несомненно, что условия теплообмена существенно отличаются от условий теплообмена излучением двух плоскостей в отсутствии футеровки. В рассматриваемом примере на передачу тепла от одной поверхности на другую будет влиять наличие футеровки. Лучистый сальдо-поток для второй плоской поверхности

$$Q_{2s} = Q_{1эф}\varphi_{12} + Q_{3эф}\varphi_{32} - Q_{1эф}. \qquad (10.12)$$

Здесь $Q_{1эф}$, $Q_{2эф}$, $Q_{3эф}$ – эффективные потоки соответственно с поверхностей 1, 2 и 3. Для поверхностей 1 и 2 $Q_{1эф} = E_{01}F_1$, а $Q_{2эф} = E_{02}F_2$. Для поверхности футеровки $Q_{3эф} = R_3Q_{3s} + E_{03}F_3$. Так как эта поверхность адиабатна, то сальдо-поток $Q_{3s} = 0$. Поэтому $Q_{3эф} = E_{03}F_3$, т. е. футеровка обладает свойствами абсолютно черного тела. Поэтому

$$Q_{2s} = E_{01}F_1\varphi_{12} + E_{03}F_3\varphi_{32} - E_{02}F_2. \qquad (10.13)$$

Температуры T_1 и T_2 заданы. Если будет известна температура футеровки T_3, то можно определить и значение сальдо-потока Q_{2s}. Ее можно определить из условия, что футеровка выполняет роль переизлучателя. Весь лучистый поток, падающий на нее с первой поверхности, полностью ею переизлучается на вторую поверхность, т. е.

$$Q_{13s} = Q_{32s} \quad \text{или} \quad E_{01}F_1\varphi_{13} - E_{03}F_3\varphi_{31} = E_{03}F_3\varphi_{32} - E_{02}F_2\varphi_{23}.$$

Поэтому

$$E_{03} = (E_{01}F_1\varphi_{13} + E_{02}F_2\varphi_{23})/(F_3\varphi_{32} + F_3\varphi_{31}).$$

Так как $F_3\varphi_{32} + F_3\varphi_{23}$; $F_3\varphi_{32} = F_1\varphi_{13}$; $F_1 = F_2$; $\varphi_{13} = \varphi_{23}$, то $E_{03} = 0{,}5\,(E_{01} + E_{02})$.

Подставим значение излучательной способности футеровки в уравнение (10.13):

$$Q_{2s} = E_{01}F_1\varphi_{12} + 0{,}5(E_{01} + E_{02})F_1\varphi_{13} - E_{02}F_2 =$$
$$= E_{01}F_1(\varphi_{12} + 0{,}5\varphi_{13}) - E_{02}F_2(1 - 0{,}5\varphi_{13}).$$

Так как $\varphi_{13} = 1 - \varphi_{12}$, то $1 - 0{,}5\varphi_{13} = \varphi_{12} + 0{,}5\varphi_{13}$.

Поэтому

$$Q_{2s} = Q = (E_{01} - E_{02})F_1\,(\varphi_{12} + 0{,}5\varphi_{13}) = 0{,}5(1 + \varphi_{12})(E_{01} - E_{02})\,F_1 =$$
$$= C_0\,[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]F_1.$$

Величину $0{,}5\,(1 + \varphi_{12}) = \Phi$ называют коэффициентом диафрагмирования, учитывающим как прямое излучение поверхности 1 на поверхность 2, так и переизлучение футеровки. Для его определения в литературе приводят различные графики или таблицы.

Так как спектры твердых тел сплошные, а не селективные, как у газов, то спектр излучения газового потока, содержащего большое количество сажистых частичек, приближается к спектру излучения серого тела. Тепловые лучи частично поглощаются газовым объемом, частично пропускаются им. Поглощательная и излучательная способности таких газовых потоков неодинаковы для лучей различных длин волн. Следовательно, введение карбюризатора в рабочее пространство печи принципиально меняет характер излучения газового потока за счет увеличения коэффициента ослабления и повышения степени черноты ε_{z+n}. При этом степень черноты газов с сажистыми частицами может увеличиться в 3…4 раза.

10.7. Теплообмен излучением в системах из трех и четырех тел

10.7.1. Лучистый теплообмен между двумя параллельными плоскостями произвольной одиночной

Имеем две параллельные плоскости размерами $a \times b$, находящиеся на расстоянии l (рис. 10.10). Одна из них имеет температуру T_1, вторая T_2, причем $T_1 > T_2$. Эти поверхности соединены перпендикулярно расположенными серыми нетеплопроводными адиабатными стенками – «идеальной футеровкой». Расстояние между поверхностями совпадает с их размерами.

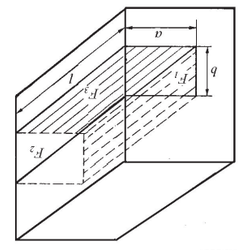


Рис. 10.10. К расчету излучения через окна печи

Примем, что температуры кромки постоянны и равны T_3. Требуется определить величину лучистого потока, передаваемого излучением с одной поверхности на другую. Эта задача очень часто встречается при расчетах печей. Для системы трех тел аналогией будет являться излучение через окна и отверстия в кладке печей. Например, излучение из рабочего пространства печи через относительно небольшое отверстие может рассматриваться как излучение с одной абсолютно черной поверхности на другую, причем эти поверхности как бы натянуты на внутренние и внешние края отверстий.

На поверхность F_2, имеющую температуру T_2, падает два лучистых тепловых потока. Один падает с поверхности F_1, а второй – с поверхности футеровки F_3.Тепловая, излучаемая нагретой футеровкой, состоит из двух частей: 1) излучения поверхности F_1, отражаемого футеровкой на поверхность F_2; 2) собственного излучения футеровки, передаваемого на F_2. Оче-

Тогда $d^2Q_{12} = E_1\, d^2H$ и $d^2Q_{21} = E_2\, d^2H$.

Так как $Q_1 = E_1F_1$ и $Q_2 = E_2F_2$, то отношения $Q_{12}/Q_1 = H/F_1$; $Q_{21}/Q_2 = H/F_2$, где величина $H = \int_{F_1}\int_{F_2} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2\, dF_1 dF_2 /(\pi\, r^2)$ не зависит от порядка интегрирования.

Обозначая в последних уравнениях отношения Q_{12}/Q_1 и Q_{21}/Q_2 через φ_{12} и φ_{21}, получим, что

$$\varphi_{12}F_1 = \varphi_{21}F_2 = H. \qquad (10.2)$$

В уравнении (10.2) интегральные величины φ_{12} и φ_{21} – угловые коэффициенты. Они показывают, какая доля лучистой энергии может переходить от одного тела к другому. Угловые коэффициенты зависят от размеров и взаимного расположения поверхностей в пространстве, но не зависят от температур и коэффициентов излучения поверхностей.

Уравнение (10.2) обычно известно под названием принципа взаимности. Оно позволяет по одному известному угловому коэффициенту системы, состоящей из двух тел, определять второй не известный угловой коэффициент.

Второе важное свойство угловых коэффициентов – свойство замыкаемости лучистого теплообмена какого-либо тела со всеми окружающими его телами. Это свойство записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} = 1, \text{ так как } \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n} = Q_1.$$

Поскольку $H_{1n} = \varphi_{1n}F_1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{1n} = F. \qquad (10.3)$$

Следующим свойством является свойство затемняемости. Его формулировка гласит, что лучистый поток от первого тела на второе равен нулю, если на пути лучей находится третье непрозрачное тело.

Из несколько свойств угловых коэффициентов следует упомянуть еще одно. В соответствии с физическим смыслом угловой коэффициента следует, что для плоского и выпуклого тел самооблучаемость равна нулю, поскольку для них ($\varphi_{11} = 0$).

Для определения угловых коэффициентов можно воспользоваться методом поточной алгебры, разработанным Г. Л. Поляком.

Основу метода можно понять, если рассмотреть схему лучистого теплообмена трех выпуклых тел, образующих замкнутую систему (рис. 10.4). На основании свойства замыкаемости:

$$F_1\varphi_{12} + F_1\varphi_{13} = F_1;$$
$$F_2\varphi_{21} + F_2\varphi_{23} = F_2; \qquad (10.4)$$
$$F_3\varphi_{31} + F_3\varphi_{32} = F_3.$$

Определить плотность лучистого теплового потока газа на поверхность стенок q.

Эффективная длина луча $s_{эф} = d$ = 0,6 м. Тогда коэффициент ослабления при температуре газа

$$k_\lambda = (0{,}8 + 1{,}6p_{H2O})(1 - 0{,}00038T)/[(p_{CO2} + p_{H2O})s_{эф}]^{1/2},$$

$$k_\lambda = (0{,}8 + 1{,}6\cdot 0{,}1)(1 - 0{,}00038 \cdot 1073)/[(0{,}15 + 0{,}1)0{,}6]^{1/2} = 1{,}298.$$

Тогда $\varepsilon_г = 1 - exp\,[-k_\lambda(p_{CO2} + p_{H2O})s_{эф}]$,

$$\varepsilon_г = 1 - exp\,[-1{,}298(0{,}15 + 0{,}1)\ 0{,}6] = 0{,}177.$$

Коэффициент ослабления при температуре стенки

$$k_{ст} = 2{,}454\ (1 - 0{,}00038 \cdot 473) = 2{,}025,$$

$$A_г = 1 - exp\,[2{,}025\ (0{,}15 + 0{,}1)\ 0{,}6] = 0{,}262.$$

Тогда

$$q = C_0[(\varepsilon_г/A_г)(T_г/100)^4 - (T_{ст}/100)^4]\ (1/A_г + 1/\varepsilon_{ст} - 1),$$

$$q = 5{,}67\ [(0{,}177/0{,}262) \cdot 10{,}73^4 - 4{,}73^4]/(1/0{,}262 + 1/0{,}6 - 1) = 10695\ Вт/м^2.$$

10.6.3. Излучение пламени и карбюрация

Проанализировав уравнение (10.11), позволяющее определять количество теплоты, передаваемое излучением от нагретых газов к твердым поверхностям, можно наметить способы интенсификации лучистого теплообмена. Очевидно, что увеличить лучевоспринимающую поверхность не всегда возможно. Ее размеры определяются конструкцией печи и поверхностью нагреваемого в печи материала. Поэтому эта величина для вполне определенной конструкции печи не может быть изменена. Рассмотрим выражение, стоящее в квадратных скобках. Его величину можно увеличить или за счет увеличения температуры газов, или понижения температуры твердых поверхностей (внутренней поверхности кладки и поверхности нагреваемого материала). Очевидно, что температура поверхности нагреваемого или проплавляемого в печи материала не может быть изменена, так как она определяется технологией горячей обработки. Поэтому второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках, также не может быть изменено произвольно без изменения технологии обработки. Первое слагаемое этого выражения – температура газов – может быть изменено. Повышение температуры газов – весьма мощный фактор увеличения интенсивности лучистого теплообмена. Оно может быть достигнуто различными способами: выбором оптимального коэффициента расхода воздуха, использованием дутья, обогащенного кислородом, применением для горения подогретых дутья и горючих газов. Как видно, способов повышения температуры дымовых газов существует много. Но одни из них иногда нельзя применять по экономическим соображениям, например вследствие дефицита техни-

полусумме длин «внутренних нитей» (AO и BC) минус полусумма «внешних нитей» (BD и AC).

Помимо метода поточной алгебры, для определения угловых коэффициентов существует значительное количество иных способов определения этих столь важных для практики расчетов теплообмена величин.

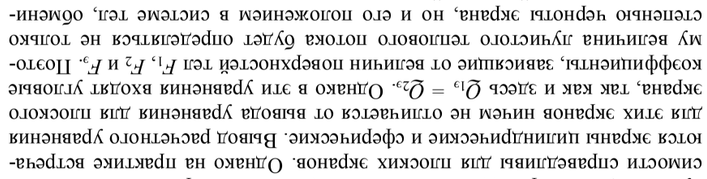


Рис. 10.6. Системы из двух тел

Ниже приведены значения угловых коэффициентов для некоторых систем из двух тел. Для больших плоских поверхностей, расположенных на небольшом расстоянии одна от другой (рис. 10.6, *а*), $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$. Для двух концентрических сферических поверхностей или двух длинных круглых коаксиальных цилиндров (рис. 10.6, *б*) $\varphi_{12} = 1$ и $\varphi_{21} = F_1/F_2$. Для внутренних поверхностей двух полых сфер или круглых пересекающихся цилиндров (рис. 10.6, *в*) $\varphi_{12} = f/F_1$; $\varphi_{21} = f/F_2$. Для двух поверхностей, составляющих длинный цилиндр, $\varphi_{12} = F_1/(F_1 + F_2)$ и $\varphi_{21} = F_2/(F_1 + F_2)$ (рис. 10.6, *г*, *д*). Для более сложных систем значения угловых коэффициентов приведены в литературе в форме аналитических зависимостей или графиков.

10.5.2. Метод сальдо-потоков

Метод сальдо-птоков позволяет получить формулы для расчета теплообмена излучением любой системы из двух серых тел. Пусть на поверхность тела падает лучистый поток, имеющий удельную плотность $q_{пад}$. Часть его поглощается телом $q_{погл}$, а часть отражается $q_{отр}$. Тело обладает собственным излучением. Оно излучает поток $q_{соб}$. Сумма собственного и отраженного потоков представляет поток эффективный $q_{эф}$. Обозначим через q_s лучистый поток, представляющий разность (сальдо) между поглощенным $q_{погл}$ и собственным $q_{соб}$ тепловыми потоками (рис. 10.7).

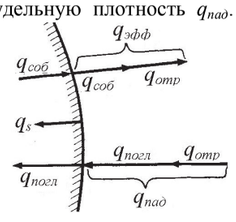


Рис. 10.7. Схема лучистых потоков

В зависимости от их величины сальдо-поток может быть положительным (приход теплоты) или отрицательным (потери теплоты).

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, то $Q_{12}/Q^*_{12} = 1/2$.

В общем случае при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ldots = \varepsilon_n = \varepsilon_э$ $Q_{12}/Q^*_{12} = 1/(n + 1)$, где n – число экранов.

$\varepsilon = 0{,}667$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}8$. При установке между поверхностями одного экрана с $\varepsilon_э = 0{,}8$ приведенная степень черноты снижается вдвое, а при $\varepsilon_э = 0{,}05$ она уменьшается примерно в 27 раз. С уменьшением приведенной степени черноты уменьшается и величина лучистого теплового потока. Если между плоскостями установлено n экранов с различными степенями черноты, то для этой системы

$$1/\varepsilon_{пр} = 1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + \sum_{i=1}^{n} (2/\varepsilon_{эi} - 1).$$

Это уравнение можно записать иначе, используя его для случая, когда обе поверхности экранов имеют различную степень черноты:

$$1/\varepsilon_{пр} = 1/\varepsilon' + 1/\varepsilon'' - 1 + \sum_{i=1}^{n} (1/\varepsilon_{1,эi} + 1/\varepsilon_{2,эi} - 1).$$

При малой толщине газовой прослойки передача теплоты от одной поверхности к другой, помимо излучения, может осуществляться также и теплопроводностью. Передача тепла через прослойки толщиной более 2 мм в основном определяется излучением. Величина лучистого потока $q_л$ мало зависит от толщины прослойки. Для тонких прослоек даже при высоких значениях температур отношение $q_л/q_л$ может быть значительным, т. е. теплопроводность будет в несколько раз превышать передачу теплоты излучением.

Прилипь водорода в газе действует так же, как и уменьшение газовой прослойки, т. е. приводит к увеличению передачи тепла, так как теплопроводность водорода в семь раз больше теплопроводности воздуха. Расчеты справедливы для регенерированной прослойки. При движении газа в прослойке интенсивность теплоотдачи увеличивается. Тепло от одной поверхности ко второй будет передаваться всеми видами теплопередачи, т. е. излучением, теплопроводностью и конвекцией. Рассмотренные выше зависимости справедливы для плоских экранов. Однако на практике встречается часто экраны цилиндрические и сферические. Вывод расчетного уравнения для этих экранов ничем не отличается от вывода уравнения для плоского экрана, так как и здесь $Q_{1э} = Q_{2э}$. Однако в эти уравнения входят угловые коэффициенты, зависящие от величин поверхностей тел F_1, F_2 и $F_э$. Поэтому величина лучистого теплового потока будет определяться не только степенью черноты экрана, но и его положением в системе тел, обменивающихся лучистой энергией.

10.6. Лучистый теплообмен между газом и окружающими его стенками

10.6.1. Особенности излучения и поглощения лучистой энергии газами

При прохождении тепловых лучей через газовую среду интенсивность излучения уменьшается, что вызывается поглощением и рассеиванием тепловых потоков молекулами газа. Ослабить интенсивность излучения могут только определенная группа газов, а также частицы пыли и сажи, взвешенные в газовых потоках. Ослабление луча в поглощающем газе пропорционально толщине слоя газа dx и концентрации поглощающих излучение молекул. Последняя может быть охарактеризована парциальным давлением поглощающих молекул p или концентрацией твердых частиц. Поэтому закон Бугера, описывающий характер изменения угловой плотности излучения или интенсивности луча $J_{\lambda x} = (dE/d\omega)$, имеет такой вид:

$$dJ_{\lambda x}/J_{\lambda x} = -k_\lambda p\,dx.$$

Коэффициент k_λ определяет способность молекул газа или твердых частиц, взвешенных в газовом потоке, поглощать и рассеивать лучистые потоки с длинами волн λ. Его называют спектральным коэффициентом ослабления.

Полагая, что k_λ и p не зависят от пути x, проходимого лучом, получим, что интенсивность луча, прошедшего через слой толщиной s, $J''_{\lambda x} = J'_{\lambda x}\ exp\,(-k_\lambda p\,s)$. Здесь $J'_{\lambda x}$ – начальная интенсивность луча. Газы не отражают падающего на них лучистого потока. Поэтому их поглощательная способность равна отношению поглощенного потока к падающему, т. е.

$$A_\lambda = (J'_{\lambda x} - J''_{\lambda x})/J'_{\lambda x} = 1 - exp\,(-k_\lambda p\,s). \qquad (10.10)$$

В соответствии с законом Кирхгофа можно считать, что для монохроматического излучения степень черноты газов $\varepsilon_\lambda = A_г$. Для интегрального излучения $\varepsilon_г \neq A_г$, так как поглощение (ослабление) лучей различных длин волн будет различным. Из уравнения (10.10) следует, что степень черноты газа экспоненциально зависит от $(k_\lambda p\,s)$. При бесконечном увеличении толщины слоя газа $\varepsilon_г \to 1$. Очевидно, что чем больше коэффициент, тем меньшая толщина s будет обеспечивать практически бесконечную толщину слоя. Уравнение (10.10) определяет очень важное свойство газового излучения – его объемный характер. Излучение твердыми телами в отличие от излучения и поглощения лучистой энергии происходит в тонких поверхностных слоях. Преобразование тепловых лучей через поглощающую газовую среду сопровождается переходом поглощенного лучистого потока в тепловую энергию. Эта энергия газовой средой может

снова излучаться. Поэтому перенос лучистой энергии поглощающей средой совершается в результате поглощения и излучения лучистых тепловых потоков. Помимо способности переизлучения поглощающей среды, рассмотрим и другие особенности излучения газовых сред. Вторая особенность состоит в том, что излучать и поглощать лучистую энергию в заметных количествах могут трех- и четырехатомные газы (CO_2, H_2O, SO_2, NH_4, CH_4 и др.), а также некоторые двухатомные газы, состоящие из полярных молекул (CO, HCl и др.). Для расчета лучистого теплообмена в рабочем пространстве печей наиболее существенным является излучение двуокиси углерода и водяного пара. Их действительные очень сложные спектры поглощения заменяют упрощенными и считают, что эти газы излучают и поглощают энергию лучей, располагающихся в пределах трех узких полос в инфракрасной части спектра. Полное излучение или поглощение какого-либо газа слагается из излучения или поглощения его спектральных полос. Поэтому степень черноты газа в значительной степени зависит от его свойств и парциального давления p, толщины газового слоя или так называемой эффективной длины луча $s_{эф}$. На степень черноты газа влияет также и температура T, так как величина спектрального коэффициента ослабления k_λ будет меняться при изменении температуры.

10.6.2. Расчет лучистого теплообмена между газом и стенками

Расчет теплообмена обычно начинают с определения степени черноты газов в общем случае $\varepsilon_г = f\,(p,\, s_{эф},\, T)$. Парциальное давление излучающих газов определить легко, так как их состав бывает известен из расчетов горения топлива. Затем необходимо определить эффективную длину лучей $s_{эф} = 4V/F$, где V – объем излучающего газа, м^3; F – поверхность всех стен, ограничивающих этот объем, м^2. После вычисления величины $s_{эф}$ определяют произведение $ps_{эф}$. Затем по известной температуре и произведению $ps_{эф}$ вычисляют спектральный коэффициент ослабления и степень черноты газов.

Спектральный коэффициент ослабления k_λ, отнесенный к суммарному излучению двуокиси углерода и водяного пара, вычисляется по формуле А.М. Гурвича:

$$k_\lambda = (0{,}8 + 1{,}6p_{H2O})(1 - 0{,}00038\,T)/(ps_{эф})^{1/2}.$$

Степень черноты чистых газов

$$\varepsilon_г = 1 - exp(-k_\lambda\, ps_{эф}),$$

где $p = p_{CO2} + p_{H2O}$.

Если газы запылены золой или сажей их степень черноты

$$\varepsilon_{г+п} = 1 - exp[(-k_\lambda\, p + k_п\mu\,)s_{эф}],$$

где k_λ – коэффициент ослабления для чистых газов; $k_п$ –коэффициент ослабления для пылевых или сажевых частиц. Он зависит от размеров частиц и весовой концентрации частиц в газе μ, кг/м^3.

Для вывода уравнения, позволяющего определить количество тепла, излучаемой газом на окружающие его твердые стенки, рассмотрим систему, изображенную на рис. 10.9. Внутри канала содержится излучающий газ, имеющий степень черноты $\varepsilon_г$ и температуру $T_г$. Газ не только излучает, а также и поглощает лучистый поток.

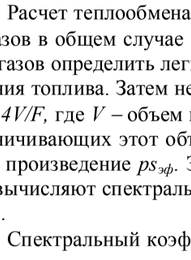


Рис. 10.9. Схема к выводу расчетного уравнения для излучения газа

Температура газа выше температуры стенок, т. е. $T_г > T_{ст}$. В этом случае в прилегающем (пограничном) слое температура газа будет меньше температуры центральных газовых слоев. Поэтому газ будет поглощать лучисто энергию не только при своей температуре $T_г$. Следовательно, поглощательная способность газа не будет равна его излучательной способности, т. е. $\varepsilon_г \neq A_г$.

В соответствии с методом сальдо-потоков можно записать, что

$$q_{эф} = q_{нас} - q = q_{погл}/A_г - q = (q_{соб} + q)/\,A_г = \varepsilon_г E_{0,г}/\,A_г + (1/\,A_г - 1)q,$$

где q – плотность сальдо-потока ($q = q_{погл} - q_{соб}$), Вт/м^2; при $T_г > T_{ст}$ $q_{ст} = -q_г$. Если учесть, что угловые коэффициенты $\varphi_{г,ст} = \varphi_{ст,г} = 1$, то

$$q_{ст} = \varepsilon_г E_{0,г}/A_г + (1/A_г - 1)\,q_г - E_{0,ст} - (1/\varepsilon_{ст} - 1)\,q_{ст},\ \text{а}$$

$$q = [(\varepsilon_г/A_г) E_{0,г} - E_{0,ст}]/(1/A_г + 1/\varepsilon_г - 1) =$$
$$= [C_0/(1/A_г + 1/\varepsilon_г - 1)][(\varepsilon_г/A_г)(T_г/100)^4 - (T_{ст}/100)^4]. \qquad (10.11)$$

Коэффициент поглощения газа $A_г$ определяется аналогично $\varepsilon_г$, но при температуре стенки.

Рассмотрим кратко расчет газового излучения сложных газовых смесей. В продуктах горения ряда топлив может содержаться несколько центров SO_2. Степень черноты SO_2 учитывается при вычислении $\varepsilon_г$ по суммарному парциальному давлению $p_{RO_2} = p_{CO_2} + p_{SO_2}$. Точно таким же образом можно учесть и влияние излучения CO, т. е. парциальное давление CO следует суммировать с парциальным давлением CO_2. В продуктах горения могут содержаться и не строевые полностью углеводороды, излучательные способности которых значительны. Но данных для расчетов степеней черноты углеводородов пока недостаточно, поэтому излучение углеводородов в расчетах теплообмена не учитывается.

Пример 10.1. По каналу диаметром $d = 0{,}6$ м движутся продукты полного сгорания, содержащие 15 % CO_2 и 10 % H_2O. Температура газа 800 °С, а окружающих его стенок 200 °С. Степень черноты стенок $\varepsilon_{ст} = 0{,}6$.

Удельная плотность сальдо-потока, Вт/м^2:

$$q_s = q_{погл} - q_{соб} = q_{нас} - q_{эф}.$$

Тогда

$$q_{эф} = q_{нас} - q_s = q_{погл}/\varepsilon - q_s\,,\ q_{погл} = q_s + q_{соб}.$$

Эффективный тепловой поток

$$q_{эф} = (q_s + q_{соб})/\,\varepsilon - q_s = E_0 + (1/\varepsilon - 1)\,q_s.$$

Для рассмотренных на рис. 10.6 систем тел можно записать, что $q_{1s} + q_{2s} = 0$; $-q_{1s} = q_{2s}$. Допустим, что $T_1 > T_2$. Тогда $q_{1эф} > q_{2эф}$. Вывеdем расчетные формулы, которые будут пригодны для определения тепловых потоков. Эффективные потоки 1-го и 2-го тела:

$$Q_{1эф} = E_1F_1 + R_1Q_{1s};\quad Q_{2эф} = E_2F_2 + R_2Q_{2s}.$$

Здесь $Q_{1s} = q_{1s}\,F_1$ – сальдо-поток первого тела системы; $Q_{2s} = q_{2s}\,F_2$ – сальдо-поток второго тела; $R_1 = (1/\varepsilon_1 - 1)$ – относительная рефлективность первого тела, представляющая отношение его отражательной способности к поглощательной; $R_2 = (1/\varepsilon_2 - 1)$ – относительная рефлективность второго тела. Сальдо-поток будет равен разности эффективных потоков, но на тело 1 попадает не весь эффективный тепловой поток тела 2, а только часть его, определяемая значением углового коэффициента φ_{21}. Соответственно $Q_{1эф}$ нужно умножить на угловой коэффициент φ_{12}, т. е. $Q_{12нас} = Q_{1эф}\,\varphi_{12}$ и $Q_{21нас} = Q_{2эф}\varphi_{21}$.

Так как $Q_{2s} = (E_1F_1 + R_1Q_{1s})\varphi_{12} - (E_2F_2 + R_2Q_{2s})\varphi_{21}$, а $Q_{1s} = -Q_{2s}$, то

$$Q_s(1 + R_1\varphi_{12} + R_2\varphi_{21} = E_1F_1\varphi_{12} - E_2F_2\varphi_{21} = (E_1 - E_2)H =$$
$$= C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]H,$$

где $H = F_2\varphi_{21} = F_1\varphi_{12}$.

Поэтому

$$Q = [C_0/(1 + R_1\varphi_{12} + R_2\varphi_{21})][(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]H, \qquad (10.8)$$

или

$$Q = C_{пр}[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]H, \qquad (10.9)$$

где $C_{пр}$ – приведенный коэффициент излучения, Вт/(м^2·К^4). Его величина, как видно из сопоставления (10.8) и (10.9), определяется угловыми коэффициентами системы и степенями черноты тел. Для рассмотренных ранее систем (см. рис. 10.6, *а*, *б*, *г*) приведенные коэффициенты излучения рассчитывают по формулам

$$C_{пр} = C_0/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1),$$
$$C_{пр} = C_0/(1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2)1/\varepsilon_2 - 1).$$

Аналогичные формулы для вычисления величины $C_{пр}$ можно получить и для других систем, изображенных на рис. 10.6, *в*, *д*.

10.5.3. Экраны

Экраном в теории лучистого теплообмена называют тонкое тело из непрозрачных для тепловых лучей материалов. Обычно экраны изготовляют из металлов. Их используют, например, для защиты от излучения, когда требуется уменьшить величину теплового потока, передаваемого от излучателя другим телам. Сущность теплообмена рассмотрим на следующем примере: у двух больших близко расположенных поверхностей $F_1 = F_2$, $T_1 > T_2$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$ (рис. 10.8).

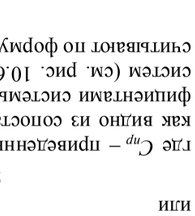


Рис. 10.8. Плоский экран

Поместим между этими поверхностями экран, имеющий поверхность $F_э = F_1 = F_2$. Степень черноты экрана $\varepsilon_э \neq \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Нужно определить величину лучистого теплового потока Q_{12}, передаваемого с первой поверхности на вторую при наличии между ними экрана.

Тепловой поток с первой поверхности на экран $Q_{1э} = \varepsilon'(E_{0,1} - E_{0,э})\,F$, а с экрана на вторую поверхность $Q_{э2} = \varepsilon''\,(E_{0,э} - E_{0,2})\,F$, $\varepsilon' = 1/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_э - 1)$ и $\varepsilon'' = 1/(1/\varepsilon_э + 1/\varepsilon_2 - 1)$ – приведенные степени черноты систем «первая поверхность – экран» и «экран – вторая поверхность».

Так как экран тонкий, то он не поглощает тепло: весь тепловой поток, воспринятый им от первой поверхности, полностью передается на вторую поверхность. Поэтому

$$\varepsilon'\,(E_{0,1} - E_{0,э}) = \varepsilon''\,(E_{0,э} - E_{0,2}).$$

Это уравнение позволяет определить пока неизвестную излучательную способность экрана: $E_{0,э} = (\varepsilon'\,E_{0,1} + \varepsilon''\,E_{0,2})/(\varepsilon' + \varepsilon'')$. Тогда после подстановки в $Q_{1э}$

$$Q_{12} = Q_{1э} = Q_{э2} = \varepsilon'[E_{0,1} - (\varepsilon'E_{0,1} + \varepsilon''E_{0,2})/\,(\varepsilon' + \varepsilon'')]F =$$
$$= \varepsilon'\varepsilon''(E_{0,1} - E_{0,2})/(\varepsilon' + \varepsilon'')F = \varepsilon_{пр}\,(E_{0,1} - E_{0,2})F.$$

Здесь $\varepsilon_{пр}$ – приведенная степень черноты системы первая поверхность – экран – вторая поверхность. Величина, обратная ей:

$$1/\varepsilon_{пр} = 1/\varepsilon' + 1/\varepsilon'' = 1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + 2/\varepsilon_э - 1.$$

Лучистый тепловой поток с первой поверхности на вторую при отсутствии экрана

$$Q^*_{12} = F\,(E_{0,1} - E_{0,2})\,/(1/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + 2/\varepsilon_э - 1) = \varepsilon\,F\,(E_{0,1} - E_{0,2}).$$

Здесь ε – приведенная степень черноты системы без экранов. Тогда отношение

$$Q_{12}/\,Q^*_{12} = \varepsilon_{пр}/\varepsilon = (1/\varepsilon)/(1/\varepsilon_{пр}) = (1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1)//(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + 2/\varepsilon_э - 1).$$

где v_0 – характерная пульсационная скорость, определяемая через напряжение трения; $\tau = \rho\, g\delta = a\, \rho\, v_0^2$; δ – толщина стекающей пленки, a – постоянная; ρ – плотность; λ – размер области задания турбулентности у свободной поверхности, определяемый выражением

$$\lambda = \sigma/(\rho\, v_0^2),$$

где σ – поверхностное натяжение.

В соответствии с (12.1) коэффициент турбулентной диффузии уменьшается по мере приближения к поверхности и при толщине пограничного слоя $\delta_{сл}$ оказывается равным коэффициенту молекулярной диффузии

$$D_m \approx (\delta_{сл}^2\, v_0)/\lambda \;\approx\; D_m \approx D_м.$$

Таким образом, поток разбивается на две области: область, непосредственно прилегающую к поверхности раздела толщиной $\delta_{сл}$ (диффузионный слой), в которой коэффициент турбулентной диффузии меньше коэффициента молекулярной диффузии; и область, представляющую остальную часть потока, в которой коэффициент турбулентной диффузии больше коэффициента молекулярной диффузии. В первой области турбулентной диффузией (по сравнению с молекулярной) пренебрегают и рассматривают поток вещества, проходящий через нее, как чисто молекулярный. Это положение оказывается справедливым при наличии твердой фиксированной границы раздела

12.3. Модель процессов массопередачи на основе представлений о межфазной турбулентности

Наиболее общую форму уравнений массопередачи с учетом взаимодействия потоков фаз можно получить, используя принципы системного анализа и явления межфазной турбулентности. С введением фактора гидродинамического состояния двухфазной системы f уравнения массопередачи для двухфазных потоков принимают вид:

- при разности концентраций, выраженной по газовой фазе,

$$Nu_{Дг} = ARe_г^{\,m} Pr_г^{\,n}(1 + f); \qquad (12.2)$$

- при разности концентраций, выраженной по жидкой фазе,

$$Nu_{Дж} = A_1\, Re_{ж}^{\,m1} Pr_{ж}^{\,n1}(1 + f). \qquad (12.3)$$

Раскрывая скобки в уравнениях (12.2) и (12.3), получим

$$Nu_{Дг} = ARe_г^{\,m} Pr_г^{\,n} + ARe_г^{\,m} Pr_г^{\,n} f, \qquad (12.4)$$

$$Nu_{Дж} = A_1\, Re_{ж}^{\,m1} Pr_{ж}^{\,n1} + A_1\, Re_{ж}^{\,m1} Pr_{ж}^{\,n1} f \qquad (12.5)$$

Первые слагаемые уравнений (12.4) и (12.5) определяют количество вещества, переносимого в пределах данной фазы за счет молекулярной и вихревой диффузии, а вторые слагаемые – количество вещества, перено-

сящегося турбулентными пульсациями. Эти слагаемые учитывают влияние турбулентности потока на массоперенос.

Уравнения (12.4) и (12.5) можно записать в виде

$$Nu_{Дг} = ARe_г^{\,m} Pr_г^{\,n} + K, \qquad (12.6)$$

$$Nu_{Дж} = A_1\, Re_{ж}^{\,m1} Pr_{ж}^{\,n1} + K, \qquad (12.7)$$

где K – коэффициент, учитывающий влияние турбулентности потока на массоперенос.

Коэффициент K можно определить, используя аналогию между процессами массопередачи и теплопередачи. Для этого воспользуемся уравнением Рейнольдса, которое устанавливает связь между коэффициентами трения и теплоотдачи:

$$\frac{\alpha_{тр}}{c_p \rho w} = \frac{\tau_{тр}}{\rho w^2},$$

где $\alpha_{тр}$ – коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении; c_p – теплоемкость; ρ – плотность; w – скорость потока; $\tau_{тр}$ – напряжение трения.

Для ламинарного пограничного слоя на плоской пластине

$$\frac{\alpha_{тр}}{c_p \rho w} = \frac{0{,}332}{Re^{0{,}5}\, Pr^{2/3}}.$$

Для турбулентного пограничного слоя

$$\frac{\alpha_{тр}}{c_p \rho w} = \frac{0{,}0296}{Re^{0{,}2}\, Pr^{2/3}}.$$

Аналогия между процессами массопередачи и теплопередачи позволяет записать уравнение для массопередачи в виде

$$\frac{\beta_{тр}}{w} = \frac{0{,}0296}{Re^{0{,}2}\, Sc^{2/3}},$$

где $\beta_{тр}$ – коэффициент массоотдачи при турбулентном течении; Sc – диффузионный критерий Шмидта.

Для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{\beta_{тр}}{w} = \frac{0{,}332}{Re^{0{,}5}\, Sc^{2/3}}.$$

Из сравнения уравнений (12.6) и (12.7) с уравнениями (12.4) и (12.5) следует, что

$$K = ARe_г^{\,m} Pr_г^{\,n} f = \frac{0{,}0296}{Re^{0{,}2}\, Sc^{2/3}} Re^m Pr^n f$$

для газовых потоков и

$$K = A_1\, Re_{ж}^{\,m1} Pr_{ж}^{\,n1} f = \frac{0{,}0296}{Re^{0{,}2}\, Sc^{2/3}} Re^{m1} Pr^{n1} f$$

для жидких потоков.

Для ламинарного пограничного слоя

$$K = \frac{0{,}332}{Re^{0{,}5}\, Sc^{2/3}} Re^m Pr^n f$$

для газовых потоков и

$$K = \frac{0{,}332}{Re^{0{,}5}\, Sc^{2/3}} Re^{m1} Pr^{n1} f$$

для жидких потоков.

Для турбулентного пограничного слоя

$$K = \frac{0{,}0296}{Re^{0{,}2}\, Sc^{2/3}} Re^m Pr^n f$$

для газовых потоков и

$$K

Учитывая пределы изменения D_m, режим II может быть определен как промежуточный режим.

При $D_m > D_м$ создаются условия преобладающего влияния коэффициентов турбулентного обмена. Поэтому режим III может быть определен как режим турбулентного обмена. Развиваемая при этом турбулентность по своему характеру будет турбулентностью, возникающей у твердой границы.

Режим IV, когда коэффициенты вихревой вязкости и вихревой диффузии достигают максимального значения, соответствует автомодельному режиму, или режиму развитой турбулентности. В этом режиме перепад давления в потоке определяется квадратичным законом, и сопротивление не зависит от молекулярной вязкости. Однако в процессе массопереноса возрастание коэффициента вихревой вязкости приводит к интенсивному продольному перемешиванию и снижает коэффициент диффузии.

12. КИНЕТИКА МЕЖФАЗНОГО ПЕРЕНОСА

Основной вопрос теории массопередачи заключается в том, что происходит на межфазной поверхности. При этом необходимо не только выявить вид механизма переноса вещества через межфазную поверхность – молекулярный (молекулярная диффузия) или турбулентный (вихревая диффузия), но и выявить всю совокупность взаимодействий микро- и макроэффектов.

Ввиду сложности одновременно протекающих явлений в двухфазных системах, до настоящего времени не представлялось возможным разработать строгую теорию массопередачи на подвижной границе раздела фаз, обладающей стохастико-детерминированной природой, и поэтому привлекаются упрощенные модельные представления.

12.1. Двухпленочная модель массопередачи

Двухпленочная модель массопередачи, разработанная Льюисом и Уитменом, была заимствована из теории растворения твердых тел, предложенной ранее Нернстом. Основные положения двухпленочной модели Льюиса и Уитмена.

1) На границе раздела двух фаз (газ – жидкость, пар – жидкость, жидкость – жидкость) со стороны каждой фазы возникают пограничные пленки (газовая пленка, жидкостная пленка и т. п.), создающие основное сопротивление при переходе вещества из одной фазы в другую

2) На границе раздела двух фаз, соответственно на границе раздела между пленками, создаются условия подвижного равновесия, т. е. достигаются стационарные условия массообмена.

Разделим числитель и знаменатель на $\varepsilon_г\ \varphi$. Кроме того, отношение $1/\varphi = F_к/F_м = \omega$ назовем степенью развития кладки. Тогда лучистый тепловой поток от газа и кладки на материал

$$Q_{гкм} = C_0\varepsilon_м k[(T_г/100)^4 - (T_м/100)^4]F_м, \qquad (10.19)$$

где $k = (\omega + 1 - \varepsilon_г)/[\ \omega + (1 - \varepsilon_г)\ \beta\ /\varepsilon_г]$ – коэффициент.

Уравнение (10.19) впервые получено В. Н. Тимофеевым. Оно схоже с уравнением для систем из двух тел. Чтобы определить лучистый тепловой поток системы газ – кладка – металл, нужно вычислить только значение коэффициента k, так как все остальные члены этого уравнения задаются.

При расчетах тепловых балансов печей возникает необходимость в определении температуры внутренней поверхности кладки, K^4. Ее определяют по формуле

$$T^4_к = T^4_м + \xi(T^4_г - T^4_м),$$

где $\xi = (\omega + 1 - \beta\ )/[\omega + (1 - \varepsilon_г)\ \beta\ /\varepsilon_г]$ – коэффициент, также учитывающий особенности теплообмена в системе.

На численное значение коэффициентов k и ξ влияют ряд факторов: степени черноты материала $\varepsilon_м$ и газов $\varepsilon_г$, степень развития кладки ω. Поэтому увеличению температуры внутренней поверхности кладки способствуют как повышение степени черноты газов, так и повышение степени развития кладки.

Температуру печи замеряют с помощью термопары, горячий спай которой располагается вблизи металла и экранирован от него, но «видит» стенки и свод печи. Показания термопары зависят от степени черноты газов и их температуры, а также от температуры кладки:

$$T^4_{печ} = \varepsilon_г\ T^4_г + (1 - \varepsilon_г)\ T^4_к.$$

Видно, что температура печи никогда не равна температуре газов, так как $\varepsilon_г < 1$.

Температура газов в рабочем пространстве печей меняется от теоретической $T_{1г}$ до температуры газов, уходящих из печи $T_{2г}$, а температура металла от начальной $T_{1м}$ до температуры выдачи его из печи $T_{2м}$. Чтобы учесть это изменение температур, можно воспользоваться для усреднения температурного напора следующей формулой:

$$T^4_г - T^4_м = (T^4_{1г} - T^4_{2м})(T^4_{2г} - T^4_{1м})^{1/2}.$$

Если температура нагреваемого материала постоянна по длине рабочего пространства, а меняется лишь температура газа, например в печах с поштучной загрузкой и выгрузкой заготовок, то температуры газов следует усреднять по формуле

$$T^4_г = 0{,}774\ T^2_{1г}\ T^2_{2г}.$$

Лучистый сальдо-поток материала

$$Q_{sм} = E_г F_м \varepsilon_м + Q_к(1 - \varepsilon_г)\varphi_{км}\varepsilon_м - E_м F_м, \qquad (10.14)$$

Здесь $E_г = \varepsilon_г E_{0г}$, $E_м = \varepsilon_м E_{0м}$.

Второй член правой части уравнения (10.14) – лучистый поток с кладки на материал. Часть этого потока, пропорциональная степени черноты газов, задерживается ими, а остальная, соответствующая $(1 - \varepsilon_г)$, доходит до материала.

Лучистый сальдо-поток кладки

$$Q_{кс} = E_г F_к + Q_м(1 - \varepsilon_г) + Q_{кс} - Q_к. \qquad (10.15)$$

В этом уравнении $Q_{кс}$ – лучистый тепловой поток с кладки на кладку, а $Q_к$ – поток с кладки по всевозможным направлениям. Так как поверхность материала плоская, то угловой коэффициент $\varphi_{кк} = 1$, следовательно:

$$Q_{кс} = Q_к(1 - \varepsilon_г)\ \varphi_{кс} = Q_к(1 - \varepsilon_г)(1 - \varphi_{км}).$$

Далее будет встречаться только угловой коэффициент $\varphi_{км}$. Поэтому индекс у его обозначения можно опустить.

Подставив значение $Q_{кс}$ в уравнение (10.15) и приняв, что $Q_{сс} = 0$, получим, что

$$Q_к = [E_г F_к + Q_м(1 - \varepsilon_г)]/[1 - (1 - \varepsilon_г)(1 - \varphi)]. \qquad (10.16)$$

Величина $Q_м$ представляет собой эффективный поток, излучаемый поверхностью материала на кладку, численно равный сумме отраженных и собственного потоков:

$$Q_м = E_г F_м(1 - \varepsilon_м) + Q_к(1 - \varepsilon_г)\ \varphi(1 - \varepsilon_м) + E_м F_м. \qquad (10.17)$$

Подставив значение $Q_м$ в уравнение (10.16), определим величину $Q_к$:

$$Q_к[1 - (1 - \varepsilon_г)(1 - \varphi)] = E_г F_к + E_г F_м(1 - \varepsilon_м)(1 - \varepsilon_г) + Q_к(1 - \varepsilon_г)^2\varphi(1 - \varepsilon_м) + E_м F_м(1 - \varepsilon_г)$$

или

$$Q_к = [E_г F_к + E_г F_м(1 - \varepsilon_м)(1 - \varepsilon_г) + E_м F_м(1 - \varepsilon_г)(1 - \varepsilon_м)]/[1 - (1 - \varepsilon_г)(1 - \varphi) - (1 - \varepsilon_г)^2\varphi(1 - \varepsilon_м)]. \qquad (10.18)$$

Преобразуем знаменатель этого выражения

$$1 - (1 - \varepsilon_г)(1 - \varphi) - (1 - \varepsilon_г)^2\varphi(1 - \varepsilon_м) = \varepsilon_г + \varphi(1 - \varepsilon_г)\beta.$$

Значение $Q_к$ из уравнения (10.18) подставим в уравнение (10.14).

Заменив $F_к$ на $F_м / \varphi$, получим:

$$Q_{sм} = -E_м F_м\{\varepsilon_г + \varphi(1 - \varepsilon_г)[\beta - (1 - \varepsilon_г)\varepsilon_м]\}/[\varepsilon_г + \varphi(1 - \varepsilon_г)\beta].$$

Так как $[\beta + (1 - \varepsilon_м)\ (1 - \varepsilon_г)] = 1$, а $[\beta - (1 - \varepsilon_г)\ \varepsilon_м] = \varepsilon_г$, то величина $Q_{sм}$, которую обозначим $Q_{гкм}$, будет равна:

$$Q_{гкм} = \{C_0\varepsilon_г\varepsilon_м[1 + \varphi(1 - \varepsilon_г)]/[\varepsilon_г + \varphi(1 - \varepsilon_г)\beta]\}[(T_г/100)^4 - (T_м/100)^4]F_м.$$

3) Диффузионный поток компонента в пределах каждой фазы пропорционален разности концентраций или разности парциального давления компонента в основной массе ($C_{ж}$, p_i) и у границы (C_i, p_i).

Для десорбции идеальных газов диффузионный поток выражается как

$$q = k_г(p_i - p_г) = k_{ж}(C_{ж} - C_i),$$

где $k_г$ и $k_{ж}$ – коэффициенты пропорциональности или пленочные коэффициенты массоотдачи:

$$k_г = D_г/(RT\delta_г), \qquad k_{ж} = D_{ж}/\delta_{ж},$$

где $D_г$, $D_{ж}$ – коэффициенты молекулярной диффузии компонентов через газовую или жидкостную пленки; $\delta_г$, $\delta_{ж}$ – толщина газовой или жидкостной пленки.

4) Массопередача в пределах каждой фазы рассматривается независимо, и принимается аддитивность диффузионных сопротивлений.

12.2. Модель пограничного диффузионного слоя

Для объяснения явлений, происходящих на границе разделя фаз, было введено понятие диффузионного пограничного слоя. Под диффузионным пограничным слоем понимают тонкий слой жидкости, прилегающий к поверхности раздела, в котором проявляется молекулярная диффузия и происходит резкое изменение концентрации вещества.

Эффективная толщина этого пограничного слоя $\delta_{сл}$ определяется из соотношения

$$\delta_{сл} \approx D_м^{1/6}\nu^{1/6}(z/w)^{1/6},$$

где $D_м$ – коэффициент молекулярной диффузии; ν – кинематическая вязкость жидкости; z – расстояние от точки набегания потока жидкости на тело; w – скорость потока.

Каждому веществу с данным значением коэффициента диффузии отвечает свой пограничный слой. Если диффундируют одновременно несколько веществ при данных условиях перемешивания, то существует несколько пограничных слоев.

В отличие от обычных пленок в диффузионном пограничном слое учитывается:

1) движение жидкости и конвективный перенос вещества;

2) молекулярная и конвективная диффузия в поперечном и тангенциальном направлениях;

3) отсутствие выраженной границы слоя. При абсорбции газа жидкой турбулентно текущей пленкой коэффициент турбулентной (вихревой) диффузии пропорционален квадрату расстояния от свободной поверхности:

$$D_m \approx z^2\nu_0/\lambda, \qquad (12.1)$$

По аналогии с тепловым потоком Фик установил, что при данной температуре и давлении возникающая скорость транспорта пропорциональна только градиенту концентраций. Если q – диффузионный поток, т. е. скорость транспорта массы вещества на единицу площади, и dC/dz – градиент концентраций, то для однонаправленного потока справедливо уравнение

$$q = -D_м\ (dC/dz), \qquad (11.4)$$

где $D_м$ – коэффициент молекулярной диффузии данной системы, который принимается постоянным и имеет размерность м^2/с. Знак "-" указывает на то, что поток вещества направлен в противоположную сторону от направления градиента концентраций. Согласно понятию диффузионного потока, количество вещества Q (кг-моль), прошедшее через площадь F(м^2) за время τ (ч), составит:

$$q = Q/(F\tau) = -D_м\ (dC/dz). \qquad (11.5)$$

Так как диффузия обоих компонентов (A и B) бинарной системы требует, чтобы поток одного компонента сбалансировался противоположным потоком другого компонента, то уравнение (11.5) может быть написано для каждого компонента.

Коэффициенты диффузии идентичны только тогда, когда объемы компонентов A и B не изменяются в процессе диффузии.

Напишем уравнение диффузии для каждого вещества:

$$q_A = -D_A\ (dC_A/dz); \qquad (11.6)$$

$$q_B = -D_B\ (dC_B/dz). \qquad (11.7)$$

Пусть V_A и V_B – постоянные объемы, взятые за единицу измерения для определения V_A и V_B концентраций A и B. Если изменение концентраций существенно не влияет на изменение объема, V_A и V_B будут пропорциональны молярным объемам. Объем диффундирующего компонента A за единицу времени через единицу поперечного сечения составит

$$-D_A\ V_A\ (dC_A/dz)$$

и для компонента B будет

$$-D_B\ V_B\ (dC_B/dz).$$

При постоянном объеме системы не будет возникать разность в диффундирующих объемах в рассматриваемом сечении, т. е.

$$D_A\ V_A\ (dC_A/dz) + D_B\ V_B\ (dC_B/dz) = 0. \qquad (11.8)$$

Объем компонента A на единицу общего объема раствора составляет $V_A\ C_A$ и компонента B будет V_BC_B. Если присутствуют только A и B, то

$$V_A\ C_A + V_BC_B = 1. \qquad (11.9)$$

Дифференцируя уравнение (11.9), получим

$$V_A\ (dC_A/dz) + V_B\ (dC_B/dz) = 0. \qquad (11.10)$$

Из уравнений (11.8) и (11.10) следует, что $D_A = D_B$ или $V_A = 0$, или $V_B = 0$. Если V_A и V_B не могут рассматриваться как постоянные, тогда $D_A \neq D_B$. Для обычных органических систем можно принять $D_A = D_B$, и коэффициент диффузии должен рассматриваться как коэффициент взаимной диффузии, т. е. $D_{AB} = D_м$. В векторной форме первый закон Фика для диффузии в одном направлении может быть представлен в виде

$$q = -D_м\ grad\ C = -D_м\ \nabla C. \qquad (11.11)$$

11.1.3. Вывод первого закона Фика на основе дифференциации

Если осмотическое давление принять в качестве движущей силы, то можно прийти к уравнению Фика. Сила, действующая на растворенную частицу в разбавленном растворе, может быть выражена уравнением

$$\bar{f} = -(m/C)\ grad\ P_{oc}, \qquad (11.12)$$

где m – масса частицы; C – концентрация; P_{oc} – осмотическое давление. Так как $P_{oc} = CRT/(mN_A)$, где N_A – число Авогадро, уравнение (11.12) может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{f} = -(RT/N_A)\ (grad\ C)/C. \qquad (11.13)$$

При устанавливающемся движении, когда каждая частица обладает постоянной скоростью $\bar{v}$, $\bar{v} = B \cdot \bar{f}$, где B есть мобильность – фактор, зависящий от размера и формы частицы и вязкости распределяемой среды. Подставляя в выражение для $\bar{f}$, получим

$$\bar{v} = -(RT/N_A)\ B[(grad\ C)/C]. \qquad (11.14)$$

Вводя поток $\bar{q}$, получим закон Фика

$$\bar{q} = C\ \bar{v} = -(RT/N_A)\ B\ (grad\ C) = -D_м\ grad\ C, \qquad (11.15)$$

где $D_м = (RT/N_A)\ B$.

Когда сопротивление потока $1/B$ равно стоксовскому сопротивлению $6\pi\ \mu\ r$, выражение (11.15) приводится к уравнению Стокса–Эйнштейна:

$$D_м\ \mu/kT = 1/(6\pi\ r), \qquad (11.16)$$

где $D_м$ – коэффициент молекулярной диффузии; μ – вязкость раствора; k – константа Больцмана; r – радиус растворенного вещества.

11.2. Массоперенос в однофазном потоке

Для описания процесса диффузии при помощи уравнения (11.25) оно должно быть проинтегрировано совместно с уравнением движения и сплошности в заданных граничных условиях. Однако задание граничных условий в пределах турбулентного потока вызывает непреодолимые трудности, поэтому эта система уравнений заменяется уравнением, выраженным через безразмерные комплексы. Уравнение (11.25) для установившейся диффузии относительно одной оси x

$$w_x(\partial C/\partial x) = D_м\ (\partial^2 C/\partial x^2). \qquad (11.26)$$

Левая и правая части уравнения (11.26) в конечных разностях будут иметь вид

$$w_x(\partial C/\partial x) \sim w_x \Delta C/l, \qquad (11.27)$$

$$D_м\ (\partial^2 C/\partial x^2) \sim D_м\ \Delta C/l^2. \qquad (11.28)$$

Так как по своему физическому смыслу уравнение (11.26) выражает распределение концентрации за счет массового потока и молекулярной диффузии, то отношение конечных разностей приобретает смысл критерия. Разделив конечные разности (11.27) на (11.28), получим безразмерное число Пекле для молекулярного переноса (если w_x выражено в м/с и $D_м$ – в м^2/с):

$$Pe_м = w\ l\ /\ D_м. \qquad (11.29)$$

Число Пекле заменяется так называемым диффузионным числом Прандтля, получаемым исключением из уравнения (11.29) конвективной составляющей $w\ l$ делением на $w\ l/\nu$. В результате преобразований получим диффузионное число Прандтля в следующем виде:

$$(w\ l\ /D_м)\ /\ (w\ l/\nu) = \nu/\ D_м,$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости.

Диффузионное число Прандтля выражает не просто отношение физических констант – молекулярной вязкости к молекулярной диффузии, а имеет глубокий физический смысл.

Профиль распределения скоростей в потоке жидкости определяется кинематической вязкостью жидкости ν, так как при большой вязкости он представляется в виде вытянутой параболы, а при развитой турбулентности – в виде сплюснутой. Аналогично на профиль концентраций влияет коэффициент молекулярной диффузии $D_м$. Поэтому значение числа Прандтля сказывается на относительном распределении профилей скоростей и концентраций в потоке жидкости (рис. 11.1).

Для газов число Прандтля составляет порядка 1, а для капельных жидкостей – порядка 10^3. Отсюда следует, что профили скоростей и концентраций в газах и капельных жидкостях будут существенно различаться. Для газов профиль концентраций будет более пологим, чем профиль скоростей, а для капельных жидкостей – более крутым.

следнюю попадают как поток излучения от дуг, так и потоки излучений, вызванные многократным отражением потока излучения дуг и потоков излучений нагретых поверхностей.

Суммарный поток падающего излучения в i-ю зону свободного пространства равен сумме составляющих его потоков излучений, т. е. сумме потоков падающих излучений в данную зону. В этом заключается принцип аддитивности теплового излучения. Исходя из этого свойства теплового излучения поверхностная плотность потока излучения в i-ю зону q_{in} находится как сумма, в которую входят: плотность потока падающего излучения дуг q_{ino}, плотность потока падающего излучения, вызванного многократными отражениями потоков излучения дуг, q_{ino}, и плотность потока падающего излучения нагретых поверхностей q_{inn}:

$$q_{in} = q_{ino} + q_{ino} + q_{inn}.$$

Плотность потока падающего излучения нагретых поверхностей определяется температурой и коэффициентом излучения поверхности ε_j. Значение потока излучения, испускаемого поверхностью, найдем, умножив поверхностную плотность потока излучения на площадь излучающей поверхности:

$$Q_j = \varepsilon_j\, c_s (T_j/100)^4 F_j,$$

где F_j – площадь излучающей поверхности (зеркало металла, стены, свод, электроды), м^2; T_j – температура излучающей поверхности, К.

Суммируя значения потоков падающих излучений во все зоны свободного пространства от излучающей поверхности, определяем Q_j:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ji} = Q_j. \qquad (10.20)$$

Выражение (10.20) характеризует свойство замыкаемости потоков излучения.

Тепловое излучение дуги в i-ю зону свободного пространства определяется величиной угла γ (см. рис. 10.12). В пределах этого угла тепловое излучение части дуги не встречает препятствий в направлении i-й зоны. Остальная часть дуги закрыта поверхностью лунки металла и поверхностью шлака и в i-ю зону не излучает:

$$q_{i\,no} = f(\gamma,\ l_o).$$

Часть потока падающего излучения в i-ю зону $q_{i\,no}$ поглощается этой зоной, другая часть $q_{i\,o}$ отражается от поверхности i-й зоны.

Пример 10.3. Металл нагревается в топливной проходной печи, состав продуктов сгорания в рабочем пространстве которой следующий: CO_2 – 9,17 %; H_20 – 17,83 %; O_2 – 0,9 %; N_2 – 72,1 %. Температура продуктов сгорания постоянна по длине печи и равна T_r = 1580 К. Металл в печи нагревается от начальной температуры $T_м^{\,н}$ = 293 К до конечной $T_м^{\,к}$ = 1473 К.

11.1.4. Вихревая диффузия

Перенос вещества осуществляется макрочастицами жидкости и определяется турбулентностью потока, его гидродинамическим состоянием. Вихревая диффузия также называется турбулентной диффузией. При вихревом движении жидкости возникает дополнительный перенос вещества в потоке за счет касательных ньютоновских напряжений при одновременном наличии молекулярного и турбулентного переноса

$$\tau = \tau_м + \tau_m = -\rho(\nu + \varepsilon_p) dw_y/dx,$$

где $\tau_м, \tau_m$ – касательные ньютоновские напряжения движения жидкости без и при наличии вихрей; ρ – плотность; ν – коэффициент кинематической вязкости; ε_p – коэффициент вихревой вязкости, зависящий от скорости потока; dw_y/dx – градиент скорости.

При этом количество переносимого вещества определяется из соотношения

$$q_B = -D_T \ (dC/dz), \qquad (11.17)$$

где D_T – коэффициент вихревой или турбулентной диффузии. Так же, как и коэффициент вихревой вязкости, он не является постоянной величиной и зависит от гидродинамической обстановки процесса.

Суммарный перенос вещества молекулярной и вихревой диффузией соответственно будет равен

$$q = q_A + q_B = -(D_м + D_m)(dC/dz). \qquad (11.18)$$

В практических расчетах процессов массопередачи суммарный перенос вещества обычно выражается уравнением суммарной диффузии

$$q = K \Delta C, \qquad (11.19)$$

где K – коэффициент массопередачи, размерность которого зависит от выбранных единиц измерения концентраций; ΔC – разность концентраций или движущая сила процесса, усреднение которой производится различными методами. Выражая градиент концентраций уравнения (11.18) в конечных разностях, получим

$$q = (D_м + D_m)(\Delta C/\Delta z). \qquad (11.20)$$

Сопоставляя уравнения (11.19) и (11.20), будем иметь

$$K \approx (D_м + D_m)/\Delta z. \qquad (11.21)$$

Из соотношения (11.21) следует, что коэффициент массопередачи учитывает молекулярный и вихревой механизмы переноса вещества.

11. МЕХАНИЗМ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА И ЗАКОНЫ ДИФФУЗИИ

11.1. Основные понятия и определения

Транспорт вещества осуществляется одновременно двумя видами переноса: молекулярной диффузией (микрокинетика) и вихревой диффузией (макрокинетика).

11.1.1. Молекулярная диффузия

Молекулы растворенного вещества постоянно сталкиваются с молекулами растворителя. Эти соударения приводят к беспорядочному движению молекул. Хотя и можно вычислить среднее расстояние, которое молекула могла бы пройти в данный интервал времени, однако нет метода предсказания ее действительного пути. Графическое представление вероятностного положения молекулы со временем дало бы ряд концентрических окружностей около ее начального положения.

Первая попытка установить соотношение между неупорядоченным движением молекул и диффузионным потоком была сделана Эйнштейном при анализе броуновского движения. Рассматривая движение только вдоль оси x и допуская, что положительное и отрицательное смещение равновероятно, Эйнштейн показал, что вероятность горизонтального смещения N_p между x и $x + dx$ равна

$$N_p = [1/(2\pi\Delta_l^2)^{1/2}] \cdot exp(-x^2/2\Delta_l^2) dx, \qquad (11.1)$$

где Δ_l^2 – среднеквадратичная среднего линейного смещения.

Величина Δ_l^2 находится в простом соотношении с коэффициентом молекулярной диффузии $D_м$, представляющим число молекул, проходящих единицу поперечного сечения в единицу времени, когда градиент концентраций равен единице:

$$D_м = 1/2(\Delta_l^2/\tau). \qquad (11.2)$$

Число частиц, проходящих через поверхность, составит $1/2(\Delta_l)(C_2 - C_1)$ и уравнение (11.1) приводится к виду

$$N_p = [1/(4\pi D_м \tau)^{1/2}] \cdot exp(-x^2/(4D_м \tau)) dx. \qquad (11.3)$$

Уравнение (11.3) справедливо, если начальное количество растворенного вещества соответствует граничным условиям при $x = 0$ и $\tau = 0$. Если правую часть уравнения (11.3) умножить на количество вещества, то получим распределение концентрации растворенного вещества за все время τ.

11.1.2. Первый закон Фика

Хотя статистическое толкование диффузии дает наглядное представление о природе ее, все же первой детерминистической формулировкой скорости диффузии является закон Фика.

Рабочее пространство печи имеет размеры: ширина $B = 1{,}5$ м, высота $H = 1{,}78$ м. Металл расположен на полу сплошным слоем и на длине 1 м занимает площадь 1,6 м^2. Степень черноты металла $\varepsilon_м = 0{,}8$. Рассчитать средний за время нагрева коэффициент теплоотдачи.

Решение:

1) Суммарный α_Σ коэффициент теплоотдачи равен сумме коэффициентов теплоотдачи конвекцией $\alpha_{конв}$ и излучением $\alpha_{изл}$ $\alpha_\Sigma = \alpha_{конв} + \alpha_{изл}$.

Для печей, в которых тепло преимущественно передается излучением, принимают $\alpha_{конв} = 11{,}63$ Вт/(м^2·К).

2) Средний за время нагрева коэффициент теплоотдачи излучением $\alpha_{изл}$ определяют по выражению

$$\bar{\alpha}_{изл} = C_{пр} \{[(T_t/100)^4 - (T_м''/100)^4][(T_2'/100)^4 - (T_м'/100)^4]\}^{1/2} / [(T_2' - T_м'') (T_2' - T_м')]^{1/2}.$$

3) Определяют значение приведенного коэффициента излучения $c_{пр}$.

Степень развития кладки ω для 1 м длины печи ($l = 1$ м)

$$\omega = F_к/F_м, \ \omega = (Bl + 2Hl)/F_м, \ \omega = (1{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}78 \cdot 1)/1{,}6 = 3{,}16;$$

$$\varphi_{к.м} = F_м/F_к = 1/3{,}17 = 0{,}316.$$

Эффективная толщина излучающего газового слоя $l_{эф}$

$$l_{эф} = 3{,}6V/F, \ L_{эф} = 3{,}6BHl/(2Bl + 2Hl + 2BH),$$

$$l_{эф} = 3{,}6 \cdot 1{,}78 \cdot 1/(2 \cdot 1{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}78 \cdot 1 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}78) = 0{,}808 \text{ м}.$$

Произведение парциального давления на эффективную длину луча

$$P_{CO_2} = 98{,}1 \cdot 9{,}17/100 = 8{,}996 \text{ кПа}, \ P_{H_2O} = 98{,}1 \cdot 17{,}83/100 = 17{,}49 \text{ кПа},$$

$$P_{CO_2} l_{эф} = 8{,}996 \cdot 0{,}808 = 7{,}266 \text{ кПа·м}, \ P_{H_2O} \ l_{эф} = 17{,}49 \cdot 0{,}808 = 14{,}128 \text{ кПа·м}.$$

По номограммам [3, 7] находим степень черноты CO_2 и H_2O при температуре газа 1580 К и поправку β.

$$\varepsilon_{CO_2} = 0{,}078, \ \varepsilon_{H_2O} = 0{,}094, \ \ \beta = 1{,}12.$$

Степень черноты газа в рабочем пространстве

$$\varepsilon_г = 0{,}078 + 1{,}12 \cdot 0{,}094 = 0{,}183.$$

Приведенный коэффициент излучения

$$c_{пр} = [\varepsilon_м \varepsilon_г c_0 \varphi_{21} (1 - \varepsilon_г) + 1]/\{\varphi_{21}(1 - \varepsilon_г)[1 - (1 - \varepsilon_г)(1 - \varepsilon_м)] + \varepsilon_г\},$$

$$c_{пр} = [0{,}8 \cdot 0{,}183 \cdot 5{,}67 \cdot 0{,}316(1 - 0{,}183) + 1]/\{0{,}31(1 - 0{,}183)[1 - (1 - 0{,}183)(1 - 0{,}8)] + 0{,}183\} = 3{,}075 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

4) Средний за время нагрева коэффициент теплоотдачи излучением $\bar{\alpha}_{изл}$

$$\bar{\alpha}_{изл} = \{3{,}075[(1580/100)^4 - (1473/100)^4][(1580/100)^4 - (293/100)^4\}^{1/2} / [(1580 - 1473)(1580 - 293)]^{1/2} = 255{,}24 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}).$$

5) Суммарный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_\Sigma = 255{,}24 + 11{,}63 = 266{,}87 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}).$$

11.1.5. Второй закон Фика

Введем в рассмотрение полную производную концентрации:

$$dC/d\tau = \partial C/\partial \tau + w_x (\partial C/\partial x) + w_y (\partial C/\partial y \partial) + w_z (\partial C/\partial z). \qquad (11.22)$$

Составим материальный баланс количества подводимого и отводимого вещества к элементарному параллелепипеду с гранями $dxdydz$ в поток жидкости.

Рассматривая перенос вещества вдоль оси x, вычтем количества вещества, входящего и выходящего из параллелепипеда за счет молекулярной диффузии. Согласно уравнению (11.5), будет на входе

$$dM_1 = -D_м \ (\partial C/\partial x) dy \, dz \, d\tau,$$

на выходе

$$dM_2 = -D_м \ (\partial/\partial x)(C + (dC/dx)dx) dy \, dz \, d\tau,$$

разность составит

$$D_м \ (\partial^2 C/\partial x^2) \, dx \, dy \, dz \, d\tau.$$

Для всех граней параллелепипеда в направлении всех трех осей координат получим

$$D_м \ (\partial^2 C/\partial x^2) + (\partial^2 C/\partial y^2) + (\partial^2 C/\partial z^2) \, dx \, dy \, dz \, d\tau. \qquad (11.23)$$

Избыточное количество вещества будет выноситься из параллелепипеда потоком жидкости, изменение концентраций в котором определяется уравнением (11.22). Этот поток через параллелепипед объемом $dx \, dy \, dz$ за время $d\tau$ изменит концентрацию на величину

$$dx \, dy \, dz \, d\tau \ (dC/d\tau). \qquad (11.24)$$

Приравнивая (11.24) и (11.23) в соответствии с законом сохранения энергии, получим

$$(dC/d\tau) = D_м \ (\partial^2 C/\partial x^2) + (\partial^2 C/\partial y^2) + (\partial^2 C/\partial z^2). \qquad (11.25)$$

В левой части уравнения (11.25) имеем локальную и конвективные составляющие диффузии, в правой части – молекулярную диффузию.

Для установившегося процесса диффузии

$$(dC/d\tau) = 0.$$

Уравнение (11.25) называется вторым законом Фика.

Таким образом, если $D_м$ не зависит от концентрации, второй закон Фика может быть представлен в виде

$$dC/d\tau = D_м \ \nabla^2 C.$$

В общем случае $D_м$ является функцией концентрации, и второй закон Фика выражается так:

$$dC/d\tau = div(D_м \ grad C = \nabla(D_м \nabla C).$$

13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАССОПЕРЕНОСА

13.1. Уравнения диффузии и неразрывности

Рассмотрим многокомпонентный поток смеси, в которой происходят химические реакции. Выберем систему координат *Oxyz* (рис. 13.1). В точке *M* с координатами *x, y, z* в произвольный момент времени τ скорость *i*-го компонента равна v_i; скорость *j*-го компонента – v_j, а средняя массовая скорость – *v*. Приток массы *i*-го компонента через поверхность неподвижного контрольного объема ΔV за время $\Delta\tau$ равен $div\, p_i \Delta V_i\, \Delta\tau_i$. Массу *i*-го компонента, образующегося в единицу времени в единице объема в результате химических реакций, обозначим κ_i, кг/(м^3·с). Составим уравнение баланса массы:

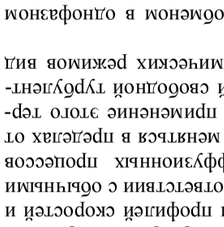


Рис. 13.1. К выводу уравнения диффузии

$$\rho_i(x, y, z, \tau + \Delta\tau)\Delta V = \rho_i(x, y, z, \tau)\Delta V - div\rho_i v_i\, \Delta V\Delta\tau + \kappa_i \Delta V\Delta\tau.$$

Сократим его члены на ΔV_i и положим $\Delta\tau_i \to 0$. Тогда получим *уравнение диффузии* в виде

$$\partial\rho_i/\partial\tau + div\rho_i v_i = \kappa_i. \qquad (13.1)$$

В уравнении (13.1) можно произвести замену: $j_i = p_i v_i$. Уравнение (13.1) записано для *i*-го компонента (*i* = 1, 2, ..., *n*).

Согласно основному закону химических реакций, $\sum_{1=1}^{n} \kappa_I = 0$. Складывая *n* уравнений вида (13.1), получаем *уравнение неразрывности* для смеси:

$$\partial\rho / \partial\tau + div\rho v = 0. \qquad (13.2)$$

Преобразуем уравнение (13.1). Учтем, что $\rho_i = c_i\rho$;

$$\partial\rho_i /\partial\tau = \rho\, \partial c_i/\partial\tau + c_i\partial\rho /\partial\tau$$

и $$div\rho_i v_i = div\rho_i v + div j_i = c_i\, div\rho v + \rho v \cdot grad c_i + div j_i.$$

Последние соотношения подставим в уравнение (13.1) и получим другую формулу уравнения диффузии:

$$\rho(\partial c_i / \partial\tau + v \cdot grad c_i) = - div j_i + \kappa_I. \qquad (13.3)$$

Выражение в скобках в левой части (13.3) – субстанциональная производная $dc_i/d\tau$. Тогда уравнение (13.3) может быть записано в виде

$$\rho(dc_i /d\tau) = - div j_i + \kappa_I.$$

Тогда вместо (13.33) получим соотношение, называемое *тройной аналогией* между процессами переноса теплоты, вещества и импульса:

$$St = St_D = c_{f0}/2. \qquad (13.34)$$

Следует подчеркнуть, что соотношение (13.34) справедливо при отсутствии влияния поперечного потока массы на характеристики процесса тепломассопереноса. Из соотношения (13.34) видно, что при условии справедливости тройной аналогии тепло- и массоотдачу можно рассчитывать, зная коэффициент трения c_{f0}. Соотношение (13.34) имеет место как для ламинарного, так и для турбулентного течения. Для ламинарного пограничного слоя при обтекании пластины $c_{f0} = 0{,}664/Re_x^{1/2}$.

Экспериментально и теоретически доказано, что тройную аналогию можно распространить на случай $Pr \neq 1$ и $Pr_D \neq 1$, записав вместо (13.34) следующее равенство:

$$StPr^n = St_D Pr_D^{\,n} = c_{f0}/2.$$

Для ламинарных течений $n = 2/3$, а для турбулентных $n = 0{,}6$. Так как в основе тройной аналогии лежит допущение $dp/dx = 0$, то для течений с отрывом она непригодна.

Соотношение (13.34) называют *аналогией Рейнольдса.*

Идея об аналогии процессов переноса импульса и теплоты была высказана О. Рейнольдсом в 1874 г. при изучении им турбулентного течения жидкости в трубах. В. Нуссельт (1916 г.) распространил аналогию Рейнольдса на процессы массообмена.

Пример 13.1. Плоское влажное изделие длиной l_0 = 0,5 м продольно омывается потоком сухого воздуха, для которого температура t_∞ = 20 °С, давление *p* = 0,202 МПа, скорость v_∞ = 1 м/с. Температура изделия постоянна по всей длине (t_c = 20 °С).

Найти коэффициент массоотдачи при $x = l_0$.

Решение. Для нахождения коэффициента массоотдачи воспользуемся аналогией процессов тепло- и массообмена. Для процесса теплообмена при вынужденной конвекции жидкости

$$Nu = f(Re, Pr),$$

где $Nu = \alpha l_0/x$ – число Нуссельта; $Re = v_\infty l_0/\upsilon$ – число Рейнольдса; $Pr = \upsilon/a$ – число Прандтля.

Коэффициент массоотдачи определяется соотношением

$$\beta = j_{1c}/(c_{1c} - c_{1\infty}),$$

где j_{1c} – плотность диффузионного потока массы водяного пара; c_{1c} и $c_{1\infty}$ – массовые концентрации водяного пара на поверхности и вдали от тела.

Для массообмена вводятся диффузионное число Нуссельта $Nu_D = \beta l_0/\rho D$ и диффузионное число Прандтля $Pr_D = \upsilon/D$.

смого за счет взаимодействия потоков фаз. При $J = 0$ (12.4) и (12.5) переходят в уравнения массопередачи в однофазном потоке. Таким образом, уравнения (12.4) и (12.5) являются общего вида для процессов массопередачи. В соответствии со структурой уравнений массопередачи (12.2) и (12.3) количество переданного вещества определяется по переносу вещества в той фазе, в которой оно происходит наиболее медленно, т. е. где сосредоточено основное сопротивление. Так, если газ легко растворим в жидкости, то используется уравнение (12.2); если он трудно растворим в жидкости, то используется уравнение (12.3). Соответственно коэффициенты массопередачи в числах Нуссельта отнесены к коэффициентам молекулярной диффузии той фазы, в которой наиболее медленно протекает процесс. Точно так же введено число Прандтля той фазы, где сосредоточено основное сопротивление, но так как коэффициент молекулярной диффузии входит в знаменатели левой и правой частей уравнений, то результирующее влияние его на коэффициент массопередачи будет зависеть от степени при числе Прандтля, и чем больше эта степень, тем меньше будет влияние молекулярной диффузии на коэффициент массопередачи.

Поскольку число Прандтля характеризует относительное соотношение скоростей и концентраций, то следует ожидать, что влияние этого соотношения на процесс массопередачи должно меняться в зависимости от гидродинамической обстановки процесса, т. е. должен меняться показатель степени при числе Прандтля.

При наиболее равномерном распределении жидкости и газа в двухфазном потоке в условиях развитой свободной турбулентности в соответствии со структурой уравнений (12.2) и (12.3) показатель степени n должен достигать максимального значения, равного единице. При снижении турбулизации потоков показатель степени n при числе Прандтля должен уменьшаться, становясь в пределе, когда движение прекратится, равным нулю. В последнем случае понятие о соотношении пробочей скорости и коцентраций теряет свой смысл. Практически в соответствии с обычными гидродинамическими режимами проведения диффузионных процессов показатель степени n при числе Прандтля должен меняться в пределах от 1/3 (ламинарный режим), если условно допустить применение этого термина к двухфазному потоку, до 1 (режим развитой свободной турбулентности). Таким образом, для различных гидродинамических режимов вид уравнений (12.2) может быть уточнен.

Допуская аналогию между трением и массообменом в однофазном газовом потоке, можно определить порядок величин показателей степени m и n в уравнениях (12.2) – (12.5). Расход энергии на трение в однофазном потоке определяется касательным напряжением [см. уравнение ($\tau = \tau_M + \tau_T = -\rho(\nu + \varepsilon_p)dw_y/dx$)], пропорциональным перепаду давления:

$$\Delta P_c = -\rho(\nu + \varepsilon_p)dw_y/dx,$$

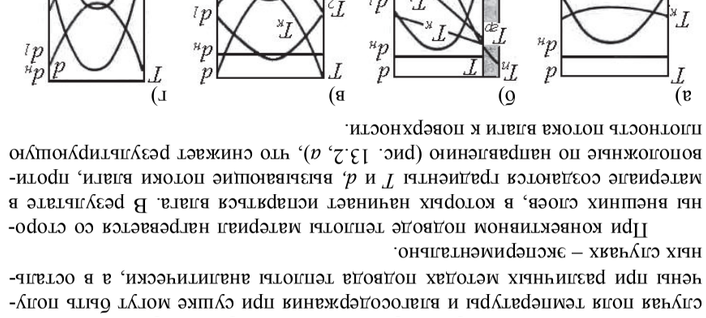


Рис. 13.2. Характерные поля температур T и влагосодержания d в материале при сушке с различными методами подвода теплоты (н – начальное значение; к – конечное значение)

Термодиффузия при конвективном подводе теплоты (рис. 13.2, *б*) имеет поток влаги, совпадающий по направлению с диффузионным потоком влаги в большей части объема, примыкающей к внешней границе тела, и противоположный в контактной зоне материала, где имеется вторая зона парообразования.

Согласно аналогии, функциональная зависимость для числа Nu_D имеет вид

$$Nu_D = f(Re,\ Pr_D).$$

Найдем число Рейнольдса при $x = 0{,}5$ м с учетом зависимости коэффициента υ от давления

$$Re_x = 1 \cdot 0{,}5 \cdot 2\ /(15{,}06 \cdot 10^{-6}) = 6{,}64 \cdot 10^4.$$

Так как течение в пограничном слое ламинарное, то для процесса теплообмена

$$Nu_x = 0{,}332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3},$$

а для процесса массообмена

$$Nu_{Dx} = 0{,}332 Re_x^{1/2}\ Pr_D^{1/3}.$$

Коэффициент диффузии

$$D = 0{,}216 \cdot 10^{-4} (293/273)^{1/8} 0{,}101/0{,}202 = 0{,}123 \cdot 10^{-4}.$$

Диффузионное число Прандтля

$$Pr_D = 15{,}06 \cdot 10^{-6}\ /(2 \cdot 0{,}123 \cdot 10^{-4}) = 0{,}61.$$

Диффузионное число Нуссельта

$$Nu_{Dx} = 0{,}332 (6{,}64 \cdot 10^4)^{1/2} \cdot 0{,}61^{1/3} = 72{,}55,$$

коэффициент массоотдачи

$$\beta = Nu_{Dx} \rho D / l_0 = 72{,}55 \cdot 1{,}205 \cdot 0{,}123 \cdot 10^{-4} \cdot 2/0{,}5 = 4{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Ответ. Коэффициент массоотдачи $\beta = 4{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/(м^2·с).

13.7. Тепло- и массоперенос в процессе сушки

Процесс сушки представляет собой сложный комплекс взаимосвязанных процессов передачи теплоты от теплоносителя к материалу через пограничный слой (теплоотдача), фазового превращения (испарение), переноса теплоты и влаги внутри материала (тепло- и массоперенос), передачи влаги и теплоты с поверхности материала в среду через пограничный слой (тепломассообмен). В капиллярно-пористых телах при сушке может происходить перенос неконденсирующихся газов, пара и жидкости. Многокомпонентность этих материалов обусловливает сложный характер происходящего в них переноса теплоты и влаги.

Диффузионным или молекулярным переносом массы осуществляется перенос массы пара и инертного газа.

Фильтрационным или молярным переносом массы осуществляется перенос как пара и инертного газа, так и жидкости, которая может переноситься также путем диффузии и капиллярного впитывания. Все процессы переноса массы вещества описываются уравнениями

где ρ – плотность газа; ν и ε_p – коэффициенты молекулярной и вихревой вязкости соответственно.

Диффузионный поток определяется следующим образом:

$$q = q_M + q_e = -(D_M + D_T)\ dC/dz.$$

Учитывая порядок величин, последние две зависимости могут быть представлены в следующем виде:

$$\Delta P_z = \rho(\nu + \varepsilon_p)\ w/l, \tag{12.6}$$

$$q = (D_M + D_T)\ \Delta C/l. \tag{12.7}$$

Разделив уравнение (12.7) на уравнение (12.6), приняв, что перенос вещества и энергии происходит на одной и той же длине l, и решив относительно $q\ /\Delta C$, получим,

$$q\ /\Delta C = ((D_M + D_T)\ \Delta P)/\ (\rho(\nu + \varepsilon_p)w). \tag{12.8}$$

Но так как $q\ /\Delta C = K$ (*K* – общий коэффициент массопередачи), то уравнение (12.8) можно переписать в виде

$$K = ((D_M + D_T)\ \Delta P)/\ (\rho(\nu + \varepsilon_p)w). \tag{12.9}$$

Для одного и того же значения фактора динамического состояния двухфазной системы f коэффициенты турбулентного переноса массы D_T и энергии ε_p – величины одного и того же порядка, поэтому устанавливается следующая пропорциональность между коэффициентом массопередачи *K*, перепадом давления ΔP_z и скоростью потока *w* :

$$K \sim \Delta P_z\ /w. \tag{12.10}$$

Соотношение (12.10) позволяет оценить порядок величин показателей в уравнении (12.2) для различных гидродинамических режимов.

Возможно существование трех видов зависимостей перепада давления ΔP_z от скорости потока *w* для ламинарного режима $\Delta P_z \sim w$ для турбулентного режима $\Delta P_z \sim w^{1,8}$ и для автомодельного режима (развитой турбулентности) $\Delta P_z \sim w^2$. Можно определить показатели степени в обобщенном уравнении массопередачи (12.2) при числах Re_e и Pr_e. Для ламинарного режима $\Delta P_z \sim w$ и, следовательно, $K \sim w$, но так как $Re_e = wd/\nu$, то $m = 0$, $n = 1/3$. Таким образом, для ламинарного режима получим уравнение массопередачи:

$$Nu_Д = A_0 P r^{1/3}\ (1 + f_0), \tag{12.11}$$

откуда для ламинарного режима

$$K \sim D_M^{\,2/3}. \tag{12.12}$$

Так как в условиях очень малых скоростей потока фактор f_0 – весьма малая величина (меньше единицы), то уравнение (12.11) приводится к виду

$$Nu_Д = \text{const}. \tag{12.13}$$

Уравнение (12.13) выражает условия молекулярного переноса вещества, являясь частным случаем общего уравнения (12.2).

Для турбулентного режима $\Delta P_г \sim w^{1,8}$, следовательно, $K \sim 1{,}8$; $m = 0{,}8$, $n = 2/3$, и уравнение массопередачи принимает вид

$$Nu_Д = A_1 Re^{0,8}\ Pr^{2/3}(1 + f_1). \tag{12.14}$$

Из уравнения (12.14) следует, что

$$K \sim D_м^{\,1/3}. \tag{12.15}$$

Для режима развитой свободной турбулентности $\Delta P_г \sim w^2$, следовательно, $K \sim w$; $m = 1$, $n = 1$, и уравнение массопередачи принимает вид

$$Nu_Д = A_2 Re\ Pr\ (1 + f_2). \tag{12.16}$$

Из уравнения (12.16) следует, что

$$K \sim D_м^{\,0}. \tag{12.17}$$

т. е. массопередача в условиях развитой свободной турбулентности практически не зависит от молекулярной диффузии и вязкости. Уравнение (12.16) путем сокращения молекулярных характеристик в левой и правой частях его запишется в виде

$$K = A_2\, w\ (1 + f_2). \tag{12.18}$$

Соотношение между коэффициентами массопередачи для легко- и труднорастворимых газов в режиме развитой турбулентности определяется соотношением коэффициентов растворимости газов или соответственно констант Генри. Таким образом, для режима развитой свободной турбулентности будет справедлива пропорциональность

$$K_1 / K_2 = m_1 / m_2, \tag{12.19}$$

где K_1 и K_2 – коэффициент массопередачи; m_1, m_2 – константы Генри для процессов, в которых не может быть непосредственно измерена разность $\Delta P_{г\text{-}ж} - \Delta P_г$. Фактор гидродинамического состояния двухфазной системы может быть определен независимо, причем из анализа гидродинамики двухфазного потока следует, что фактор f будет функцией безразмерного комплекса, выражающего связь между основными величинами в следующих степенях:

$$f = \psi((L/G)^{2-m}\ (\gamma_г/\gamma_{ж})\ \mu_{ж}/\mu_г)^m). \tag{12.20}$$

При анализе механизма массопередачи в однофазном потоке было показано, что аналогия между трением тепло- и массообменом возможна только при числах $Pr_Д = 1$, т. е. для газов. Для капельных жидкостей, для которых величина $Pr_Д$ порядка 10^3 такая аналогия не соблюдается. Поэтому показатели степеней при числах $Re_{ж}$ и $Pr_{ж}$ не могут быть предсказаны, и их значения в уравнении (12.4) должны устанавливаться опытным путем.

$$J_м = J_{ж} + J_n = -\,a_m \rho_0 \nabla d - a_m \rho_0 \delta \nabla T - k_p \nabla p \tag{13.35}$$

и при постоянной температуре

$$J_м = -D \nabla p, \tag{13.36}$$

где $J_м$ – вектор плотности потока вещества, кг/(м^2·с); $J_{ж}$ и J_n – векторы плотности потоков соответственно жидкости и пара; a_m – коэффициент диффузии влаги в материале, м^2/с; ρ_0 – масса абсолютно сухого материала в единице объема влажного материала (плотность), кг/м^3; δ – относительный коэффициент термодиффузии влаги, 1/К; k_p – коэффициент молярного переноса влаги; ∇p – градиент давления (при диффузии – парциального, при молярном переносе – общего давления); D – коэффициент переноса, равный влагосодержания и температуры.

Первый член уравнения (13.35) определяет перенос влаги, обусловленный наличием ∇d (диффузией), второй – перенос влаги под влиянием ∇T (термодиффузией), третий – перенос влаги, обусловленный ∇p (фильтрацией). Направление термодиффузионной плотности потока массы веществ соответствует направлению плотности потока теплоты.

Все входящие в уравнение (13.35) коэффициенты зависят от величин d и T и находятся экспериментально. Для влажных материалов они характеризуют эффективных величин, учитывающих суммарный перенос жидкости и пара. Плотность потока теплоты, Вт/м^2, в материале может быть определена по уравнению

$$q_м = -\lambda_э \nabla T. \tag{13.37}$$

Эффективный коэффициент теплопроводности $\lambda_э$, Вт/(м·К), зависит от свойств материала, а также от d и T. Он определяет способность влажного материала проводить теплоту конвекцией через его скелет и конвекцией за счет переноса пара и жидкости через материал.

Используя законы сохранения энергии и вещества и уравнения переноса (13.35) и (13.37), можно получить полную систему дифференциальных уравнений молекулярно-молекулярного тепломассопереноса, описывающих процессы переноса, например, при сушке. В тех случаях, когда коэффициенты и термодинамические характеристики могут быть приняты постоянными, молярный перенос отсутствует, система уравнений упрощается и получает вид

$$dT/d\tau = a \nabla^2 T + \varepsilon r/c_{пр}\ \partial\ d/\partial\tau,$$

$$\partial\ d/\partial\tau = a_m (\nabla^2 d + \delta \nabla^2 D), \tag{13.38}$$

где a – коэффициент температуропроводности, м^2/с; ε – критерий (коэффициент) фазового превращения, характеризующий изменение d вследствие испарения по отношению к общему изменению d в данной точке тела;

Если зависимости (13.26) или (13.29) известны, то с их помощью можно рассчитать коэффициент массоотдачи. Для этого достаточно в формулах, справедливых для процесса теплообмена, заменить обычные числа Прандтля и Грасгофа на диффузионные. Так, например, теплоотдача при продольном обтекании пластины в случае ламинарного пограничного слоя рассчитывается по формуле

$$Nu_x = 0{,}332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}. \qquad (13.30)$$

Для расчета аналогичного процесса массообмена будем иметь

$$Nu_{Dx} = 0{,}332 Re_x^{1/2} Pr_D^{1/3} \qquad (13.31)$$

Если используется формула (13.31), то при определении числа Рейнольдса по уравнению (13.27) следует взять кинематическую вязкость смеси.

Если течение смеси турбулентное, то обычно принимается, что турбулентные числа Прандтля для процессов тепло- и массообмена равны. Поэтому соотношения (13.28) и (13.29) справедливы как для ламинарных, так и для турбулентных течений.

Для случая, когда, кроме указанных выше условий, коэффициент диффузии, вязкость и температуропроводность равны, т.е. $Pr = 1$, $Pr_D = 1$, $Le = 1$. Предположим также, что влиянием свободной конвекции можно пренебречь и справедливо приближение теории пограничного слоя, причем продольная составляющая градиента давления равна нулю $(dp/dx) = 0$. Последнее условие выполняется при обтекании пластины.

Анализ уравнений пограничного слоя показывает, что уравнения движения, диффузии и энергии в этом случае отличаются только обозначениями величин. Если, например, в уравнении диффузии c_1 заменить на v_x, то оно совпадет с уравнением движения. При подобных граничных условиях (c_{ic} = const, T_c = const) распределения температуры, концентрации и скорости будут подобны, а в безразмерном виде тождественны, т.е.

$$(T - T_\infty)/(T_c - T_\infty) = (c_1 - c_{1\infty})/(c_{1c} - c_{1\infty}) = (v_x - v_\infty)/ v_\infty. \qquad (13.32)$$

Продифференцируем равенство (13.32) по y и затем положим $y = 0$. Так как

$$q_c = -\lambda(\partial T/\partial y)_{y=0};\ \ j_{1c} = -\rho D(\partial c_1/\partial y)_{y=0};\ \ \sigma_c = \mu(\partial v_x/\partial y)_{y=0},$$

то в результате получим

$$q_c/\lambda\,(T_c - T_\infty) = j_{1c}/\rho D(c_{1c} - c_{1\infty}) = \sigma_c/\mu\, v_\infty. \qquad (13.33)$$

Равенство (13.33) умножим на λ и разделим на произведение $\rho\, c_p\, v_\infty$. Учтем, что в нашем случае $Pr_D = 1$, $Pr = 1$. Введем число Стантона St, диффузионное число Стантона St_D и коэффициент трения c_{f0}:

$$St = \alpha/\rho c_p\, v_\infty = q_c/c_p\, v_\infty\,(T_c - T_\infty);\ St_D = \beta/\rho\, v_\infty = j_{1c}/\rho\, v_\infty(c_{1c} - c_{1\infty});$$
$$c_{f0} = 2\sigma_c/\rho\, v_\infty^2.$$

13.2. Уравнения движения смеси

Рассматривая составляющие баланса импульса смеси в элементарном объеме ΔV за время $\Delta\tau$, можно получить три уравнения движения (в проекциях на оси координат Ox, Oy, Oz). Например, для оси Ox приток импульса в расчете на единицу объема в единицу времени

$$-div \sum_{i=1}^{n} \rho_i v_{ix} v = -div \rho v_x v,$$

где средняя массовая скорость v определяется по формуле

$$v = (\sum_{i=1}^{n} \rho_i v_i)/ \sum_{i=1}^{n} \rho_i,\ \text{а}\ \ v_x = (\sum_{i=1}^{n} \rho_i v_{ix})/\rho.$$

Составляющая баланса импульса, обусловленная нестационарностью процесса движения, запишется как $\partial/\partial\tau \sum_{i=1}^{n} \rho_i v_{ix} = \partial \rho v_x/\partial\tau$.

Проекция силы тяжести, действующей на компоненты смеси,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i g_x = \rho g_x.$$

Учитывая также напряжения σ_{xx}, σ_{yx} и σ_{zx}, окончательно получаем уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$\partial \rho v_x/\partial\tau + div \rho v_x v = \rho g_x + \partial\, \sigma_{xx}\partial\, x + \partial\, \sigma_{yx}\partial\, y + \partial\, \sigma_{zx}\partial\, z. \qquad (13.4)$$

Напряжения в движущейся смеси описываются обобщенным законом Ньютона, в котором μ – динамическая вязкость, зависящая от концентрации и вязкости компонентов.

Тогда в компактной форме три уравнения движения записываются в виде

$$\rho\, d\, v_i/d\tau = \rho g_x + \partial\, \sigma_{ji}/\partial\, x_j,$$

где

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = -(p + 2/3\mu\, div\, v)\delta_{ij} + \mu(\partial\, v_i/\partial\, x_j + \partial\, v_j/\partial\, x_i).$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

13.3. Уравнение энергии. Число Льюиса

В моногокомпонентной среде выделим неподвижный контрольный объем ΔV (см. рис. 13.1). Будем считать, что перенос энергии происходит при условии p = const, а теплотой трения можно пренебречь.

Приближенное уравнение энергии, которое мы получим при этих допущениях, будет соответствовать течению среды с относительно малой скоростью (число Маха для газа должно быть меньше 0,25).

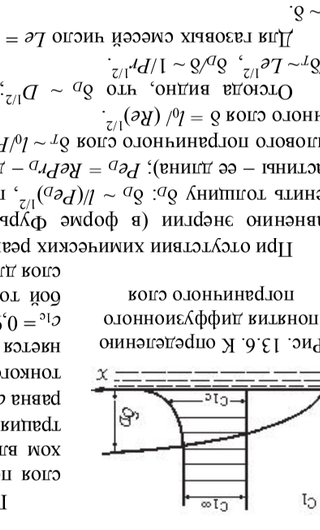


Рис. 13.6. К определению понятия диффузионного пограничного слоя

Понятие диффузионного пограничного слоя покажем на примере обтекания возлухом плоской пластины (рис. 13.6). Концентрация паров воды на поверхности пластины равна c_{1c} а в потоке воздуха – $c_{1\infty}$. В пределах тонкого слоя толщиной δ_D величина c_x изменяется от c_{1c} до $q = c_{i\infty}$ (обычно принимают $c_{1c} = 0{,}99\, c_{1\infty}$). Толщина δ_D и представляет собой толщину диффузионного пограничного слоя для первого компонента (паров H_2O).

При отсутствии химических реакций уравнение диффузии аналогично уравнению энергии (в форме Фурье–Остроградского). Поэтому можно оценить толщину δ_D: $\delta_D \sim l/(Pe_D)^{1/2}$, где l_0 – характерный размер тела (для пластины – ее длина); $Pe_D = Re Pr_D$ – диффузионное число Пекле. Толщина теплового пограничного слоя $\delta_T \sim l_0/Pe^{1/2}$, а толщина динамического пограничного слоя $\delta = l_0/\,(Re)^{1/2}$.

Отсюда видно, что $\delta_D \sim D^{1/2}$; $\delta_T \sim a^{1/2}$; $\delta \sim \upsilon^{1/2}$.Таким образом, $\delta_D/\delta_T \sim Le^{1/2}$, $\delta_D/\delta \sim 1/Pr^{1/2}$.

Для газовых смесей число $Le = 1$ и число $Pr_D \sim 1$, поэтому $\delta_D \sim \delta_T$ и $\delta_D \sim \delta$.

В основе теории пограничного слоя лежит допущение, что толщины δ, δ_T и δ_D малы по сравнению с характерным размером тела l_0. Оценки показывают, что это условие выполняется при больших числах Re, Pe и Pe_D. Тогда молекулярные перенось импульса, энергии и вещества существенны только в пограничном слое, а за его пределами ими можно пренебречь. Часто приближением теории пограничного слоя называют такой способ изучения явлений переноса, когда пренебрегают продольным диффузиями импульса, энергии и вещества и считают, что процессы переноса осуществляются только в поперечном направлении (в направлении, перпендикулярном к поверхности тела или межфазной границе).

13.5. Дифференциальные уравнения совместных процессов массо- и теплообмена

Отраничимся рассмотрением стационарного плоского пограничного слоя (направим ось Ox вдоль поверхности, ось Oy перпендикулярно к ней). Тогда в приближении теории пограничного слоя уравнение диффузии будет иметь вид

$$\rho(v_x \partial\, c/\partial\, x + v_y \partial\, c/\partial\, y) = \partial/\partial y(\rho D \partial\, c/\partial\, y) + \kappa. \qquad (13.15)$$

Для динамического погранично слоя $\partial\, p/\partial\, y = 0$, а уравнение движения смеси и уравнение неразрывности записываются следующим образом:

$$\rho(v_x \partial\, v_x/\partial\, x + v_y \partial\, v_x/\partial\, y) = \rho g - dp/dx + \partial/\partial y(\mu \partial\, v_x/\partial\, y), \qquad (13.16)$$

$$\partial \rho\, v_x/\partial\, x + \partial\, \rho v_y/\partial\, y = 0. \qquad (13.17)$$

Для погранично слоя уравнение энергии получается в результате упрощения уравнения (13.10). Оно имеет вид

$$\rho(v_x \partial\, h/\partial\, x + v_y \partial\, h/\partial\, y) = \partial/\partial y\,(\mu/Pr \partial\, h/\partial\, y) - \partial/\partial y\,[\sum_{i=1}^{n} h_i \rho D(1 - 1/Le)\partial\, c_i/\partial y] +$$
$$+ \mu(\partial\, v_x/\partial\, y)^2 + v_x \partial\, p/\partial\, x. \qquad (13.18)$$

Обычно два последних слагаемых в правой части (13.18) весьма малы, по сравнению с другими слагаемыми, и их исключают.

Несмотря на то, что уравнения теории погранично слоя проще полных уравнений процессов тепломассообмена, их решение представляет собой сложную задачу.

13.6. Коэффициент массоотдачи. Аналогия процессов переноса массы, теплоты и количества движения

Конвективный массообмен между движущейся средой и межфазной поверхностью называется *массоотдачей*. Ее интенсивность характеризуется *коэффициентом массоотдачи*, который равен отношению плотности диффузионного потока массы данного компонента на границе раздела фаз (обозначается j_c, кг/(м^2·с)) к разности массовых концентраций этого компонента в потоке среды и на поверхности раздела.

По определению, коэффициент массоотдачи, кг/(м^2·с),

$$\beta = j_{c1}/\Delta c_1, \qquad (13.19)$$

где $\Delta c_1 = c_{1\infty} - c_{1c}$; здесь $c_{1\infty}$ и c_{1c} – массовые концентрации первого компонента вдали от границы раздела фаз и на ее поверхности.

На практике используется внешняя нормаль к межфазной поверхности, и тогда

$$j_{1c} = \beta\,(c_{1c} - c_{1\infty}). \qquad (13.20)$$

Соотношение (13.20) аналогично закону Ньютона-Рихмана. Теоретически значение j_{1c} для конвективной диффузии можно найти по закону Фика:

$$j_{1c} = -\rho D(\partial c_1/\partial n)_{c}, \qquad (13.21)$$

где индекс «c» указывает на то, что производная берется в точке, лежащей на поверхности раздела фаз.

Если используется формула (13.20), то $\partial c_1/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали.

В случае газовой смеси вместо массовой концентрации компонента можно использовать его парциальное давление. Тогда коэффициент массо-

отдачи, отнесенный к разности парциальных давлений, определяется следующим образом:

$$\beta_p = j_{1c}/\Delta p; \qquad (13.22)$$

вместо (13.20) для расчета плотности диффузионного потока массы применяется формула

$$j_{1c} = \beta_p (p_{1c} - p_{1\infty}).$$

Парциальное давление и массовая концентрация однозначно связаны друг с другом в соответствии с уравнением Клайперона.

В прикладных задачах массообмена коэффициент массоотдачи находят, используя аналогию процессов переноса массы, энергии и импульса. Для нахождения условий справедливости аналогии анализируют математическое описание процессов тепломассопереноса. При этом различают случаи малой (или умеренной) и высокой интенсивности массообмена.

При *малой интенсивности массообмена* поперечный поток массы вещества практически не оказывает влияния на течение смеси. Это условие выполняется, если во всей области потока концентрация активного компонента невелика (практически $c_{1c} < 0{,}1$) или слабо изменяется по нормали к межфазной поверхности ($c_{1c} - c_{1\infty} < 0{,}1$).

Случай теплообмена, когда влиянием процесса массопереноса на гидродинамические характеристики потока (скорость, давление) можно пренебречь, будем называть случаем «чистого» теплообмена. При малых разностях массовых концентраций активного компонента и малых разностях температур в потоке смеси уравнения гидродинамики в двух случаях «чистого» теплообмена и массообмена) ничем не отличаются друг от друга.

Тогда (если граничные условия для скорости подобны) распределение скорости в потоке смеси можно принять таким же, каким оно было бы при течении однородной среды (например, однокомпонентного газа). Важно подчеркнуть, что, по существу, мы говорим о трех случаях течения среды.

Первый случай относится к «чистому» массообмену (изотермическое течение смеси компонентов). При этом требуется найти только потоки массы компонентов.

Второй случай – «чистый» теплообмен. Он соответствует совместному процессу тепло- и массообмена (при этом массообмен не влияет на теплообмен).

Третий случай – теплообмен без всякого массообмена, т.е. тот вид теплообмена, который мы рассматривали в предыдущих разделах.

Согласно принятым допущениям, для первых двух случаев вязкость смеси $\mu = \text{const}$. Предполагается, что и в третьем случае $\mu = \text{const}$. Свободная конвекция, возникающая из-за того, что равнодействующая сил тяжести и Архимеда отлична от нуля, в уравнении движения учитывается величиной $(p - p_0)g$, которая в указанном третьем случае равна взятой со знаком

После всех преобразований вместо (13.7) получим следующее уравнение энергии:

$$\rho dh/d\tau = -div(\mu/Pr\ grad\ h) - div(\sum_{i=1}^{n} h_i \rho D(1 - 1/Le) grad\ c_i) + dp/d\tau + \Phi. \quad (13.10)$$

Число Льюиса можно представить в виде

$$Le = Pr/Pr_D,$$

а диффузионное число Прандтля

$$Pr_D = \mu/\rho D = \upsilon/D. \qquad (13.11)$$

В прикладных задачах тепломассообмена двумя последними слагаемыми в (13.10) можно пренебречь. Уравнение (13.10) при $Le = 1$ значительно упрощается. В этом случае оно может быть записано в форме уравнения Фурье–Остроградского:

$$\rho dh/d\tau = div(\lambda\ grad\ T). \qquad (13.12)$$

Для газовых смесей $\upsilon \approx a \approx D$ и число $Le \approx 1$.

Для удобства анализа процесса тепломассообмена в жидких смесях уравнение (13.6) с учетом того, что $q_R = 0$, преобразуют к виду

$$\rho\ c_p\ dT/d\tau = div(\lambda\ grad\ T) + \rho D \sum_{i=1}^{n} c_{pi}\ grad\ c_i\ grad\ T. \qquad (13.13)$$

Для бинарной смеси $grad\ c_2 = -grad\ c_1$ и уравнение (13.13) упрощается:

$$\rho\ c_p\ dT/d\tau = div(\lambda\ grad\ T) + \rho D\ (c_{p1} - c_{p2})\ grad\ c_1\ grad\ T. \qquad (13.14)$$

Для жидких смесей часто можно принять, что $c_1 = c_2$. К тому же коэффициент диффузии D имеет малое значение. Поэтому второе слагаемое правой части (13.14) может быть исключено.

13.4. Диффузионный пограничный слой. Уравнения теории пограничного слоя при наличии массообмена

Понятие пограничного слоя применяется также при изучении процессов массообмена. Перенос массы какого-либо компонента смеси осуществляется под действием градиента концентрации этого компонента. В том случае, когда поперечная составляющая градиента концентрации много больше продольной составляющей (иначе, когда продольным переносом массы в продольном направлении можно пренебречь), область процесса переноса вещества называют *диффузионным пограничным слоем.* Обычно эта область наблюдается вблизи поверхности раздела фаз (случаи испарения, конденсации и др.).

Пренебрегая теплотой смешения, можно утверждать, что энтальпия смеси в объеме ΔV в момент времени τ составляет

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \rho_i \Delta V = h \rho \Delta V,$$

а ее изменение за элементарный промежуток времени равно $(\partial \rho\ h/\partial\tau)\Delta V\Delta\tau$

Приток энтальпии в ΔV за $\Delta\tau$

$$-div\ (\sum_{i=1}^{n} h_i \rho_i v_i)\Delta V\Delta\tau = -div\ (\sum_{i=1}^{n} h_i \rho_i v)\Delta V\Delta\tau - div\ (\sum_{i=1}^{n} h_i j_i)\Delta V\Delta\tau.$$

Здесь учли, что $v_i = v + j_i/\rho_i$. Подведенное к ΔV за $\Delta\tau$ количество теплоты (путем теплопроводности и излучения) равно $-div\ q_z \Delta V\Delta\tau$, где $q_z = -\lambda grad T + q_R$, где λ – теплопроводность смеси; q_R – вектор плотности потока излучения.

Учитывая рассмотренные выше составляющие баланса энтальпии, на основании первого закона термодинамики получаем *уравнение энергии* для смеси компонентов:

$$\partial \rho h/\partial\tau + div \rho h v = -div\ q_z - div \sum_{i=1}^{n} h_i j_i. \qquad (13.5)$$

Уравнение (13.5) справедливо как при отсутствии, так и при наличии химических реакций в многокомпонентной среде. В последнем случае в h_i следует учитывать энтальпию образования. Если перенос энергии излучением отсутствует, то $q_R = 0$.

С учетом *уравнения неразрывности* уравнение (13.5) можно представить в виде

$$\rho dh/d\tau = -div\ q_z - div \sum_{i=1}^{n} h_i j_i. \qquad (13.6)$$

Далее положим $q_R = 0$. Тогда $q_z = q = -\lambda\ grad\ T$. В общем виде условие $\lambda = \text{const}$ не выполняется, существенна теплота трения) уравнение энергии записывается следующим образом:

$$\rho dh/d\tau = -div\ (\lambda\ grad\ T) - div \sum_{i=1}^{n} h_{ji} + dp/d\tau + \Phi. \qquad (13.7)$$

Величина Φ представляет собой диссипативную функцию.

Исключим температуру, введем теплоемкость при неизменном составе смеси, а также *число Прандтля* и *число Льюиса* (последнее иногда называют числом Льюиса-Семенова):

$$Pr = \mu\ /c_p\ \lambda = \upsilon/a, \qquad (13.8)$$

$$Le = \rho\ D\ c_p\ /\lambda = D/a. \qquad (13.9)$$

«минус» величине $\beta_r (T - T_0)$, где β_r – коэффициент объемного расширения. Так как мы приняли, что изменения температуры и концентрации малы, то $\Delta p << p$ и $\Delta T << T$.

Уравнение энергии для третьего случая и уравнение диффузии при $\kappa_i = 0$ записываются аналогично. Входящие в оба уравнения компоненты скорости v_x и v_y описываются одними и теми же функциями. Если граничные условия для температуры и концентрации подобны, то будут подобны и решения двух уравнений. Это положение лежит в основе метода аналогии процессов тепло- и массообмена.

Пренебрегая в уравнении энергии для смеси диффузионным переносом энергии, убеждаемся в том, что это уравнение во втором случае «чистого» теплообмена будет иметь такой же вид, как и в третьем случае.

Введем для процесса конвективного массообмена *диффузионное число Нуссельта*:

$$Nu_D = \beta_0/(\rho D) = (j_{1c}/(j_{1c} - j_{1\infty}))\ l_0/(\rho D), \qquad (13.23)$$

где j_{1c} – плотность диффузионного потока массы первого компонента на межфазной границе, причем $j_{1c} = -\rho D(\partial c_1/\partial y)_{y=0}$.

Для процесса конвективного теплообмена число Грасгофа $Gr = g\beta_t \Delta T l_0^3/\upsilon^2$, где $\Delta T = |T_c - T_\infty|$.

Для процесса массообмена вводится *диффузионное число Грасгофа*:

$$Gr = \Delta\rho\ /\rho\ (g l_0^3/\upsilon^2), \qquad (13.24)$$

где $\Delta\rho = |\rho_c - \rho_\infty|$. Здесь ρ_c и ρ_∞ – плотности смеси на межфазной границе и вдали от нее.

Уравнения конвективного тепломассообмена можно привести к безразмерному виду и получить следующие соотношения:

$$Nu_D = f(Re, Pr_D, Gr_D); \qquad (13.25)$$

$$Nu = f(Re, Pr, Gr). \qquad (13.26)$$

Соотношение (13.26) справедливо как для третьего из рассмотренных выше случаев, так и для второго. При выполнении условий аналогии вид функции в соотношениях (13.25) и (13.26) одинаков, в них число Рейнольдса одно и то же:

$$Re = v_\infty l_0/\upsilon, \qquad (13.27)$$

где v_∞ – скорость набегающего потока.

При вынужденной конвекции, когда влияние свободной конвекции пренебрежимо мало,

$$Nu_D = \varphi(Re, Pr_D); \qquad (13.28)$$

$$Nu = \varphi(Re, Pr). \qquad (13.29)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для металлургии характерны две особенности. Первая обусловлена тем, что масштабы производства металлов и сплавов вывели металлургию по потреблению сырья и топлива на одно из первых мест среди других отраслей. Вторая сводится к тому, что большинство процессов, связанных с переработкой сырья и промежуточных продуктов как в черной, так и в цветной металлургии, протекает при повышенных и высоких температурах. Таким образом, и масштабы, и характер металлургических процессов неразрывно связаны с необходимостью постоянного совершенствования конструкций металлургических печей, агрегатов, режимов их работы, повышения качества продукции и снижения расхода топлива.

В решении этих задач особая роль принадлежит науке о переносе энергии (тепла) и массы вещества, позволяющей проникнуть в сущность физико-химических и других явлений металлургии, химии, энергетики. В пособии достаточно высоком уровне изложены основы теплофизики, кроме фундаментальных, основополагающих положений теплотехники, описаны особенности теплообмена в слое кусковых материалов, а также изложены вопросы нестационарной теплопроводности и конвекции, имеющие важное значение для металлургов. Настоящее пособие предназначено для студентов. Заводские инженеры, может быть и не найдут прямых указаний и рекомендаций по теплотехническим практическим вопросам, однако приводимые здесь сведения окажутся полезными для их деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Телегин, А. А. Термодинамика и тепло-массоперенос / А. А. Телегин, В.С. Швыдкий, Ю.Г. Ярошенко. – М. : Металлургия, 1980. – 264 с.
2. Кузовлев, В. А. Техническая термодинамика и основы теплопередачи / В. А. Кузовлев. – М. : Высш. шк., 1983. – 335 с.
3. Мастрюков, Б. С. Теория, конструкция и расчеты металлургических печей. В 2 т. Т. 2. Расчеты металлургических печей.– М. : Металлургия, 1986. – 376 с.
4. Теплотехнические расчеты металлургических печей : учеб. пособие / под ред. А. С. Телегина. – М. : Металлургия, 1982. – 360 с.
5. Теплотехника металлургического производства. Т. 1 Теоретические основы : учеб. пособие для вузов / В. А. Кривандин, В. А. Арутюнов, В. В. Белоусов [и др.]. – М. : МИСИС, 2002. – 608 с.
6. Кафаров, В. В. Основы массопередачи / В. В. Кафаров. – М. : Высш. шк., 1979. – 439 с.

Учебное издание

Соболев Борис Михайлович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ И ПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ

Учебное пособие

Научный редактор – кандидат технических наук, доцент В. В. Куриный

Редактор Е. О. Колесникова

Подписано в печать 21.03.2013.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 80 г/м^2. Ризограф FR3950EP-α.
Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 10,92. Тираж 100 экз. Заказ 25453.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

При подаче теплоты к материалу излучением поля d и T подобны полям при конвективной сушке (рис. 13.2, *а*), но градиенты d и T выше. При T_c больше температуры поверхности материала обнаруживается аномальное распределение температуры (рис. 13.2, *б*), при котором максимум T находится на некотором расстоянии от поверхности материала.

При сушке материалов в электромагнитном поле высокой или сверхвысокой частоты (рис. 13.2, *г*) определяющее влияние на интенсивность переноса влаги оказывает распределение температуры, при котором в центре материала она выше, чем на поверхности.

При этом способе сушки направления диффузионного и термодиффузионного потоков влаги совпадают, наблюдается значительная интенсивность переноса влаги, поэтому этот способ целесообразно применять для материалов, сушка которых лимитируется переносом влаги к поверхности тела.

Сушка является необратимым нестационарным процессом, при котором $d = f(x, y, z, \tau)$, поэтому анализ процессов сушки и их расчет должны быть связаны с кинетикой процесса, отражающей изменение среднего влагосодержания d_m и средней температуры T материала с течением времени.

При сушке капиллярно-пористых коллоидных материалов изменение d_m во времени τ происходит по зависимости, показанной на рис. 13.3, *а*, получаемой экспериментально. Изменение T в процессе сушки от τ описывается кривой нагрева или термограммой сушки. Однако более полно кинетика сушки выявляется по температурным зависимостям $\overline{T} = f(d_m)$ и кривым скорости сушки $dd_m/d\tau = f(d_m)$ (рис. 13.3, *б*).

Зависимости (рис. 13.3) свидетельствуют о том, что процесс сушки протекает в несколько периодов.

Рис. 13.3. Характерные кривые кинетики конвективной сушки:
а – кривая сушки и термограмма сушки; *б* – кривая скорости и температурная кривая сушки; *АВ* – прогрев материала; *ВС* – период постоянной скорости сушки; *CD* – период убывающей скорости сушки

В период прогрева $\tau_п$ материал прогревается, а d_m изменяется незначительно, причем при конвективной сушке $d_п > d_{m1}$, $T_c > T_п$, $p_c < p_п$ (d_m, $T_п$ и

где i – число частей периода II сушки; X - относительный коэффициент сушки в i-й части периода II; χ_i – максимальная скорость сушки при критическом влагосодержаний $d_{mкpi}$, 1/с.

Значения χ_i и $d_{mкpi}$ находятся с помощью обобщенной кривой сушки (рис. 13.4) в полулогарифмических координатах, N_i определяются из зависимости $W/W_н$ от $N_i\tau/W_н$.

Скорость сушки в период I рассчитывают по интенсивности испарения влаги с поверхности материала, кг/(м^2·с)

$$J_m = a_m (p_n - p_c),$$

где a_m – коэффициент массообмена.

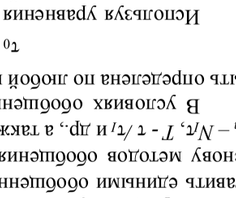


Рис. 13.4. Обобщенная кривая конвективной сушки (в безразмерном виде)

В зависимости от способа подвода теплоты и режима a_m находят по соотношениям вида $Nu_m = f(Re, Gr, Pr, K_1,...,K_n)$, в которых диффузионное число Нуссельта $Nu_m = (a_m l)/\lambda_m$, $K_1,..., K_n$ – безразмерные комплексы или симплексы, учитывающие конкретные особенности тепло- и массообмена при данном способе сушки; l – определяющий размер материала, м; λ_m – коэффициент массопроводности.

Связь между J_m и N_τ устанавливается балансовым соотношением

$$J_m = p_0 N_l V/A,$$

где V – объем материала, м^3; A – площадь поверхности материала, м^2; $N_l = (dd_m/d\tau)_l$, с$^{-1}$.

Кинетика теплообмена при сушке может быть выявлена по данным кинетики влагообмена на базе основного интегрального уравнения кинетики сушки

$$q(\tau) = \rho_0 rV(dd_m/d\tau)[l + c_{пр} d\ \bar{T}/(rdd_m)]/A = p_0 rV(dd_m/d\tau)(1 + Rb)/A,$$

где $q(\tau)$ – тепловой поток, отнесенный к единице поверхности и идущий на нагревание (второе слагаемое) и испарение (первое слагаемое) влаги из материала в процессе сушки; $Rb = \bar{c}_{пр} d\ \bar{T}/(rdd_m) = \bar{c}_{пр} b/r$ – критерий (число) Ребиндера, определяемый влагосодержанием, практически не зависящий от параметров режима; $b = d\ \bar{T}/dd_m$ – температурный коэффициент сушки, К; r – удельная теплота парообразования, Дж/кг.

Зависимость $Rb = f(d_m)$, которая может быть получена при сушке на основе опытных данных, позволяет определять $q(\tau)$ и среднеобъемную температуру T материала в процессе сушки, что важно для выбора технологии и оптимального режима сушки.

p_n – соответственно влагосодержание, температура поверхности слоя и парциальное давление водяного пара над поверхностью материала). Длительность периода τ_n невелика, и при сушке «тонких» материалов его значением пренебрегают.

Период сушки τ_I – период постоянной скорости сушки – характеризуется примерно постоянной скоростью сушки, неизменной $\bar{T}$, равной при конвективной сушке температуре адиабатного испарения (мокрого термометра), и равенством $p_n = p_в$. Интенсивность испарения в этот период соответствует испарению со свободной поверхности жидкости. Конец периода наступает в момент достижения поверхностью материала влагосодержания d_m, равного d_{mr}, которое затем, как и p_n, со временем снижается, при этом $p_n < p_в$, $p_n = f(d_m\ \bar{T}_n)$. Кроме этого периода соответствует первое критическое влагосодержание $d_{mкp1}$. При сушке «толстых» материалов независимо от d_{mr} период τ_I не наблюдается.

Период сушки τ_{II} определяется непрерывно убывающей скоростью сушки, достом средней температуры $\bar{T}$ материала, приближающейся в конце процесса к температуре среды T_c. Практически сушка материала не доводится до d_{mp} и заканчивается при $d_{mк} > d_{mp}$.

Процесс сушки на участке CD (рис. 13.3, $б$) зависит от форм связи влаги с материалом, способа подвода теплоты и режима сушки. Поэтому этот период иногда делят на две или три части (зоны) с наличием второго и третьего критических влагосодержаний.

Следует подчеркнуть, что важной закономерностью кинетики сушки является инвариантность значений некоторых величин от текущих значений влагосодержания и средней температуры, т. е.

$$(N\tau)_{dm} = \text{const},\ (N/\tau)_{dm} = \text{const}\bar{T},...,\ (\tau/\tau_I)\ \bar{\tau} = \text{const},...,$$

где N и N_I – максимальная скорость сушки и скорость сушки в период I.

Постоянство этих величин для данных текущих d_m и $\bar{T}$ независимо от режима процесса сушки позволяет семейства кривых сушки и нагрева представить единым обобщенными кривыми сушки и нагрева, что составляет основу методов обобщения кинетических кривых в координатах $d_m - N\tau$, $d_m - N/\tau$, T - τ/τ_I и др., а также в безразмерных координатах.

В условиях обобщения общая продолжительность сушки τ_0 может быть определена по любой инвариантной величине, например,

$$\tau_0 = (N\tau)\ d_{mr}/N = \text{const}/N.$$

Используя уравнения кривой сушки периода I (уравнения прямой) и уравнения для всех частей периода II (уравнения экспонент), можно получить формулу для вычисления общей длительности сушки

$$\tau_0 = (d_{mн} - d_{mкp1})/N_I + \sum_{i=1}^{i} lg(d_{mкpi}/d_{mкp(i+1)})/(\chi_i N_i) + lg(d_{mкp1}/d_{mr})/(\chi_i N_I),$$

7. Прибытков, И. А. Тепломассообмен : учеб.-метод. пособие / И. А. Прибытков. – М. : МИСИС, 2002. – 99 с.

8. Юдаев, Б. Н. Теплопередача / Б. Н. Юдаев. – М. : Высш. шк., 1978. – 358 с.

9. Металлургическая теплотехника. В 2 т. Т. 1. Теоретические основы. Топливо и огнеупоры / В. А. Арутюнов, В. И. Миткалиннин, С. Б. Старк / под ред. М. А. Глинкова. – М. : Металлургия, 1974. – 671 с.

10. Баскаков, А. П. Теплотехника / А. П. Баскаков. – М. : Энергоиздат, 1982. – 263 с.

11. Теплотехника : учеб. для студентов втузов / А. М. Архаров, С.И. Исаев, И. А. Кожинов [и др.] ; под общ. ред. В. И. Крутова. – М. : Машиностроение, 1986. – 432 с.

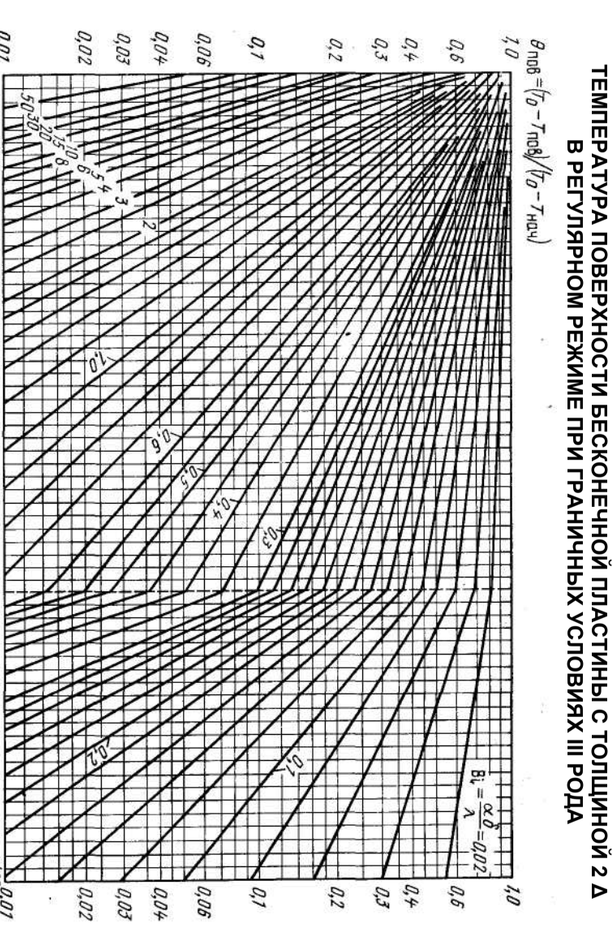
12. Лурье, М. А. Легковесные огнеупоры в промышленных печах / М. А. Лурье, В. П. Гончаренко. – М. : Металлургия, 1974. –240 с.

13. Цветков, Ф. Ф. Тепломассообмен : учеб. пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во МЭИ, 2005. – 550 с.

14. РД ФГБОУ ВПО «КнАГТУ» 013-2012 «Текстовые студенческие работы. Правила оформления». – Введ. 2012-09-20. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОГУВПО «КнАГТУ», 2012. – 55 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА (ОСИ) БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С РАДИУСОМ R



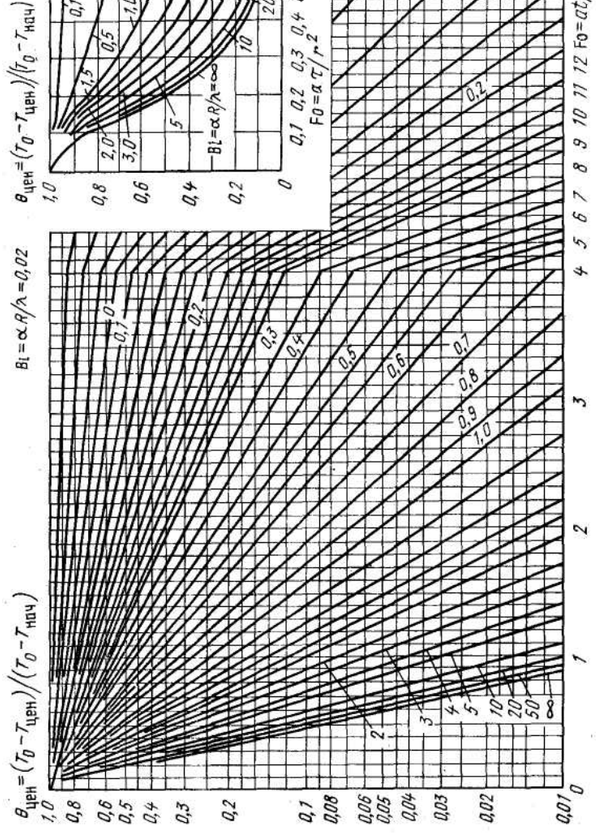
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СТАЛЕЙ

Параметр	Сталь	Значения параметров при температуре стали, °С												
		100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	
Средняя удельная теплоемкость c от 0 до Т, °С, кДж/(кг·К)	Углеродистая	0,486	0,506	0,524	0,540	0,562	0,591	0,620	0,695	0,695	0,692	0,687	0,683	
	Низколегированная	0,486	0,503	0,520	0,536	0,549	0,591	0,645	0,695	0,686	0,675	0,670	0,670	
	Трансформаторная	0,494	0,507	0,533	0,536	0,558	0,616	0,628	0,654	0,666	—	—	—	
	Жаропрочная (хромникелевая)	0,504	0,511	0,524	0,536	0,545	0,554	0,561	0,570	0,574	0,582	0,591	0,595	
Теплопроводность λ, Вт/(м·К)	Углеродистая	49,6	48,2	45,6	42,5	39,1	35,8	32,5	26,2	26,1	26,9	28,1	29,6	
	Низколегированная	41,6	40,1	38,9	37,0	35,3	34,4	31,0	26,4	24,5	—	—	—	
	Трансформаторная	24,9	27,2	29,3	31,3	30,6	28,1	27,3	27,7	26,4	—	—	—	
	Жаропрочная (хромникелевая)	16,3	17,2	18,4	20,1	21,7	23,8	25,6	26,7	26,7	28,0-	28,8	29,5	
Температуропроводность $a \cdot 10^2$, $м^2/ч$	Углеродистая	4,7	4,2	3,8	3,3	2,8	2,3	1,8	1,8	2,0	2,0	2,0	—	
	Низколегированная	3,8	3,5	3,2	2,8	2,3	2,0	1,2	2,1	—	—	—	—	
	Трансформаторная	2,3	2,4	2,5	2,4	2,2	1,7	1,4	1,8	1,7	—	—	—	
	Жаропрочная (хромникелевая)	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	2Д	2,2	2,4	2,5	—	—	—	

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТОЛЩИНОЙ 2 Δ В РЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА



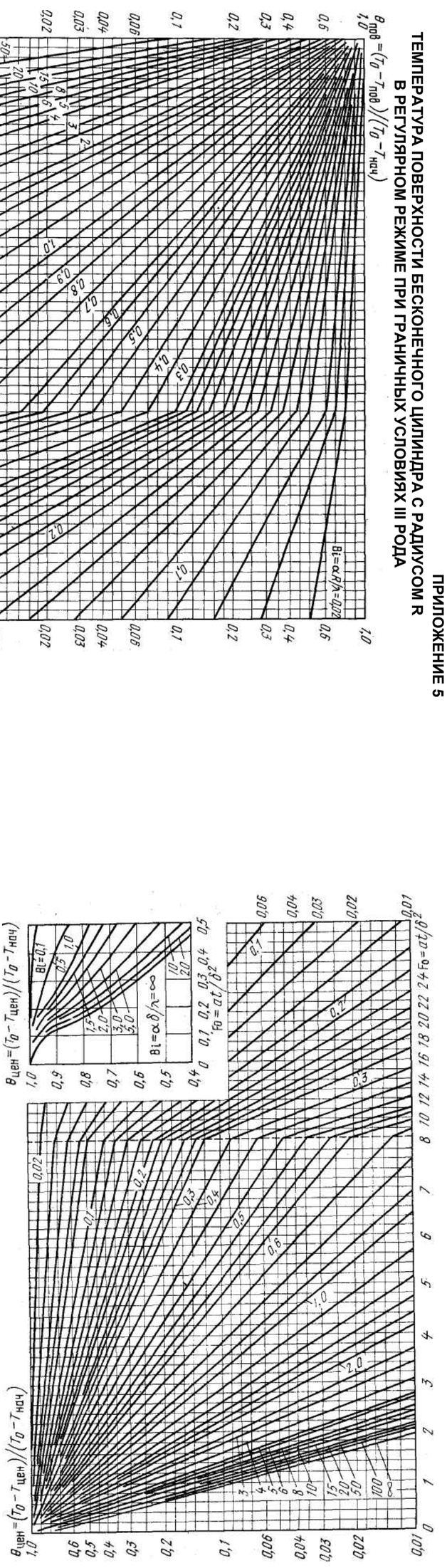
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ОГНЕУПОРНЫХ И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ [9]

Материал	λ, Вт/(м·К)	c_p, Дж/(кг·К)	ρ, кг/м^3	Температура применения
Динас обычный	0,815+0,00067T*	870+0,193T	1900—2000	1620
Динас высокоплотный	1, 58+0,00038T	870+0,193T	2000—2100	1660
Шамот	0,74+0,00064T	865+0,21ОТ	1800—2000	1300
Шамот класса А	0,68+0,00023T	865+0,21ОТ	1800—1900	1350
Полукислые изделия	0,71+0,00070T	868+0,190Т	2350—2500	1430
Высокоглиноземистый: ВГО-45	0,84+0,00058T	835+0,250Т	2200	1550
Высокоглиноземистый: ВГО-62	0,76-0, 00023T	835+0,250Т	2400	1600
Высокоглиноземистый: ВГО-72	1,76-0,00023T	835+0,250Т	2500	1700
Муллит и корунд на глиняной связке	2,1+0,0018T	795+0,210Т	2700—2900	1500
Магнезит	6,28-0,0027Т	1050+0, 145Т	2600—2800	1580
Смолодоломит	1,86-0,00078Т	1000	2700—2850	1800
Форстерит обычный	1 ,63-0,00040Т	900+0,210Т	2350—2500	1620
Форстерит насадочный	4,23-0,0016	900+0,210Т	2350—2500	1620
Шпинель	5,1-0,0035Т	880	2850—2900	1700
Тальк	1,05+0,00031Т	677	2000	1350
Хромомагнезит	2,8-0,00087Т	920	2700—2850	1520
Магнезитохромит	4,1- 0,0016Т	920	2800—2900	>1500
Периклазошпинелидные	4,17-0,0011	920	3100—3150	>1600
Шпинелид	1,3+0,00064Т	540+0,12 Т	3300	1600
Шпинель	2,1-0,00093Т	530+0,125Т	3100—3400	1600
Карборунд-графит	37,1-0,0344Т	960+0,145Т	2100	>2500
Карборунд- карбофракс	2, 62- 0,00116Т	1100	2100	>2000
Графит: 20 % С	3,7	835	1800—1900	>2500
Графит: 50 % С	5,42	835	4800—1900	>2500
Уголь	3,14+0,0021Т	—	1350—1650	>2500
Уголь графитизированный	7,9+0,014Т	—	1350—1650	>2500
Огнеупорный бетон:				
наполнитель – шамот, динас	~0,45	850	1850	>1700
наполнитель – хромит	1,97 при 400 °С 3,02 при 800 °С	850	2350	1770
Жезлезобетон набивной	1,55	840	2200	-
Шамот легковес: ШЛБ-0,4	0,1 16+0, 00016Т	960	400	1100
Шамот легковес: ШЛБ-0,8	0,225+0,00022Т	960	800	1200
Шамот легковес: ШЛБ-1,0	0,314- 0,00035Т	960	1000	1300
Шамот легковес: ШЛБ-1,3	0,465+0,00038Т	960	1300	1300
Динас легковес ДнЛ-1,0	0,29+0,00037Т	960	1000	1430
Диатомит кирпич	0,116+0,00015Т	920	500	-
Диатомит естественный	0,163+0,00043Т	920	444	1000

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ТЕМПЕРАТУРА ЦЕНТРА (СРЕДНЕЙ ПЛОСКОСТИ) БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТОЛЩИНОЙ 2Δ



ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С РАДИУСОМ R В РЕГУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА