

Под редакцией кандидата технических наук,
доцента А. Ф. Сочелова

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Часть 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Е. В. Лановенко, В. С. Саяпин,
А. Ф. Сочелов, А. Н. Степанов

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

затем все уравнения сводятся к одному дифференциальному уравнению, которое и решают. Не вдаваясь в подробности общего решения таких уравнений, на конкретных примерах будем последовательно раскрывать сущность метода и возникающих при этом явлений.

1.1. Включение r -цепи на постоянное напряжение

Пусть дана электрическая схема (см. рис. 1.1), которая подключается к источнику постоянного напряжения. Параметры схемы заданы: r, L, U_0 , ключ K работает на замыкание.

Определить законы изменения тока $i(t)$, напряжений $u_L(t), u_r(t)$ и мощностей источника и нагрузок во времени.

Решение начинают с момента времени $t = 0_+$. Электрическая схема находится в исходном состоянии (ключ K разомкнут). Ток в схеме отсутствует:

$$i(0_+) = 0.$$

В момент времени $t = 0_+$ ключ замыкается. Здесь $t = 0_+$ – первый момент времени после совершения события (замыкания ключа).

Ключ замкнулся, образовался контур. Составляем для него уравнение второго закона Кирхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_0.$$

Это уравнение аналогично математическому неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка ($a \frac{dx}{dt} + bx = y$).

Решение для тока (по аналогии с математическим решением для $x(t)$) имеет вид

$$i(t) = Ae^{rt} + i_{пр},$$

где $i_{пр} = \frac{U_0}{r}$ – принужденная составляющая, (частное) решение неоднородного уравнения; Ae^{rt} – общее решение однородного уравнения $L \frac{di}{dt} + ri = 0$

(A – постоянная интегрирования, которая может быть найдена из граничных (начальных) условий).

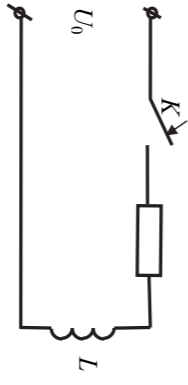


Рис. 1.1

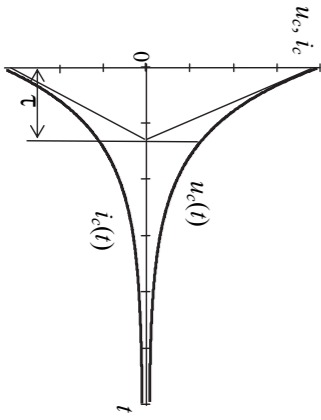


Рис. 1.11

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} = CU_0 e^{-\frac{t}{rC}} \left(-\frac{1}{rC} \right) = -\frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Временные графики рассчитанных величин приведены на рис. 1.11.

а ток конденсатора также определим по формуле

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{(r_0+r)C}},$$

Тогда решение для напряжения примет вид

$$A = U_0.$$

отсюда

$$U_0 = Ae^{r_0 t},$$

При $t = 0_+$ определим постоянную интегрирования

$$p = -\frac{1}{(r_0 + r)C}.$$

Корень характеристического уравнения

$$(r_0 + r)Cp + 1 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

Частного решения нет, т.к. правая часть этого уравнения равна нулю.

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_c(t) = Ae^{rt}.$$

Решение будем искать в виде

$$L \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \frac{d}{dt} \right) i_3(t) = E.$$

При $t = 0_+$

$$\frac{E}{r_2} = A + \frac{E}{r_2} \Rightarrow A = \frac{E}{r_2} - \frac{E}{r_2} = 0.$$

Корень характеристического уравнения

$$P = -\frac{r_2}{L} \left(\frac{r_3}{r_2} + 1 \right) \frac{d}{dt};$$

ток

$$i_3(t) = \frac{L di_3(t)}{r_2 dt},$$

тогда

$$i_{12}(t) = i_1(t) + i_3(t).$$

Эту же задачу решим не составляя дифференциальных уравнений и не решая их.

1) Начальные условия

$$i_1(0_+) = \frac{E}{r_2}.$$

Для остальных токов (рис. 1.17) при $t = 0_+$

$$\begin{cases} i_1(0_+) + i_2(0_+) - i_3(0_+) - i_4(0_+) - i_5(0_+) = 0; \\ E = i_2(0_+) \cdot r_2 + u_1(0_+); \\ i_3(0_+) \cdot r_3 - u_1(0_+) = 0; \\ i_2(0_+) \cdot r_2 = i_1(0_+) \cdot r_1. \end{cases}$$

При решении этой системы алгебраических уравнений можно найти начальные условия для всех величин (читатель может сделать это самостоятельно).

2) При $t \Rightarrow \infty$ исходная схема (см. рис. 1.13) примет вид (рис.1.18), тогда конечные значения токов равны

Временные графики переходных процессов для тока и напряжения индуктивного элемента приведены на рис. 1.2.

$$u_r(t) = i(t) \cdot r = U_0 \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right] \cdot \left(-\frac{r}{L} \right) = U_0 e^{-\frac{r}{L}t} \cdot \frac{d}{dt} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right] = L \frac{d}{dt} \left[U_0 \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) \right] = L \frac{d}{dt} [i(t)] = L \frac{d}{dt} i(t) = U_0 e^{-\frac{r}{L}t} \cdot \frac{r}{L}$$

Напряжение на индуктивности можно определить по формуле

$$u_r(t) = i(t) \cdot r = U_0 \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right]$$

Напряжение на активном сопротивлении

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right]$$

Окончательное решение для тока

$$A = -\frac{U_0}{r}$$

Отсюда A равно

$$0 = Ae^{p_0} + \frac{U_0}{r}$$

В момент времени $t = 0_+$ определяем постоянную интегрирования A .

$$t_{\text{н.п.}} = (5) \tau$$

Постоянная переходного процесса τ определяет время переходного процесса:

$$\frac{|p|}{1} = \tau$$

того процесса (τ)

Обратная величина модуля корня называется постоянной переходного процесса (τ)

Однородному дифференциальному уравнению $L \frac{di}{dt} + r i + r i = 0$, из которого определяем

$$(r_0 + r) C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

описывается уравнением

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

По закону коммутации

$$u_C(0_-) = U_0$$

Расчеты начнем с момента времени $t = 0_-$. При замкнутом ключе K

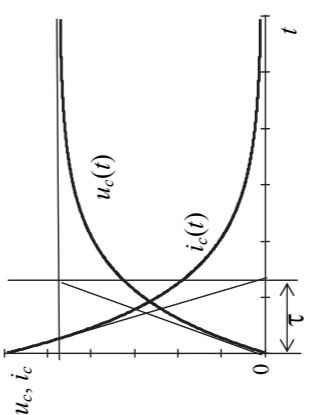
(см. рис. 1.6) напряжение на конденсаторе равно

1.5. Отключение rC -цепи от постоянного напряжения

На рис. 1.10 приведены временные графики напряжения и тока конденсатора при замыкании ключа, где также видно, что постоянная τ для

напряжения и тока одинакова.

Рис. 1.10



$$i_C(t) C = - \frac{d u_C}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ток конденсатора определим по формуле

$$U = (t) C \frac{d u_C}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \right)$$

Окончательное решение

Эта формула также представляет собой обобщенный закон коммутации с емкостными элементами.

Пусть $u_{C1}(0_-) = U_0$, а $u_{C2}(0_-) = 0$ (или $u_{C2}(0_-) \neq U_0$).

В этом случае так же, как и при коммутации с индуктивностями, при замыкании ключа возникает дуга, которая будет гореть до тех пор, пока напряжения на конденсаторах не сравняются.

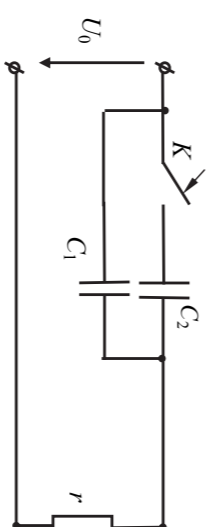


Рис. 1.6

Суммарные заряды равны

$$C_1 U_0 + C_2 \cdot 0 = C_1 u(0_+) + C_2 u(0_+),$$

отсюда напряжение в первый момент после коммутации равно

$$u(0_+) = \frac{U_0 C_1}{C_1 + C_2}$$

1.3. Отключение rL -цепи от постоянного напряжения

Коммутация в цепи (рис. 1.7) корректная, но сразу отметим, что размыкать ключ в схеме (см. рис. 1.1), нельзя, потому что в ней отсутствует сопротивление r_0 .

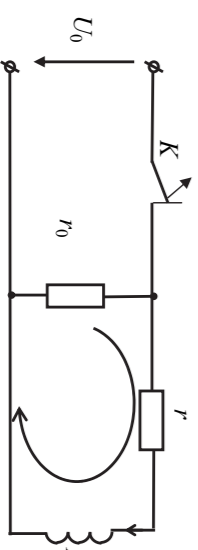


Рис. 1.7

Расчитаем переходный процесс при размыкании ключа. Начальные

$$\text{условия: } i_L(0_-) = \frac{U_0}{r}$$

Временные графики переходных процессов для тока и напряжения индуктивного элемента приведены на рис. 1.2.

$$u_r(t) = i(t) \cdot r = U_0 \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right] \cdot \left(-\frac{r}{L} \right) = U_0 e^{-\frac{r}{L}t} \cdot \frac{d}{dt} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right] = L \frac{d}{dt} \left[U_0 \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) \right] = L \frac{d}{dt} [i(t)] = L \frac{d}{dt} i(t) = U_0 e^{-\frac{r}{L}t} \cdot \frac{r}{L}$$

Напряжение на индуктивности можно определить по формуле

$$u_r(t) = i(t) \cdot r = U_0 \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right]$$

Напряжение на активном сопротивлении

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \left[1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right]$$

Окончательное решение для тока

$$A = -\frac{U_0}{r}$$

Отсюда A равно

$$0 = Ae^{p_0} + \frac{U_0}{r}$$

В момент времени $t = 0_+$ определяем постоянную интегрирования A .

$$t_{\text{н.п.}} = (5) \tau$$

Постоянная переходного процесса τ определяет время переходного процесса:

$$\frac{|p|}{1} = \tau$$

того процесса (τ)

Обратная величина модуля корня называется постоянной переходного процесса (τ)

Однородному дифференциальному уравнению $L \frac{di}{dt} + r i + r i = 0$, из которого определяем

Эта энергия не может измениться, т.к. 0_+ и 0_- — одна и та же величина, т.е. $W_L(0_-) = W_L(0_+)$.

$$W = \frac{L i^2}{2} = \frac{L \frac{U^2}{r^2}}{2} = \frac{L U^2}{2 r^2} = 2L$$

$$W_L(0_-) = W_L(0_+)$$

$$\psi_{\Sigma}(0_-) = \psi_{\Sigma}(0_+)$$

Отсюда

Эта формула представляет собой обобщенный закон коммутации с индуктивными элементами.

В случае некорректной коммутации (см. рис. 1.4) имеем

$$i_{L2}(0_-) L_2 = L_1 i(0_+) + L_2 i(0_+)$$

$$i(0_+) = \frac{i_{L2}(0_-) L_2}{L_1 + L_2}$$

Диаграмма некорректной коммутации для рассматриваемого примера приведена на рис. 1.5, где временной интервал коммутации 0_+ намеренно растянут.

Рассмотрим **закон коммутации на емкости** по аналогии с законом коммутации на индуктивности. Напряжение на емкости при корректной коммутации не может измениться скачком:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

Заряд конденсатора зависит от напряжения:

$$q = C U$$

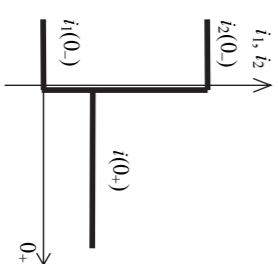


Рис. 1.5

В случае некорректной коммутации (рис. 1.6) должны быть равны суммарные заряды конденсаторов:

$$q_{\Sigma}(0_-) = q_{\Sigma}(0_+)$$

При размыкании ключа появится дуга между размыкающимися контактами (см. рис. 1.4), которая будет гореть до тех пор, пока токи в цепи не сравняются (этот промежуток времени очень мал по сравнению с основ-

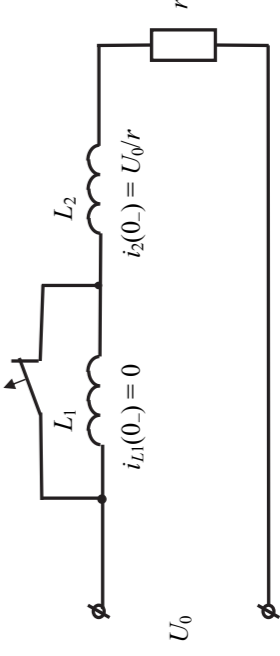


Рис. 1.4

может быть использована.

Если коммутация является особенной (рис. 1.4), когда замыкается или размыкается чисто реактивный элемент, то в результате будет наблюдаться электрическая дуга. Покажем закон коммутации для любой (корректной и некорректной) коммутации. **Некорректной** называют коммутацию, сопровождающуюся дугой. Для некорректной коммутации формула (1.1) не может быть использована.

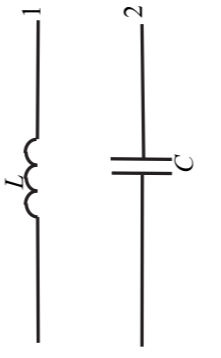
отсюда следует
$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \tag{1.1}$$

$$W_L(0_-) = W_L(0_+),$$

За несуществующий промежуток времени энергия не может измениться скачком (закон сохранения энергии), тогда

$$W_L(0_+) = \frac{Li_L^2(0_+)}{2}.$$

Рис. 1.3



Учитывая, что 0_- и 0_+ — одна и та же величина по определению закона сохранения энергии, запишем выражения энергии:

- в момент (0_-) :
$$W_L(0_-) = \frac{Li_L^2(0_-)}{2};$$
- в момент (0_+) :

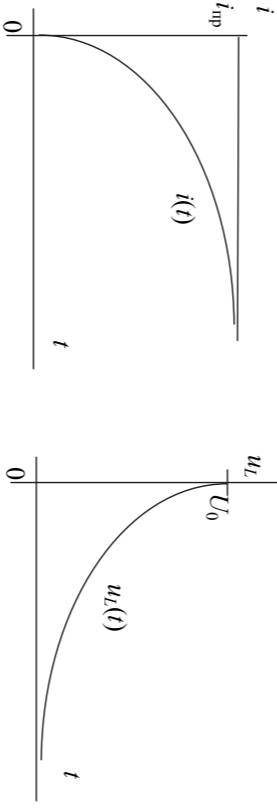


Рис. 1.2

Мгновенная мощность источника

$$P_H(t) = U_0 \cdot i(t) = \frac{U_0^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) = P_k \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right).$$

Мгновенная мощность нагрузки (r)

$$P_H(t) = r \cdot i(t)^2 = \frac{U_0^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right)^2 = \frac{U_0^2}{r} \left(1 - 2e^{-\frac{r}{L}t} + e^{-\frac{2r}{L}t} \right).$$

Мгновенная мощность нагрузки (L)

$$P_L(t) = i(t)U_L(t) = \frac{U_0^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U_0^2}{r} \left(e^{-\frac{r}{L}t} - e^{-\frac{2r}{L}t} \right).$$

Для расчета переходных процессов в цепях классическим методом необходимо знать законы коммутации, на основе которых определяют постоянные интегрирования. В электрических цепях этих законов два.

1.2. Законы коммутации

Закон коммутации на индуктивности можно сформулировать так: при корректной коммутации ток индуктивного элемента (рис. 1.3, d) не может изменяться скачком. Закон коммутации можно записать следующим образом:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

Покажем, что при коммутации ток индуктивного элемента не может изменяться скачком на основе закона сохранения энергии.

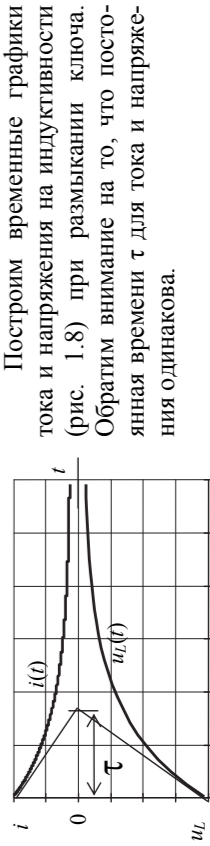


Рис. 1.8

Построим временные графики тока и напряжения на индуктивности (рис. 1.8) при размыкании ключа. Обратим внимание на то, что постоянная времени τ для тока и напряжения одинакова.

Напряжение на индуктивности
$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U_0}{L} e^{-\frac{r+U_0}{L}t} \left(-\frac{r+U_0}{L} \right) = -\frac{r+U_0}{L} U_0 e^{-\frac{r+U_0}{L}t}.$$

Напряжение на сопротивлении r_0
$$u_{r_0} = i(t) \cdot r_0 = \frac{r_0 U_0}{r} e^{-\frac{r_0+r}{L}t}.$$

После подстановки постоянной A в решение ток равен

$$A = \frac{U_0}{r}; \quad A = \frac{U_0}{r}; \quad 0_+ = 0_+;$$

Из начальных условий найдем постоянную интегрирования A:

Решение имеет вид
$$i(t) = Ae^{pt}.$$

Решение имеет вид

$$p = -\frac{r+U_0}{L}; \quad \tau = \frac{L}{r+U_0}; \quad t_{мин} = \frac{L}{r+U_0} \tau.$$

Корень, постоянная и время переходного процесса соответственно равны

Характеристическое уравнение
$$0 = i(r + r_0) + pL$$

По закону коммутации $i_+(0) = i_-(0)$ и уравнение переходного процесса имеет вид

1.4. Включение rC-цепи на постоянное напряжение

Используем схему (рис. 1.9). Ключ замыкается.

Дано: параметры r, C, r0, U0, K ↑.

Определить: $u_C(t) = ?$

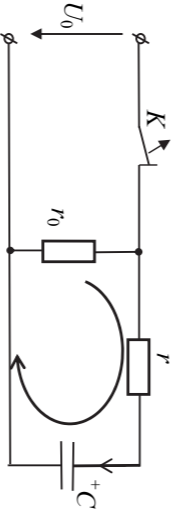


Рис. 1.9

Решение
Начальные условия: $u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+).$

Рассмотрим контур включения rC (см. рис. 1.9) на постоянное напряжение U0. Уравнение процесса имеет вид

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0.$$

Решение этого уравнения

$$u_C(t) = Ae^{pt} + U_0.$$

Если схема питается источником постоянного напряжения, можно принудительное решение определить устремляя время t к бесконечности (∞).
Характеристическое уравнение имеет вид

$$rCr + 1 = 0.$$

Корень этого уравнения, постоянная переходного процесса и время переходного процесса соответственно равны

$$p = -\frac{1}{rC}; \quad \tau = \frac{1}{|p|} = rC; \quad t_{мин} = (4...5)\tau.$$

Постоянную интегрирования определим при t = 0.:

$$0 = Ae^{p \cdot 0} + U_0; \quad A = -U_0.$$

Остаток, найти решение

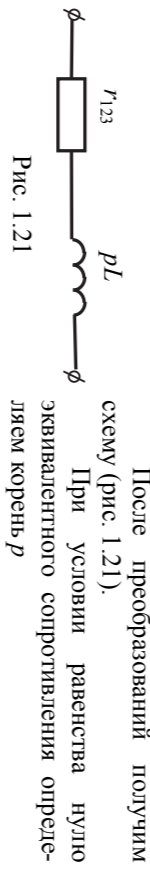
$$i_L(t) = Ae^{pt} + \frac{E}{r_2}$$

$$p = -\frac{r_2}{L \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right)} = -\frac{r_2}{L \left(\frac{r_3 + r_2}{r_3}\right)} = -\frac{r_2 r_3}{L(r_3 + r_2)}$$

Сравнивая полученный результат с результатом расчета по дифференциальным уравнениям, убеждаемся в том, что они одинаковы.

$$p = -\frac{r_2 r_3}{(r_2 + r_3 + r_2 r_3)L}$$

$$Z(p) = 0 \Rightarrow pL + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3 + r_2 r_3} = 0;$$



$$Z(p) = pL + r_{123}$$

тогда

$$r_{123} = \frac{\left(\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}\right) \cdot r_3}{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} + r_3} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$

Сопротивления r_1, r_2 и r_3 соединены параллельно. Их эквивалентное сопротивление равно

Другие токи

$$i_1 = Be^{pt} + \frac{E}{r_1};$$

$$i_3(t) = Ce^{pt}$$

Корень характеристического уравнения p во всех решениях один и тот же.

Постоянные интегрирования A, B и C находятся при $i(0_-) = 0$, аналогично тому, как это было сделано в выше рассмотренных примерах.

1.7. Включение rLC-цепи на постоянное напряжение

Рассмотрим переходный процесс в цепи второго порядка на примере простейшей цепи (рис. 1.22).

Если цепь содержит хотя бы один емкостный элемент, то составленные дифференциальные уравнения решаются относительно напряжения на этом элементе.

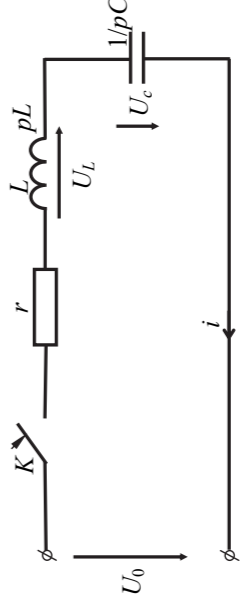


Рис. 1.22

Начальные условия нулевые: $u_C(0_-) = 0, i(0_-) = 0$.

Принужденные составляющие $u_{пр} = U_0, i_{пр} = 0$.

Уравнение переходного процесса с учетом того, что $i = C \frac{du_C}{dt}$ имеет

вид

$$rC \frac{du_C}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = U_0;$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0.$$

Видим, что составленное дифференциальное уравнение – второго порядка.

Приращение напряжения на конденсаторе равно

$$\Delta u_C = u_{C_{кн}} - u_{C_{к}},$$

Приведем производную к конечным разностям:

$$\frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{1}{rC} (U_0 - u_C).$$

и приведем его к форме Коши:

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$

Возьмем дифференциальное уравнение

1.12. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

Строим график переходного процесса (рис. 1.46).

$$i(t) = \frac{U_0}{r} - \frac{U_0}{2r} e^{pt}$$

Если $L_1 = L_2$, то

$$\frac{U_0 \cdot L_1}{r(L_1 + L_2)} = A + \frac{U_0}{r}; \quad A = \frac{U_0}{r} \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} - 1 \right).$$

Определим постоянную интегрирования при $t = 0_+$:

$$i(t) = Ae^{pt} + \frac{U_0}{r}.$$

Решение для тока имеет вид

$$p = -\frac{r}{L_1 + L_2}.$$

корень

$$Z(p) = r + p(L_1 + L_2) = 0;$$

• характеристическое уравнение

$$i_{пр} = \frac{U_0}{r};$$

$$V = \frac{U_0}{r} \sin \varphi_2.$$

Третий ток найдем по первому закону Кирхгофа

$$i_3(t) = i_2(t) - i_1(t).$$

1.11. Расчет переходных процессов при некорректной коммутации классическим методом

Пусть задана схема (рис. 1.45). При размыкании ключа рассмотрим переходный процесс.

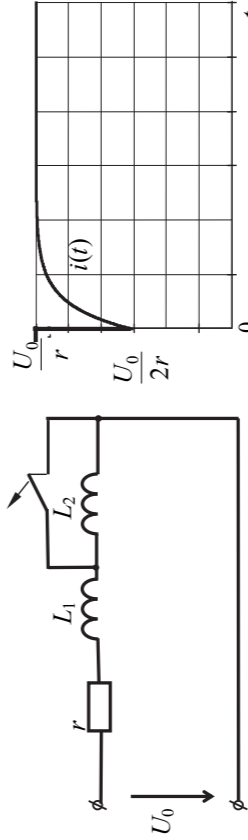


Рис. 1.46

Так как при $t = 0_-$ токи индуктивного элемента равны:

• первого

$$i_{L1}(0_-) = \frac{U_0}{r},$$

• второго

$$i_{L2}(0_-) = 0,$$

то при размыкании ключа эти токи в первый момент не должны измениться. С другой стороны, по закону коммутации

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+).$$

Используя обобщенный закон коммутации на индуктивности, найдем ток $i(0_+)$

$$\psi_{L1}(0_-) = \psi_{L2}(0_+); \quad \frac{U_0}{r} L_1 = (L_1 + L_2) i(0_+); \quad i(0_+) = \frac{U_0}{r} \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Дальнейший расчет осуществим обычным классическим методом:

• принужденный ток

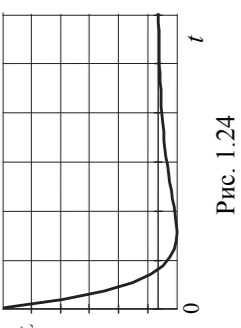


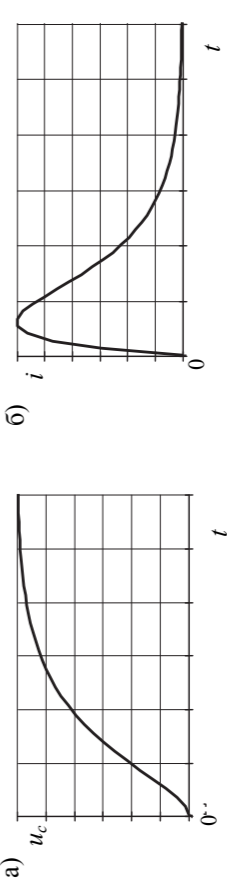
Рис. 1.24

Представим их в виде $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, будут комплексно сопряженными. p_2 корни характеристического уравнения R_1 и R_2 будут комплексно сопряженными. Тогда $u_L(t) < 0$, то $\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$. Тогда 2) Если $D > 0$ приведены временные графики: $u_c(t)$ – на рис. 1.23, а; $i(t)$ – на рис. 1.23, б; $u_L(t)$ – на рис. 1.24.

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Напряжение на индуктивности можно найти по формуле

Рис. 1.23



Тогда

$$A_1 = -U_0 \frac{P_2}{P_2 - P_1} \frac{P_2}{P_1 - P_2}$$

$$A_2 = U_0 \left(\frac{P_1}{P_2} + 1 - \right)$$

отсюда

$$0 = -A_2 P_2 + A_1 + U_0$$

$$A_1 = \frac{A_2 P_2}{P_1}$$

Из второго уравнения получим

Подставим найденное значение A_1 в первое уравнение, получим

1.8. Расчет переходных процессов в цепях второго порядка классическим методом

Решим задачу анализа для цепи (рис. 1.31) при замыкании ключа. Решение проведем без составления дифференциальных уравнений.

Начальные условия до замыкания ключа при $t = 0_-$: $i_L(0_-) = 0$; $i_C(0_-) = 0$; $u_C(0_-) = E$; $u_L(0_-) = 0$.

После замыкания ключа при $t = 0_+$ заданная схема примет вид (рис. 1.32). Откуда следует

$$i_L(0_+) = 0; \quad u_C(0_+) = E; \quad i_C(0_+) = 0; \quad u_L(0_+) = -E.$$

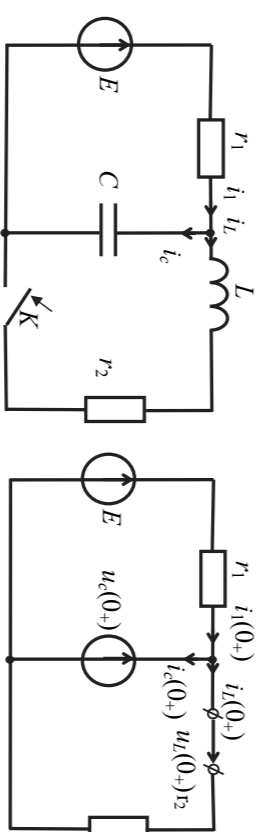


Рис. 1.31

Рис. 1.32

При $t \rightarrow \infty$ исходная схема примет вид (рис. 1.33). Принужденные токи и напряжения в этом случае равны

$$i_{Lmp} = \frac{E}{r_1 + r_2}; \quad u_{Cmp} = i_{Lmp} \cdot r_2; \quad u_{Lmp} = 0; \quad i_{Cmp} = 0.$$

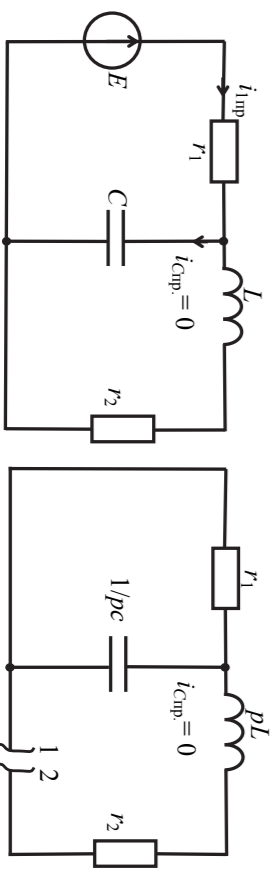


Рис. 1.33

Рис. 1.34

При $t \rightarrow \infty$ определим принужденные составляющие: $i_{Lmp}, i_{Cmp}, i_{Lc}, i_{Cc}$. Для этого составим схему замещения (рис. 1.42). Комплексным методом определим токи и переведем их во временную область:

$$\dot{I}_{Lmp} = I_{Lmp} e^{j\omega t} \rightarrow I_{Lmp} \sin(\omega t + \phi_1);$$

Рис. 1.42

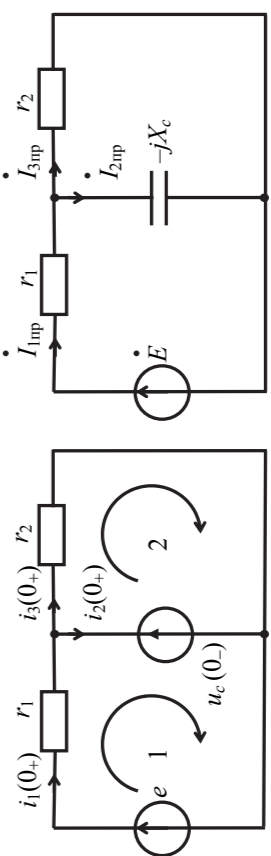


Рис. 1.41

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{r_1 + j\omega L}; \quad \dot{I}_2 = \frac{E}{r_2 + j\omega L}; \quad \dot{I}_{Lmp} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

После решения этих уравнений получим

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{r_1 + j\omega L}; \quad \dot{I}_2 = \frac{E}{r_2 + j\omega L}; \quad \dot{I}_{Lmp} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

При $t = 0_+$ составим схему замещения (рис. 1.41), где $e(0) = E \sin \phi$, где $\phi = \arctan \frac{\omega L}{r}$

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{r_1 + j\omega L}; \quad \dot{I}_2 = \frac{E}{r_2 + j\omega L}; \quad \dot{I}_{Lmp} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

По закону коммутации

$$\dot{I}_{Lmp} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2$$

При $t = 0_+$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_{Lmp} \cdot j\omega L$$

Напряжение на конденсаторе

$$\dot{U}_C = \dot{I}_{Lmp} \cdot j\omega L$$

Тогда при $t = 0_+$ токи равны

Для нахождения корней характеристического уравнения источник исключаем, разрываем, например, ветвь с индуктивностью. Схема примет вид (рис. 1.34).

Относительно точек 1 и 2 (рис. 1.35) найдем $Z(p)$ и, приравняв его нулю, составим уравнение для определения корней; убеждаемся, что оно второго порядка:

$$Z(p) = r_2 + pL + \frac{r_1}{1 + pC} = r_2 + pL + \frac{r_1}{r_1 pC + 1} = 0;$$

$$r_1 L C p^2 + L p r_2 + r_1 r_1 C p + r_2 + r_1 = 0;$$

$$(a p^2 + b p + c = 0).$$

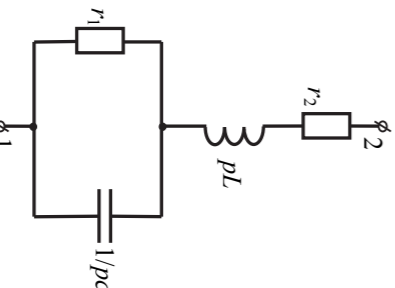
Пусть корни характеристического уравнения действительные и равны p_1 и p_2 . Тогда напряжение на конденсаторе и его ток соответственно равны

$$\begin{cases} u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i_{Lmp} \cdot r_2; \\ i_C(t) = C [A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}] \end{cases}$$

При $t = 0_+$ можно определить постоянные интегрирования A_1 и A_2 . В этот момент времени составим и решим следующие уравнения:

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2 + i_{Lmp} \cdot r_2; \\ 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases}$$

Рис. 1.35



Таким образом, найдены A_1 и A_2 . Аналогично можно определить напряжение на индуктивности и ее ток

$$\begin{cases} i_L(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + \frac{E}{r_1 + r_2}; \\ u_L(t) = L [B_1 p_1 e^{p_1 t} + B_2 p_2 e^{p_2 t}]. \end{cases}$$

При $t = 0_+$ можно определить B_1 и B_2

$$\begin{cases} 0 = B_1 + B_2 + \frac{E}{r_1 + r_2}; \\ -E = L [B_1 p_1 + B_2 p_2]. \end{cases}$$

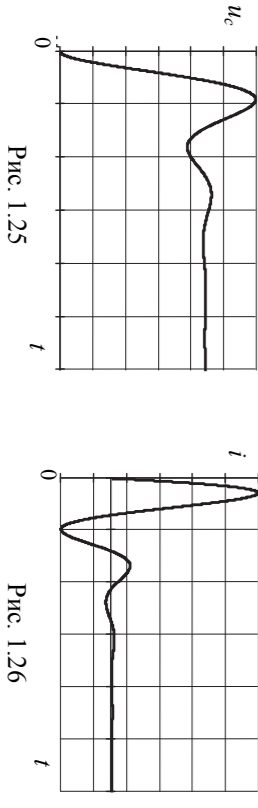


Рис. 1.25

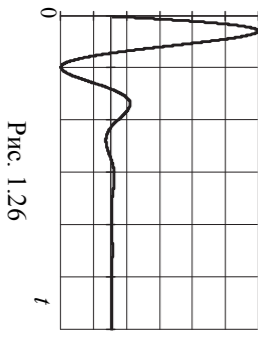


Рис. 1.26

Построим возможные временные графики переходных процессов. Для случая $D < 0$ временные графики приведены: $i_C(t)$ – на рис. 1.25; $i(t)$ – на рис. 1.26; $i_L(t)$ – на рис. 1.27.

где $\varphi = \alpha - \pi/2$, $A = 2A'$.

$$i_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + U_0 = A_1 e^{-\alpha t} e^{+j\omega t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} + U_0 = 2A' e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \alpha) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$$

Построим возможные временные графики переходных процессов.

Покажем, что здесь также можно использовать решение из первого случая:

$$\begin{cases} 0 = A \sin \varphi + U_0; \\ 0 = A(-\alpha) \sin \varphi + A \omega \cos \varphi. \end{cases}$$

Из начальных условий, при $t = 0$, определяем A и φ . Для этого составим и решим уравнения

$$i(t) = C \frac{di_C}{dt} = C [A(-\alpha) e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + A \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)].$$

$$i_C(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + U_0;$$

где $\alpha = \frac{r}{2L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$.

В этом случае решение следует искать в виде

3) Если $D = 0$, то $\frac{1}{4L^2} = \frac{r^2}{4L^2}$ и корни будут одинаковыми: $p_1 = p_2 = p$.

Решение следует искать в виде

$$i_C(t) = A_1 p e^{pt} + A_2 e^{pt} pt + A_2 e^{pt} + U_0;$$

$$i(t) = C \frac{di_C}{dt} = C [A_1 p e^{pt} + A_2 e^{pt} pt + A_2 e^{pt}].$$

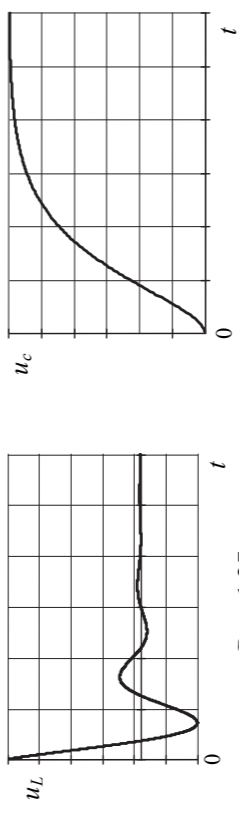


Рис. 1.27

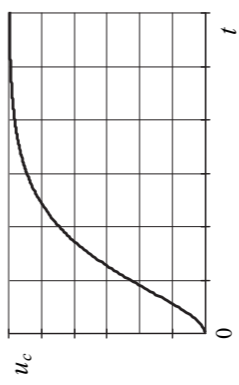


Рис. 1.28

Из начальных условий, при $t = 0$, определяем A_1 и A_2

$$\begin{cases} 0 = A_1 + U_0; \\ 0 = A_1 p + A_2; \\ A_1 = -U_0; \\ A_2 = U_0 p. \end{cases}$$

Построим возможные временные графики переходных процессов. Для случая $D = 0$ временные графики приведены: $i_C(t)$ – на рис. 1.28; $i(t)$ – на рис. 1.29; $i_L(t)$ – на рис. 1.30.

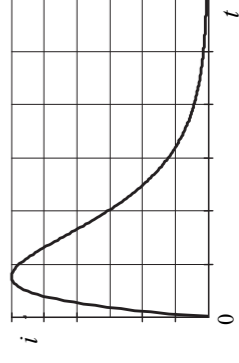


Рис. 1.29

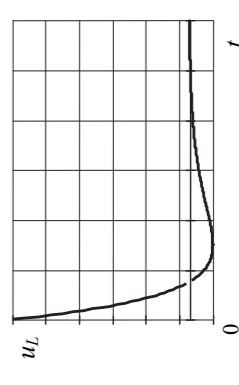


Рис. 1.30

После завершения переходного процесса определим принужденный ток комплексным методом (рис. 1.37):

$$\dot{U} = I_m e^{j\varphi_U} = I_m e^{j\varphi_U - \omega t} \Rightarrow I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} e^{j \arctan \frac{\omega L}{r}}.$$

Переведем комплекс тока во временную область:

$$i \rightarrow i_{\text{фр}} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi_Z).$$

Ток в первой ветви можно определить по второму закону Кирхгофа

1.9. Включение цепи на переменное напряжение

Пусть дана схема (рис. 1.36) и её параметры: $U = U_m \sin(\omega t)$ и её параметры: r, L, C .

Определить ток $i(t)$.

Начальные условия: $i(0_+) = i(0_-) = 0$.

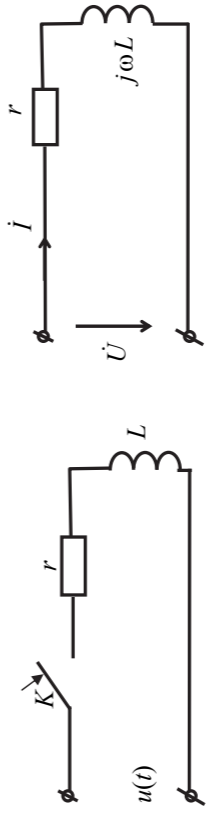


Рис. 1.36

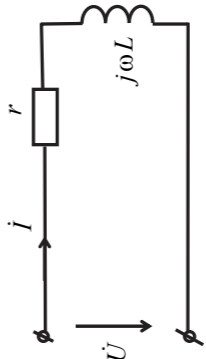


Рис. 1.37

Дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$L \frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \varphi_U).$$

Общее решение

$$i_{\text{об}} = A e^{pt}.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{r}{L}.$$

После завершения переходного процесса определим принужденный ток комплексным методом (рис. 1.37):

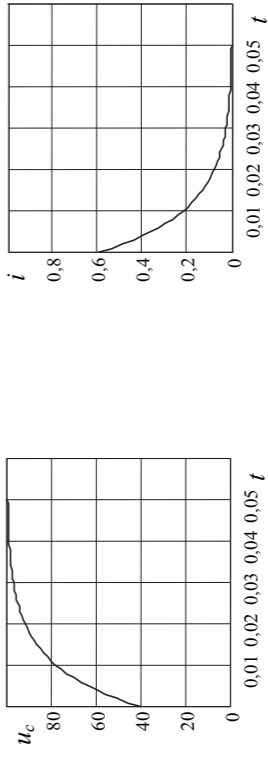
$$\dot{U} = I_m e^{j\varphi_U} = I_m e^{j\varphi_U - \omega t} \Rightarrow I = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} e^{j \arctan \frac{\omega L}{r}}.$$

Переведем комплекс тока во временную область:

$$i \rightarrow i_{\text{фр}} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi_Z).$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3; \\ i_1 \cdot r + i_2 \cdot 2r &= U_0; \\ -i_2 \cdot 2r + i_c &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Рис. 1.48



Задача 1.2. Рассчитать все токи и напряжения на конденсаторе в

цепи (рис. 1.49), если $U_0 = 30$ В; $r = 100$ Ом; $r = 100$ Ом; $C = 100$ мкФ.

Решение

Система дифференциальных уравнений для цепи после коммутации имеет вид

Строим графики тока и напряжения на емкости (рис. 1.48).

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-4} [-60 - (-100)] e^{-100t} = 0,6 e^{-100t}.$$

Ток через конденсатор

$$u_C(t) = 100 - 60e^{-100t}.$$

Уравнение для напряжения на конденсаторе имеет вид

$$40 = 100 + A; \quad A = -60 \text{ В.}$$

$$u_C(0) = u_{C, \text{нр}}(0) + A; \quad u_C(0) = u_{C, \text{нр}}(0);$$

Постоянную интегрирования находим из уравнения, составленного для момента времени $t = 0_+$ (сразу после замыкания ключа):

Постоянную интегрирования находим из уравнения, составленного для момента времени $t = 0_+$ (сразу после замыкания ключа):

$$-1 \cdot e^{-100 \cdot 0} = (-100 + 100) \cdot 10^{-4} / 1 - = C r / 1 - = r$$

Его корень равен

$$u_C = 100 - 60e^{-100t}$$

Принужденное значение напряжения на конденсаторе

Получили характеристическое уравнение. Дальнейшее решение задачи проводим так же, как и при составлении дифференциальных уравнений.

Метод входного сопротивления несомненно можно применять всегда, когда цепь достаточно сложна, и особенно если она содержит несколько реактивных элементов.

Задача 1.3. Найти ток в индуктивности (рис. 1.50), если $U_1 = 30$ В; $r = 20$ Ом; $L = 0,2$ Гн.

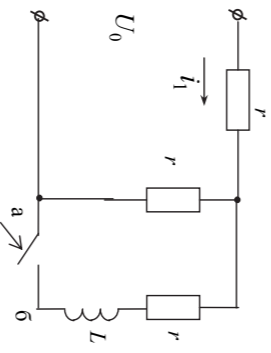


Рис. 1.50

Решение
Ток индуктивности при $t = 0_+$ равен нулю. По закону коммутации $i_L(0_+) = i_L(0_+)$.

Далее закорачиваем источник и определяем сопротивление цепи относительно зажимов а - б:

$$Z(p) = r + Lp + \frac{r}{2} = \frac{3}{2} \cdot r + Lp.$$

Приравнявая $Z(p)$ к нулю, получаем характеристическое уравнение и корень

$$\frac{3}{2} \cdot r + Lp = 0; \quad p = -\frac{3r}{2L} = -\frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 0,2} = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Решение для тока находим в виде

$$i_L(t) = i_{L, \text{нр}} + i_{L, \text{св}} = i_{L, \text{нр}} + Ae^{pt}.$$

Принуждённое значение тока $i_{L, \text{нр}}$ находим из уравнения, записанного для $t \rightarrow \infty$

$$U_0 = i_{L, \text{нр}}(r + 0,5r); \quad i_{L, \text{нр}} = 0,5 \text{ А.}$$

Постоянную интегрирования A найдем при $t = 0_+$

$$i_L(0_+) = i_{L, \text{нр}} + A; \quad A = -0,5.$$

Получаем уравнение для тока

$$i_L(t) = 0,5 - 0,5e^{-150t}.$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -0,5(-150) \cdot 0,2e^{-150t} = 15e^{-150t}.$$

должно быть не более 438 шагов.

незатухающих колебаний контура к шагу Δt не превышало 20. Длительность всего переходного процесса T_k по условиям построения графиков должна быть не более 438 шагов.

где Δt – временной шаг.

От выбора шага зависит точность решения. Неоправданное уменьшение шага приводит к увеличению времени счета. Исходя из этих условий рекомендуется выбирать его таким образом, чтобы отношение периода T незатухающих колебаний контура к шагу Δt не превышало 20. Длительность всего переходного процесса T_k по условиям построения графиков должна быть не более 438 шагов.

$$\begin{aligned} k_1 &= G(i_n, u_{C_n}, i_n), \quad l_1 = F(i_n), \\ k_2 &= G(i_n + \frac{k_1 \Delta t}{2}, u_{C_n} + \frac{k_1 \Delta t}{2}, i_n + \frac{k_1 \Delta t}{2}), \quad l_2 = F(i_n + \frac{k_1 \Delta t}{2}), \\ k_3 &= G(i_n + \frac{k_2 \Delta t}{2}, u_{C_n} + \frac{k_2 \Delta t}{2}, i_n + \frac{k_2 \Delta t}{2}), \quad l_3 = F(i_n + \frac{k_2 \Delta t}{2}), \\ k_4 &= G(i_n + k_3 \Delta t, u_{C_n} + k_3 \Delta t, i_n + k_3 \Delta t), \quad l_4 = F(i_n + k_3 \Delta t), \end{aligned}$$

проходящих через точки, заданные начальными условиями.

Запишем формулу Рунге-Кутты для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений:

$$i = i(t), \quad u_C = u_C(t),$$

$$i(t_0) = i_0, \quad u_C(t_0) = u_{C0}$$

Решение данной системы при заданных начальных условиях

$$F(i, u_C) = (U - R - i) / L.$$

где

$$\frac{di}{dt} = F(i, u_C), \quad \frac{du_C}{dt} = G(i, u_C),$$

систему дифференциальных уравнений и в следующем порядке перепишем

Коши является метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Наиболее распространенным методом решения уравнений порядка n является метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

широко используются при численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее рассмотрим метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Ток $i_L(0_+)$ можно найти из системы уравнений, записанных по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$ (т.е. для начального момента времени после замыкания ключа):

$$\left. \begin{aligned} \overline{i_L(0_-)} &= i_2(0_+) + i_3(0_+); \\ \overline{i_L(0_-)} r + U_L(0_+) + i_2(0_+) r_2 &= U_0; \\ -i_2(0_+) r_2 + \overline{U_C(0_-)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В уравнениях подчеркнуты независимые начальные условия: ток через индуктивность и напряжение на емкости.

При этом

$$i_L(0_-) = \frac{U_0}{r_1 + \frac{r_2 \cdot r_2}{r_2 + r_3}} = \frac{110}{60} = 1,83 \text{ А}$$

Из системы уравнений следует, что

$$i_2(0_+) = \frac{U_C(0_-)}{r_2} = \frac{91,7}{100} = 0,917 \text{ А.}$$

$$i_3(0_+) = i_L(0_-) - i_2(0_+) = 1,83 - 0,917 = 0,913 \text{ А.}$$

Для напряжения U_C в момент $t = 0_+$ можно записать

$$U_C(0_+) = U_{C, \text{нр}} + A \sin \psi$$

или

$$91,7 = 100 = A \sin \psi. \quad (1.2)$$

Ток i_3 определяем через U_C :

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{dU_C}{dt} = CA e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \psi) + \omega \cos(\omega t + \psi)] = \\ &= -CA \sqrt{\delta^2 + \omega^2} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\delta} = \arctg 3,16 \approx 72,44^\circ.$$

При $t = 0_+$ имеем

$$2 r r C + 3 = 0.$$

Приравниваем $Z(p)$ к нулю, при этом числитель дроби будет равен нулю.

$$Z(p) = \frac{2r^2 + r/pC + 2r/pC}{2r + 1/pC} = \frac{2r^2 \cdot pC + 3r}{2rpC + 1}.$$

Приводим дробь к общему знаменателю

$$Z(p) = r + \frac{2r \cdot (1/pC)}{2r + 1/pC}.$$

Заменяем $j\omega$ на p , получим

$$Z(p) = r + \frac{2r \cdot (1/j\omega C)}{2r + 1/j\omega C}.$$

Запишем комплексное входное сопротивление цепи после коммутации

Следует отметить, что избранный метод не является наилучшим с точки зрения трудозатрат. Эту же задачу можно решить проще, используя метод входного сопротивления, позволяющий получить характеристическое уравнение не составляя системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим, как это сделать.

$$i_1 = i_2 + i_3 = -0,15e^{-150t} + 0,1 + 0,05e^{-150t} = 0,1 - 0,1e^{-150t}.$$

Ток в неразветвленной части цепи определим по первому закону Кирхгофа

$$i_2 = \frac{u_c}{2r} = \frac{20 + 10e^{-150t}}{200} = 0,1 + 0,05e^{-150t}.$$

Ток i_2 можно найти по закону Ома

$$i_3 = \frac{du_c}{dt} \cdot C = 10 \cdot (-1) \cdot 10^{-4} e^{-150t} = -0,15e^{-150t}.$$

Ток через конденсатор

$$u_c(t) = 20 + 10e^{-150t}.$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$A = 30 + 20 = 20 = u_{нд} ; U_0 = U(0) = 0 ; A = 10 \text{ В.}$$

Постоянную интегрирования найдем из уравнения, записанного для t

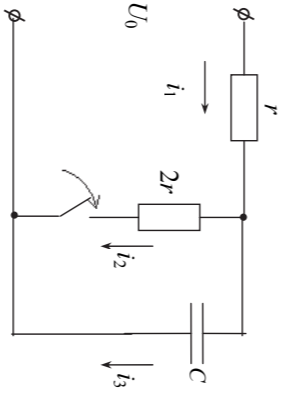


Рис. 1.49

Сложим систему к одному уравнению. За неизвестную величину примем напряжение u_c , т.к. напряжение на ёмкости подчиняется закону коммутации

$$\left. \begin{aligned} (i_2 + i_3) \cdot r + i_2 \cdot 2r = U_0; \\ i_2 = \frac{u_c}{2r}; \\ i_3 = \frac{du_c}{dt} \cdot C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} i_2 \cdot 3r + i_3 \cdot r = U_0; \\ i_2 = \frac{u_c}{2r}; \\ \frac{3u_c}{2} + i_3 \cdot r = U_0. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что $i_3 = i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$, получаем дифференциальное уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{3u_c}{2} + C \cdot r \cdot \frac{du_c}{dt} = U_0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$C \cdot r \cdot p + \frac{3}{2} = 0.$$

Его корень равен

$$p = -\frac{3}{2 \cdot C \cdot r} = -\frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$u_c = u_{c\text{пр}} + u_{c\text{св}} = u_{c\text{пр}} + Ae^{pt},$$

$$u_{c\text{св}} = \frac{U_0 \cdot 2r}{r + 2r} = \frac{30 \cdot 2 \cdot 100}{100 + 200} = 20.$$

где принудительное значение напряжения на ёмкости равно

$$i_1(t) = 1 + e^{-100t} [0,275 \sin(316t - 0,307) - 0,913 \sin(316t - 1,571)].$$

Рассчитаем кривые переходных процессов $U_C(t)$ и $i_1(t)$ по нижеследующим формулам:

$$U_C(t) = 100 + 27,5e^{-100t} \sin(316t - 0,307);$$

Для проверки можно подставить в выражение тока $i_1(t)$ $t = 0$. Подстановка дает $i_1(0) \approx 1,83 \text{ А}$, что совпадает с начальными условиями.

$$i_2(t) = 1 + 0,275 \sin(316t - 0,307) - 0,913 \sin(316t - 90^\circ).$$

$$= -0,913e^{-100t} \sin(316t - 90^\circ);$$

$$i_2(t) = 1 + 0,275e^{-100t} \sin(316t - 17,56^\circ);$$

$$i_2(t) = \frac{U_C(t)}{r_2}; \quad i_3(t) = C \frac{dU_C}{dt}; \quad i_1(t) = i_2(t) + i_3(t);$$

Далее находим ток $i_1(t)$. Это можно сделать следующим образом:

$$U_C(t) = 100 + 27,5e^{-100t} \sin(316t - 17,56^\circ).$$

С учетом значений A и ψ выражение для $U_C(t)$ примет вид

$$\psi = -17,56^\circ; \quad A = 27,5.$$

$$ctg \psi = \frac{3,31 - 0,302}{0,953} = -3,16;$$

$$0,302 - 0,953 ctg \psi = 3,31;$$

$$8,3(\cos 72,44^\circ - ctg \psi \cdot \sin 72,44^\circ) = 27,5;$$

$$-\frac{8,3}{\sin \psi} (\sin \psi \cdot \cos \psi - \cos \psi \cdot \sin \psi) = -27,5;$$

$$A(\sin \psi \cdot \cos \psi - \cos \psi \cdot \sin \psi) = -27,5.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{8,3}{\sin \psi} &= A \\ \psi &= -17,56^\circ \end{aligned} \right\}$$

Решаем совместно (1.1) и (2.1) (1.3):

$$(3.1) \quad (\phi - \psi) \sin \psi A^2 - 10 - 10 - = = 0,913$$

или

$$(\phi - \psi) \sin \psi = \frac{10 + \sqrt{8^2 + 10^2}}{A^2} = 1,571$$

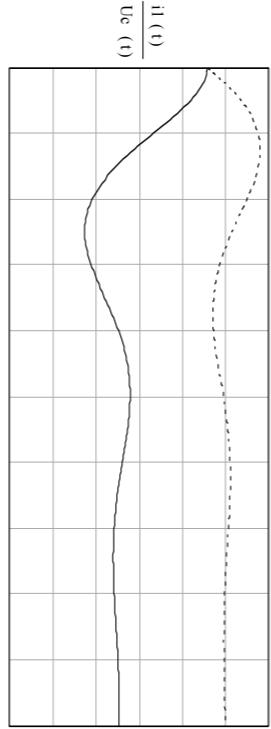


Рис. 1.57

На рис. 1.57 приведены кривые $i_1(t)$ и $U_C(t)$, где по оси ординат в одной клетке 20 В и 0,4 А, а по оси абсцисс – 0,005 с.

Задача 1.9. Составим алгоритм для расчета переходных процессов в цепи, состоящей из последовательно включенных элементов (r, L, C). Цепь будет предварительно заряжен до напряжение U_0 . Переходные процессы будут описываться следующими уравнениями:

$$U = iR + u_C + L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt + U_{C0}.$$

В результате решения требуется получить зависимости тока и напряжения на конденсаторе от времени:

$$i = f_1(t); \quad u_C = f_2(t),$$

где i и u_C – соответственно ток и напряжение на конденсаторе.

Вычисления ведутся до заданного момента времени t_c . Для нахождения отмеченных зависимостей целесообразно представить уравнения в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных искомым величин i и u_C . Для этого продифференцируем по времени обе части второго уравнения:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{U - Ri - u_C}{L}.$$

Такая форма записи дифференциальных уравнений, когда в левых частях находятся первые производные искомым величин, а в правых – заданные функции этих величин, называется формой Коши. Эта форма

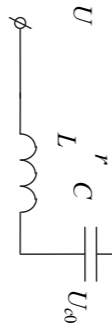


Рис. 1.58

$$\text{Решение задачи}$$

$$P = -\frac{I_1 + I_2}{L} = -\frac{100}{0,2} = -500 \text{ с}^{-1}.$$

$$r_1 + r_2 + Lp = 0;$$

$$A = -1,36 - 0,85 \sin(-77,1^\circ) = -0,53.$$

откуда

$$i(0_+) = i_{\text{нр}}(0_+) + A; \Rightarrow -1,36 = 0,85 \sin(-77,1^\circ) + A,$$

При $t = 0_+$ имеем

$$i(t) = i_{\text{нр}}(t) + Ae^{pt}.$$

В общем виде ток в цепи после коммутации

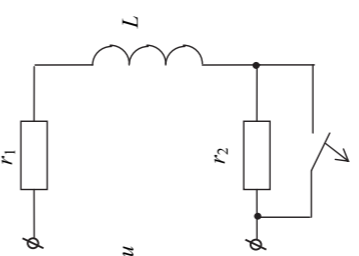
$$I_{\text{нр}} = \frac{\dot{U}_m}{Z_2} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{r_1 + r_2 + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{100 + 100118e^{j32,13^\circ}} = 0,85e^{-j77,1^\circ}.$$

Принуждённое значение тока в цепи

$$i(0_+) = 1,44 \sin(-109,5^\circ) = -1,36 \text{ А}.$$

Начальное значение тока (в первый момент после размыкания ключа)

Рис. 1.51



$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r_1 + j \omega L = 30 + j70 = 70e^{j69,5^\circ} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}_1} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{70e^{j69,5^\circ}} = 1,44e^{-j109,5^\circ} \\ I_{\text{нр}} &= \frac{\dot{U}_m}{Z_2} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{100 + 100118e^{j32,13^\circ}} = 0,85e^{-j77,1^\circ} \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление и ток до коммутации

$$\omega L = 314 \cdot 0,2 = 62,8 \text{ Ом}.$$

Индуктивное сопротивление цепи равно

Решение

Задача 1.4. Рассчитать ток в цепи после размыкания ключа. В цепи действует синусоидальный источник напряжения: $i = 100 \sin(314t - 45^\circ)$ А; $r_1 = 10 \text{ Ом}$; $r_2 = 20 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$.

Этого напряжения будет иметь место окончания переходного процесса.

$$U_{C_{\text{нр}}} = \frac{110}{r_1 + r_2} = \frac{100 \cdot 0,11}{0,1 + 0,1} = 55 \text{ В}.$$

где

$$U_C = U_{\text{нр}} \sin(\omega t + \delta + \varphi),$$

напряжения на емкости будем искать в виде

Корни оказались комплексно-сопряженными. Это означает, что переходный процесс в цепи носит колебательный характер. Решение для

$$10^2 \cdot d^2 + 0,1d + 0,1 = 0; \Rightarrow d_{1,2} = -0,5 \pm j0,5.$$

$$0 = 0; \Rightarrow d_{1,2} = -0,5 \pm j0,5.$$

$$P_{1,2} = 0,5 \pm j0,5.$$

В этом случае числитель дроби равен нулю, а выражение

$$0 = \frac{r_2 + U_C + d(r_1 + r_2 + dL)}{1 + dC} = 0$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на r_2 и приравняем к нулю:

$$\frac{r_2 + U_C + d(r_1 + r_2 + dL)}{1 + dC} = 0 \Rightarrow r_2 + U_C + d(r_1 + r_2 + dL) = 0$$

Заменим U_C на $r_2 I_C$ и получим выражение:

$$\frac{r_2 + r_2 I_C + d(r_1 + r_2 + dL)}{1 + dC} = 0$$

Запишем комплексное уравнение цепи после замыкания ключа (клеммы разомкнуты):

$$U_C = r_2 I_C + d(r_1 + r_2 + dL) = 0 \Rightarrow U_C = -d(r_1 + r_2 + dL) = -r_2 I_C - d(r_1 + r_2 + dL)$$

Запишем комплексное уравнение цепи после замыкания ключа (клеммы разомкнуты):

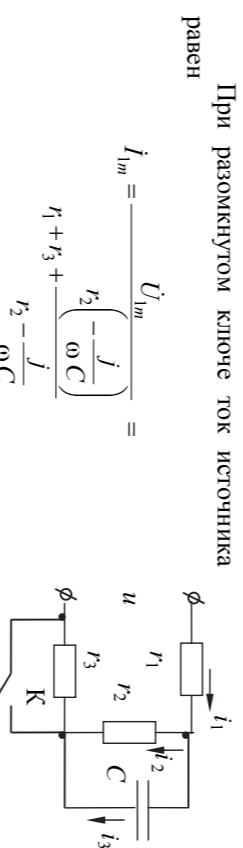


Рис. 1.54

$$\frac{250}{200 + j15,92e^{-j90^\circ}} = 0,114e^{j0,41^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение на емкости равно

$$U_C = \frac{I_{\text{нр}} \cdot r_2 \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{r_2 - \frac{j}{\omega C}} = 0,114e^{j0,41^\circ} \cdot 15,87e^{-j85,45^\circ} = 1,803e^{-j85,04^\circ} \text{ В}.$$

Напряжение на емкости при $t = 0$:

$$U_C(0) = 1,803 \sin(-85,04^\circ) = -1,796 \text{ В}.$$

Установившийся режим при замкнутом ключе

$$I_{\text{нр}} = \frac{U_{\text{нр}}}{r_2 + \frac{j}{\omega C}} = \frac{250}{200 + j15,92e^{-j90^\circ}} = 0,25e^{j0,91^\circ} \text{ А};$$

$$U_{C_{\text{нр}}} = I_{\text{нр}} \cdot \frac{j}{\omega C} = 0,25e^{j0,91^\circ} \cdot 15,87e^{-j85,45^\circ} = 3,968e^{-j84,54^\circ} \text{ В}.$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе в установившемся режиме

$$U_{C_{\text{нр}}}(t) = 3,968 \sin(314t - 84,54^\circ).$$

Запишем входное операторное сопротивление цепи после замыкания ключа

Решение задачи

$$P = -\frac{I_1 + I_2}{L} = -\frac{100}{0,2} = -500 \text{ с}^{-1}.$$

$$r_1 + r_2 + Lp = 0;$$

$$A = -1,36 - 0,85 \sin(-77,1^\circ) = -0,53.$$

откуда

$$i(0_+) = i_{\text{нр}}(0_+) + A; \Rightarrow -1,36 = 0,85 \sin(-77,1^\circ) + A,$$

При $t = 0_+$ имеем

$$i(t) = i_{\text{нр}}(t) + Ae^{pt}.$$

В общем виде ток в цепи после коммутации

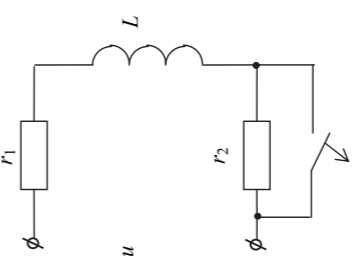
$$I_{\text{нр}} = \frac{\dot{U}_m}{Z_2} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{r_1 + r_2 + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{100 + 100118e^{j32,13^\circ}} = 0,85e^{-j77,1^\circ}.$$

Принуждённое значение тока в цепи

$$i(0_+) = 1,44 \sin(-109,5^\circ) = -1,36 \text{ А}.$$

Начальное значение тока (в первый момент после размыкания ключа)

Рис. 1.51



$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r_1 + j \omega L = 30 + j70 = 70e^{j69,5^\circ} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}_1} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{70e^{j69,5^\circ}} = 1,44e^{-j109,5^\circ} \\ I_{\text{нр}} &= \frac{\dot{U}_m}{Z_2} = \frac{100e^{-j/45^\circ}}{100 + 100118e^{j32,13^\circ}} = 0,85e^{-j77,1^\circ} \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление и ток до коммутации

$$\omega L = 314 \cdot 0,2 = 62,8 \text{ Ом}.$$

Индуктивное сопротивление цепи равно

Решение

Задача 1.4. Рассчитать ток в цепи после размыкания ключа. В цепи действует синусоидальный источник напряжения: $i = 100 \sin(314t - 45^\circ)$ А; $r_1 = 10 \text{ Ом}$; $r_2 = 20 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$.

тогда ток $i_2(t)$ равен

$$i_2(t) = C \frac{di_c}{dt} = CA(e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi) \omega + e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)(-\delta)),$$

где i_c — принуждённое значение напряжения на конденсаторе; δ — действительная часть корня характеристического уравнения ($\delta = 80,5$); ω — мнимая часть корня ($\omega = 222$); A и ψ — постоянные интегрирования.

Таким образом, система уравнений для определения постоянных интегрирования имеет вид

$$\begin{cases} i_c(0_+) = 90 + A \sin \psi = 100; \\ i_2(0_+) = CA(\sin \psi) \omega - \cos(\psi) \delta = \frac{100}{90}. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим

$$\psi = -82^\circ;$$

$$A = -10 / \sin 82^\circ = -10,1.$$

Уравнение для $i_c(t)$ имеет вид

$$i_c(t) = 90 - 10,1e^{-80,5t} \sin(222t - 82^\circ).$$

Зная напряжение $u_c(t)$, можно найти все остальные токи и напряжения в цепи.

Так, например:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= C \frac{di_c}{dt} = 10^{-4} (-10,1)e^{-80,5t} [-80,5 \sin(222t - 82^\circ) + 222 \cos(222t - 82^\circ)] = \\ &= e^{-80,5t} [0,0813 \sin(222t - 82^\circ) - 0,224 \cos(222t - 82^\circ)]; \\ i_3(t) &= u_c(t) / r_2 = 1 - 0,112e^{-80,5t} \sin(222t - 82^\circ); \end{aligned}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 1 - e^{-80,5t} [-0,0307 \sin(222t - 82^\circ) + 0,224 \cos(222t - 82^\circ)].$$

Примечание. Для расчёта кривых токов и напряжений и построения графиков углы в формулах должны быть записаны не в градусах, а в радианах.

Задача 1.7. Дано: $U = 250 \text{ В}$; $r_1 = 1000 \text{ Ом}$; $r_2 = 200 \text{ Ом}$; $C = 1200 \text{ мкФ}$; $C = 200 \text{ мкФ}$.

Схема приведена на рис. 1.54.

Найти: $U_C(t) = ?$; $i_1(t) = ?$

Рассчитаем установившиеся режимы работы цепи при разомкнутом и замкнутом ключе К в комплексных числах.

Тогда напряжение на индуктивности $u_L(0_+) = 200$ В.

Таким образом, начальное значение тока через ёмкость равно нулю, а напряжение на индуктивности 200 В.

Подставляем полученный результат во второе уравнение и находим ток ёмкости

$$-200 + i_3(0_+) \cdot 100 + i_3(0_+) \cdot 50 + 200 = 0;$$

$$i_3(0_+) = 0 \text{ А};$$

Из первого уравнения найдем напряжение на индуктивности

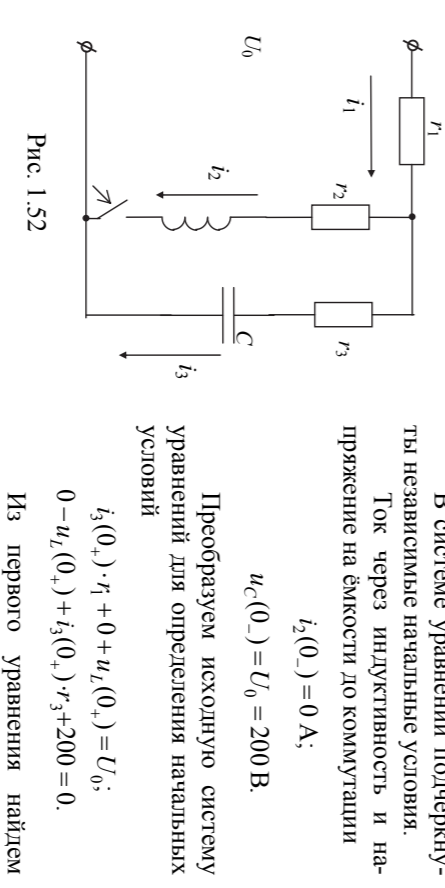
$$u_L(0_+) = U_0 - i_3(0_+) \cdot r_1 = 200 - i_3(0_+) \cdot 100.$$


Рис. 1.52

Преобразуем исходную систему уравнений для определения начальных условий

$$\begin{cases} i_3(0_+) \cdot r_1 + 0 + u_L(0_+) = U_0; \\ 0 - u_L(0_+) + i_3(0_+) \cdot r_3 + 200 = 0. \end{cases}$$

В системе уравнений подчеркнуты независимые начальные условия. Ток через индуктивность и напряжение на ёмкости до коммутации

$$i_2(0_-) = 0 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = U_0 = 200 \text{ В}.$$

Записываем систему уравнений для момента времени $t = 0_+$ (сразу после замыкания ключа) по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_1(0_+) = i_2(0_-) + i_3(0_+); \\ i_1(0_+) \cdot r_1 + i_2(0_-) \cdot r_2 + u_L(0_+) = U_0; \\ -i_2(0_-) \cdot r_2 - u_L(0_+) + i_3(0_+) \cdot r_3 + u_C(0_-) = 0. \end{cases}$$

Задача 1.5. Определить начальные значения напряжения на катушке индуктивности и ток через ёмкость в цепи (рис. 1.52), если $U_0 = 200$ В; $r_1 = 100$ Ом; $r_2 = 100$ Ом; $r_3 = 50$ Ом.

Решение

Записываем систему уравнений для момента времени $t = 0_+$ (сразу после замыкания ключа) по законам Кирхгофа

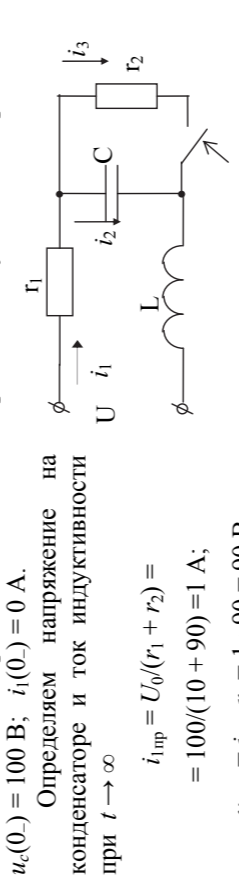


Рис. 1.53

Задача 1.6. Рассчитать переходный процесс в цепи (рис. 1.53) классическим методом. Определить все токи и напряжения после замыкания ключа, если $U_0 = 100$ В; $r_1 = 10$ Ом; $r_2 = 90$ Ом; $r_3 = 20$ Гн; $C = 100$ мкФ.

Решение

Находим напряжение на конденсаторе и ток индуктивности при $t = 0_-$:

$$u_C(0_-) = 100 \text{ В}; \quad i_L(0_-) = 0 \text{ А}.$$

Определяем напряжение на конденсаторе и ток индуктивности при $t \rightarrow \infty$

$$i_{C \text{ пр}} = i_{L \text{ пр}} r_2 = 1 \cdot 90 = 90 \text{ В}.$$

Записываем выражение для выходящего сопротивления цепи после коммутации

$$Z(p) = r_1 + Lp + \frac{r_2 / cp}{r_2 + 1 / cp} = \frac{r_1 r_2 Lcp + r_1 / c + L / c + r_2 / cp}{r_2 + 1 / cp} = \frac{r_1 r_2 Lcp^2 + Lp + r_1 / c + r_2 / cp}{r_2 cp + 1 + r_2}.$$

Приравняв $Z(p)$ к нулю, получаем характеристическое уравнение

$$r_2 Lcp^2 + p(r_1 r_2 c + L) + r_1 + r_2 = 0.$$

Подставляем в характеристическое уравнение численные значения параметров цепи

$$90 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} p^2 + p \cdot (10 \cdot 90 \cdot 10^{-4} + 0,2) + 10 + 90 = 0;$$

$$0,18 \cdot 10^{-2} p^2 + 0,29 p + 100 = 0;$$

$$p^2 + 161 p + 55600 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$P_{1,2} = -80,5 \pm \sqrt{80,5^2 - 55600} = -80,5 \pm j222.$$

Корни характеристического уравнения оказались комплексными сопряжёнными. Это означает, что переходный процесс в цепи имеет колебательный характер.

Напряжение на ёмкости находим в виде

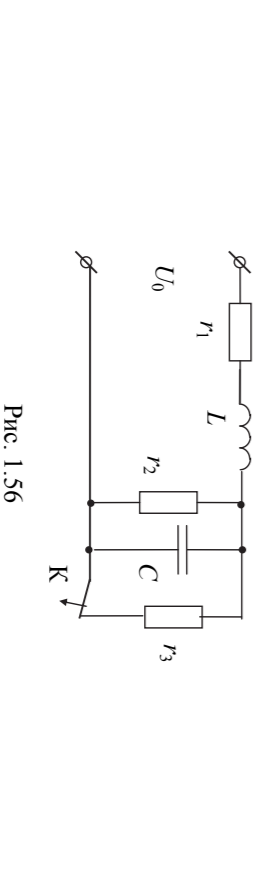
$$u_C = u_{C \text{ пр}} + u_{C \text{ св}} = u_{C \text{ пр}} + Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \Psi),$$


Рис. 1.56

Дано: $U_0 = 110$ В; $r_1 = 10$ Ом; $r_2 = 100$ Ом; $r_3 = 100$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 100$ мкФ.

Найти: $U_C(t) = ?$ $i_1(t) = ?$

Расчет начнем с начальных условий $t = 0_-$. Определим ток индуктивности и напряжение на ёмкости при замыкании ключа

Искомый по условию задачи ток $i_1(t)$ находим по первому закону Кирхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 0,0198 \sin(314t - 84,54^\circ) + 0,2492 \cos(314t - 84,54^\circ) - 0,0021 e^{-30t} = 0,250 \sin(314t - 0,0021 e^{-30t}).$$

Кривая напряжения $U_C(t)$ приведена на рис. 1.55, ток $i_1(t)$ практически сразу же принимает установившееся значение.

Задача 1.8. В качестве примера расчета цепи второго порядка рассмотрим переходный процесс в схеме (рис. 1.56), возникший после размыкания ключа К.

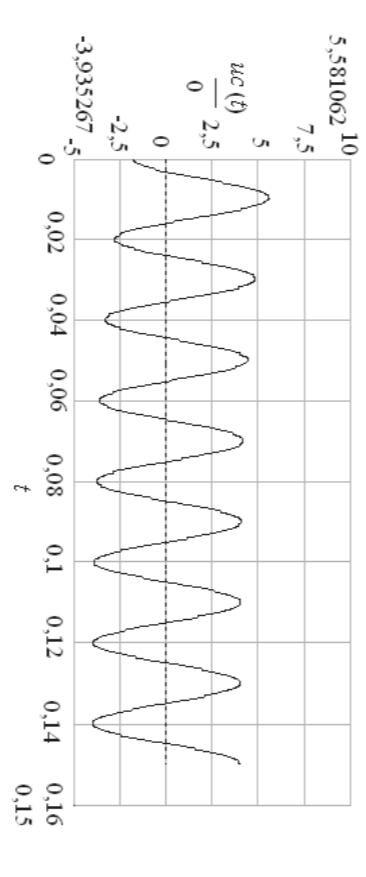


Рис. 1.55

Приравняв уравнение характеристического уравнения к нулю получим

$$\frac{1 + Cp}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} + Lp = 0.$$

$$\frac{1 + Cp}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} + Lp = 0.$$

$$\frac{1 + Cp}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} + Lp = 0.$$

Его корни равны

$$p = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 10000}}{200 + 1000} = \frac{-30 \pm j99,5}{2000} = -0,015 \pm j0,04975.$$

Постоянная времени цепи

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{30} \approx 0,033333 \text{ с}.$$

Решение для U_C ищем в виде

$$U_C(t) = U_{C \text{ дл}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования A определим из начальных условий

$$U_C(0) = U_{C \text{ дл}} + A;$$

$$-1,796 = 3,968 \sin(-84,54^\circ) + A;$$

$$A = -1,796 + 3,950 = 2,154.$$

Отсюда

$$U_C(t) = 3,968 \sin(314t - 84,54^\circ) + 2,154 e^{-30t}.$$

Далее находим ток i_3

$$\frac{dU_C}{dt} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3,968 \cdot 314 \cos(314t - 84,54^\circ) + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,154 (-30) e^{-30t} = -0,2492 \cos(314t - 84,54^\circ) - 0,0129 e^{-30t}.$$

Ток i_2 находим с учетом того, что сопротивление r_2 и ёмкость C включены параллельно:

$$i_2(t) = \frac{U_C(t)}{r_2} = 0,010198 \sin(314t - 84,54^\circ) + 0,01018 e^{-30t}.$$

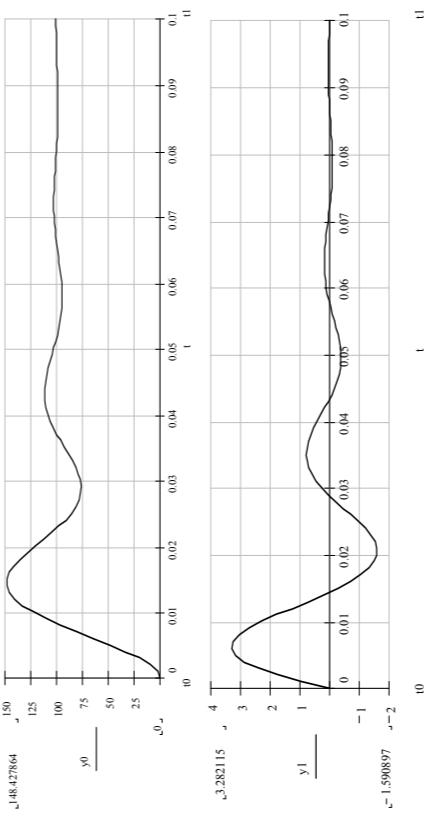


Рис. 1.59

Период незатухающих колебаний, как известно, определяется следующим соотношением:

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}.$$

Следовательно, можно принять временной шаг

$$\Delta t = \frac{T}{20},$$

а время переходного процесса $T_k = 21,9 T$. Полученные временные графики приведены на рис. 1.59, где исходными данными являются следующие параметры: $U = 100 \text{ В}$; $U_{C0} = 0 \text{ В}$; $r = 10 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 0,0002 \text{ Ф}$, $u(t)$ соответствует напряжению на конденсаторе, $i(t)$ – току в цепи.

1.14. Вопросы для самопроверки

- 1) Что такое переходный процесс в электрической цепи?
- 2) Какие Вы знаете разновидности переходных процессов?
- 3) В чем заключается сущность классического метода расчета переходных процессов?
- 4) Как составляются уравнения переходных процессов?
- 5) Чем характеризуются дифференциальные уравнения переходных процессов?
- 6) Чем определяется порядок дифференциальных уравнений?

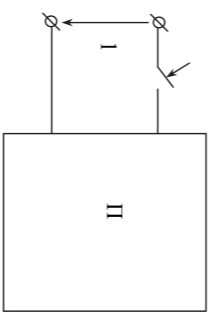


Рис. 2.4

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \cdot (1 - e^{-pt}); \quad u_L(t) = U_0 \cdot e^{-pt}; \quad u_r(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-pt}).$$

Если принять $U_0 = 1$, получим следующие переходные функции:

$$g(t) = \frac{1}{r} \cdot (1 - e^{-pt}); \quad h_L(t) = e^{-pt}; \quad h_r(t) = 1 - e^{-pt}.$$

Для цепи r, C (рис. 2.6) ток в переходном процессе и напряжения равны (см. подраздел 1.4)

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \cdot e^{-pt}; \quad u_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-pt}); \quad u_r(t) = U_0 \cdot e^{-pt}.$$

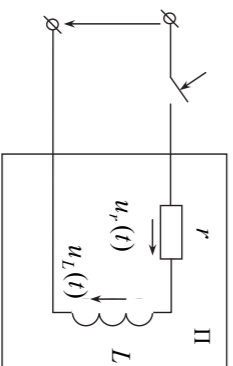


Рис. 2.5

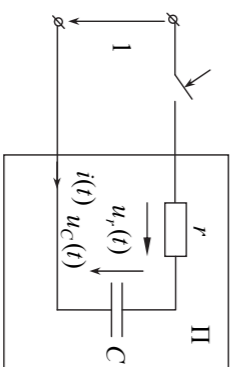


Рис. 2.6

Тогда для переходных функций получаем

$$g(t) = \frac{1}{r} \cdot e^{-pt}; \quad h_C(t) = 1 - e^{-pt}; \quad h_r(t) = e^{-pt}.$$

Таким образом, переходную проводимость $g_k(t)$ и переходную функцию напряжения $h_k(t)$ любой схемы пассивного или активного двухполносника можно найти любым из известных методов (например, классическим методом). Поэтому в дальнейших расчетах $g_k(t)$ и $h_k(t)$ будем считать известными.

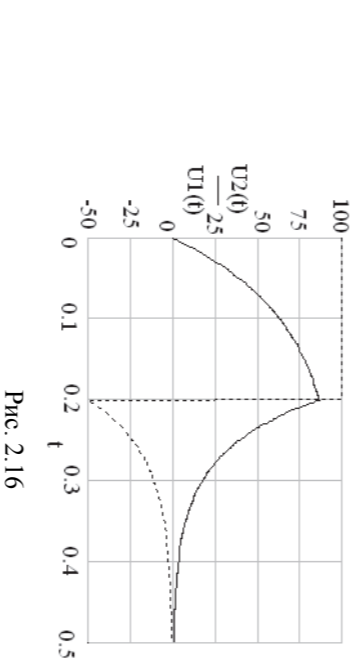


Рис. 2.16

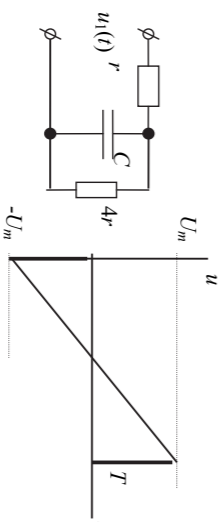


Рис. 2.17

Задача 2.4. Решим еще один пример на использование интеграла Дюамеля при анализе переходных процессов.

Дано: $U_m = 50 \text{ В}$; $r = 100 \text{ Ом}$; $C = 250 \text{ мкФ}$; $T = 0,05 \text{ с}$.
Найти: $i(t) = ?$; $u_C(t) = ?$

Решение
Рассчитаем переходную проводимость цепи (рис. 2.17). С этой целью определяем ток в неразветвленной части цепи при подаче на ее вход постоянного напряжения $U_0 = 1 \text{ В}$.
Воспользуемся операторным методом:

$$U(p) = \frac{U_0}{p} = \frac{1}{p}; \quad Z(p) = r + \frac{1}{4rCp+1} = \frac{4r^2Cp+5r}{4r+1}; \quad I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{4rCp+1}{(4r^2Cp+5r)r}.$$

По теореме разложения

$$G(p) = 4r^2Cp+1; \quad h(p) = r(4r^2Cp+5r); \quad H^{-1}(p) = 8r^2Cp+5r.$$

Операторный метод основан на использовании понятия об изобразительной функции времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой переменной, обозначаемой буквой «р», и наоборот, функции переменной р отвечает определенная функция времени.

3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Введение к операторному методу

- 19) Какие Вы знаете разновидности переходных процессов?
- 20) Можно ли рассчитать переходный процесс типа коммутации методом интеграла Дюамеля?

- 11) Какой переходный процесс позволяет рассчитать метод интеграла Дюамеля?
- 12) В чем заключается вывод формулы Дюамеля?
- 13) Запишите формулу интеграла Дюамеля.
- 14) В каком случае нельзя пользоваться формулой Дюамеля?
- 15) Какие Вы знаете формы записи интеграла Дюамеля?
- 16) Чем отличается переходная функция от переходной проводимости?
- 17) Как рассчитать переходную функцию для электрической цепи?
- 18) Как рассчитать переходную проводимость для электрической цепи?
- 19) Какие Вы знаете разновидности переходных процессов?
- 20) Можно ли рассчитать переходный процесс типа коммутации методом интеграла Дюамеля?
- 8) Что такое воздействие и как оно представляется в методе интеграла Дюамеля?
- 9) Что такое отклик цепи на воздействие?
- 10) Как рассчитать переходный процесс, если формула воздействия не поддается интегрированию?
- 11) Какой переходный процесс позволяет рассчитать метод интеграла Дюамеля?
- 12) В чем заключается вывод формулы Дюамеля?
- 13) Запишите формулу интеграла Дюамеля.
- 14) В каком случае нельзя пользоваться формулой Дюамеля?
- 15) Какие Вы знаете формы записи интеграла Дюамеля?
- 16) Чем отличается переходная функция от переходной проводимости?
- 17) Как рассчитать переходную функцию для электрической цепи?
- 18) Как рассчитать переходную проводимость для электрической цепи?

2.5. Вопросы для самопроверки

- 1) Что такое переходная функция?
- 2) Что лежит в основе метода интеграла Дюамеля?
- 3) Какой вывод можно сделать из формулы интеграла Дюамеля?
- 4) Как использовать метод наложения для расчета переходных процессов?
- 5) Как определить переходную функцию для электрической цепи? Как определить переходную проводимость для электрической цепи? Для этого нужно сделать?
- 6) Как рассчитать переходный процесс методом интеграла Дюамеля? Опишите порядок расчета.
- 7) Как связаны между собой классический метод и метод интеграла Дюамеля?
- 8) Что такое воздействие и как оно представляется в методе интеграла Дюамеля?
- 9) Что такое отклик цепи на воздействие?
- 10) Как рассчитать переходный процесс, если формула воздействия не поддается интегрированию?
- 11) Какой переходный процесс позволяет рассчитать метод интеграла Дюамеля?
- 12) В чем заключается вывод формулы Дюамеля?
- 13) Запишите формулу интеграла Дюамеля.
- 14) В каком случае нельзя пользоваться формулой Дюамеля?
- 15) Какие Вы знаете формы записи интеграла Дюамеля?
- 16) Чем отличается переходная функция от переходной проводимости?
- 17) Как рассчитать переходную функцию для электрической цепи?
- 18) Как рассчитать переходную проводимость для электрической цепи?

- 7) Сформулируйте закон коммутации на индуктивности для корректной и некорректной коммутаций.
- 8) Сформулируйте закон коммутации на емкости для корректной и некорректной коммутаций.
- 9) Что такое характеристическое уравнение? Что определяется из этого уравнения?
- 10) Что такое постоянная интегрирования? Как она определяется в расчетах переходных процессов?
- 11) Опишите порядок расчета переходного процесса классическим методом.
- 12) Как можно определить корни характеристического уравнения?
- 13) Что значит «начальные условия независимые»? Что значит «начальные условия зависимые»?
- 14) Что такое свободная составляющая переходного процесса? Что такое принужденная составляющая переходного процесса?
- 15) Как рассчитать переходный процесс в электрической цепи классическим методом без составления дифференциальных уравнений?
- 16) В чем заключается физический смысл законов коммутаций?
- 17) Объясните причину искрения контактов при их размыкании.
- 18) Назовите физический смысл постоянной времени электрической цепи.
- 19) Чем отличаются апериодический и колебательный переходные процессы в электрической цепи?
- 20) Когда могут возникнуть колебания напряжений и токов в электрической цепи?
- 21) Почему возникающие в переходных режимах работы электрических цепей колебания напряжений и токов являются затухающими?
- 22) Чем определяется начальный бросок тока при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения?
- 23) Опишите переходный процесс включения rL -цепи на постоянное напряжение.
- 24) Опишите переходный процесс отключения rL -цепи от постоянного напряжения с закорачиванием на r_0 .
- 25) Опишите переходный процесс включения rC -цепи на постоянное напряжение.
- 26) Опишите переходный процесс отключения rC -цепи от постоянного напряжения с закорачиванием на r_0 .
- 27) Как рассчитывается переходный процесс при некорректной коммутации?
- 28) Почему переходные процессы в электрических цепях имеют затухающий характер?

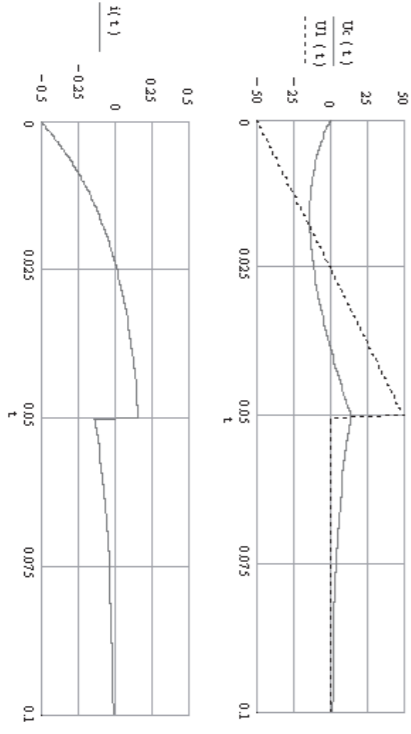


Рис. 2.18

Кривые тока в цепи и напряжения на емкости приведены на рис. 2.18.

$$u_{C1}(t) = 0 + 0,72 \cdot 100 e^{-50t} + 0,08 \cdot 100 e^{-50(t-T)} = 72 e^{-50t} + 8 e^{-50(t-T)}$$

$$u_{C2}(t) = 0 + 0,72 \cdot 100 e^{-50t} + 0,08 \cdot 100 e^{-50(t-T)} = 72 e^{-50t} + 8 e^{-50(t-T)}$$

$$u_{C1}(T) = 72 e^{-50T} + 8; \quad u_{C2}(T) = 80 - 72 + 72 e^{-50T} = 72 e^{-50T} + 8, \text{ то значения } u_{C1}(T) \text{ и } u_{C2}(T) \text{ равны друг другу.}$$

$$= -72 + 1600 t + 72 e^{-50t} = 1600 t - 72 \cdot (1 - e^{-50t})$$

$$u_{C1}(t) = -U_m + kt - i(t) \cdot r;$$

На первом интервале

$$U_c(t) = U(t) - i(t) \cdot r.$$

Напряжение на емкости

$$i(t) = -0,72 e^{-50t} - 0,08 e^{-50(t-T)}.$$

Окончательно для тока на втором интервале имеем формулу

$$= -0,1 \cdot 0,4 e^{-50t} + 4T + 0,32 e^{-50t} - 50 \int_0^t 0,002 + 0,008 e^{-50(t-T)} dt =$$

$$= -0,1 - 0,4 e^{-50t} + 0,2 + 0,32 e^{-50(t-T)} - 0,32 e^{-50t} - 0,1 - 0,4 e^{-50(t-T)}.$$

Корни знаменателя дроби

$$P_1 = 0; \quad P_2 = -\frac{5r}{C_2 r^2 + 4r}$$

Подстановка корней в $(p)H$ и $(p)G$:

$$4 - = 1 + \frac{5}{4} C_2 r^2 + = (p_2) G; \quad 005 = r_5 = (p_1) H; \quad 1; \quad (=1) G$$

$$500 - = r_5 - = 5r + r_0 1 - = 5r + (\frac{5}{4rC}) C^2 - 8r^2 = (p_2) H^{-1}$$

Ток в цепи будет численно равен переходной проводимости

$$i(t) = \frac{1}{500} e^{-50t} + \frac{1}{4} e^{-50(t-T)} = (t) u(t)$$

Рассчитываем далее ток в цепи при воздействии на входе напряжения $u(t)$.

На первом интервале: $T \leq t \leq \infty$

$$U_m - U = (t) u; \quad 05 - = - = (0) u; \quad \frac{2U_m}{T} = 2000; \quad B/c;$$

$$u_1^1(t) = k; \quad u_2^1(t) = 0; \quad B/c.$$

Подставляем полученные значения в формулу интеграла Дюамеля:

$$i(t) = \int_0^t u(x) \cdot (x) u_1^1(x) dx + \int_0^t u(x) \cdot (0) u_2^1(x) dx$$

$$= -50(0,002 + 0,008 e^{-50t} + 200 \int_0^t [0,0002 + 0,008 e^{-50(x-T)}] u_1^1(x) dx + 0,008 e^{-50t} + 4t + 0,4e^{-50t} - 0,1 - 0,4e^{-50(t-T)} - 1) =$$

Окончательное выражение тока на первом интервале

$$i(t) = 0,22 - 0,72 e^{-50t} + 4t$$

На втором интервале $T \leq t \leq \infty$

$$u_2^2(t) = -U_m = -50; \quad u_1^2(t) = 0;$$

$$i(t) = u_1^1(0) \cdot \int_0^T u(t) u_1^1(x) dx + u_2^2(0) \cdot \int_0^T u(t-T) dx + u_2^2(0) \cdot \int_0^T u(t-T) dx$$

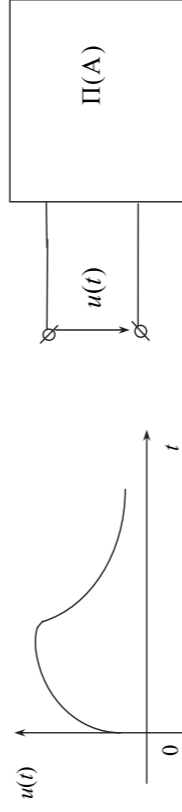


Рис. 2.1

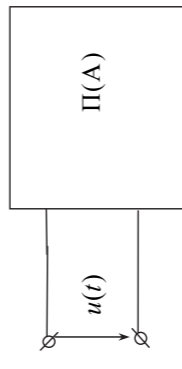


Рис. 2.2

Пусть к источнику изменяющегося напряжения любой формы, например, $u(t)$ (рис. 2.1) подключается произвольный пассивный или активный линейный двухполюсник (рис. 2.2).

Требуется найти ток или напряжение в любой ветви двухполюсника после начала этого воздействия.

В основу метода заложен принцип наложения. В соответствии с этим принципом заданное воздействие представляется ломаной прямой, как это показано на рис. 2.3. В любой промежуток времени Δt_k функция воздействия получает приращение Δu_k . Таким образом, заданное воздействие можно заменить совокупностью коммутаций, сдвинутых во времени, а чем меньше Δt_k , тем ближе ломаная прямая к заданному воздействию.

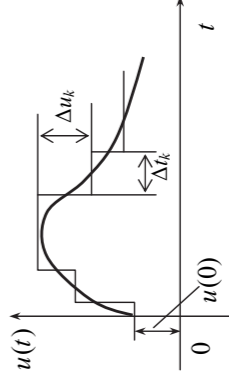


Рис. 2.3

2.1. Переходная функция

Сначала найдем искомую величину при включении пассивного (активного) двухполюсника (рис. 2.4) на единичное напряжение (т.е. когда включаемое напряжение постоянно и по величине равно единице). Пусть искомые величины ток или напряжение. Ток $i_k(t)$ или напряжение $u_k(t)$ могут быть выражены так:

$$i_k(t) = 1 \cdot g_k(t) = g_k(t); \quad u_k(t) = 1 \cdot h_k(t) = h_k(t).$$

$$i(t) = u(0) \cdot g_k(t) + \int_0^t g_k(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = u(0) \cdot g_k(t) + \int_0^t g_k(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau;$$

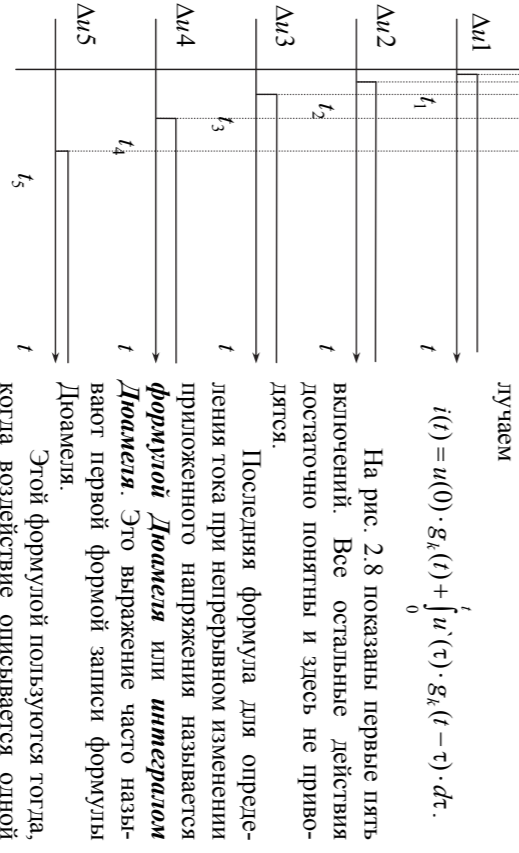
$$i(t) = u(0) \cdot g_k(t) + \int_0^t g_k(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = u(0) \cdot g_k(t) + \int_0^t g_k(\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau;$$

Кроме этих формул благодаря различным математическим действиям можно получить ряд других форм записи интеграла Дюамеля:

$$i(t) = u(0) \cdot g_k(t) + \sum u(\tau) \cdot g_k(t - \tau) \cdot \Delta\tau.$$

аналитическому описанию, то вместо интеграла пользуются **суммой Дюамеля**:

Рис. 2.8



Элементарные скачки напряжения включаются на интервале времени от $t=0$ до момента t , для которого определяется искомым ток. Поэтому, суммируя составляющие тока от всех скачков, переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$ и учитывая составляющую тока от начального скачка напряжения $u(0)$, получаем

$$i(t) = u(0) \cdot g_k(t) + \int_0^t u(\tau) \cdot g_k(t - \tau) \cdot d\tau.$$

На рис. 2.8 показаны первые пять включений. Все остальные действия достаточно понятны и здесь не приводятся.

Последняя формула для определения тока при непрерывном изменении приложенного напряжения называется **формулой Дюамеля** или **интегралом Дюамеля**. Это выражение часто называют первой формой формулы Дюамеля.

Этой формулой пользуются тогда, когда воздействие описывается одной или несколькими функциями.

Если же воздействие не поддается

тогда

$$u(t) = \frac{U_0}{t} \cdot t,$$

$$U(0) = 0; \quad U(t_1) = U_0; \quad U(\tau) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \tau; \quad U(\tau) = \frac{U_0}{t_1}.$$

Найдем функцию напряжения

$$g(t - \tau) = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t - \tau)}\right).$$

$$g(t) = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right); \quad g(t - t_1) = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t - t_1)}\right);$$

тогда

$$g(t) = \frac{1}{r} \cdot (1 - e^{-pt}), \quad h(t) = e^{pt},$$

Требуется найти функцию тока $i(t)$.

Воспользуемся рассмотренным материалом и запишем переходную проводимость и переходную функцию для данной цепи

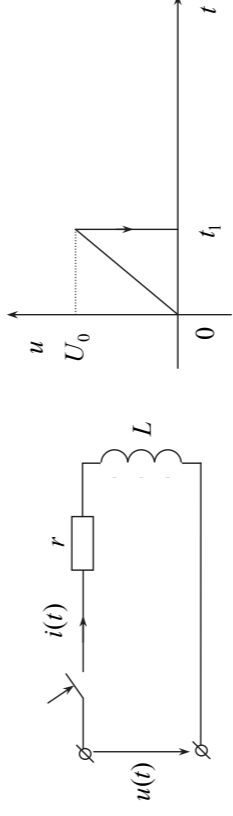


Рис. 2.10

Рис. 2.9

Приведем пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля. Пусть дана схема электрической цепи (рис. 2.9) и задана форма напряжения (рис. 2.10).

2.3. Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля

Пусть или иную форму записи выбирают руководствуясь удобством и простотой вычислений.

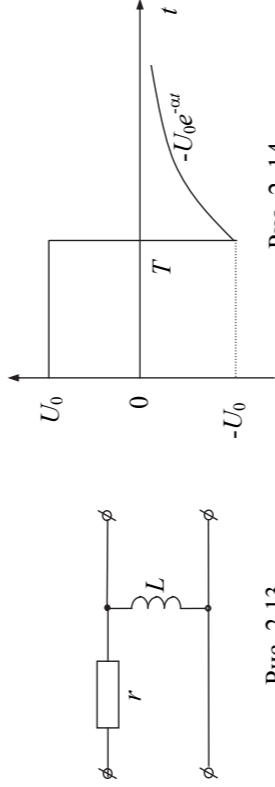


Рис. 2.14

Рис. 2.13

Решение

Для цепи r, L переходная проводимость записывается в виде

$$Y(t) = \frac{1}{r} \cdot (1 - e^{-\frac{r}{L}t}).$$

Расчет тока ведем по интервалам. На первом из них $0 \leq t \leq T$

$$u(0) = U_0; \quad u(t) = U_0;$$

Поэтому из общей формулы интеграла Дюамеля

$$i(t) = u(0) \cdot Y(t) + \int_0^t u(\tau) \cdot Y(t - \tau) \cdot d\tau$$

$$i(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

На втором интервале $T \leq t < \infty$

$$u(T) = 2U_0; \quad u(t) = -U_0 e^{-\alpha t}; \quad u'(t) = \alpha U_0 e^{-\alpha t}; \quad u'(x) = \alpha U_0 e^{-\alpha x}.$$

Интеграл Дюамеля, с учётом тока на предыдущем интервале примет

$$i(t) = \frac{U_0}{r} \cdot (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) - 2U_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-T)}\right) + \int_T^t \alpha U_0 e^{-\alpha x} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}(t-x)}\right) dx =$$

$$= -\frac{U_0}{r} + \frac{U_0}{r} e^{\frac{r}{L}t} + \frac{2U_0}{r} e^{-\frac{r}{L}(t-T)} + \alpha U_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{r}{L}(t-x)}}{\frac{r}{L}} \right]_T^t =$$

вид

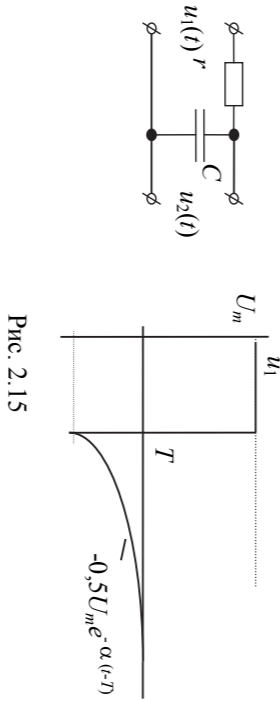


Рис. 2.15

Решение

Определяем переходную функцию цепи по напряжению $h(t)$. Для этого необходимо рассчитать переходный процесс при включении цепи на постоянное напряжение $U_0 = 1$ В.

Входное сопротивление цепи равно

$$Z(p) = r + \frac{1}{Cp} = \frac{rCp + 1}{Cp}.$$

Приравниваем $Z(p)$ к нулю, получаем характеристическое уравнение и корни:

$$rCp + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{rC} = -10 \text{ с}^{-1}.$$

Напряжение $u_C(t) = U_{Cnp} + A e^{pt}$.

При $t \rightarrow \infty$: $U_{Cnp} = 1$, а при $t = 0_+$: $U_C(0_+) = 1 + A$. Так как $U_C(0) = 0$, то $A = -1$ и

$$u_C(t) = u_2(t) = h(t) = 1 - e^{-pt} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = \frac{1}{p} = 0,1$ – постоянная времени, с.

$$F(p) = \int_0^{\infty} U_0 e^{-pt} dt = \frac{U_0}{-p} \cdot (0 - 1) = \frac{U_0}{p}.$$

Вычислим интеграл Лапласа

Пусть оригинал является постоянной величиной: $f(t) = U_0 = \text{const}$.

Вычислим интеграл Лапласа

Изображение по Лапласу оригинала в виде постоянной во времени величины.

3.2. Изображения по Лапласу основных электрических величин, используемых при расчетах переходных процессов

Изображение по Лапласу оригинала в виде постоянной во времени величины.

Пусть оригинал является постоянной величиной: $f(t) = U_0 = \text{const}$.

Вычислим интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Если есть оригинал $f(t)$, от которого можно взять интеграл Лапласа, то ему соответствует изображение $F(p)$. При этом говорят, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

В общем случае обратное преобразование осуществляют с помощью интеграла Бромвича. В электрических задачах этим интегралом не пользуются, а применяют **теорему разложения** или **интеграл свертки**.

Оригинал – это любая функция или параметр цепи в области времени.

Изображение – это преобразованный оригинал с помощью интеграла Лапласа.

Оператор Лапласа (p) в общем случае может быть комплексным числом.

Интеграл прямого преобразования Лапласа имеет вид

$$M \cdot (p) = (r_1 r_2 C p + r_1 + r_2) + r_1 r_2 C (p - j\omega).$$

Производная знаменателя по p равна

$$P_1 = j\omega; \quad P_2 = -\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}.$$

Из условия $M(p) = 0$ находим корни

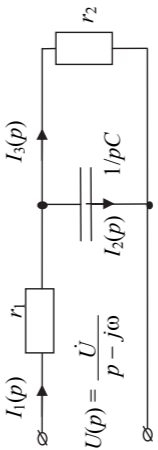
$$\frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p)}{Z(p)}$$

Операторный ток источника равен

$$Z(p) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_2} \frac{pC}{pC} = \frac{r_2 + r_1 + r_1 r_2 C p}{r_1 + r_2}.$$

Найдём операторное сопротивление $Z(p)$

Рис. 3.11



Составим операторную схему замещения (рис. 3.11).

$$F(p) = \int_0^{\infty} \dot{U} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} \dot{U} e^{-p t} dt = \frac{\dot{U}}{p - j\omega}.$$

Тогда его изображение равно

$$\dot{U} e^{j\omega t} = u(t).$$

напряжение источника.

Комплексное напряжение \dot{U} после домножения на $e^{j\omega t}$ становится

$$\dot{U} e^{j\omega t} = u(t).$$

что мы и получили.

Подвергнем операторное преобразование уравнения Лапласа

Имеем

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + U_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t).$$

Каждое из слагаемых заменим операторным изображением:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} \rightarrow L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0); \quad M \frac{di_2}{dt} \rightarrow M p I_2(p) - M i_2(0);$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt \rightarrow \frac{I_3(p)}{C p}; \quad i_2 R_2 \rightarrow R_2 I_2(p);$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} \rightarrow L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0); \quad M \frac{di_1}{dt} \rightarrow M p I_1(p) - M i_1(0);$$

$$e_1(t) \rightarrow E_1(p); \quad e_3(t) \rightarrow E_3(p).$$

После суммирования изображений объединим слагаемые с операторными токами $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$. Перенесем $U_c(0)/p$, $L i_1(0)$ и другие внутренние ЭДС в правую часть уравнения. Получим

$$I_1(p) Z_1(p) + I_2(p) Z_2(p) + I_3(p) Z_3(p) = E_1(p) - E_3(p) + E_{\text{вн}}(p).$$

Здесь

$$Z_1(p) = p(L_1 - M);$$

$$Z_2(p) = p(M - L_2) - R_2;$$

$$Z_3(p) = \frac{1}{C p};$$

$$E_{\text{вн}}(p) = (L_1 - M) i_1(0) + (M - L_2) i_2(0) - \frac{U_c(0)}{p}.$$

В общем виде уравнение второго закона Кирхгофа можно переписать так:

$$\sum I_k(p) Z_k(p) = \sum E_k(p).$$

Это уравнение представляет собой математическую запись второго закона Кирхгофа в операторной форме. В состав $E_k(p)$ в общем случае входят и фиктивные источники начальных условий.

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$f(t)$	$F(p)$	$L \frac{d}{dt}$	$LpI(p) - Li(0_-)$
$i(t)$	$I(p)$	$\int f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$
U_0	$\frac{U_0}{p}$	$\frac{1}{C} \int_0^t i dt$	$\frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_c(0_-)}{p}$
$\frac{d}{dt} f(t)$	$pF(p) - f(0)$	$E_m \sin \omega t$	$\frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 I(p) - pi(0_-) - i'(0_-)$	$\dot{U} e^{j\omega t}$	$\dot{U} \frac{1}{p - j\omega}$

Таблица 3.1

3.3. Включение rL-цепи на постоянное напряжение

Дано: нагрузка r, L , напряжение U_0 , в цепи (рис. 3.1) ключ замыкается. Определить операторный ток $I(p)$ и мгновенный ток $i(t)$.

Решение

Решение начнем с начальных условий. Ток индуктивности до замыкания ключа равен нулю: $i(0_-) = 0$

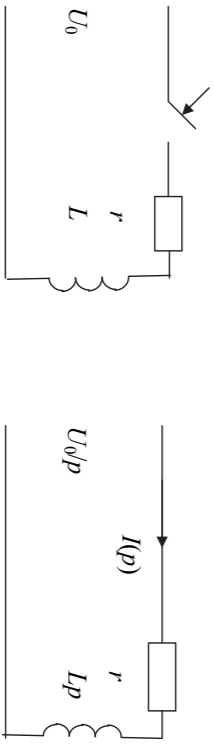


Рис. 3.1

Рис. 3.2

Составляем операторную схему замещения электрической цепи (рис. 3.2). Ключ замкнут, источник работает на rL -цепь. Дифференциальное уравнение

$$U_0 = iR + L \frac{di}{dt}$$

заменяем операторным:

$$\frac{U_0}{p} = RI(p) + LpI(p) - i(0_-)L.$$

$$A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}.$$

По аналогии для A_k получим

$$\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p)}{M(p)} (p - p_1) = A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p) + N'(p - p_1)}{M'(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)},$$

где $M'(p) = \frac{d}{dp} M(p)$.

Постоянную интегрирования A_1 можно определить из условия устремления p к p_1 . Тогда в правой части вместо суммы останется A_1 , которую можно определить пределом

$$I(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m},$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ – корни уравнения $M(p) = 0$; $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_m$ – постоянные интегрирования.

Если в операторной области решение можно представить в виде отношения двух рациональных дробей, причём (n и m – степени) и если ввести краткое обозначение этих дробей $N(p)$ и $M(p)$, то это отношение дробей можно представить в виде

$$I(p) = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Воспользуемся операторным током и запишем его решение в виде дроби:

3.4. Теорема разложения

Остатось вернуться из области изображений в область оригинала. Возвращение во временную область осуществляется по теореме разложения или с помощью интеграла Бромвича, если задача не электрическая. Дорешаем эту задачу после рассмотрения теоремы разложения.

$$Z(p) = R + pL.$$

В знаменателе операторного тока выражение в скобках называют операторным сопротивлением:

$$I(p) = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{p(R + pL)}.$$

Решаем это уравнение и находим операторный ток

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + Li(0_-) - \frac{u_c(0_-)}{p} + E(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p) = R + pL + 1/pC$ представляет собой операторное сопротивление участка цепи между точками a и b . Структура его аналогична структуре комплексного сопротивления того же участка цепи переменного тока, если $j\omega$ заменить на p .

Комплексное число $p = a + jb$ запишем в виде

$$p = j(b - ja) = j\Omega,$$

где $\Omega = b - ja$ – комплексная частота.

Воздействие $\dot{U} e^{j\Omega t} = \dot{U} e^{pt}$ рассматриваемой цепи определяет сопротивление $Z(p) = Z(j\Omega)$, подобно тому, как воздействие $\dot{U} e^{j\omega t}$ определяет сопротивление $Z(j\omega)$.

Слагаемое $Li(0_-)$ представляет собой фиктивный операторный источник начальных условий, обусловленный запасом энергии в магнитном поле индуктивности L вследствие протекания через нее тока $i(0_-)$ непосредственно до коммутации.

Слагаемое $\frac{u_c(0_-)}{p}$ представляет собой фиктивный операторный источник начальных условий, обусловленный запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия напряжения на нем $u_c(0_-)$ непосредственно до коммутации.

Операторная схема замещения участка цепи (см. рис. 3.5) приведена на рис. 3.6.

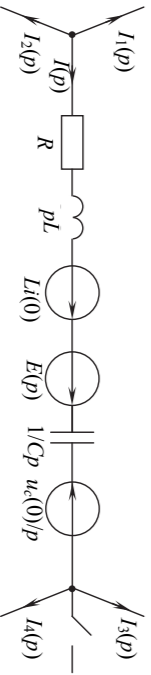


Рис. 3.6

В частном случае, когда на участке ab отсутствует ЭДС $e(t)$ и к моменту коммутации $i(0_-) = 0$ и $u_c(0_-) = 0$, операторный ток имеет более простой вид

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p)}{Z(p)}.$$

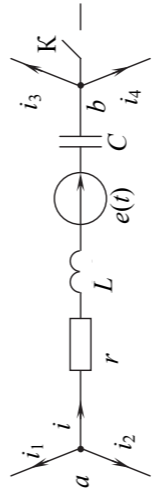


Рис. 3.5

Замыкание ключа К в цепи приводит к переходному процессу.

До коммутации ток был равен $i(0_-)$ и напряжение на конденсаторе было равно $u_c(0_-)$.

Выразим потенциал точки a и b через потенциал точки c для послекоммутационного режима:

$$\varphi_a = \varphi_c + u_r + u_c = \varphi_c + u_r + u_c + u_c = \varphi_c + u_r + 2u_c = \varphi_c + u_r + e(t);$$

Вместо запишем $L \frac{di}{dt}$, вместо запишем $\frac{1}{C} \int i dt$, тогда

$$u_{ab} = ir + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

К полученному уравнению применим преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа является линейным, поэтому изображение суммы равно сумме изображений.

Каждое слагаемое уравнения заменим операторным изображением: вместо ir запишем $rI(p)$; вместо u_{ab} запишем $U_{ab}(p)$;

$$L \frac{di}{dt} \rightarrow Li(p); \quad \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \frac{1}{Cp} \left(\frac{u_c(0_-)}{p} + u_c \right);$$

$$\frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \frac{I(p)}{Cp}.$$

Получим

$$U_{ab}(p) = I(p)(r + pL + \frac{1}{pC}) + \frac{u_c(0_-)}{p} - E(p).$$

Смысл проведенного преобразования состоит в том, что вместо дифференциального уравнения получили алгебраическое уравнение, связывающее изображение тока $I(p)$ с изображением ЭДС $E(p)$ и изображением напряжения $U_{ab}(p)$. Отсюда следует

$$i(t) = \sum N'(p_k) e^{p_k t} = \frac{20}{20} + \frac{20}{20} e^{-40t} = 1 + e^{-40t}.$$

Отсюда ток равен

$$M(p_2) = 20 - 20 = 0;$$

$$N'(p_2) = -40 - 20 = -60;$$

$$M(p_1) = 20;$$

$$N'(p_1) = 20;$$

Подставляем значения корней в $M(p)$ и $N'(p)$:

$$N'(p) = 1p + 20.$$

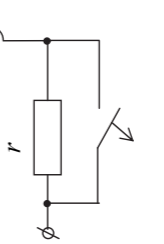
Производная знаменателя

$$p(20 + 0,5p) = 0; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = -40.$$

Корни знаменателя определяем, приравнявая $N(p)$ к нулю:

дроби $M(p)$, а знаменатель $-N(p)$.

Рис. 3.12

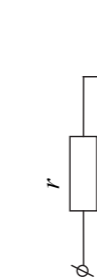


Для перехода к оригиналу тока используем теорему разложения. Обозначим числитель дроби $M(p)$, а знаменатель $-N(p)$.

После подстановки числовых данных имеем $i(0_-) = U_0 / 20 = U / 20 = r / 20 = 0,5p / r$.
 В этом уравнении $i(0_-) = U / 20 = r / 20 = 0,5p / r$.

$$I(p) = U / (20 + 0,5p) = U / (20 + 0,5p)$$

Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа для операторных изображений тока и напряжений:



Задача 3.1. Рассчитать ток в цепи (рис. 3.12) операторным методом после замыкания ключа, если $U_0 = 20$ В; $r = 10$ Ом; $L = 0,5$ Гн.

3.11. Практическое приложение

По теореме разложения напряжения найдём оригинал этого тока.

$$i(t) = \text{Im} \left(\frac{N(p_1)}{M} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M} e^{p_2 t} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{20} e^{0t} + \frac{0,5}{20 + 0,5p} e^{-40t} \right)$$

Напряжение на конденсаторе, которое необходимо найти по условию задачи:

$$u_c(t) = i_2(t) \cdot r_2 = 50 + 122,4e^{-1000t} \cos(707t + 35,27^\circ).$$

Для расчёта кривой $u_c(t)$ (рис. 3.14) удобнее градусы перевести в радианы и записать формулу в виде

$$u_c(t) = i_2(t) \cdot r_2 = 50 + 122,4e^{-1000t} \cos(707t + 0,563).$$

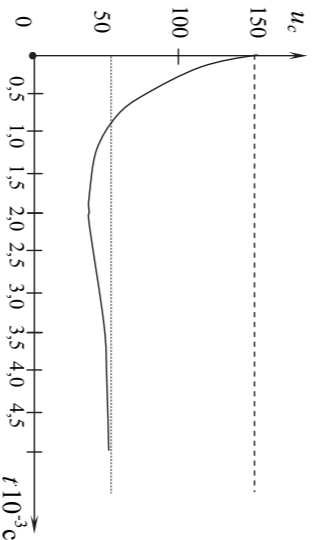


Рис. 3.14

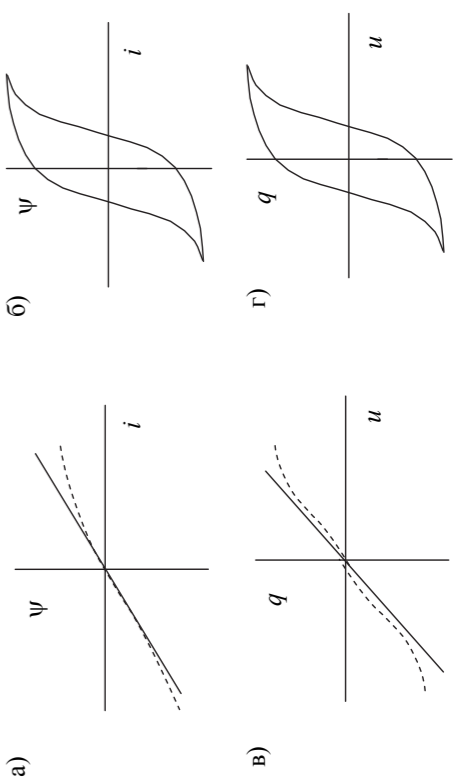
Сведем значения $u_c(t)$ в табл. 3.2.

u_c , В	$t \cdot 10^{-3}$, с	u_c , В	$t \cdot 10^{-3}$, с
150,0	0,0	43,1	2,5
95,1	0,5	44,5	3,0
63,3	1,0	46,3	3,5
48,6	1,5	47,8	4,0
43,5	2,0		

Таблица 3.2

Примечание. Хотя, судя по формуле $u_c(t)$, переходный процесс должен иметь колебательный характер, однако на графике колебаний не замечено, что объясняется значительным по величине коэффициентом затухания (-1000) по сравнению с частотой колебаний (707). При этом оказывается, что время переходного процесса $t_n \approx 4t = \frac{4}{1000} = 4 \cdot 10^{-3}$ с меньше периода колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{707} = 8,89 \cdot 10^{-3}$ с.

Рис. 4.7



Нелинейные индуктивные элементы характеризуются зависимостью тока от напряжения. Существует несколько типов нелинейных индуктивных элементов: **индуктивный диод**, **индуктивный варистор**, **индуктивный конденсатор**. Если $i = L \cdot \frac{d\phi}{dt}$, то $\phi = \frac{1}{L} \int i dt$. Если $\phi = \mu \cdot H \cdot l$, то $i = \frac{1}{L} \int \mu \cdot H \cdot l dt$. Если μ зависит от H , то зависимость i от ϕ будет нелинейной.

Управляющий ток тиристора можно увеличить или уменьшить, управляющий ток тиристора можно увеличить или уменьшить, управляющий ток тиристора можно увеличить или уменьшить.

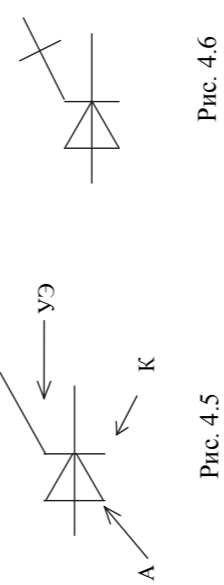


Рис. 4.4

Рис. 4.5

Существует несколько типов нелинейных индуктивных элементов: **индуктивный диод**, **индуктивный варистор**, **индуктивный конденсатор**. Если $i = L \cdot \frac{d\phi}{dt}$, то $\phi = \frac{1}{L} \int i dt$. Если $\phi = \mu \cdot H \cdot l$, то $i = \frac{1}{L} \int \mu \cdot H \cdot l dt$. Если μ зависит от H , то зависимость i от ϕ будет нелинейной.

$$G(p_3) = 24 \cdot 10^{-6} \cdot 2,25 \cdot 10^{-6} - 118,8 + 60 = -4,8;$$

$$H^1(p_3) = 12 \cdot 10^{-5} \cdot 2,25 \cdot 10^{-6} - 300 + 60 = 30.$$

Отсюда

$$i_2(t) = \frac{60}{60} e^{-\frac{4,8}{30} t} = e^{-0,16 t}$$

$$i_2(t) = 1 - 0,24 e^{-1000t} - 0,16 e^{-1500t}.$$

Окончательно для тока $i_2(t)$ можно записать

Напряжение $U_C(t)$ можно выразить через $i_2(t)$ следующим образом:

$$U_C(t) = i_2(t) \cdot r_2 + L \frac{di_2}{dt} = 40 - 9,6e^{-1000t} - 6,4e^{-1500t} + 24e^{-1000t} + 24e^{-1500t} = 40 - 9,6e^{-1000t} - 6,4e^{-1500t} + 24e^{-1000t} + 24e^{-1500t} = 40 + 14,4e^{-1000t} + 17,6e^{-1500t}.$$

На рис. 3.22 показаны кривые $U_C(t)$ и $i_2(t)$.

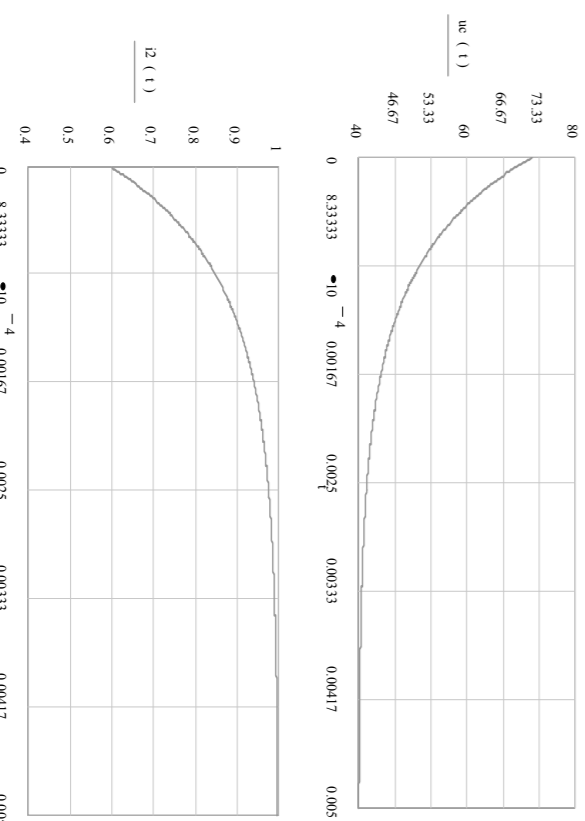


Рис. 3.22

$$i_3(t) = 1 + 2,448e^{-1000t} \cos(707t + 35,27^\circ).$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}}{2};$$

Последнее выражение можно преобразовать, используя формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} &= 1 + 1,224e^{-1000t} e^{j(707t + 35,27^\circ)} + 1,224e^{-1000t} e^{-j(707t + 35,27^\circ)}. \\ &= 1 + 1,224e^{-1000t} e^{j125,27^\circ} e^{j707t} + 1,224e^{-1000t} e^{-j125,27^\circ} e^{-j707t} = \\ &= 1 + \frac{212e^{j125,27^\circ}}{173,2} e^{j125,27^\circ} e^{j707t} + \frac{212e^{-j125,27^\circ}}{173,2} e^{-j125,27^\circ} e^{-j707t} + \end{aligned}$$

$$i_3(t) = \sum \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} = 1 + \frac{212e^{-j90^\circ}}{173,2} e^{(-1000 + j707)t} +$$

Ток $i_3(t)$ по теореме разложения будет равен

$$N'(p_3) = 3 \cdot 10^{-4}(-1000 - j707)^2 + 0,4(-1000 - j707) + 150 = -100 - 100 + j141,4,$$

$$M(p_3) = 0,3 \cdot 10^{-4}(-1000 - j707)^2 + 0,3(-1000 - j707) + 150 = 212,7;$$

$$N'(p_2) = 3 \cdot 10^{-4}(-1000 + j707)^2 + 0,4(-1000 + j707) + 150 = -100 - 100 - j141,4,$$

$$M(p_2) = 0,3 \cdot 10^{-4}(-1000 + j707)^2 + 0,3(-1000 + j707) + 150 = -212,7;$$

$$M(p_1) = M(0) = 150; \quad N'(p_1) = N'(0) = 150;$$

Подставляем корни в $M(p)$ и $N'(p)$:

$$N'(p) = 3 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,4p + 150.$$

Производная знаменателя равна

$$p_{2,3} = -10^3 \pm 1,5 \cdot 10^6 \sqrt{(10^3)^2 \pm 1,5 \cdot 10^6}.$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0,3 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,4p + 150 = 0; \quad p^2 + 10^4 p + 150 \cdot 10^4 = 0;$$

Находим корни знаменателя

$$M(p) = 0,3 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,3p + 150; \quad N(p) = p(10^4 p^2 + 0,2p + 150).$$

Оригинал тока $i_3(t)$ определяем по теореме разложения. Обозначим

$$= \frac{[50 + d + 10^4] p^2 + 10^4 d p + 150 \cdot 10^4}{p[10^4 p^2 + 0,2p + 150]}.$$

Задача 3.2. Рассчитать напряжение на конденсаторе (рис. 3.13) при замыкании ключа. Дано: $r_1 = 100 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 20 \text{ мкФ}$; $r_2 = 50 \text{ Ом}$; $U_0 = 150 \text{ В}$. Задачу решить операторным методом.

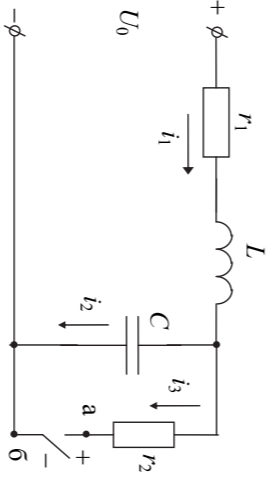


Рис. 3.13

Решение

В данном случае удобнее всего привести начальные условия к нулевым. С этой целью определим напряжение на разомкнутом ключе.

Это напряжение будет равно $U_0'(0)$, то есть

$$u_{06} = u_0'(0) = 150 \text{ В}.$$

Находим операторное сопротивление цепи относительно зажимов а – б (источник при этом закорачивается):

$$\begin{aligned} Z_{06}(p) &= r_2 + \frac{(r_1 + Lp)/Cr + r_2 Lp + r_2 / Cr + r_1 / Cr + L/C}{r_1 + Lp + 1/Cr} = \\ &= \frac{r_1 L C p^2 + (r_1 r_2 C p + L) p + r_1 + r_2}{L C p^2 + r_1 C p + 1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что операторное изображение напряжения на разомкнутом ключе равно

$$U_{06}(p) = U_0 / p,$$

записываем выражение для тока $i_3(p)$

$$i_3(p) = \frac{U_{06}(p)}{Z_{06}(p)} = \frac{U_0(LCp^2 + r_1Cr + 1)}{p[r_2LCp^2 + (r_1r_2C + L)p + r_1 + r_2]}.$$

Подставим численные значения, получим

$$i_3(p) = \frac{150(0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6} p^2 + 100 \cdot 20 \cdot 10^{-6} p + 1)}{p[50 \cdot 0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6} p^2 + (100 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6} + 0,1)p + 100 + 50]} =$$

ного элемента.

25) Запишите формулу фиктивного операторного источника емкост-

тивного элемента.

24) Запишите формулу фиктивного операторного источника индук-

тивного элемента?

23) Как включается фиктивный операторный источник емкостного

элемента?

22) Как включается фиктивный операторный источник индуктивного

элемента?

19) В чем заключается разложение изображений на простые состав-

ляющие?

18) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

17) В чем заключается расчет переходных процессов операторным

методом?

16) Запишите второй закон Кирхгофа в операторной форме.

15) Как записывается первый закон Кирхгофа в операторной форме?

14) Запишите закон Ома в операторной форме.

13) Получите изображение Laplace основных переходных процессов

величин, используемых в расчетах переходных процессов.

12) На чем основан операторный метод?

11) Получите изображение Laplace элементов цепи.

10) Что такое теорема разложения? Сделайте вывод ее формулы.

9) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

8) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

7) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

6) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

5) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

4) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

3) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

2) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

действии в цепи синусоидальных источников?

1) Как рассчитать переходные процессы операторным методом при

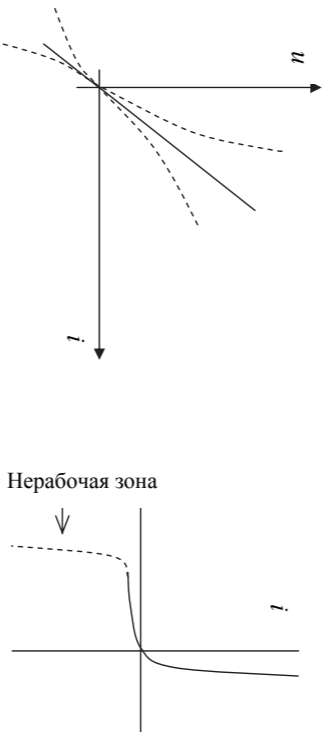


Рис. 4.1

Рис. 4.2

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

4.1. Основные понятия и определения

Цепь называют **нелинейной**, если хотя бы один из ее элементов обладает нелинейной характеристикой.

Активные нелинейные сопротивления характеризуются **вольтамперной характеристикстикой** (рис. 4.1).

Характеристики элементов могут быть симметричными и несимметричными. Они располагаются в первом и в третьем квадрантах. У нелинейных элементов их сопротивление зависит от напряжения $u(i)$ или от тока $u(i)$. Примером активного нелинейного сопротивления является полупроводниковый диод. Его вольтамперная характеристика (ВАХ) несимметрична (рис. 4.2) и содержит рабочую (сплошная линия) и нерабочую зоны (штриховая линия). На электрических схемах диод изображается, как показано на рис. 4.3. Он относится к управляемым элементам.

Примером управляемого активного нелинейного сопротивления является транзистор (рис. 4.4). Ток базы (Б) изменяют сопротивлением между эмиттером (Э) и коллектором (К).



Рис. 4.3

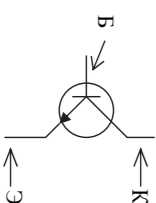


Рис. 4.4

$$Z(p) = r + \frac{1}{Cp} = 40 + \frac{1}{10^{-4} p}$$

Найдем операторное сопротивление цепи

Решение

Задача 3.5. Записать операторное выражение тока $I(p)$ (рис. 3.17),

если $U_0 = 120$ В; $r = 40$ Ом; $C = 100$ мкФ.

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{120}{p \left(40 + \frac{80(0,6p)}{80+0,6p} \right)}$$

Операторное выражение тока

$$U_0(p) = \frac{U_0}{p} = \frac{120}{p}$$

Источник в операторной области

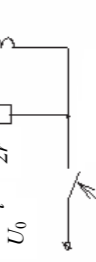


Рис. 3.16

Найдем операторное сопротивление цепи

$$Z(p) = r + \frac{2r(Lp)}{(2r + Lp)} = 40 + \frac{80(0,6p)}{(80 + 0,6p)}$$

Задача 3.4. Записать операторное выражение тока $I(p)$ (рис. 3.16),

если $U_0 = 120$ В; $r = 40$ Ом; $L = 0,6$ Гн.

Решение

$$U_c(p) = \frac{U_c(0_-)}{p} = \frac{25}{p}$$

Операторный источник начальных условий на конденсаторе

$$U_c(0_-) = \frac{U_0 r}{2r} = 25 \text{ В.}$$

При $t = 0_-$ найдем напряжение на конденсаторе:

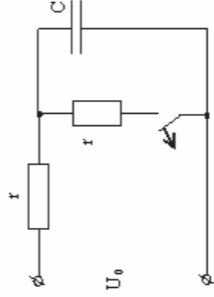


Рис. 3.15

Задача 3.3. Найти фиктивный оператор-

ный источник начальных условий на конденсаторе (рис. 3.15), если $U_0 = 50$ В; $r = 100$ Ом; $C = 100$ мкФ.

Для того чтобы колебания были выражены в кривой переходного процесса, необходимо, чтобы коэффициент затухания был в 2-3 раза меньше, чем угловая частота колебаний.

$$H^{-1}(p_3) = 3 \frac{r^2}{L^2} L - 2 \frac{r^2}{L} + \omega^2 L = \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{L} = \frac{Z^2}{L}$$

Подставляем полученные значения в формулу теоремы разложения:

$$i(t) = \frac{\omega U_m e^{-j\psi} e^{j\omega t}}{2j\omega Z e^{-j\psi}} - \frac{\omega U_m e^{-j\psi} e^{-j\omega t}}{2j\omega Z e^{-j\psi}} = \frac{L}{Z^2} [U_m \sin(\psi - \varphi) - Z i(0)] \cdot e^{-\frac{r}{L} t}$$

Преобразуем далее формулу для тока

$$i(t) = \frac{U_m}{2jZ} \left[e^{j(\omega t + \psi - \varphi)} \cdot e^{-j(\omega t + \psi - \varphi)} \right] - \left[\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) - i(0) \right] e^{-\frac{r}{L} t} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \left[\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) - i(0) \right] e^{-\frac{r}{L} t}$$

Подставляем численные значения:

$$i(t) = \frac{100}{65,91} \sin(314t - 45^\circ - 72,33^\circ) - \left(\frac{100}{65,91} \sin(-45^\circ - 72,33^\circ) + 0,976 \right) \cdot e^{-100t} = -1,517 \sin(314t - 117,33^\circ) + 0,372 e^{-100t}$$

На рис. 3.19 представлен график переходного процесса тока $i(t)$.

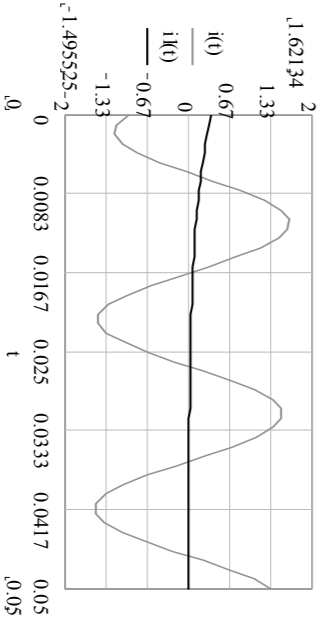


Рис. 3.19

Задача 3.8. Операторным методом можно решать задачи, которые почти не поддаются решению классическим методом. В качестве примера рассмотрим переходный процесс в цепи (рис. 3.20) при подаче на ее вход напряжения, изменяющегося во времени по экспоненте.

$$G(p) = 24 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} - 792 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} + 60 = 4,8; \\ H^{-1}(p_2) = 12 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^3 + 60 = -20;$$

Далее подставляем значения корней в $G(p)$ и $H^{-1}(p)$. При этом

$$p_{2,3} = -1 - \pm \sqrt{62500} = -1 \pm 250; \\ p_2 = 240; p_3 = 1000;$$

Находим корни $H(p) = 0$:

$$i_2(t) = \frac{G(p_k)}{H^{-1}(p_k)} e^{p_k t},$$

Для перехода от изображения тока $I_2(p)$ к оригиналу $i_2(t)$ используем теорему разложения, в соответствии с которой

$$I_2(p) = \frac{24 \cdot 10^{-6} p^2 + 792 \cdot 10^{-4} p + 60}{p^2 [p^2 + 4 + 10^{-5} p^2]}$$

Окончательно

$$I_2(p) = \frac{60}{p^2} + \frac{60}{p} + \frac{60}{p+1} + \frac{60}{p+1000}$$

После подстановки численных значений имеем

$$I_2(p) = \frac{60}{p^2} + \frac{60}{p} + \frac{60}{p+1} + \frac{60}{p+1000}$$

Ток $I_2(p)$ равен

$$i_2(t) = 60 + 60t + 60(1 - e^{-t}) + 60(1 - e^{-1000t})$$

Преобразуем полученное уравнение

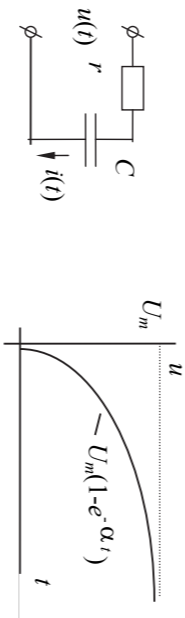


Рис. 3.20

Решение

Операторное изображение напряжения $u(t) = U_m (1 - e^{-\alpha t})$ имеет вид

$$U(p) = U_m \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} \right) = \frac{U_m \alpha}{p(p + \alpha)}$$

Операторное сопротивление цепи

$$Z(p) = r + \frac{1}{Cp} = \frac{rCp + 1}{Cp}$$

Операторное изображение тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\alpha U_m p}{p(p + \alpha) \cdot (rCp + 1)}$$

Используя теорему разложения, записываем

$$G(p) = \alpha C U_m; \quad H(p) = (p + \alpha) \cdot (rCp + 1).$$

Корни $H(p)$ равны

$$p_1 = -\alpha; \quad p_2 = -\frac{1}{rC}$$

Произвольная $H(p)$

$$H^{-1}(p) = 2rCp + \alpha rC + 1$$

Подставляем p_1 и p_2 в $G(p)$ и $H^{-1}(p)$:

$$G(p_1) = \alpha C U_m; \\ H^{-1}(p_1) = -2rC\alpha + \alpha rC + 1 = 1 - \alpha rC = 1 - \alpha \tau; \\ H^{-1}(p_2) = -\frac{2rC}{rC} + \alpha rC + 1 = -(1 - \alpha \tau),$$

где $\tau = rC$.

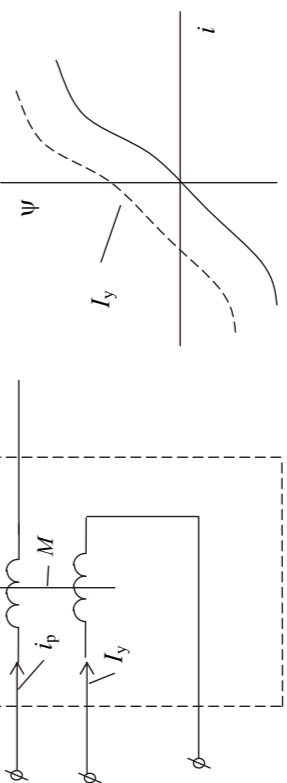


Рис. 4.10

С помощью нелинейных элементов в электрических цепях осуществляется ряд преобразований электромагнитной энергии:

- выпрямление переменного напряжения или тока;
- инвертирование постоянного напряжения или тока;
- усиление напряжений и токов;
- регулирование постоянных и переменных напряжений и токов;
- стабилизация напряжений и токов;
- преобразование частоты;
- модуляции и т.д.

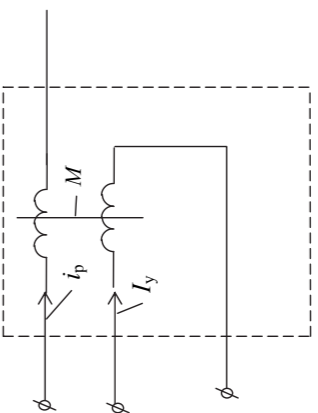


Рис. 4.9

Нелинейные емкостные элементы характеризуются кулон-вольтговой характеристикой (см. рис. 4.7, в и г). Емкость в них зависит от заряда конденсатора и напряжения приложенного к обкладкам. Нелинейная емкость, зависящая от напряжения, может быть изображена на схемах в виде (рис. 4.8, а).

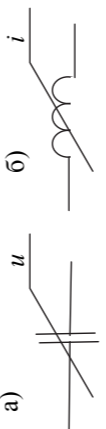


Рис. 4.8

Нелинейная индуктивность, зависящая от тока, может быть изображена на схемах в виде (рис. 4.8, б). Нелинейная индуктивность может быть управляемой (рис. 4.9). Постоянным током управления I_y можно изменить рабочий ток i , i_p , i_s . Характеристика такой индуктивности при изменении I_y смещается (рис. 4.10).

4.3. Статическое и дифференциальное сопротивление в нелинейных цепях

Отношение напряжения к току фиксированной точки характеристики называют статическим сопротивлением. В линейных электрических цепях (рис. 4.19) сопротивление не изменяется при изменении тока или напряжения:

$$U_1/I_1 = R = U_2/I_2.$$

В нелинейных нагрузках (рис. 4.20) статическое сопротивление для каждой точки характеристики изменяет свое значение при изменении тока или напряжения:

$$r_{1ст} = U_1/I_1; \quad r_{2ст} = U_2/I_2; \quad \text{tg} f = r_{ст2}.$$



Рис. 4.19

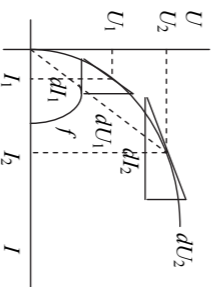


Рис. 4.20

Если же необходимо рассматривать быстропротекающие процессы в нелинейной цепи, то пользуются понятием **дифференциального сопротивления**.

Дифференциальное сопротивление в выбранной точке характеристики (см. рис. 4.20) определяется касательной в этой точке. Тогда тангенс угла наклона этой касательной определяет дифференциальное сопротивление:

$$r_{диф1} = dU_1/dI_1, \quad r_{диф2} = dU_2/dI_2.$$

4.4. Расчет простейшей нелинейной магнитной цепи постоянного тока

Пусть задана нелинейная магнитная цепь (рис. 4.21). Табариты магнитной цепи заданы: сечение магнитопровода S , длина средней силовой линии l , ток намагничивающей катушки I и ее число витков N также заданы. Решим задачу анализа для этой магнитной цепи, т.е. найдем магнитный поток Φ .

Магнитный материал характеризуется нелинейной характеристикой намагничивания $B(H)$ (рис. 4.22).

4.4.9. Метод математического моделирования

Метод основан на аналоговом или цифровом моделировании процессов во временной области. Решение осуществляется с помощью решающих блоков, представляющих собой законченные электронные блоки, выполняющие одну или несколько математических функций.

Для решения задачи анализа необходимы такие функции, как суммирование (Σ), умножение (Π) (блоки, осуществляющие перемножение), дифференцирование ($\frac{d}{dt}$), интегрирование (\int) и нелинейные функции (функционалы).

Главным решающим элементом является операционный усилитель (рис. 4.39, а), у которого коэффициент усиления составляет $10^4 - 10^6$ (это минимальные значения, в настоящее время в цифровом варианте эти коэффициенты имеют значительно большие значения). Если входное

Более точное решение можно получить методом Рунга-Кутты. Здесь этот метод рассматривать не будем, дадим возможность обучающемуся сделать это самостоятельно.

$$\left[\frac{\alpha}{i} \right]^2 + 1 \sqrt{\beta \alpha (i - n) i^k + i^{k+1}} = \frac{tp}{di}$$

Тогда решение будет иметь вид

$$\left[\frac{\alpha}{i} \right]^2 + 1 \sqrt{\beta \alpha (i - n) i^k + i^{k+1}} = \frac{tp}{di}$$

Приведем это уравнение к форме Коши:

$$\frac{tp}{di} \left[\frac{\alpha}{i} \right]^2 + 1 \sqrt{\beta \alpha (i - n) i^k + i^{k+1}} = \frac{tp}{di} \quad \text{или} \quad n = i + \left[\frac{\alpha}{i} \right] \frac{\beta}{1} \frac{tp}{p}$$

и подставив сюда значения α и β найдем n .

$$\left[\frac{\alpha}{i} \right] \frac{\beta}{1} \frac{tp}{p} = n - i \quad \text{или} \quad \left[\frac{\alpha}{i} \right] \frac{\beta}{1} \frac{tp}{p} = \lambda \beta$$

Из нелинейной функции найдем λ (для $\lambda \beta \alpha = i$ или $\lambda \beta \alpha = \lambda \beta$):

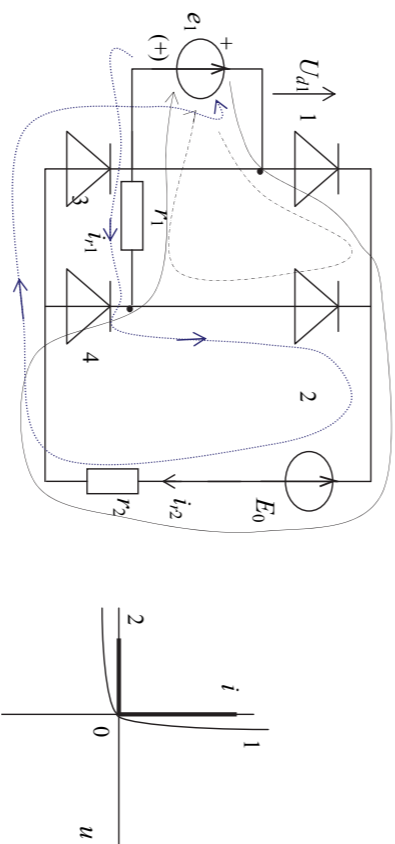


Рис. 4.34

Рис. 4.35

Если диод работает в первом квадранте, то его сопротивление равно нулю: $r_d = 0$, если же он работает в третьем квадранте, то его сопротивление равно бесконечности: $r_d = \infty$. Это равносильно ключу (первый квадрант – ключ замкнут, второй квадрант – ключ разомкнут).

Определим возможные пути протекания токов. Найдем временные интервалы выделенных путей токов. Если $e_1 - E_0 \geq 0$, то будет протекать i_2 и диоды 1 и 4 будут открыты. Запишем второй закон Кирхгофа для этого контура:

$$e_1 - E_0 = i_2 (r_2 + r_1).$$

Это соотношение справедливо от момента времени t_1 до момента t_2 .

$$i_2 = \frac{e_1 - E_0}{r_2 + r_1}.$$

На временных диаграммах (рис. 4.36) интервал (t_1 t_2) определяется из условия

$$E_m \sin \omega t_2 - E_0 = 0.$$

В отрицательном полупериоде аналогично могут быть найдены моменты времени t_3 , t_4 , а в интервале времени между этими моментами будут открыты диоды 2 и 3. В остальное время токи не протекают.

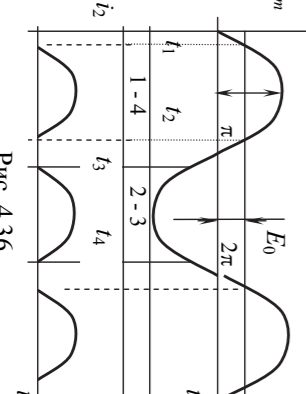


Рис. 4.36

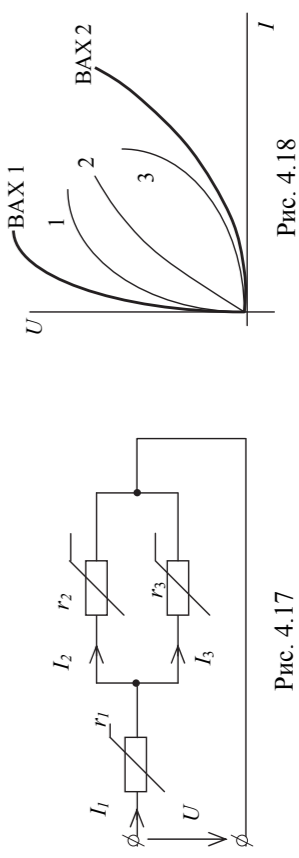


Рис. 4.17

Рис. 4.18

Чтобы закрепить навыки решения подобных задач предлагаем решить самостоятельно следующую задачу.
 Дано: цепь (рис. 4.17), напряжение U , вольтамперные характеристики 1, 2, 3 (рис. 4.18).

Определить: I_1, I_2, I_3 .

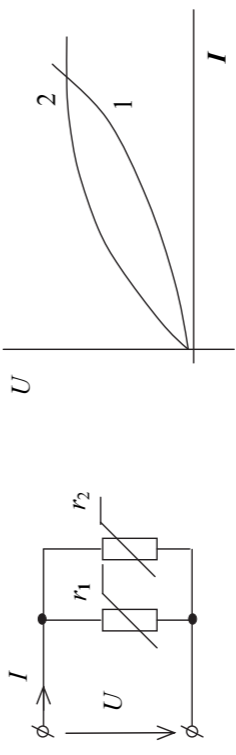


Рис. 4.15

Рис. 4.16

доставляется самостоятельно проанализировать эти построения и сделать соответствующие выводы.

Рассмотрим параллельное соединение нелинейных сопротивлений суммарной характеристикой. Эта точка дает искомое решение.

(рис. 4.15). Если поставить задачу по нахождению тока I , то дальнейшее решение становится понятным из построенных (рис. 4.16). Читателю предлагается самостоятельно проанализировать эти построения и сделать соответствующие выводы.

Определить I колгот I .

Дано: напряжение U , эмержание I , цепь (рис. 4.13), ВАХ 1, 2 (рис. 4.14) 4. с. 141

Продолжить решение простых нелинейных цепей.

4.2. Нелинейные электрические цепи постоянного тока

Рассмотрим простейшую нелинейную цепь постоянного тока.

Дано: напряжение U , нелинейное сопротивление $r(U)$, цепь (рис. 4.11).

Определить ток.

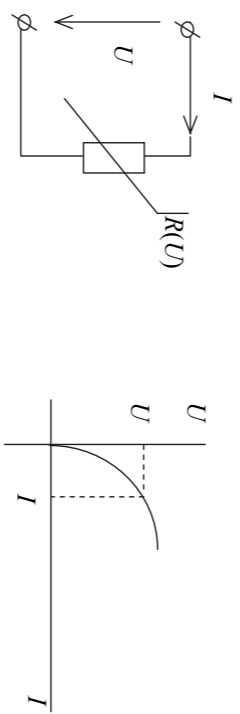


Рис. 4.11

Рис. 4.12

1) Если $r(U)$ задано графиком (рис. 4.12), то решение простое. Проектируем заданное напряжение до пересечения с характеристикой. Точка пересечения дает искомый ток.

Такой метод расчета называют графическим. Точность расчета определяется точностью графических построений. Этот метод ещё называют предварительным.

2) Если $r(U)$ выразить аналитически, подобрав закон изменения $r(U)$ как функцию $f = r(U)$, тогда ток определяется по закону Ома:

$$I = U / r,$$

но r зависит от напряжения U , следовательно, $I = U / r(U)$ и находится методом подбора. Точность расчетов здесь определяется точностью аналитической аппроксимации.

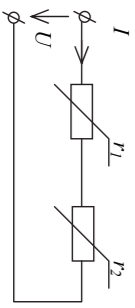


Рис. 4.13

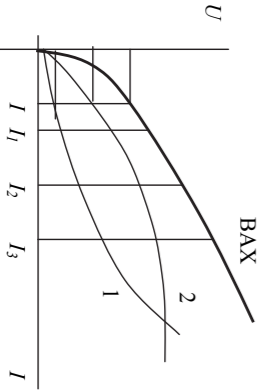


Рис. 4.14

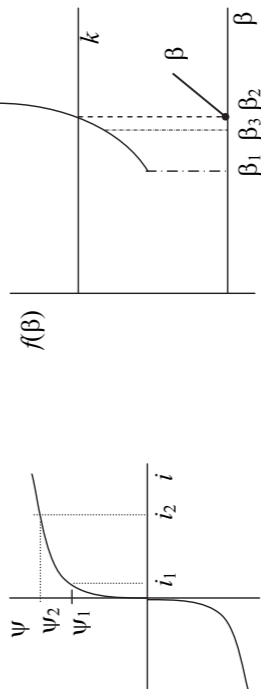


Рис. 4.37

Рис. 4.38

Изменяя коэффициент β , строим функцию $f(\beta)$ (рис. 4.38). Точка пересечения этого графика с линией k дает величину β . Коэффициент α найдем по формуле

$$\alpha = \frac{i_1}{sh(\beta \psi_2)}$$

Таким образом, получили нелинейную зависимость в виде формулы

$$i = \alpha sh(\beta \psi)$$

Рассмотрим другой вариант подбора аналитического выражения, например, в виде степенного ряда

$$i = a\psi + b\psi^3.$$

$$\frac{i_1}{i_2} = k = \frac{sh(\beta \psi_1)}{sh(\beta \psi_2)}$$

Поделим первое выражение на второе, получим

$$\begin{cases} i_1 = \alpha sh(\beta \psi_1); \\ i_2 = \alpha sh(\beta \psi_2). \end{cases}$$

Найдем α и β методом выбранных точек. На характеристике выберем две точки и их координаты подставим в исходную формулу

$$i = \alpha sh(\beta \psi)$$

Для нелинейной характеристики (гиперболическая функция) и гиперболическое выражение. Пусть это будет гиперболическая функция (рис. 4.37) L. 4. 37

4.6.2. Метод математической аппроксимации

Коэффициенты a и b также найдем методом выбранных точек. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = a\psi_1 + b\psi_1^3; \\ i_2 = a\psi_2 + b\psi_2^3. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно коэффициентов

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_1^3 \\ \psi_2 & \psi_2^3 \end{vmatrix} = \psi_1 \psi_2^3 - \psi_2 \psi_1^3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} i_1 & \psi_1^3 \\ i_2 & \psi_2^3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \psi_1 & i_1 \\ \psi_2 & i_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда коэффициенты равны

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

4.6.3. Метод Эйлера

Решим задачу (см. рис. 4.29) на основе математической аппроксимации. Основное уравнение процесса

$$\frac{d\psi}{dt} + r\psi = n$$

примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} + r \cdot \alpha \cdot sh(\beta \psi) = n.$$

Последнее уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим его, например, методом Эйлера. Рассмотрим алгоритм решения:

$$\frac{d\psi}{dt} = n - r \cdot \alpha \cdot sh(\beta \psi).$$

Приведем это уравнение к конечным разностям:

$$\frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{h} = n - r \cdot \alpha \cdot sh(\beta \psi_k).$$

Тогда решение для $(k + 1)$ -шага будет иметь вид

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h(n - r \cdot \alpha \cdot sh(\beta \psi_k)).$$

4.5. Расчет нелинейных магнитных цепей постоянного тока методом двух узлов

Магнитное сопротивление $r_m(\Phi)$ зависит от потока Φ и может быть найдено в виде таблицы или графика, пользуясь которыми мы можем оп- делить магнитный поток.

$$\Phi = \frac{F_m}{r_m(\Phi)}.$$

Магнитное сопротивление $r_m(\Phi)$ зависит от потока Φ и может быть найдено в виде таблицы или графика, пользуясь которыми мы можем оп- делить магнитный поток.

$$\Phi = BS.$$

По характеристике намагничивания находим магнитную индукцию B . Подставляем эту индукцию в формулу магнитного потока и находим его величину. Таким образом, поставленная задача решена.

$$\oint HdL = IW.$$

По закону полного тока можно определить напряженность магнитно- го поля:

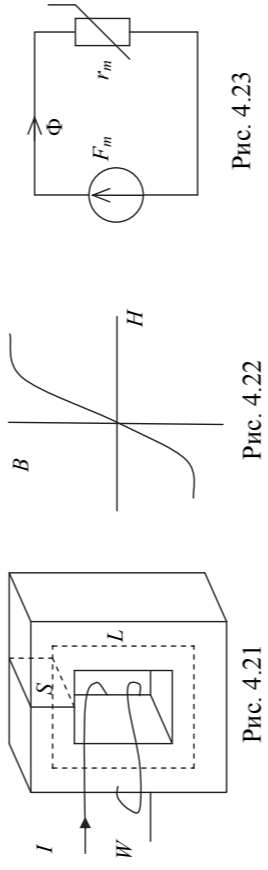


Рис. 4.23

Рис. 4.22

Рис. 4.21

Подставим найденные магнитные сопротивления в формулу магнит- ного напряжения (4.1) и рассчитаем магнитные потоки по формулам (4.2). Если сумма потоков не равна нулю, то уточняем значения магнитных сопротивлений, подставляя в формулы (4.3) данные из рис. 4.26 для рас- считанных потоков и вновь повторяем расчеты (итерации).

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

4.6. Расчет нелинейных электрических цепей переменного тока

Анализ нелинейных электрических цепей осуществляется так же, как и линейных цепей, с использованием уравнений Кирхгофа, но т.к. нагрузки зависят от электрических параметров, в нелинейных цепях постоянного тока алгебраические уравнения содержат изменяющиеся коэффициенты.

Решение таких уравнений связано с определенными трудностями. В нелинейных электрических цепях переменного тока нелинейные диффе- ренциальные уравнения также содержат переменные коэффициенты, что тоже затрудняет их решение. Поэтому методы решения задачи анализа в нелинейных цепях разделяют на две части: приближенные (предваритель- ные) и точные (окончательные).

К приближенным методам относятся, например, методы, основанные на линеаризации, т.е. на замене нелинейных характеристик линейными (метод кусочно-линейной аппроксимации, метод аналитической аппрок- симации).

К точным относятся методы, в которых нелинейные характеристики описываются точно, например, с помощью аналитических выражений (формул). Наибольшее распространение получили аналоговые методы математического моделирования и цифровые методы (методы Эйлера и Рунге-Кутты).

На простях примерах рассмотрим наиболее распространенные методы.

4.6.1. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Пусть дана цепь (рис. 4.29), содержащая нелинейную индуктивность и линейное сопротивление. Цепь питается переменным напряжением $u(t) = U_m \sin \omega t$. ВБАХ задана графиком (рис. 4.30).

Аппроксимируем характеристику тремя отрезками (1 – 2), (2 – 3) и (4 – 1). Цепь стала кусочно-линейной. Если поток не превышает ψ_m , то в цепи не возникает ток. Появление в цепи тока приводит к постоянству магнитного потока.

Рассчитаем магнитную цепь (рис. 4.24) методом двух узлов. Поста- вим задачу: по заданным геометрическим размерам, числам витков намаг- ничивающих катушек, магнитному материалу и их токам определить маг- нитные потоки стержней магнитной цепи.

4.5. Расчет нелинейных магнитных цепей постоянного тока методом двух узлов

Магнитное сопротивление $r_m(\Phi)$ зависит от потока Φ и может быть найдено в виде таблицы или графика, пользуясь которыми мы можем оп- делить магнитный поток.

$$\Phi = \frac{F_m}{r_m(\Phi)}.$$

Магнитное сопротивление $r_m(\Phi)$ зависит от потока Φ и может быть найдено в виде таблицы или графика, пользуясь которыми мы можем оп- делить магнитный поток.

$$\Phi = BS.$$

По характеристике намагничивания находим магнитную индукцию B . Подставляем эту индукцию в формулу магнитного потока и находим его величину. Таким образом, поставленная задача решена.

$$\oint HdL = IW.$$

По закону полного тока можно определить напряженность магнитно- го поля:

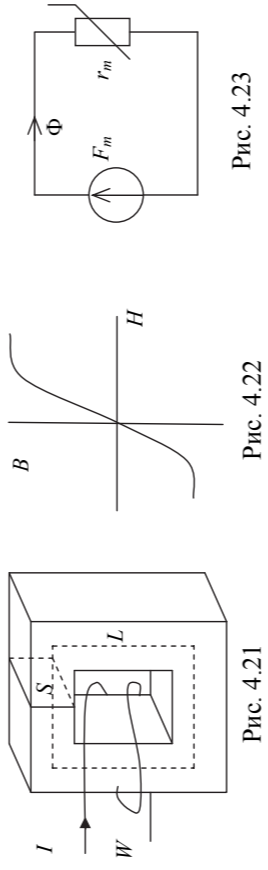


Рис. 4.23

Рис. 4.22

Рис. 4.21

Подставим найденные магнитные сопротивления в формулу магнит- ного напряжения (4.1) и рассчитаем магнитные потоки по формулам (4.2). Если сумма потоков не равна нулю, то уточняем значения магнитных сопротивлений, подставляя в формулы (4.3) данные из рис. 4.26 для рас- считанных потоков и вновь повторяем расчеты (итерации).

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

4.6. Расчет нелинейных электрических цепей переменного тока

Анализ нелинейных электрических цепей осуществляется так же, как и линейных цепей, с использованием уравнений Кирхгофа, но т.к. нагрузки зависят от электрических параметров, в нелинейных цепях постоянного тока алгебраические уравнения содержат изменяющиеся коэффициенты.

Решение таких уравнений связано с определенными трудностями. В нелинейных электрических цепях переменного тока нелинейные диффе- ренциальные уравнения также содержат переменные коэффициенты, что тоже затрудняет их решение. Поэтому методы решения задачи анализа в нелинейных цепях разделяют на две части: приближенные (предваритель- ные) и точные (окончательные).

К приближенным методам относятся, например, методы, основанные на линеаризации, т.е. на замене нелинейных характеристик линейными (метод кусочно-линейной аппроксимации, метод аналитической аппрок- симации).

К точным относятся методы, в которых нелинейные характеристики описываются точно, например, с помощью аналитических выражений (формул). Наибольшее распространение получили аналоговые методы математического моделирования и цифровые методы (методы Эйлера и Рунге-Кутты).

На простях примерах рассмотрим наиболее распространенные методы.

4.6.1. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Пусть дана цепь (рис. 4.29), содержащая нелинейную индуктивность и линейное сопротивление. Цепь питается переменным напряжением $u(t) = U_m \sin \omega t$. ВБАХ задана графиком (рис. 4.30).

Аппроксимируем характеристику тремя отрезками (1 – 2), (2 – 3) и (4 – 1). Цепь стала кусочно-линейной. Если поток не превышает ψ_m , то в цепи не возникает ток. Появление в цепи тока приводит к постоянству магнитного потока.

Дальнейшие расчеты повторяются. Результаты расчетов представле- ны на рис. 4.33.

$$\omega t_2 = \arcsin\left(\frac{U_m}{U_m}\right).$$

отсюда

$$i_1 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t_2,$$

Когда этот ток вновь станет равным i_1 , рабочая точка перейдет на участок (2 – 1). Найдем этот момент времени t_2 :

$$i_1 = \frac{U_m}{r} \sin \omega t.$$

равен

При $t > t_1$ рабочая точка переходит на участок (2 – 3), на котором ток

Полученное уравнение является трансцендентным, поэтому поиск i_1 осуществляют графически.

$$U_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t_1 + \frac{U_m}{r} \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1} \cos \omega t - \frac{U_m}{r} \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1} \cos \omega t_1.$$

Найдем момент времени, когда ток $i = i_1$:

Полученное решение будет справедливо до тех пор, пока ток $i \leq i_1$.

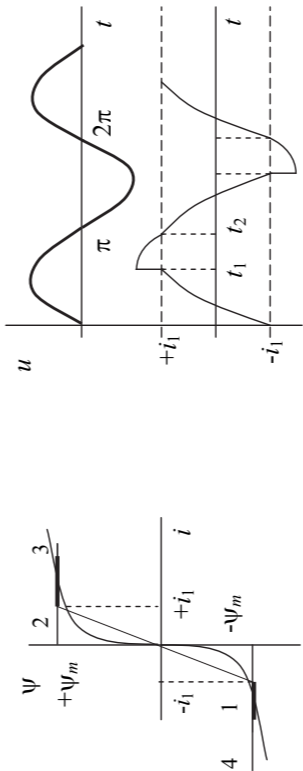


Рис. 4.33

Рис. 4.32

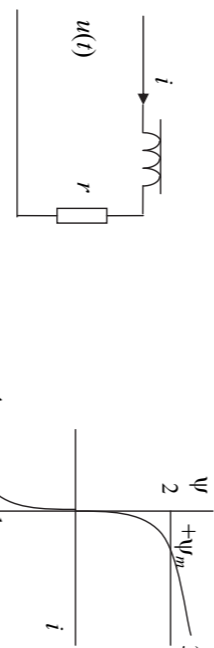


Рис. 4.29

Рис. 4.30

Расчет начнем с момента времени $t = 0$. Пусть в этот момент рабочая точка характеристики находится на отрезке (1 – 2) и потокоцепление равно $\psi = -\psi_m$. По второму закону Кирхгофа составим уравнение процесса:

$$u = ir + \frac{d\psi}{dt}.$$

Учтем, что пока потокоцепление не достигнет максимального зна- чения, в цепи нет тока:

$$u = \frac{d\psi}{dt}.$$

Найдем магнитный поток

$$\psi = \int u dt = \int U_m \sin \omega t dt = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + c.$$

Это решение справедливо, пока $\psi \leq \psi_m$. Найдем постоянную инте- рирования (c) в момент времени $t = 0$:

$$\psi(0) = -\psi_m = -\frac{U_m}{\omega} + c,$$

отсюда

$$c = \frac{U_m}{\omega} - \psi_m.$$

Определим момент времени t_1 , когда $\psi = +\psi_m$. Для этого подставим в формулу потока этот момент времени, получим

$$\psi_m = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t_1 + \frac{U_m}{\omega} - \psi_m,$$

$$r_{m1} = \frac{U_{m1}}{\Phi_1}, r_{m2} = \frac{U_{m2}}{\Phi_2}, r_{m3} = \frac{U_{m3}}{\Phi_3} \quad (4.3)$$

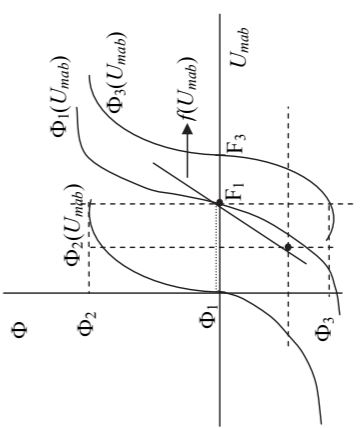
По характеристикам (см. рис. 4.28) зададимся начальными значениями магнитных сопротивлений

$$\Phi_1 = -\frac{F_1 U_{mab}}{r_{m1}}, \Phi_2 = -\frac{F_2 U_{mab}}{r_{m2}}, \Phi_3 = \frac{F_3 - U_{mab}}{r_{m3}} \quad (4.2)$$

Тогда магнитные потоки равны

$$U_{mab} = -\frac{F_1 + F_3}{\frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m3}} + \frac{1}{r_{m2} r_{m3}}} \quad (4.1)$$

Рис. 4.28



Просуммировав потоки, построим вспомогательную кривую $f(U_{mab})$. Тогда точка пересечения этой кривой с осью абсцисс даст решение. Проведем через эту точку прямую параллельно оси потока. Ее точки пересечения с характеристиками дадут значения магнитных потоков Φ_1, Φ_2 и Φ_3 .

2) Решим эту же задачу методом двух узлов с использованием метода итераций. Запишем формулу магнитного потока

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 = f(U_{mab}).$$

Построим график зависимости $f(U_{mab})$ от U_{mab} . По первому закону Кирхгофа сумма потоков в магнитном узле a равна нулю:

Построим эти зависимости (рис. 4.28).

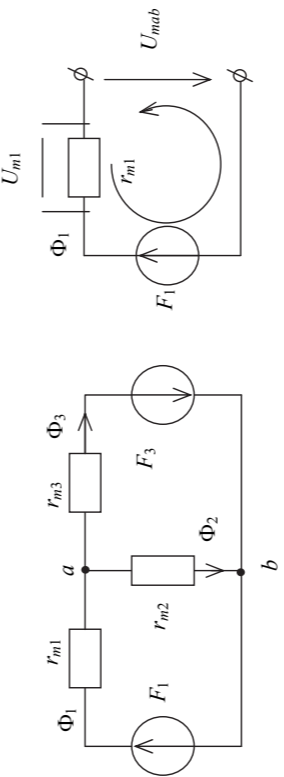


Рис. 4.27

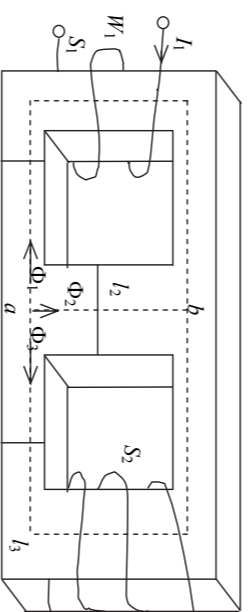


Рис. 4.24

1) Приведем заданную характеристику материала $B(H)$ (рис. 4.25) в зависимости магнитных потоков от магнитных напряжений (рис. 4.26) $\Phi(U_{m1}), \Phi_2(U_{m2}), \Phi_3(U_{m3})$ по формулам

$$\Phi = BS \quad \text{и} \quad U_m = NI = IW.$$

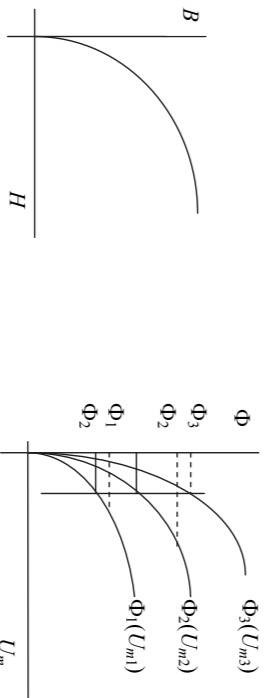


Рис. 4.25

Рис. 4.26

Приведем характеристику $\Phi(U_m)$ к одному магнитному напряжению U_{mab} .

Для этого воспользуемся магнитной схемой замещения (рис. 4.27, a). Для первой магнитной ветви по второму закону Кирхгофа составим уравнение (рис. 4.27, б)

$$U_{m1} - U_{mab} = -F_1,$$

откуда можно определить магнитное напряжение

$$U_{m1} = U_{mab} + F_1.$$

Аналогично определим магнитное напряжение по второй и третьей ветвям:

$$U_{m2} = U_{mab} + F_2, \quad U_{m3} = U_{mab} - F_3.$$

$$\omega t_2 = \arccos\left(2\psi_m - \frac{U_m}{\omega}\right) \cdot \frac{\omega}{U_m}.$$

отсюда

$$-\psi_m \cos \omega t_2 + \psi_m \cos \omega t = \frac{U_m}{\omega} \cos \omega t_2 - \frac{U_m}{\omega} \cos \omega t,$$

Найдем момент времени t_2 , когда потокоцепление равно

$$c_1 = \psi_m \frac{U_m}{\omega}.$$

отсюда

$$\psi_m \frac{U_m}{\omega} + c_1,$$

Постоянную интегрирования c_1 найдем при $\omega t = \pi$:

$$\psi_m \cos \omega t + c_1 = \psi_m \cos \pi + c_1 = -\psi_m + c_1.$$

Ток на участке (2) равен нулю: $i = 0$. Потокоцепление можно определить аналогично:

$$\omega t = \pi.$$

Это решение будет справедливо до тех пор, пока ток не станет равным нулю. Этот момент времени равен

$$i = \frac{r}{r} \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t.$$

Ток равен

$$i = r \cdot i \cdot r.$$

Тогда основное уравнение примет вид

При $t > t_2$ уравнение для тока

$$\frac{U_m}{\omega} \left(\cos \omega t - 2 \cos \omega t_2 + \cos \omega t_2 \right) = \frac{r}{r} \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t.$$

откуда

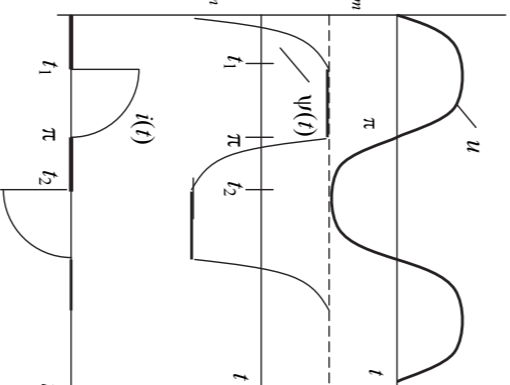


Рис. 4.31

Процессы в заданной электрической цепи описываются уравнением

$$u = ir + \frac{d\psi}{dt}.$$

Учитывая, что на участке (1-2) индуктивность линейна, уравнение примет вид

$$u = ir + \frac{Ldi}{dt},$$

где $L = \frac{\psi_m}{i}$.

Это уравнение линейно и его решение имеет вид

$$i(t) = Ae^{\alpha t} + i_{np} = Ae^{-\frac{r}{L}t} + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Постоянную интегрирования A найдем при $t = 0$:

$$-i_1 = A + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin \varphi_2, \\ A = i_1 - \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin \varphi_2.$$

тогда

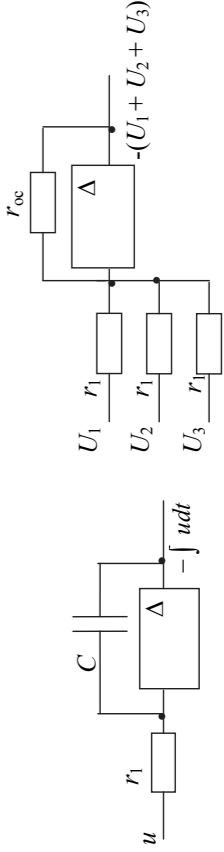


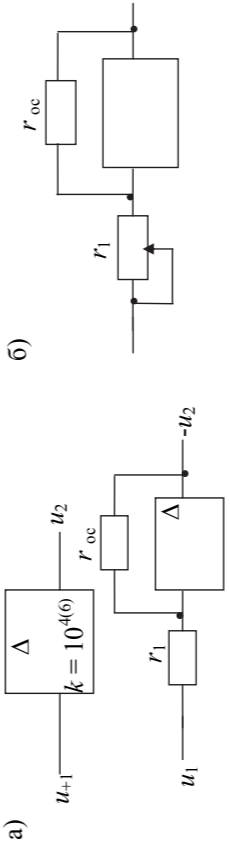
Рис. 4.41

Этот решающий блок будет выполнять функцию интегрирования (рис. 4.40).
Если на вход подать несколько сигналов (U_1, U_2, U_3), то такой усилитель будет выполнять функцию суммирования ($U_1 + U_2 + U_3$) при $r_1 = r_{oc}$ (рис. 4.41).

$$k(p) = \frac{1}{sr_1 p} = \frac{1}{Trp}$$

Если вместо сопротивления обратная связь включить емкость $\frac{1}{pC}$, то коэффициент усиления будет равен

Рис. 4.39



Если сопротивление $r_1 \neq r_{oc}$, то при $r_{oc} > r_1$ коэффициент усиления $k > 1$, а при $r_{oc} < r_1$ коэффициент усиления $k < 1$. Такой усилитель выполняет функцию умножения на постоянное число (рис. 4.39, б).

Если вместо сопротивления обратной связи включить емкость $\frac{1}{pC}$, то коэффициент усиления будет равен

$$k = \frac{r_{oc}}{r_1} \text{ или } k = 1.$$

сопротивление $r_1 \neq r_{oc}$, $r_1 > r_{oc}$, $r_1 < r_{oc}$. Он изменяет знак входного напряжения рис. 4.39, а). Он изменяет знак входного напряжения

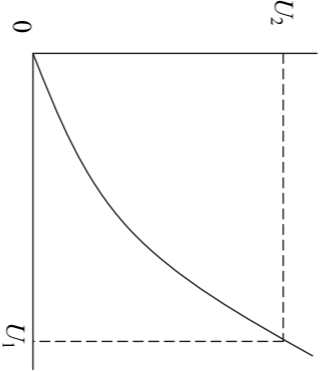


Рис. 4.46

Приведенный перечень методов расчета нелинейных цепей не охватывает все разнообразие преобразования параметров электромагнитной энергии нелинейными цепями. Понятно, что оно будет развиваться и совершенствоваться с течением времени. Появятся и другие методы расчета. Ориентируемся здесь обучаемых на то, чтобы он следил за развитием этой области знаний. Далее рассмотрим основные преобразования нелинейными цепями переменного тока.

4.7. Выпрямление переменного тока и напряжения

Рассмотрим работу нескольких простейших выпрямителей.

Работа однополупериодного выпрямителя на r -нагрузку.

Пусть дана схема (рис. 4.47), ВАХ диода (рис. 4.48) и напряжение источника $u(t) = U_m \sin \omega t$. Поставим задачу: определить ток в цепи и напряжение на нагрузке. Используем графический метод для расчета тока.

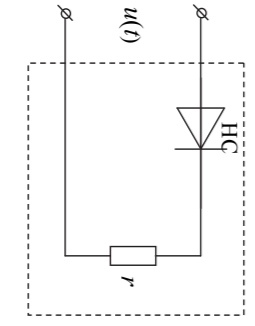


Рис. 4.47

Графические построения просты и понятны (см. рис. 4.48). При синусоидальном напряжении источника ток в цепи неинусоидален. Видно, что ток однополупериоден. Если этот ток умножить на сопротивление (r), то получим напряжение на нагрузке. Если пренебречь заштрихованной площадью то в интервале $(\pi - 2\pi)$ ток будет равен нулю (рис. 4.49).

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi I_m \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{U_m}{\pi r}$$

Для сравнения, среднее значение синусоидального тока равно

$$\frac{2 \cdot U_m}{\pi \cdot r}$$

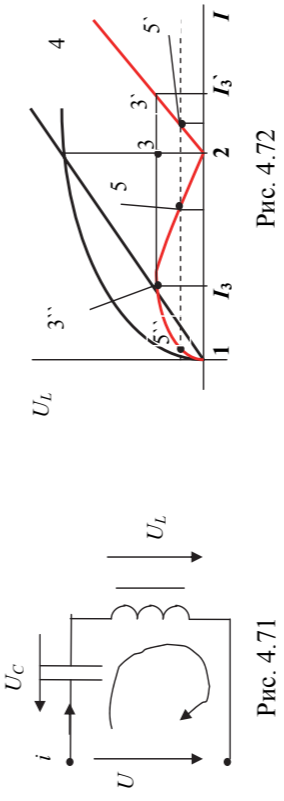


Рис. 4.72

Учитывая, что во временной области напряжения суммируются:

$$u = u_c + u_L,$$

и по отношению к току напряжение u_c отстаёт на угол 90° , а напряжение u_L опережает на угол 90° , то угол между этими напряжениями равен 180° . Для эквивалентных действующих значений напряжений второй закон Кирхгофа может быть записан следующим образом:

$$U = |U_L - U_C|.$$

Определим результирующую ВАХ. После геометрических построений (см. рис. 4.72), получим кривую $1 - 5'' - 3'' - 5' - 2 - 4$.

Отрезок $1 - 5'' - 3'' - 5'$ имеет направление касательной, которая находится в первом квадранте (участок устойчивой работы). То же относится к участку $2 - 4$. Участок $3'' - 5' - 2$ имеет направление касательной к кривой, которая находится в четвертом квадранте (участок неустойчивой работы). Этот участок не может быть снят экспериментально.

Если предположить, что рабочая точка находится в точке 5, то при незначительном изменении тока скачком она переходит в точку 5' или 5''. Поэтому при экспериментальном исследовании цепей снимается участок $1 - 3$ при возрастании напряжения. При достижении рабочей точкой положения 3 будет наблюдаться скачок тока в точку 3'. При дальнейшем росте напряжения ток будет скользить по отрезку 3' - 4. При уменьшении напряжения рабочая точка будет скользить от точки 4 до точки 2, минуя точку 3'. При достижении точки 2 будет наблюдаться скачок из точки 2 в точку 1.

Определение коэффициента мощности

$$N = \frac{P}{S} = \frac{U \cdot I_0 + U \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + \dots}{U \cdot I} < 1.$$

Мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

4.8. Инвертирование постоянного напряжения и тока

Инвертирование, как и преобразование, возможно осуществить только с помощью управляемых нелинейных элементов (транзисторов, тиристор, запираемых тиристоров).

Инвертирование — это **преобразование, обратное выпрямлению**. Входной величиной является постоянное напряжение, а выходной — переменное (рис. 4.65).

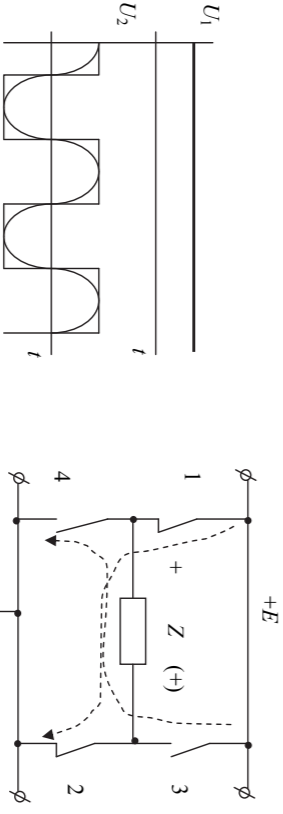


Рис. 4.65

Рис. 4.66

Создадим схему простейшего инвертора с помощью ключевых элементов (рис. 4.66), функцию которых могут выполнять транзисторы, тиристоры и запираемые тиристоры. В этом случае работу инвертора можно рассмотреть на базе теории переходных процессов. Если одновременно замкнуть ключи 1 и 2, то будет наблюдаться переходный процесс включения нагрузки на постоянное напряжение.

Рассмотрим режим работы с момента времени $t = 0$. Пусть в этот момент замыкаются ключи 1 и 2. К нагрузке прикладывается напряжение слева направо. В момент времени t_1 замыкаются ключи 3 и 4, а ключи 1 и 2 размыкаются. При этом полярность напряжения на нагрузке меняется (рис. 4.67). Если в момент времени t_2 вновь замкнуть ключи 1 и 2, то получим двуполлярное прямоугольное напряжение.

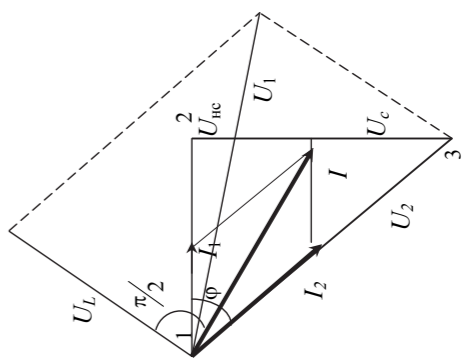


Рис. 4.45

Откладываем это напряжение под углом 90° к току I (см. рис. 4.45). Суммируем напряжение на индуктивности с напряжением U_2 . Получаем напряжение U_1 . Откладываем напряжение U_1 и U_2 в систему координат $U_2(U_1)$ (рис. 4.46). Для другого тока нелинейного элемента повторяем расчеты и получаем вторую пару напряжений. Сделаем несколько аналогичных расчетов, получаем искомого зависимость (см. рис. 4.46).

$$U_L = I \cdot X_L.$$

Найдем напряжение на индуктивности

$$U_L = I \cdot X_L.$$

отсюда

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\pi - \varphi)},$$

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\pi - \varphi),$$

Суммируем токи I_1 и I_2 . По теореме косинусов найдем ток I :

$$I_2 = \frac{U_{nc}^2}{r_2}.$$

Находим ток I_2

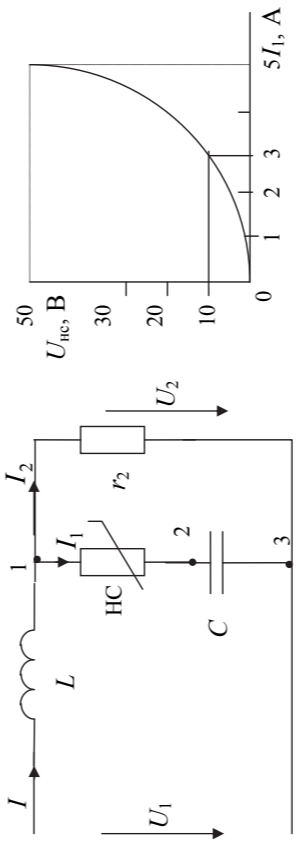


Рис. 4.43

$$\frac{d\psi}{dt} + rI = u.$$

Составим блок-схему решения задачи с нелинейной индуктивностью (см. рис. 4.29). Воспользуемся уравнением нелинейной индуктивности

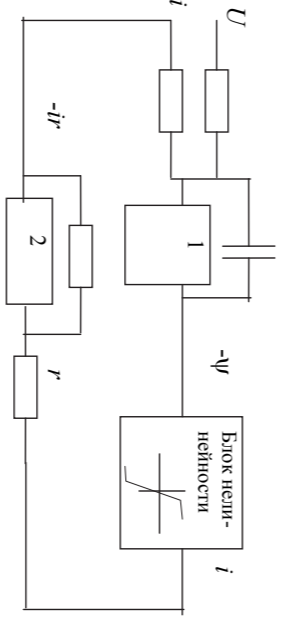


Рис. 4.42

Нелинейность заложена в функции $\psi(i)$. Приведем это уравнение к форме Коши:

$$\frac{d\psi}{dt} = u - r \cdot i.$$

Если просуммировать правую часть этого выражения и проинтегрировать ее с помощью блока 1, то можно получить функцию потокоцепления, а через блок нелинейности можно получить ток в цепи (рис. 4.42). С помощью блока 2 можно умножить ток i на сопротивлении r и замкнуть его с блоком 1. Полученная блок-схема решает поставленную задачу.

4.6.5. Метод расчета нелинейных цепей переменного тока по эквивалентным действительным значениям

Рассмотрим нелинейную цепь (рис. 4.43). Нелинейное сопротивление $U_{nc}(U_1)$.

Выбираем на нелинейной характеристике точку $(U_{nc} = 10 \text{ В}, I_1 = 3 \text{ А})$. Расчет ведем в комплексных числах по эквивалентным действительным значениям токов и напряжений. Для выбранной точки найдем U_1 и U_2 .

Напряжение на конденсаторе равно $U_c = I_1 X_c$ и направлено перпендикулярно току I_1 (рис. 4.45, отрезок 2 - 3). Суммируем напряжение U_{nc} с напряжением U_c (отрезок 1 - 3). Рассчитываем напряжение $U_2 = U_c$

$$U_{r2} = \sqrt{U_{nc}^2 + U_c^2}.$$

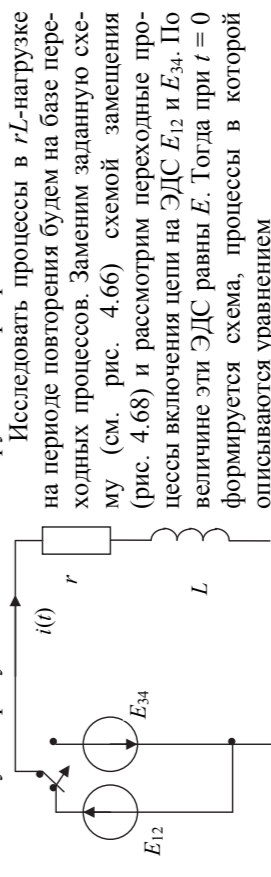


Рис. 4.98

Его решение

$$E = i \cdot r + L \frac{di}{dt}.$$

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В момент времени $t = t_1$ процессы описываются уравнением

$$E = i \cdot r + L \frac{di}{dt}.$$

Его решение имеет вид

$$i_2(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} + i_{2np}.$$

Рассмотрим работу инвертора на примерах конкретной нагрузки.

Работа инвертора на rL-нагрузке.

Дано: нагрузка, каз, состоящая из активная-индуктивных сопротивлений $Z_{н}(r, L)$, источник постоянной ЭДС E .

Пусть требуется найти ток нагрузки инвертора.

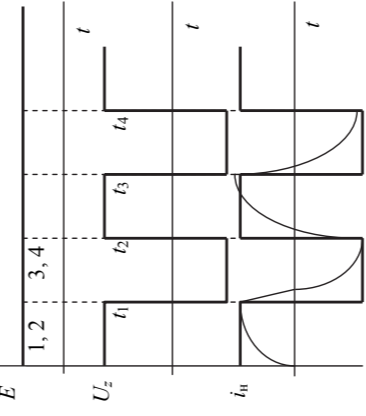


Рис. 4.67

В этом решении $i_{2np} = -\frac{E}{R}$. Найдем постоянную интегрирования A из условия

$$i_2(0) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t_0}) = i_1(t_1),$$

$$i_1(t_1) = A + i_{1np} \quad \text{или} \quad A = i_1(t_1) - i_{1np}.$$

Дальнейшие процессы повторяются. Примерный вид тока показан на рис. 4.67 или на рис. 4.69 (сплошная жирная линия). Переходный процесс будет длиться до тех пор, пока постоянные интегрирования A_1 и A_2 не станут равными.

Работа инвертора на rC- нагрузке.

В цепи (см. рис. 4.68) подставим вместо L -элемента C -элемент. Начнем расчет из условия $U_c(0) = 0$, тогда решение для тока первого интервала будет иметь вид

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

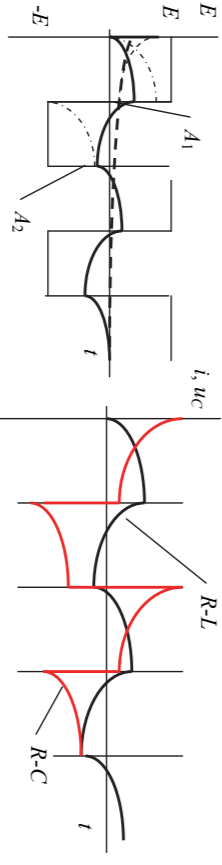


Рис. 4.69

Рис. 4.70

Для напряжения на конденсаторе решение будет иметь вид

$$U_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Во втором интервале эти решения будут аналогичными. В совокупности эти решения представлены на рис. 4.70.

4.9. Особые явления в нелинейных цепях переменного тока

В электрических цепях, содержащих линейные конденсаторы и нелинейные индуктивности (рис. 4.71), возможно появление особых явлений. Эти явления связаны с феррорезонансом.

Работа однополупериодного выпрямителя на L -нагрузку.
 Введем в цепь индуктивность (рис. 4.50) и решим ту же задачу.
 Дано: $i = U_m \sin \omega t$, L , r , ВАХ. Определим ток i , и напряжение u_r .

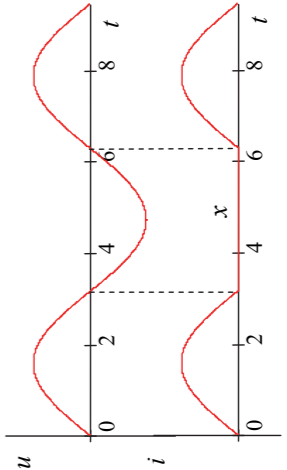


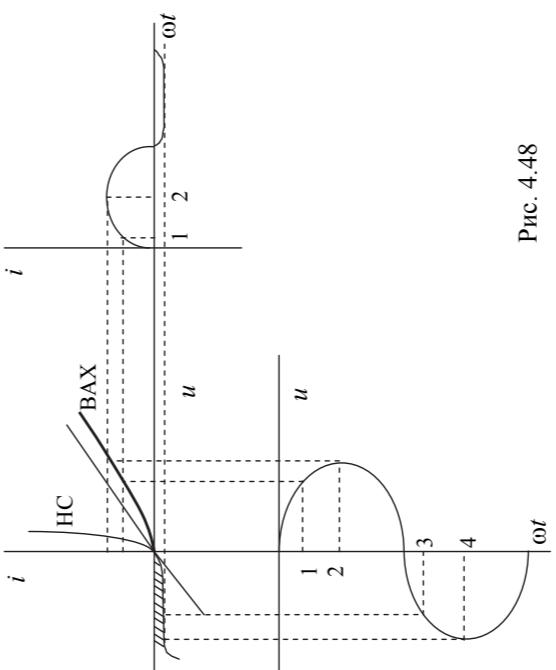
Рис. 4.49

Видно, что действующее значение выпрямленного тока в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем переменного тока.

$$I = \sqrt{\frac{T}{\pi} \int_0^{\pi} i^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2 \cdot \pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \omega \cdot t \cdot d\omega \cdot t} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2} \frac{1 - \cos 2\omega \cdot t}{2} \cdot d\omega \cdot t} = \frac{U_m}{2 \cdot r}$$

Действующее значение выпрямленного тока равно

Рис. 4.48



$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_{2cp}}{P_3} = \frac{U_0 \cdot I_0}{U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \phi} = \frac{U_0 \cdot I_0}{\sum \cos \phi_k \cdot U_k \cdot I_k}$$

Коэффициент полезного действия

$$K_\Gamma = \frac{U_0}{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}$$

ниже:

Коэффициент гармоник оценивает содержание высших гармоник в напряжении и равен отношению всех высших гармоник к основной гармонике:

$$K_{II} = \frac{U_1}{U}$$

Следующим показателем является коэффициент искажения, который равен отношению действующего значения напряжения первой гармоники к действующему значению напряжения:

$$K_{II} = \frac{U}{U_{ном}} = \frac{U}{U_{max} - U_{min}}$$

му значению:

Главным показателем качества выходного напряжения является коэффициент пульсаций, который равен отношению разности максимального и минимального значений выходного напряжения к его номинальному значению:

Для большинства общетехнических установок эта кривая удовлетворяет стандарту и не требует дополнительной фильтрации.

Качественные показатели выходного напряжения выпрямителей.

Рис. 4.64

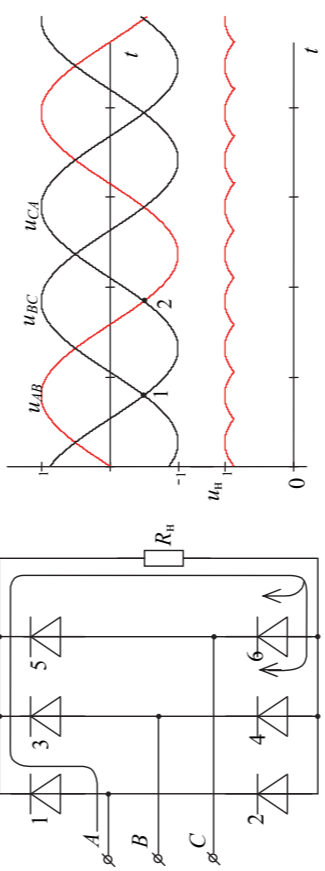


Рис. 4.63

Потенциал катода становится больше потенциала анода: $\phi_k > \phi_a$. При этом ключ (диод) размыкается. Разряд конденсатора можно описать уравнением (рис. 4.55)

$$u_c(t) = U_m \cdot e^{-\frac{t}{rC}}$$

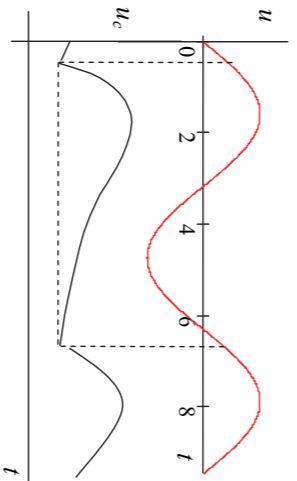


Рис. 4.55

Разряд будет продолжаться до тех пор, пока напряжение на конденсаторе будет больше входного напряжения: $u_c(t) > u(t)$. Влияние величины емкости на скорость разряда конденсатора показано на рис. 4.56. Исползование ёмкостного элемента, включенного к нагрузке однополупериодного выпрямителя, позволяет обеспечить сглаживание выпрямленного напряжения и выдолбить поставленную задачу в определенном диапазоне нагрузок.

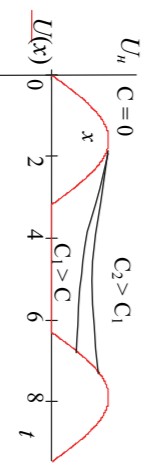


Рис. 4.56

Схемы однофазных выпрямителей.

Рассмотрим наиболее распространенные схемы однофазных выпрямителей:

1) Двухполупериодный выпрямитель (рис. 4.57).

Дано: напряжение $u_1(t) = U_m \cdot \sin \omega \cdot t$, сопротивление R_n , диоды 1, 2, 3, 4 и их ВАХ.
 Требуется определить U_n и i_n .

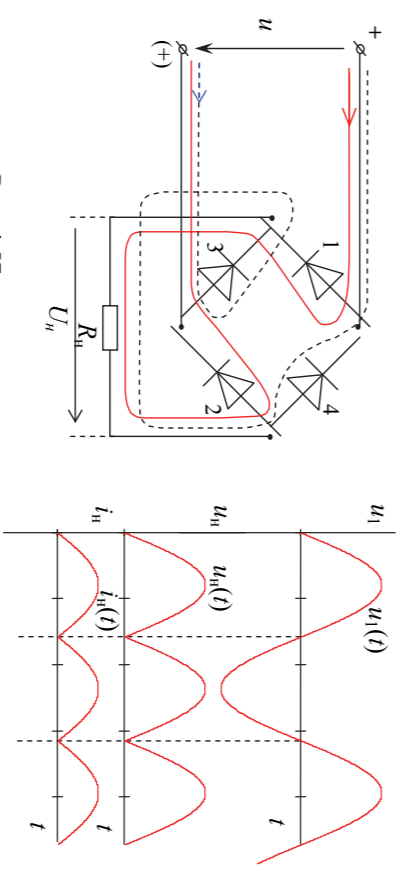


Рис. 4.57

Рис. 4.58

В дальнейшем процессы повторяются. Временные диаграммы приведены на рис. 4.58.

Проанализируем воздействие C-элементов на кривые выходного напряжения (рис. 4.59). При двухполупериодном выпрямлении качество выпрямленного напряжения можно обеспечить меньшими значениями реактивных элементов. Главным недостатком этого выпрямителя является то, что уровень выпрямленного напряжения определяется входным напряжением.

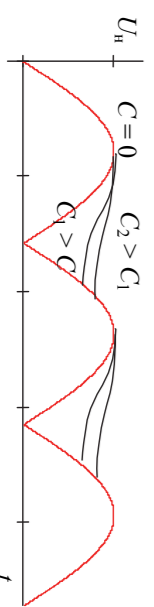


Рис. 4.59

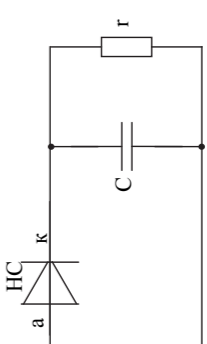


Рис. 4.54

Ток равен $i = \frac{u}{r}$.

В цепях с конденсатором при первом включении на напряжение $U \neq 0$ наблюдается некорректная коммутация, которая сопровождается скачками тока больших величин. Если $C > 1000$ мкФ, то выпрямитель необходимо защищать от этих скачков.

В момент времени, когда входное напряжение достигает максимальной величины

$$t \geq \frac{\pi}{\omega} + \varepsilon,$$

Процессы в схеме (см. рис. 4.60) полностью аналогичны предыдущей (см. рис. 4.57): там, где были включенными диоды 1 и 2, здесь будет отпираться диод 1.

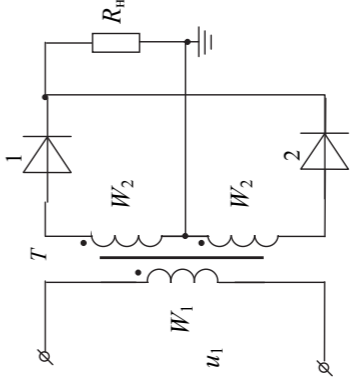


Рис. 4.60

С помощью трансформатора элемента входная цепь с напряжением U_1 гальванически развязывается с выходной цепью с напряжением U_n . Если какую-то точку выходной цепи соединить с землей, то тогда электромагнитный импульс, поступивший во входную цепь, не приведет к перераспределению потенциалов в выходной цепи. Электромагнитным импульсом может быть грозовой разряд, сварочная дуга, внезапные короткие замыкания в цепи или обрывы.

Электромагнитный импульс распространяется без проводов и навигируется в электрической цепи благодаря реактивным элементам.

Схемы трехфазных выпрямителей.

Рассмотрим однополупериодный трехфазный выпрямитель (рис. 4.61). Исходная информация для расчетов задается аналогично. Дано: входное фазное напряжение $u_A = U_A \cdot \sin \omega \cdot t$, сопротивление нагрузки R_n , диоды 1, 2, 3 и их ВАХ.

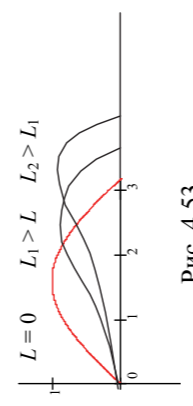


Рис. 4.53

Использование L -элемента в однополупериодном выпрямителе для улучшения качества выпрямленного тока позволяет уменьшить коэффициент амплитуды K_n , но не обеспечивает идеальное выпрямление переменного тока.

Работа однополупериодного выпрямителя на rC -нагрузке. Введем в схему однополупериодного выпрямителя емкость C , включенную параллельно нагрузке (рис. 4.54). Расчет также начнем с момента отпирания диода. Применим метод кусочно-линейной аппроксимации. Пусть в некоторый момент времени t_1 рабочая точка на характеристике диода переходит в первый квадрант, выполняется условие $\phi_a > \phi_k$. Сопrotивление диода становится равным нулю: $r = 0$. Напряжение источника становится равным напряжению на конденсаторе и на нагрузке:

Выражение для тока примет вид

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_z) + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot e^{-\mu t} \cdot e^{-\tau z} \cdot \sin(\varphi_z) \cdot \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_z),$$

где $p = -r/L$.

Построим этот ток (рис. 4.52, штриховая линия). Решение для тока справедливо, пока ток больше нуля: $i(t) > 0$. При возрастании индуктивности (рис. 4.53) ампер-секундная площадь не изменяется, а только деформируется.

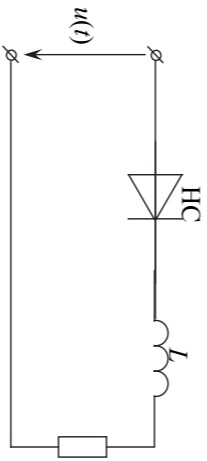


Рис. 4.50

Применим метод кусочно-линейной аппроксимации. Расчет начнем с момента времени $t = 0$. В этот момент диод открывается и его сопротивление становится равным нулю. Задача решается так же, как и при расчете переходного процесса.

Решение здесь приводить не будем, дадим только конечное выражение для тока

$$i(t) = A \cdot e^{pt} + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_z).$$

Первое слагаемое в этом выражении – свободная составляющая, а второе слагаемое – принужденная составляющая, которая считается по схеме замещения (рис. 4.51) комплексно-символическим методом. Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий

$$0 = A + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin(-\varphi_z),$$

$$A = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin(\varphi_z).$$

откуда

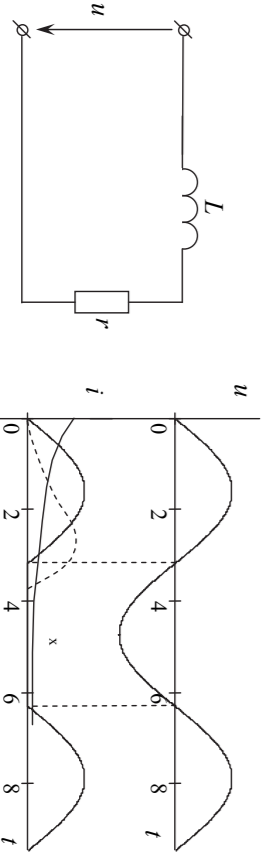


Рис. 4.51

Рис. 4.52

Выбирая K_{T1} , можно сформировать любое заданное напряжение U_2 :

$$U_2 = K_{T1} \cdot U_1$$

Этого недостаточно в лет в схеме (рис. 4.60) т.к. с помощью вторичной обмотки трансформатора можно получить любое напряжение на выходе трансформатора с помощью вторичной обмотки трансформации.

Коэффициент трансформации равен

Определить напряжение нагрузки u_n .

Расчет этого выпрямителя начнем с момента времени $t = \frac{\pi}{6}$. С этого момента при $t \geq \frac{\pi}{6}$ напряжение U_A становится больше всех остальных напряжений, поэтому напряжение нагрузки равно

$$u_n = u_A = U_A \cdot \sin \omega \cdot t.$$

С момента времени $t \geq \frac{5\pi}{6}$ напряжение U_B становится больше всех остальных напряжений. Поэтому напряжение нагрузки равно

$$u_n = u_B = U_A \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot \pi).$$

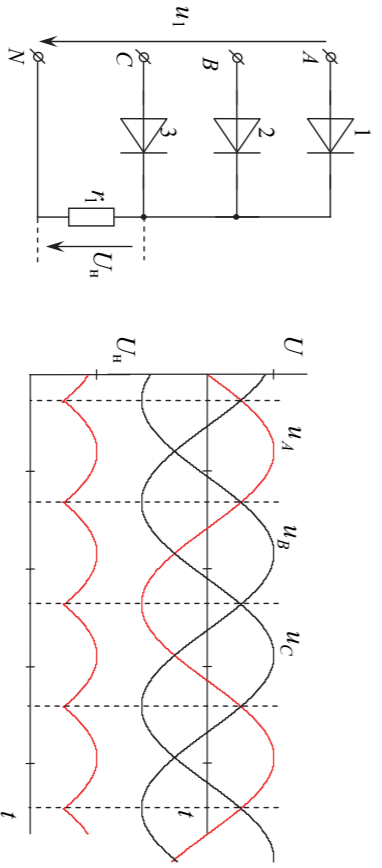


Рис. 4.61

Рис. 4.62

Дальнейшие расчеты понятны, а временная диаграмма показана на рис. 4.62.

Кривая выходного напряжения однополупериодная, она колеблется от амплитудного значения до его половины. Этим напряжением уже можно питать такие нагрузки, как двигатель постоянного тока, у которого наблюдается малая зависимость скорости вращения от коэффициента пульсации.

Рассмотрим трехфазный двухполупериодный выпрямитель (рис. 4.63, схема Ларионова).

Схема (см. рис. 4.63) работает аналогично предыдущей (см. рис. 4.61). В интервале точек 1 – 2 (рис. 4.64) кривая напряжения u_{cA} инвертируется. Поэтому выходное напряжение u_n имеет еще меньший коэффициент пульсации по сравнению со схемой (см. рис. 4.62).

$$J = |I_1 - I_2|.$$

Учитывая, что к элементам приложено одно и то же напряжение, просуммируем токи:

Пусть заданы: ток источника J , емкость C , нелинейная характеристика индуктивности. Требуется определить эквивалентную характеристику цепи относительно зажимов источника и изучить триггерный эффект.

Включим линейную емкость и нелинейную индуктивность параллельно (рис. 4.75) и подключим их к источнику тока. В анализе этой цепи также воспользуемся методом Калантарова.

Если емкость C и индуктивность L соединены последовательно (рис. 4.73), то следует ожидать феррорезонанс напряжений, т.е. скачок тока в цепи.

Феррорезонанс токов.

Если индуктивный и емкостный элементы соединены последовательно (рис. 4.73), то следует ожидать феррорезонанс напряжений, т.е. скачок тока в цепи.

Рис. 4.74

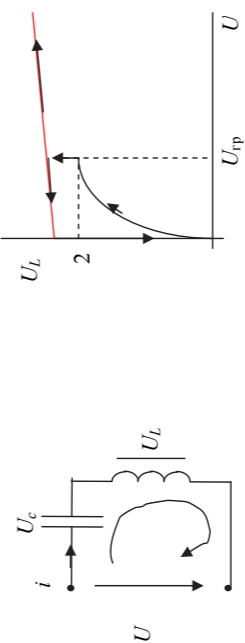
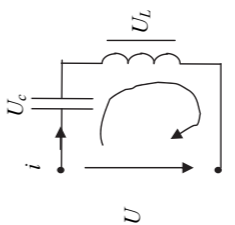


Рис. 4.73



Феррорезонанс напряжений и феррорезонансный стабилизатор переменного напряжения.

Если индуктивный и емкостный элементы соединены последовательно (рис. 4.73), то следует ожидать феррорезонанс напряжений, т.е. скачок тока в цепи.

Составим уравнения входных и выходных характеристик. Для выходного контура

$$E_k = I_k R_k + U_{\text{вн}}$$

Аналогично, для входного контура

$$U_1 = I_{\text{вн}} R_{\text{вн}} + U_{\text{вн}}$$

Входные характеристики (см. рис. 4.79, а) сняты при условии $U_{\text{вн}} = \text{const}$, а выходные (см. рис. 4.79, б) – при условии $I_{\text{вн}} = \text{const}$.

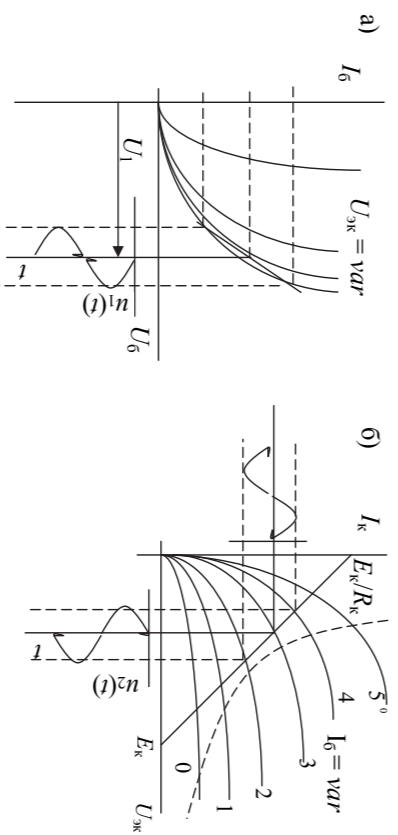


Рис. 4.79

Уравнения второго закона Кирхгофа для выходной части цепи называют уравнениями рабочей характеристики. Уравнение рабочей характеристики есть уравнение прямой. Построить эту характеристику можно по двум точкам. При токе коллектора, равном нулю ($I_k = 0$), напряжение $U_{\text{кв}} = E_k$, и при напряжении $U_{\text{кв}} = 0$ ток коллектора равен

$$I_k = E_k / R_k.$$

После построения рабочей характеристики проверяется тепловой режим работы транзистора. Далее рассчитывается мощность, которую транзистор может рассеять (см. рис. 4.79, б, прерывистая линия):

$$P_{\text{д}} = U_{\text{кв}} I_k.$$

Эта прерывистая линия, линия допустимой мощности, не должна пересекать рабочую характеристику.

Рассчитаем режим усиления постоянного тока. Если напряжение $U_1 = 0$, то ток $I_{\text{вн}} = 0$ и напряжение $U_{\text{вн}} = 0$.

Токи в цепи и потокоосцепление катушки изменяются во времени, как это показано на рис. 4.102.

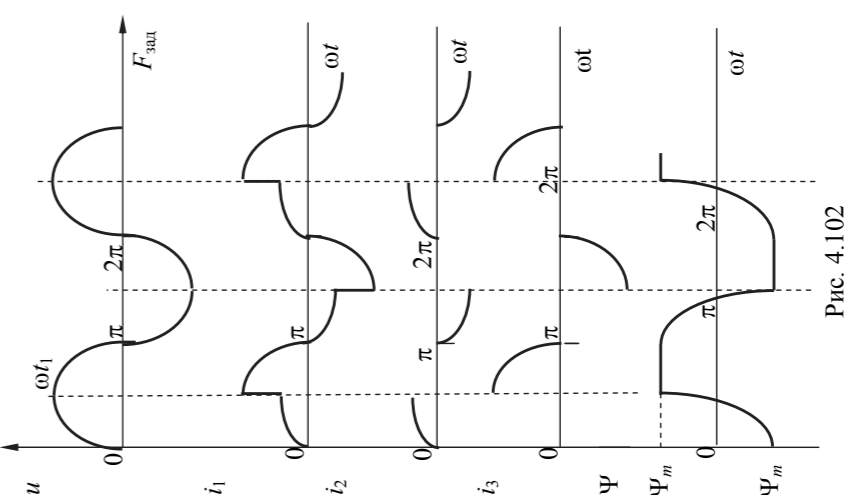


Рис. 4.102

Ток резистора R_2 определяется как $i_2 = i_1 - i_3$.

$$i_2 = i_1 - i_3 = i_1 - i_1 \cos \alpha = i_1 (1 - \cos \alpha)$$

На этом интервале токи равны $i_1 = i_2 = i_3 = i_1$.

ника, т.к. именно в этой точке выполняется уравнение, записанное по второму закону Кирхгофа:

$$U_{\text{нр}} = U_{\text{ак(в)}} - I R_k.$$

Таким образом, по графику определяем

$$U_{\text{нр}} \approx 24 \text{ В}; \quad I_{\text{нр}} \approx 0,8 \text{ А}.$$

Примечание. Можно в состав эквивалентного источника включать нелинейный элемент. В этом случае внешняя характеристика эквивалентного генератора будет нелинейной.

Задача 4.5. Дано: для цепи (рис. 4.99) $e = 20 \sin \omega t$, $E_0 = 10 \text{ В}$; $r_1 = 10 \text{ Ом}$; $r_2 = 10 \text{ Ом}$. Найти: $i_1(\omega t)$; $i_2(\omega t)$; $i_3(\omega t)$.

Решение

Считаем диоды идеальными. В интервале $0 \leq \omega t \leq \pi$ («+») в точке а) диод VD_2 заперт и тока не проводит. Диод VD_1 также заперт до тех пор, пока ЭДС источника не превысит величину E_0 . Это произойдет в момент времени, который может быть найден из соотношения

$$E_m \sin(\omega t_1) = E_0; \quad \omega t_1 = \arcsin \frac{E_0}{E_m} = \arcsin \frac{10}{20} = 30^\circ.$$

При $\omega t_2 = \pi - 30^\circ$ диод VD_1 вновь запирается, и токи i_1 и i_2 становятся равными нулю.

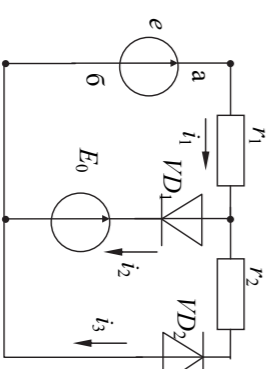


Рис. 4.99

Амплитуда этих токов, когда диод VD_1 открыт, равна

$$I_{1m} = I_{2m} = \frac{E_m - E_0}{r_1} = 1 \text{ А}.$$

В интервале $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$ диод VD_1 заперт, а диод VD_2 открыт. Токи i_1 и i_3 равны друг другу и находятся по формуле

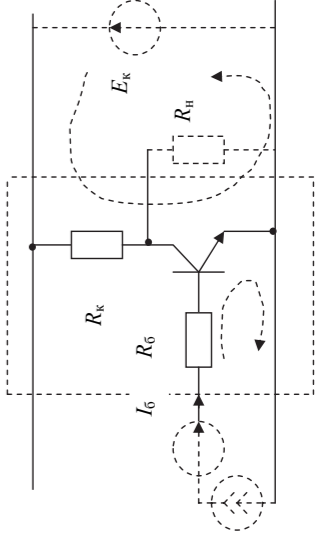


Рис. 4.78

Рассчитаем усилительный каскад графическим методом по серийным семействам входных и выходных характеристик (рис. 4.79).

Рассмотрим цепь усилительного каскада с общим эмиттером (рис. 4.78).

Усилительный каскад на транзисторе.

Усилитель переменного тока при тех же условиях отношений токов.

Если на вход усилителя подать переменный ток с действующим значением I_1 , а на выходе снять действующее значение тока I_2 , то это будет усилитель переменного тока при тех же условиях отношений токов.

$$I_2 / I_1 > 1.$$

должно быть больше единицы:

Если приращения Δi и Δu на входе или на выходе малы и медленно изменяются во времени, то речь идет об усилителях постоянного тока или напряжения. Тогда в стационарном состоянии усилителя отношение токов

$$K_p = K_i K_u.$$

можно говорить о коэффициенте усиления мощности, который равен произведению коэффициентов K_i и K_u :

усилитель U является усилителем напряжения и характеризуется коэффициентом усиления напряжения K_u .

$$d u_2 / d u_1 = K_u = K_u.$$

говорят, что усилитель U является усилителем тока, который характеризуется коэффициентом усиления K_i , или для напряжений

$$d i_2 / d i_1 = K_i > 1,$$

В усилителях малым входным приращением $d i_1$ соответствуют большие выходные приращения $d i_2$. Если отношение

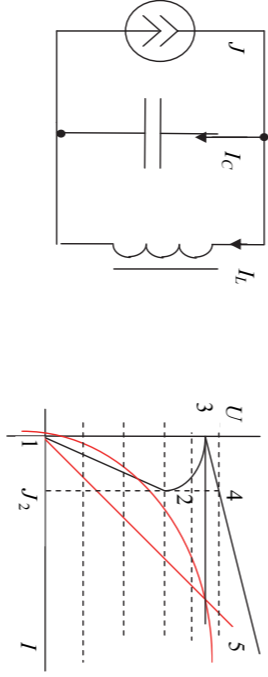


Рис. 4.75

Рис. 4.76

Результатирующая характеристика будет характеризоваться отрезками 1 – 2 – 3 – 4 – 5. Здесь участки 1 – 2 и 3 – 5 устойчивые, а участок 2 – 3 неустойчивый. При увеличении тока источника до I_2 (рис. 4.76), будет наблюдаться скачок напряжения из точки 2 в точку 4. Дальнейшее увеличение тока I будет сопровождаться движением рабочей точки по отрезку 4 – 5. При понижении тока рабочая точка двигается по участку 5 – 4 – 3, а в точке 3 происходит скачок в точку 1.

Так как скачки 2 – 4 и 3 – 1 находятся в разных зонах, то схема обладает триггерным эффектом.

Аналогичный эффект скачкообразного изменения напряжения и тока может быть получен в цепи с линейной ёмкостью и нелинейным управляемым элементом (тиристором). Это явление называют **тиристорным феррорезонансом**.

Все выводы по тиристорному феррорезонансу полностью совпадают с выводами по феррорезонансу, то есть работа тиристора сведена к работе нелинейной индуктивности.

4.10. Усиление постоянного и переменного напряжений и тока

Усиление постоянного и переменного напряжений и тока может быть получено с помощью нелинейных управляемых элементов и дополнительных источников. Соответственно, в усилителе постоянного тока используются дополнительные источники постоянного тока, а в усилителе переменного тока (напряжения) используются дополнительные источники переменного тока (напряжения).

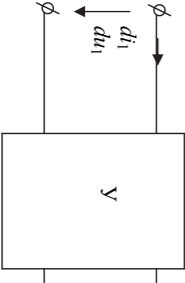


Рис. 4.77

Такие усилители можно представить активными четырёхполюсниками (рис. 4.77).

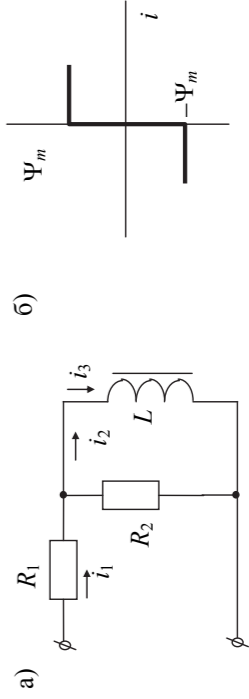


Рис. 4.101

напряжения $i(t) = 10 \sin(500t)$.

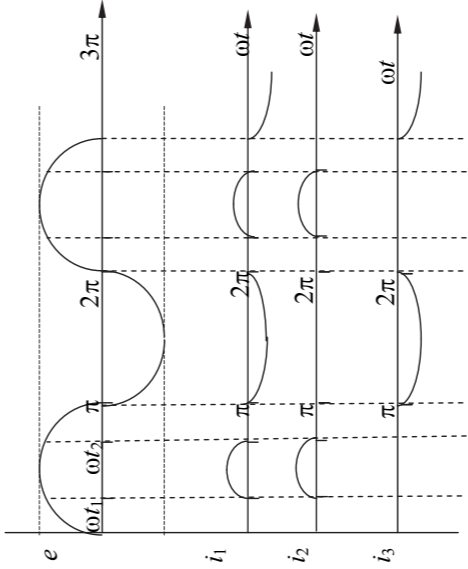
Потокоосцепление насыщения катушки $\Psi_m = 5 \cdot 10^{-3}$ Вб. Входное

$= 100$ Ом. Потокоосцепление насыщения катушки $\Psi_m = 5 \cdot 10^{-3}$ Вб. Входное

характеристику намагничивания (рис. 4.101, б). Параметры цепи: $R_1 = R_2 =$

индуктивностью (рис. 4.101, а). Сердечник катушки имеет прямоугольную

Рис. 4.100



Примерные графики токов в цепи изображены на рис. 4.100.

$$|i \cos \omega t| = j \omega \cos \frac{\omega t}{2} = (j \omega)^2 i = (j \omega)^2 i$$

сердечник перематывается. При этом ток катушки $i_3 = 0$, а токи i_1 и i_2 равны друг другу и находятся по закону Ома:

$$i_1 = i_2 = \frac{U_m}{R_1 + R_2} \sin \omega t = 0,05 \sin 500t.$$

Напряжение на катушке индуктивности равно

$$U_L = i_2 \cdot R_2 = 5 \sin 500t.$$

Потокоосцепление катушки можно определить по формуле

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_L = 5 \sin 500t.$$

Интегрируем это уравнение:

$$\Psi = \int 5 \sin 500t \cdot dt + \text{const};$$

$$\Psi = \frac{-5}{500} \cos 500t + \text{const}.$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что при $t = 0$

$$\Psi = -\Psi_m.$$

$$-\Psi_m = -0,01 \cos 0 + \text{const};$$

$$-5 \cdot 10^{-3} = -10^{-2} + \text{const};$$

$$\text{const} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}.$$

Выражение для потокоосцепления на этом интервале

$$\Psi(t) = 5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2} \cos 500t.$$

Когда перематывание закончится, потокоосцепление будет равно $+\Psi_m$. Отсюда находим момент времени или угол, при котором сердечник насыщается

$$\Psi_m = 5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2} \cos \omega t_1;$$

$$5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2} \cos \omega t_1;$$

$$\cos \omega t_1 = 0; \omega t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

В интервале $(\omega t_1 \leq \omega t \leq \pi)$ потокоосцепление равно

$$\Psi = \Psi_m = 5 \cdot 10^{-3} = \text{const},$$

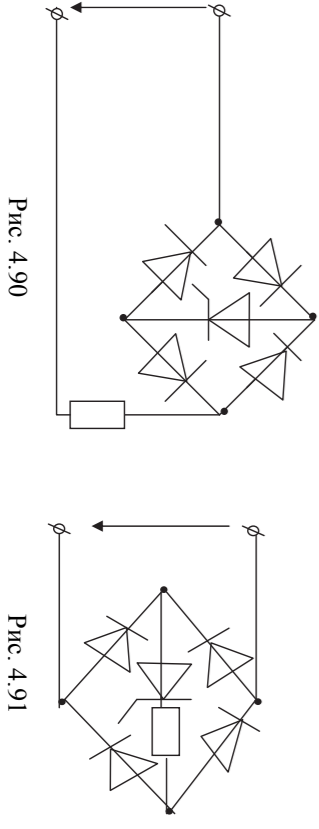


Рис. 4.90

Рис. 4.91

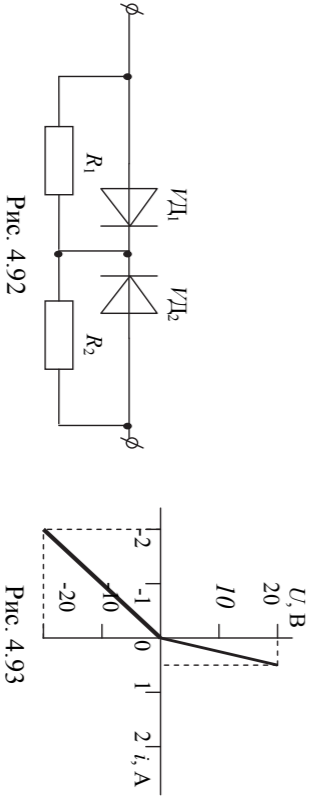


Рис. 4.92

Рис. 4.93

Учитывая, что при положительных значениях напряжения и тока (первый квадрант характеристики на рис. 4.93) диод VD_1 проводит ток, а VD_2 не проводит, резистор R_1 оказывается замкнутым, а через R_2 течет ток.

При $U = 20$ В ток равен

$$I_1 = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ A.}$$

Найдем среднее значение регулируемого напряжения

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |u_r| dt = \frac{U}{\pi} m (1 + \cos \alpha).$$

Действующее значение регулируемого напряжения равно

$$U_r = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_r^2 dt} = U_m \sqrt{\frac{\pi - \alpha}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \cdot \sin 2\alpha}.$$

Регулирование осуществляется изменением угла регулирования α

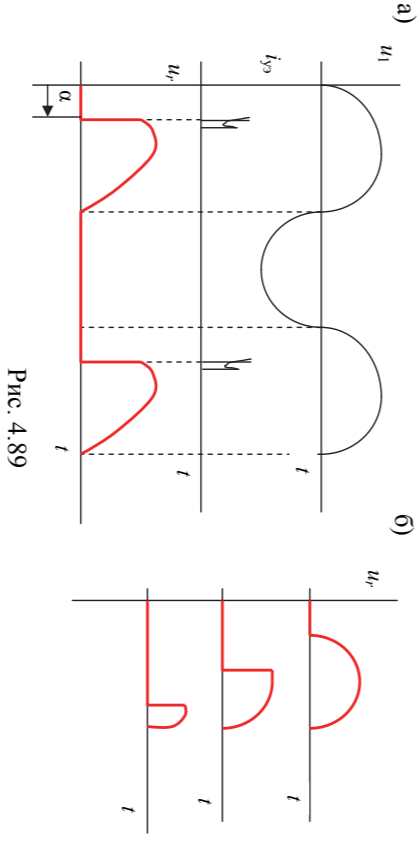


Рис. 4.89

Управление тиристором осуществляется подачей в нужный момент времени максимального тока в управляющий электрод $I_{\text{УЭ}} = \max$ (рис. 4.89, а).

Регулирование осуществляется изменением угла регулирования α (рис. 4.89, б).

токах и напряжениях можно осуществлять регулирование напряжения или тока.

Подпид на вход напряжение $U_1 > 0$. Появится ток базы, и на семействе выходных характеристик $U_2 = U_1 \sin \omega t$. Для получения необходимого коэффициента усиления потенциал базы предельно смещают, например, на напряжение U_1 (см. рис. 4.79, а). При этом чем крувее кривая входной характеристики, тем больше коэффициент усиления.

Рассмотрим режим усиления переменного тока. Подпид на вход напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \sin \omega t.$$

Точки пересечения берем по крайней входной характеристике. На семействе выходных характеристик найдём точки пересечения отмеченных точек входных характеристик по току базы. Спроектируем входное напряжение $u_{\text{вх}}(t) = U_1 \sin \omega t$ на семейство выходных характеристик. Получим выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t) = u_2(t)$. По отношению амплитуд можно определить коэффициент усиления

$$K_u = U_{\text{вх}} / U_{\text{вых}}.$$

Рассмотренные режимы работы транзистора являются составными режимами класса В и С. Это такие режимы, когда используется отрицательная область напряжения $U_{\text{об}}$.

Реализация логических функций усилительным каскадом на транзисторе.

Рассмотрим основные логические функции. Первая из них это отрицание «НЕ» (имеет два логических состояния 0 и 1). Электрическая схема (рис. 4.80) реализует логическую операцию «НЕ». Ее электрическая временная диаграмма (рис. 4.81) характеризует основные режимы работы. Таблица истинности (табл. 4.1) логических состояний понятна и проста.

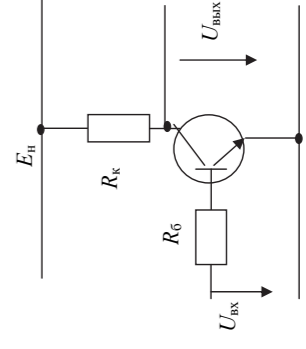


Рис. 4.80

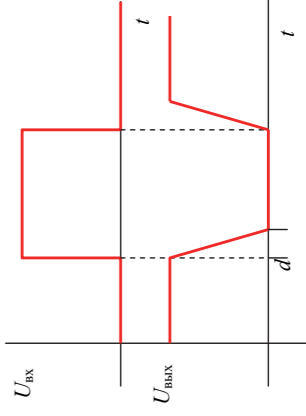


Рис. 4.81

На базе однополупериодного регулятора постоянного напряжения можно создать двухполупериодный регулятор переменного напряжения (рис. 4.90) или двухполупериодный регулятор постоянного напряжения (рис. 4.91).

Теория работы этих регуляторов однотипна и отгиается от предыдущей задачи только тем, что и в отрицательный полупериод отпирается тиристор. Обучающему дается возможность самостоятельно рассмотреть эти процессы.

На базе регулирования можно реализовать случаи – **стабилизацию** напряжения или тока. Для этого закон регулирования должен быть таким, чтобы напряжение или ток на нагрузке были неизменными.

4.12. Практическое приложение

Задача 4.1. Построить ВАХ цепи (рис. 4.92), считая диоды идеальными ($R_1 = 10 \text{ Ом}; R_2 = 40 \text{ Ом}$).

Решение

ВАХ может быть построена по трем точкам, одна из которых – начало координат, а две других, расположенных в 1 и 3-м квадрантах системы координат (u, i) находятся по закону Ома.

Далее закорачиваем источник и находим сопротивление короткого замыкания относительно его эдс

$$R_{\text{кз}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10} = 7,5 \text{ Ом.}$$

Таким образом, цепь (см. рис. рис. 4.98, а) можно заменить цепью, в которой последовательно соединены $R_{\text{кз}}$ и ЭЭ (рис. 4.98, б) и напряжение источника равно напряжению холостого хода на зажимках



Рис. 4.98

Затем рассчитываем внешнюю характеристику эквивалентного источника. Эту характеристику можно построить по двум точкам, первая из которых

$$U = U_{\text{кз}} = 0;$$

Вторую точку находим, задавшись, например, током $I = 2 \text{ A}$. При этом напряжение эквивалентного источника определяется по формуле

$$U = U_{\text{кз}} - IR_{\text{кз}} = 30 - 2 \cdot 7,5 = 15 \text{ В.}$$

Откладываем эту точку на графике (рис. 4.98, б) и соединяем ее с первой точкой прямой линией.

Решение задачи (рабочая точка) находится на пересечении ВАХ нелинейного элемента и внешней характеристики эквивалентного источ-

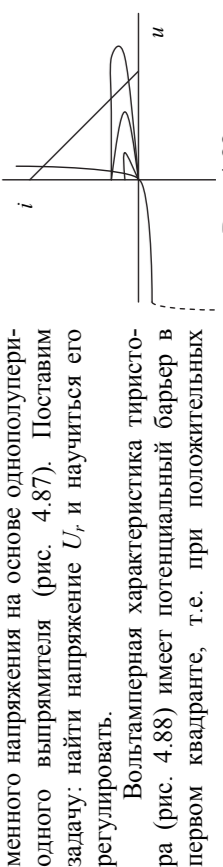


Рис. 4.88

Вольтамперная характеристика тиристора (рис. 4.88) имеет потенциальный барьер в первом квадранте, т.е. при положительных

также регулятором тока или напряжения.

Под идеальным регулированием напряжения и тока понимают регу-

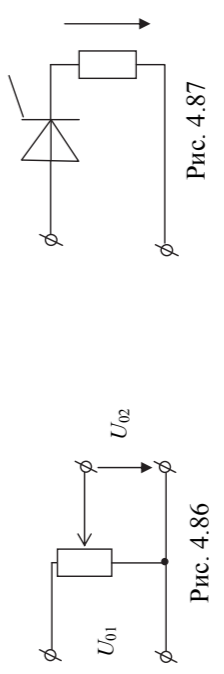


Рис. 4.87

Рис. 4.86

вать их действующее или среднее значения, а также амплитуду.

Регулирование — это изменение переменного (постоянного) напря-

4.11. Регулирование постоянного и переменного напряжения и тока

жжения и тока по заданному закону.

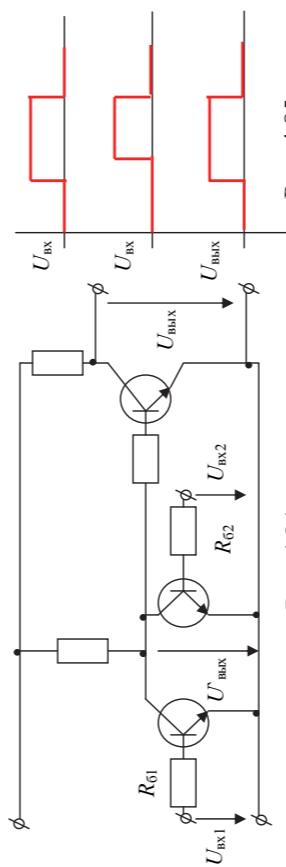


Рис. 4.85

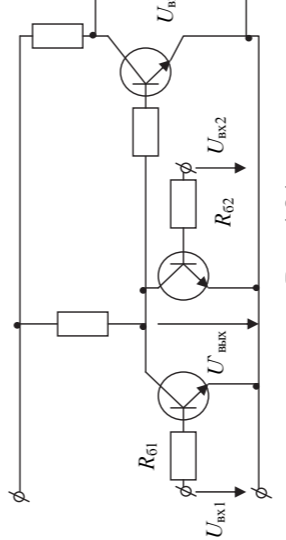


Рис. 4.84

$U_{\text{вх}}$	$U_{\text{вх}}$
0	1
1	0

Таблица 4.1

Вторая логическая операция «И». Рассмотрим ее на примере функ-

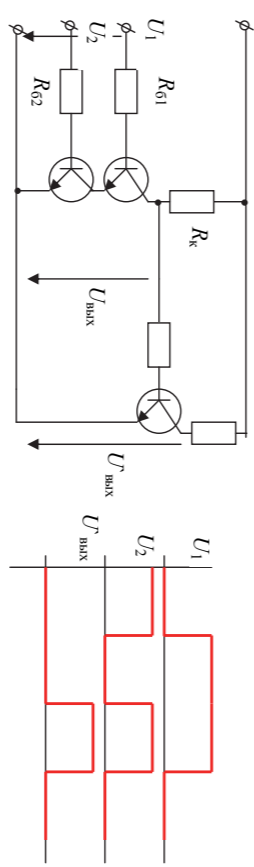


Рис. 4.82

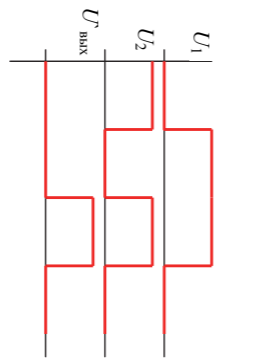


Рис. 4.83

Таблица логических состояний (табл. 4.2) рассматриваемой функции также понятна и проста, а временные диаграммы (рис. 4.83) иллюстрируют возможные состояния сигналов.

$U_{\text{вх}1}$	$U_{\text{вх}2}$	$U_{\text{вх}}$	$U_{\text{вх}}$
0	1	1	0
1	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1

Таблица 4.2

Следующая простая логическая функция «ИЛИ». Рассмотрим ее на примере функции «2-ИЛИ» (рис. 4.84). Временные диаграммы (рис. 4.85) также иллюстрируют возможные состояния сигналов. Видно, что транзисторы теперь включены параллельно, поэтому табл. 4.3 имеет противоположные состояния по отношению к табл. 4.2 функции «2-И».

$U_{\text{вх}1}$	$U_{\text{вх}2}$	$U_{\text{вх}}$	$U_{\text{вх}}$
0	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Таблица 4.3

ВАХ показана на рис. 4.94, б.
Задача 4.3. В цепи (рис. 4.95, а) полупроводниковый диод имеет ВАХ (рис. 4.95, б). При этом $U = 1,5 \text{ В}$; $R = 20 \text{ Ом}$. Определить ток в цепи.

При обратной полярности напряжения VD_1 заперт, а ток проводит диод VD_2 . Ток находится по закону Ома:

$$U - I R_2 = -I R_1$$

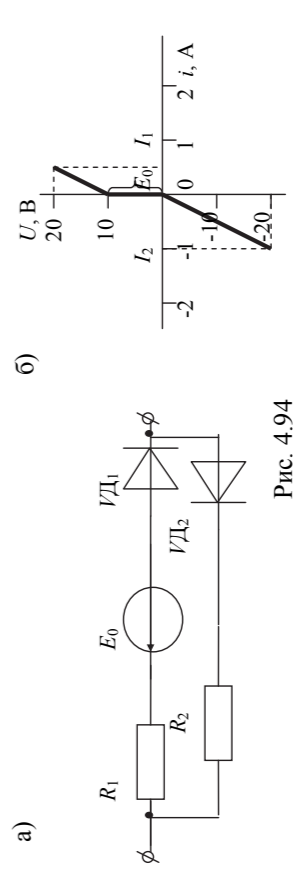


Рис. 4.94

где $U = 20 \text{ В}$; $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$.

Ток в этом случае находится по формуле

$$I_1 = \frac{U - E_0}{R_1}$$

При указанной полярности напряжения ток может проводить верхний диод, однако он открывается лишь при $U \geq 10 \text{ В}$, т.к. при меньшем напряжении источник дополнительный источник E_0 создает на аноде диода отрицательное напряжение.

Решение

При обратной полярности напряжения ток может проводить верхний диод, однако он открывается лишь при $U \geq 10 \text{ В}$, т.к. при меньшем напряжении источник дополнительный источник E_0 создает на аноде диода отрицательное напряжение.

ВАХ показана на рис. 4.93.

$$U - I R_2 = -I R_1$$

При обратной полярности напряжения ток может проводить верхний диод, однако он открывается лишь при $U \geq 10 \text{ В}$, т.к. при меньшем напряжении источник дополнительный источник E_0 создает на аноде диода отрицательное напряжение.

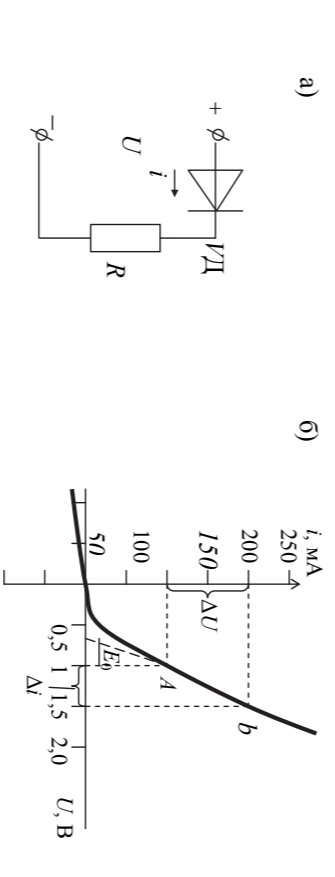


Рис. 4.95

Решение

Данную задачу целесообразно решить путем линеаризации ВАХ диода, как это показано на рис. 4.95, б.

При этом эквивалентная схема цепи будет иметь вид (рис. 4.96). ЭДС добавочного источника может быть найдена по рис. 4.95, б, и составляет $E_0 \approx 0,7 \text{ В}$.

Динамическое (дифференциальное) сопротивление диода находится по формуле

$$R_D = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_B - U_A}{I_B - I_A} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ Ом}$$

Ток определяется по закону Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС:

$$I = \frac{U - E_0}{R + R_D} = \frac{1,5 - 0,7}{20 + 5} = \frac{0,8}{25} = 0,032 \text{ А}$$

Рис. 4.96

Примечание. Если бы ток оказался на нелинейном участке ВАХ, то линеаризацию характеристики диода необходимо было бы провести заново.
Задача 4.4. Определить ток и напряжение на нелинейном элементе (рис. 4.97, а), если $E = 40 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$. Нелинейный элемент обладает характеристикой (рис. 4.97, б).

Решение

Данную задачу целесообразно решать с использованием метода эквивалентного генератора.

Размыкаем ветвь с нелинейным элементом и определяем напряжение на зажимах (а – б) при холостом ходе. При этом

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{40}{10 + 30} = 1 \text{ А}$$

$$U_{\text{аб(х)}} = I R_2 = 1 \cdot 30 = 30 \text{ В}$$

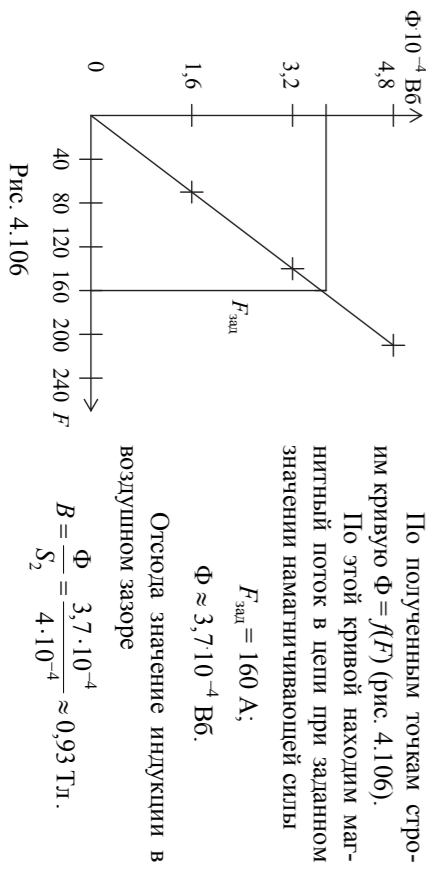


Рис. 4.106

$$N_{38} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 954900 \text{ A/м}; \quad N_3' = 250 \text{ A/м}; \quad N_3'' = 60 \text{ A/м};$$

$$F_3 = 954900 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} + 250 \cdot 0,08 + 60 \cdot 0,16 = 220 \text{ A}$$

$$B_3' = 1,2 \text{ Тл}; \quad \Phi_3 = 1,2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad B_3'' = \frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0,8 \text{ Тл};$$

Расчитываем ещё одну точку магнитной характеристики

$$N_{28} = \frac{0,8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 636600 \text{ A/м}; \quad N_2' = 60 \text{ A/м}; \quad N_2'' \approx 30 \text{ A/м};$$

$$F_2 = 636600 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} + 60 \cdot 0,08 + 30 \cdot 0,16 = 137 \text{ A}$$

$$B_2' = 0,8 \text{ Тл}; \quad \Phi_2 = 0,8 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 32 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad B_2'' = \frac{32 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} \approx 0,53 \text{ Тл};$$

Полученное значение намагничивающей силы меньше заданной 0,8 Тл:

$$F = I\omega = 200 \cdot 0,8 = 160 \text{ A}$$

Полученное значение намагничивающей силы меньше заданной

$$F_1 = I \cdot \omega = N_{18} \cdot \delta + N_{11}' \cdot \ell_{2cp} + N_{11}'' \cdot \ell_{2cp};$$

$$F_1 = 31830 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} + 25 \cdot 0,08 + 15 \cdot 0,16;$$

$$F_1 = 68,1 \text{ A}$$

Намагничивающая сила катушки находится по формуле

Задача 4.7. Рассчитать и построить кривые токов и напряжения U_{ab} в цепи (рис. 4.103, а) если нелинейная ёмкость обладает прямоугольной кулон-вольтовой характеристикой (рис. 4.103, б).

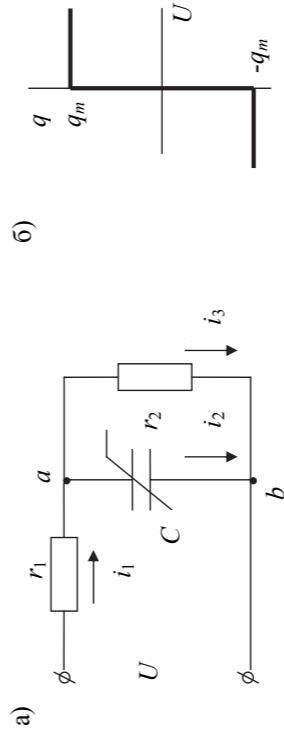


Рис. 4.103

Напряжение на входе цепи $U = 20 \sin \omega t$; угловая частота напряжения равна $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

Параметры цепи: $r_1 = 50 \text{ Ом}$; $r_2 = 150 \text{ Ом}$. Максимальное значение заряда конденсатора $q_m = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$.

Решение

Считаем, что начальное значение заряда конденсатора равно $q = -q_m$, и в положительный полупериод напряжения происходит его перезаряд. При этом пока конденсатор перезаряжается, напряжение на его зажимах равно $U_{ab} = 0$.

Токи в цепи соответственно равны

$$i_3 = 0$$

$$i_2 = i_1 = \frac{U}{r} \sin \omega t = 0,4 \sin 1000t$$

Заряд конденсатора происходит по закону

$$q = \int 0,4 \sin 1000t dt + const = 0,4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cos 1000t + const$$

Постоянную интегрирования находим из условия $t = 0$; $q = -q_m = -3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$. $const = 0,1 \cdot 10^{-3} \cos 1000t + 10^{-4} \cdot 10^{-3} = 10^{-4} \text{ Кл}$

Отсюда следует, что

$$q = 10^{-4} \cos 1000t$$

Момент времени, при котором заканчивается перезаряд конденсатора, найдём из условия

$$q = q_m; \quad \omega t = \pi$$

линии длиной dx . Поперечные сопротивления состоят из сопротивлений утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции между проводами линии, и емкостей, образованных сопротивлениями друг другу элементами (участками) линии. В магнитных линиях с распределенными параметрами продолжительные сопротивления представляют собой магнитные сопротивления самих магнитных стержней, образующих магнитную линию, а поперечные сопротивления обусловлены утечкой магнитного потока по воздуху между противостоящими друг другу участками линии.

Линию с распределенными параметрами называют **однопроводной**, если равны друг другу все продолжительные сопротивления линии одинаковой длины и если равны друг другу все поперечные сопротивления участков линии одинаковой длины. Так, участок линии (см. рис. 5.1, а) однопроводен, если $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots$ и $Z_4 = Z_5 = Z_6$.

Линию с распределенными параметрами называют **неоднородной**, если продолжительные сопротивления в ней различны или поперечные сопротивления неодинаковы.

Кроме того, линии с распределенными параметрами можно подразделять на две большие группы: нелинейные и линейные.

В качестве примера нелинейной электрической линии с распределенными параметрами можно назвать электрическую линию передачи высокого напряжения при наличии между проводами линии тухлого электрического разряда – явления короны на проводах. В этом случае емкость между противостоящими друг другу участками линии является функцией напряжения между этими участками.

В качестве примера нелинейной магнитной линии с распределенными параметрами можно назвать линию, образованную параллельно расположенными магнитными сердечниками, которые в процессе работы линии могут насыщаться.

Когда говорят о линии с распределенными параметрами, то обычно этот термин мысленно связывают с мощными линиями передачи электрической энергии на большие расстояния, с телефонными и телеграфными воздушными или кабельными линиями, с рельсовыми линиями автоблокировки на железнодорожном транспорте, с антеннами в радиотехнике и другими родственными линиями и установками.

В то же время с линиями с распределенными параметрами имеют дело и тогда, когда «линий» в буквальном смысле слова, казалось бы, вовсе нет. Так, обычная индуктивная катушка при достаточно высоких частотах представляет собой линию с распределенными параметрами (рис. 5.1, б). Из рис. 5.1, в видно, что кроме индуктивностей в схеме замещения есть межвитковые емкости и емкости на корпусе прибора (на землю). Если по катушке проходит переменный ток, то через межвитковые емкости и емкости на землю также идет ток. При одном и том же напряже-

Уравнения для линии с распределенными параметрами.

$$(5.4) \quad \frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + n \frac{\partial u}{\partial x}$$

Подставим выражение (5.2), упрощение (5.3) и подлелит полученное уравнение на dx :

$$(5.5) \quad \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + xp_0 G_0 + xp_0 n = \partial i$$

Пренебрегая слагаемым влорядности малости, получим

$$\frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial i}{\partial x}$$

5.3. Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном режиме

Пусть напряжение и ток в линии изменяются по синусоидальному закону во времени. Воспользуемся комплексно-символическим методом. Изображение тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_1)$$

где

$$I = I_m \sqrt{2}$$

Изображение напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \phi_2)$$

где

$$U = U_m \sqrt{2}$$

Комплексы I и U являются функциями расстояния x , но не являются функциями времени. Множитель $e^{j\omega t}$ есть функция времени t , но не зависит от x .

Представление изображения тока и напряжения в виде произведения двух множителей, из которых один является функцией только x , а другой – функцией только t , дает возможность перейти от уравнений в частных производных (5.1) и (5.4) к уравнениям в простых производных. Действительно,

$$H_{18} = \frac{0,4}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 318300 \text{ А/м.}$$

$$H_1' = 25 \text{ А/м;}$$

$$H_1'' \approx 15 \text{ А/м;}$$

$$H = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{B}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}.$$

Получаем

Напряжённость поля в магнитопроводе находим по кривой намагничивания, а в воздушном зазоре — по формуле

$$B_1'' = \frac{\Phi_2}{S_1} = \frac{1,6}{6 \cdot 10^{-4}} = 0,27 \text{ Тл.}$$

$$B_1' = 0,4 \text{ Тл; } \Phi_1 = B_1' S_2 = 0,4 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб ;}$$

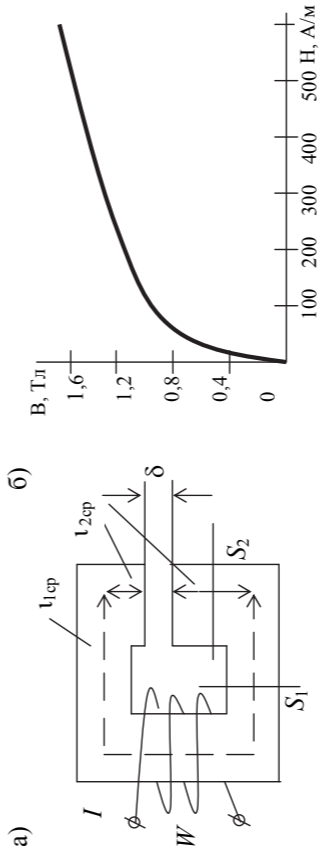
Задаёмся индукцией в воздушном зазоре, затем определяем магнитный поток, напряжённость магнитного поля на всех участках и намагничивающую силу катушки

Решение

Заданная магнитная цепь является неоднородной, поэтому для решения задачи необходимо рассчитать вспомогательную кривую — магнитную характеристику цепи.

Сечения магнитопровода: $S_1 = 6 \text{ см}^2$; $S_2 = 4 \text{ см}^2$. Воздушный зазор $\delta = 0,2 \text{ мм}$. Длина средней силовой линии магнитопровода по участкам:

Рис. 4.105



Число витков и ток намагничивающей катушки: $W = 200$; $I = 0,8 \text{ А}$.

Если же частота тока очень велика (например, сотни миллиметров герц), то токи индуктивности могут превышать ток катушки в целом. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать сопротивление переменному току емкостное, а не индуктивное сопротивление (когда ток катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор).

Если же частота тока очень велика (например, сотни миллиметров герц), то токи индуктивности могут превышать ток катушки в целом. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать сопротивление переменному току емкостное, а не индуктивное сопротивление (когда ток катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор).

Если же частота тока очень велика (например, сотни миллиметров герц), то токи индуктивности могут превышать ток катушки в целом. В этом случае вся катушка в целом будет оказывать сопротивление переменному току емкостное, а не индуктивное сопротивление (когда ток катушки и наличие емкостей можно не учитывать в расчете (что и делалось до сих пор).

Разобьем линию (см. рис. 5.2) на участки длиной dx , где x — расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине dx :

- активное сопротивление равно $R_0 dx$;
- индуктивность равна $L_0 dx$;
- проводимость утечки равна $G_0 dx$;
- емкость равна $C_0 dx$.

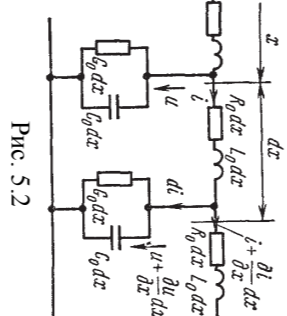


Рис. 5.2

Обозначим ток в начале рассматриваемого участка линии через i и напряжение между проводами линии в начале участка x . И ток, и напряжение являются в общем случае функциями расстояния вдоль линии x и времени t . Поэтому в дальнейшем в уравнениях использованы частные производные от i и u по времени t и расстоянию x .

Если для некоторого момента времени t ток в начале рассматриваемого участка равен i , то в результате утечки через поперечный элемент ток в конце участка для того же момента времени равен $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$,

где $\frac{\partial i}{\partial x}$ — скорость изменения тока в направлении x . Скорость, умноженная на расстояние dx , является приращением тока на пути dx .

Аналогично, если напряжение в начале участка u , то в конце участка для того же момента времени напряжение равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Оставим уравнение по второму закону Кирхгофа для замкнутого контура, образованного участком линии длиной dx , обойдя его по часовой стрелке:

$$-u + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

После упрощения и деления уравнения на dx получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i. \tag{5.1}$$

По первому закону Кирхгофа

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx. \tag{5.2}$$

Ток di (см. рис. 5.2) равен сумме токов, проходящих через проводимость $G_0 dx$ и емкость $C_0 dx$:

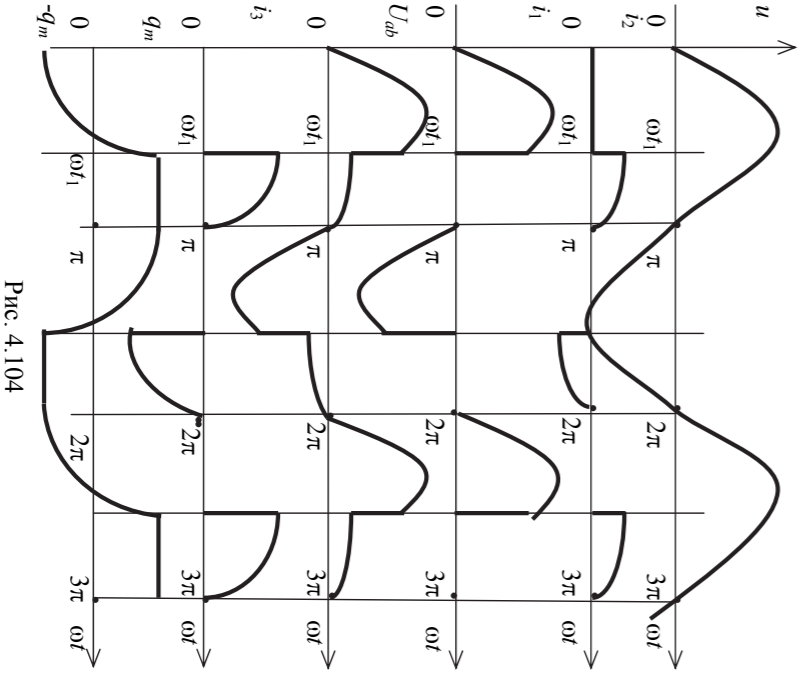


Рис. 4.104

Кривые токов и напряжения на ёмкости приведены на рис. 4.104.

На втором интервале ($\omega t \leq \omega t \leq \pi$)

$$q(t) = \text{const}; \quad i_2 = \frac{dq}{dt} = 0; \quad i_1 = i_2 = \frac{U_{ab}}{r_1 + r_2} \sin \omega \cdot t = 0,1 \sin 1000t;$$

$$U_{ab} = i_2 \cdot r_2 = 15 \sin 1000t.$$

$$3 \cdot 10^{-4} = 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} \cdot \cos \omega \cdot t_1;$$

$$\cos \omega \cdot t_1 = \frac{3 \cdot 10^{-4} - 10^{-4}}{-4 \cdot 10^{-4}} = -0,5; \omega \cdot t_1 = 120^\circ.$$

Задача 4.8. Найти индукцию в воздушном зазоре магнитопровода (рис. 4.105, а), материал которого имеет характеристику намагничивания, изображённую на рис. 4.105, б.

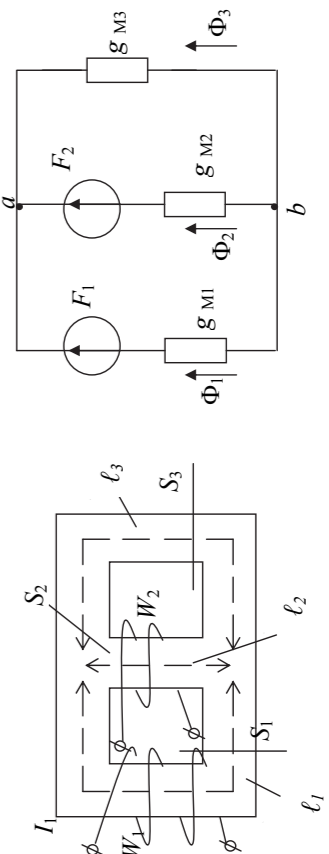


Рис. 4.108

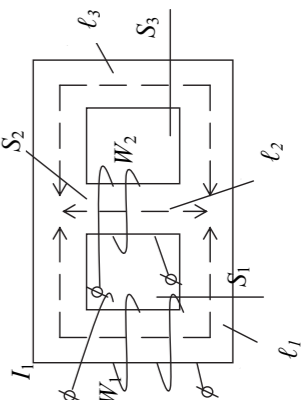


Рис. 4.107

Количество витков намагничивающих катушек и токи в них:
 $\omega_1 = 250$; $I_1 = 0,8 \text{ A}$; $\omega_2 = 300$; $I_2 = 0,5 \text{ A}$.

H, A/м	B, Тл	H, A/м	B, Тл
20	0,03	801	0,90
40	0,11	240	0,11
100	0,53	400	2,23
140	0,73	600	1,32
1800	1,54	800	0,38
2000	1,42	1000	1,42

Таблица 4.4

Характеристика намагничивания стали магнитопровода задана в табл. 4.4.

Задача 4.9. Рассчитать магнитные потоки в ветвях разветвлённой цепи (рис. 4.107). Размеры магнитопровода:

$l_1 = 26 \text{ см}$; $S_1 = 6 \text{ см}^2$; $l_2 = 8 \text{ см}$; $S_2 = 8 \text{ см}^2$; $l_3 = 30 \text{ см}$; $S_3 = 5 \text{ см}^2$.

Как видим, результат не очень сильно отличается от полученного при расчёте нелинейной цепи.

Рассматриваемому задаче можно было бы решить приближённо, если пренебречь падением магнитного напряжения на всех участках магнитной цепи, кроме воздушного зазора (так иногда поступают на практике). Тогда задача становится линейной.

Уравнение магнитной цепи

$$F = H_8 \delta; \quad H_8 = \frac{F}{\delta} = \frac{\epsilon \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 0,161}{0,000008} = 4000000 \text{ A/м}$$

$$I_a = \frac{P_c}{E} = \frac{5}{220} \approx 0,0227 \text{ A}$$

Активная составляющая тока катушки

$$I_p = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{0,4^2 - 0,0227^2} \approx 0,399 \text{ A}$$

Ток намагничивания (реактивная составляющая тока катушки)

$$b_0 = \frac{I_p}{E} = \frac{0,399}{220} = 0,00181 \text{ Ом}^{-1}$$

Проводимость ветви намагничивания

$$g_0 = \frac{I_a}{E} = \frac{0,023}{220} = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1}$$

Упрощённая эквивалентная схема замещения катушки (без индуктивности рассеяния) и векторная диаграмма приведены на рис. 4.109, а.

Для определения угла сдвига между током и напряжением найдём сначала проводимость и сопротивление параллельного участка схемы замещения (рис. 4.109, б)

$$Y_0 = \sqrt{g_0^2 + b_0^2} = \sqrt{(18,2 \cdot 10^{-4})^2 + (1,05 \cdot 10^{-4})^2} \approx 18,2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1}$$

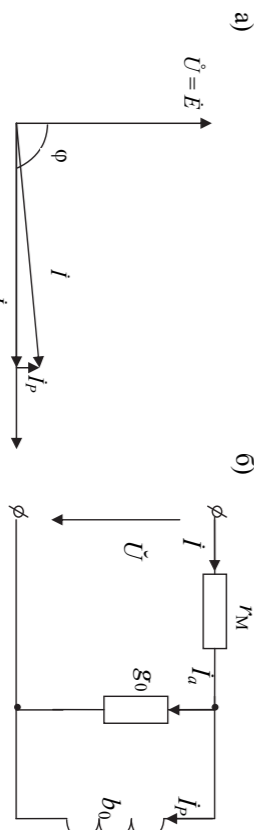


Рис. 4.109

Или в комплексной форме

$$Y_0 = 1,05 \cdot 10^{-4} - j \cdot 18,2 \cdot 10^{-4} = 18,2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-j86,69^\circ};$$

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = 549,5 \cdot e^{j86,69^\circ}$$

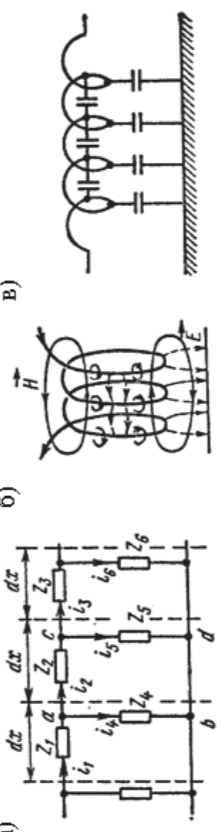


Рис. 5.1

На схеме (см. рис. 5.1, а) изображен участок линии с распределенными параметрами, через dx обозначен бесконечно малый элемент длины линии.

Сопротивления Z_1, Z_2, Z_3, \dots называют **поперечными сопротивлениями**, а Y_1, Y_2, Y_3, \dots называют **продольными сопротивлениями**.

В результате утечки тока через сопротивление Z_4 ток $i_2 \neq i_1$. Аналогично, ток $i_3 \neq i_2$ и т.д. Напряжение между точками s и r равно напряжению между точками c и i и т.д.

В электрических линиях с распределенными параметрами продольные сопротивления образуются активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков

5.1.5. Основные определения

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Комплексное сопротивление всей цепи равно

$$\bar{Z} = R_0 + j\omega L_0 = 10 + 31,7 + j \cdot 548,6 = 551,2 \cdot e^{j85,67^\circ}$$

Таким образом, угол сдвига между током и напряжением равен $85,67^\circ$.

Амплитуду магнитного потока можно найти по формуле

$$E = 4,44 \cdot \omega \cdot f \cdot \Phi_m;$$

$$\Phi_m = \frac{220}{4,44 \cdot 220 \cdot 50} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$$

Задача 4.11. Построить зависимость $U_2 = f(U_1)$ для цепи с нелинейной индуктивностью (рис. 4.110), вольт-амперная характеристика которой задана в табл. 4.6. При этом активное и ёмкостное сопротивления в цепи соответственно равны $r = 100 \text{ Ом}$; $X_C = 60 \text{ Ом}$.

$U_1, \text{ В}$	$I, \text{ А}$	$U_2, \text{ В}$	$I, \text{ А}$
20	0,2	80	1,5
40	0,5	100	2,5
60	0,9	120	4,0

Таблица 4.6

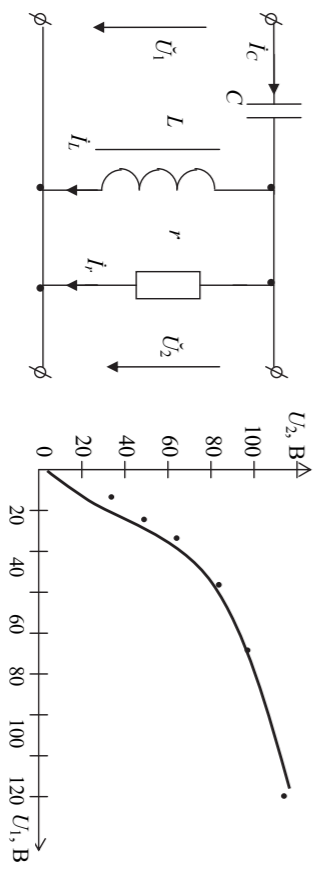


Рис. 4.110

Рис. 4.111

Решение

Воспользуемся символьным методом и, задаваясь напряжением U_2 и используя ВАХ нелинейной индуктивности, определим ряд значений U_1 .

Очевидно, при $U_2 = 0$ $U_1 = 0$. Далее задаёмся: $U_2 = U_1 = 20 \text{ В}$. При этом из табл. 4.6 получаем

$$I_1 = 0,2 \cdot e^{-j90^\circ} = -0,2j;$$

Для удобства расчёты оформляем в виде табл. 4.5.

Полученные значения магнитных проводимостей подставляем в формулу для U_{Mab} , находим $U_{Mk(k)}$ и т.д., пока значения узлового магнитного напряжения не начнут повторяться.

После этого рассчитываем магнитные проводимости ветвей

$$g_{M1(0)} = \frac{\Phi_{1(0)}}{U_{M1(0)}}; \quad g_{M2(0)} = \frac{\Phi_{2(0)}}{U_{M2(0)}}; \quad g_{M3(0)} = \frac{\Phi_{3(0)}}{U_{M3(0)}}.$$

Полученные значения магнитных проводимостей подставляем в формулу для U_{Mab} , находим $U_{Mk(k)}$ и т.д., пока значения узлового магнитного напряжения не начнут повторяться.

Для удобства расчёты оформляем в виде табл. 4.5.

Номер итерации	1	2	3
U_{Mab}, A	100	134	147
U_{M1}, A	100	96	52
U_{M2}, A	50	16	2
U_{M3}, A	-100	-434	-148
$H_1, A/м$	385	254	200
$H_2, A/м$	625	200	25
$H_3, A/м$	-333	-447	-493
$B_1, Тл$	1,2	1,12	1,0
$B_2, Тл$	1,33	1,0	0,05
$B_3, Тл$	-1,16	-1,25	-1,27
$\Phi_1, 10^4, Вб$	7,2	6,72	6,0
$\Phi_2, 10^4, Вб$	9,28	8,0	0,4
$\Phi_3, 10^4, Вб$	-5,8	-6,25	-6,35
$g_{M1} \cdot 10^6, 1/Гн$	7,2	10,2	11,5
$g_{M2} \cdot 10^6, 1/Гн$	18,6	50	20
$g_{M3} \cdot 10^6, 1/Гн$	5,8	4,7	4,29

Таблица 4.5

На третьей итерации расчёт можно считать законченным, так как

$$\Phi_1 + \Phi_2 \approx \Phi_3.$$

При этом

$$\Phi_1 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad \Phi_2 \approx 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad \Phi_3 \approx -6,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Задача 4.10. Катушка с числом витков $W = 220$ находится на магнитопроводе, выполненном из электротехнической стали. Сопротивление катушки на постоянном токе составляет 10 Ом.

При подаче на катушку синусоидального напряжения $U = 220 \text{ В}$ частотой $f = 50 \text{ Гц}$ приборы измерительного комплекта зарегистрировали следующие: $I = 0,4 \text{ А}; P = 6,6 \text{ Вт}$.

Рассчитать параметры эквивалентной схемы замещения катушки и построить векторную диаграмму. Индуктивностью рассеяния пренебречь.

Решение

Так как падение напряжения на активном сопротивлении катушки, а также индуктивное сопротивление рассеяния сравнительно невелико, считают, что ЭДС катушки равна приложенному напряжению: $E \approx U \approx 220 \text{ В}$. Потери в меди

$$P_M = I^2 \cdot r = 0,4^2 \cdot 10 = 1,6 \text{ Вт}.$$

Решение
 Так как в цепи отсутствуют воздушные зазоры и каждая из ветвей однородна, можно использовать для расчёта метод итераций.
 Эквивалентная схема замещения магнитной цепи имеет вид (рис. 4.108). Магнитодвижущие силы равны: $F_1 = I_1 \cdot \omega_1 = 200 \text{ А}; F_2 = I_2 \cdot \omega_2 = 150 \text{ А}$.
 Основные расчётная формула методом двух узлов

$$U_{Mab(k)} = \frac{F_1 \cdot g_{M1(k)} F_2 \cdot g_{M2(k)}}{g_{M1(k)} + g_{M2(k)} + g_{M3(k)}},$$

где k – номер итерации.

Начала задаёмся значением магнитного напряжения между узлами a и b , например, $U_{Mab(0)} = 100 \text{ А}$.

Затем рассчитываем магнитные напряжения ветвей по формулам

$$\begin{aligned} U_{M1(0)} &= -U_{Mab(0)} + F_1; & U_{M2(0)} &= -U_{Mab(0)} + F_2; \\ U_{M3(0)} &= -U_{Mab(0)}; & U_{M1(0)} &= -U_{Mab(0)} + 200; \\ & & & -U_{M2(0)} = -U_{Mab(0)} + 150. \end{aligned}$$

На следующем этапе определяем напряжённость магнитного поля в ветвях

$$H_{1(0)} = \frac{U_{M1(0)}}{\ell_1} = \frac{U_{M1(0)}}{0,26}; \quad H_{2(0)} = \frac{U_{M2(0)}}{\ell_2} = \frac{U_{M2(0)}}{0,08}; \quad H_{3(0)} = \frac{U_{M3(0)}}{\ell_3} = \frac{U_{M3(0)}}{0,30}.$$

Далее по кривой намагничивания (её необязательно строить, можно использовать табл. 4.5) определим магнитные потоки в ветвях по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_{1(0)} &= B_{1(0)} \cdot S_1 = B_{1(0)} \cdot 6 \cdot 10^{-4}; \\ \Phi_{2(0)} &= B_{2(0)} \cdot S_2 = B_{2(0)} \cdot 8 \cdot 10^{-4}; \\ \Phi_{3(0)} &= B_{3(0)} \cdot S_3 = B_{3(0)} \cdot 5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

После этого рассчитываем магнитные проводимости ветвей

$$g_{M1(0)} = \frac{\Phi_{1(0)}}{U_{M1(0)}}; \quad g_{M2(0)} = \frac{\Phi_{2(0)}}{U_{M2(0)}}; \quad g_{M3(0)} = \frac{\Phi_{3(0)}}{U_{M3(0)}}.$$

Полученные значения магнитных проводимостей подставляем в формулу для U_{Mab} , находим $U_{Mk(k)}$ и т.д., пока значения узлового магнитного напряжения не начнут повторяться.

Для удобства расчёты оформляем в виде табл. 4.5.

Таблица 4.4

$U_2, В$	I_C, A	I_r, A	I_a, A	I_c, A	I_r, A	I_a, A
0	0	0	0	0	0	0
20	2,0	2,0	0	2,0	2,0	0
40	4,0	4,0	0	4,0	4,0	0
60	6,0	6,0	0	6,0	6,0	0
80	8,0	8,0	0	8,0	8,0	0
100	10,0	10,0	0	10,0	10,0	0
120	12,0	12,0	0	12,0	12,0	0
147	14,7	14,7	0	14,7	14,7	0
178	17,8	17,8	0	17,8	17,8	0
0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4.4

Дальнейший расчёт ведётся по этим же формулам. Полученные результаты сводим в табл. 4.7.

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_c = \dot{U}_2 + \dot{U}_r + \dot{U}_a = (0,9 - j \cdot 0,2) \cdot 2,0 + 2,0 + j \cdot 2,0 = 2,9 - j \cdot 0,2 = 2,95 \cdot e^{-j 4,5^\circ}.$$

Напряжения в входе цепи

$$\dot{U}_1 = 2,95 \cdot e^{-j 4,5^\circ}; \quad \dot{U}_2 = 2,0.$$

По первому закону Кирхгофа

$$I_c = I_r = I_a = 2,0 \text{ А}.$$

13) Изобразите однополупериодную и двухполупериодную схемы выпрямления переменного тока.

14) Определите обратное напряжение на диоде в мостовой схеме выпрямления.

15) Изобразите временную диаграмму выходного напряжения трехфазного выпрямителя с нулевым выводом.

16) Чем стабилизатор отличается от диода?

17) Как выглядит эквивалентная схема замещения катушки со сталью?

18) Объясните физическую природу потерь в стали.

19) Каким образом можно определить параметры эквивалентной схемы замещения катушки со сталью?

20) Изобразите векторную диаграмму катушки со сталью.

21) В чем заключается особенность резонансных явлений в нелинейных электрических цепях?

22) Охарактеризуйте метод расчета нелинейных цепей переменного тока, основанный на использовании векторных диаграмм.

23) Как можно рассчитать нелинейную цепь постоянного тока, содержащую последовательно соединенные нелинейные сопротивления?

24) Как можно рассчитать нелинейную цепь постоянного тока, содержащую параллельно соединенные нелинейные сопротивления?

25) В чем заключается графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока?

26) Приведите пример расчета простейшей нелинейной магнитной цепи постоянного тока.

27) В чем заключается расчет нелинейных магнитных цепей методом двух узлов?

28) Приведите пример расчета магнитной цепи методом кусочно-линейной аппроксимации.

29) В чем заключается метод математической аппроксимации?

30) Что такое инвертирование постоянного напряжения и тока?

31) Назовите особые явления в нелинейных цепях переменного тока. Усиление постоянного и переменного напряжения и тока.

32) Как можно осуществить регулирование постоянного и переменного напряжения и тока?

Примечание. В таблицу внесём модуль U_1 , т.к. это требуется по условию задачи.

Полученная зависимость приведена на рис. 4.111.

4.13. Вопросы для самопроверки

- 1) Что такое статическое сопротивление?
- 2) Что такое дифференциальное сопротивление?
- 3) Чем отличаются статическое и дифференциальное сопротивление?
- 4) Какие методы анализа нелинейных цепей постоянного тока Вы знаете?
- 5) Каким образом можно построить ВАХ для цепи, содержащей нелинейный элемент?
- 6) Запишите закон Ома для магнитной цепи.
- 7) В каких единицах измеряется магнитное сопротивление?
- 8) В каких единицах измеряется магнитный поток?
- 9) В каких единицах измеряется магнитное напряжение?
- 10) В чем заключается задача анализа магнитной цепи?
- 11) В чем заключается задача синтеза магнитной цепи?
- 12) Как можно аппроксимировать ВАХ реального диода?

Комплексное число
 Комплексные числа \dot{A}_1 и \dot{A}_2 в решении (5.13) есть постоянные интегрирования, которые в дальнейшем определим через напряжение и ток в начале или через напряжение и ток в конце линии.

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{jx} + \dot{A}_2 e^{-jx}. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение

$$d^2 \dot{U} / dx^2 = Z_0 Y_0 \dot{U}. \quad (5.12)$$

В уравнении (5.11) вместо $\frac{d\dot{I}}{dx}$ подставим правую часть уравнения (5.8), получим

$$-\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 \dot{U}. \quad (5.11)$$

Решим систему уравнений (5.7) и (5.8) относительно \dot{U} . С этой целью продифференцируем уравнение (5.7) по x :

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0; \quad (5.10)$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0.$$

где

$$-d\dot{I} / dx = Y_0 \dot{U}; \quad (5.9)$$

$$-d\dot{U} / dx = Z_0 \dot{I}; \quad (5.8)$$

Подставим уравнения (5.5) и (5.6) в уравнения (5.1) и (5.4), сократив в полученных уравнениях множитель $e^{j\omega t}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = j\omega C_0 \dot{U} e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = e^{j\omega t} \frac{d\dot{I}}{dx}; \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} j\omega L_0 \dot{I} e^{j\omega t} = \frac{d\dot{U}}{dx} e^{j\omega t}; \\ j\omega L_0 \dot{I} = \frac{d\dot{U}}{dx}; \end{cases} \quad (5.5)$$

$$Z_1 = (A - I) / C; \quad Z_3 = I / C - A / I = D = A$$

или

Для симметричной T-схемы замещения четырехполюсника

При перемене местами источника и нагрузки в однородной линии токи в источнике и нагрузке не изменятся. Таким же свойством обладает симметричный четырехполюсник. Поэтому однородная линия с распределенными параметрами может быть заменена симметричным четырехполюсником и, наоборот, симметричный четырехполюсник можно заменить участком однородной линии с распределенными параметрами. При замене будем исходить из уравнений подраздела 5.11 и зависимостей, с помощью которых параметры симметричного четырехполюсника связаны с коэффициентами A, B, C .

Для симметричной T-схемы замещения четырехполюсника

5.12. Замена четырехполюсника эквивалентной ему линией с распределенными параметрами и обратная замена

Если сопротивление нагрузки $Z_n = Z_c$, то u четырехполюсника, как и у линии $Z_{вх} = Z_c$.
 Входное сопротивление в этом случае повторяет Z_c и поэтому называется **повторным**.

Из сопоставления нагрузки $Z_n = Z_c$, то u четырехполюсника, как и у линии $Z_{вх} = Z_c$.

Входное сопротивление в этом случае повторяет Z_c и поэтому называется **повторным**.

$$C = sh\gamma l; \quad B = Z_{сб} sh\gamma l / Z_{сб};$$

логичны, а если принять, что

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2.$$

Сопоставим u и i с известными u и i из [25] уравнениями четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2.$$

Напряжения и ток в входе и в конце линии с распределенными параметрами связаны с напряжениями и токами в начале и в конце этой линии (в нашем случае B), другая — функция времени (ωt). Стоячие волны напряжения и тока всегда сдвинуты по отношению друг к другу в пространстве и во времени.

5.11. Анализ уравнения линии с распределенными параметрами

Сдвиг во времени между стоячими волнами напряжения и тока равен 90° , сдвиг в пространстве — четверти длины волны. Точки линии, где периодическая функция координаты проходит через нуль, называются **узлами**, а точки линии, в которых периодическая функция координаты принимает максимальные значения, — **пучностями**.
 При возникновении стоячих волн электромагнитная энергия от начала к концу линии не передается. Однако на каждом отрезке линии, равном четверти длины волны, запасена некоторая электромагнитная энергия. Эта энергия периодически переходит из одного вида (энергии электрического поля) в другой (энергию магнитного поля).
 В моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию магнитного поля.
 В моменты времени, когда ток вдоль всей линии оказывается равным нулю, а напряжение достигает максимального значения, вся энергия переходит в энергию электрического поля.

Для перехода к функциям времени умножим правые части формул (5.41) и (5.42) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от полученных произведений возьмем минимальные части:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \omega t; \quad (5.41)$$

$$i = j \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{L_0/C_0}} \sin \omega t. \quad (5.42)$$

Для перехода к функциям времени умножим правые части формул (5.41) и (5.42) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от полученных произведений возьмем минимальные части:

$$u = \sqrt{2} U_2 \cos \omega t; \quad i = \frac{\sqrt{2} U_2}{\sqrt{L_0/C_0}} \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5.43)$$

Угол 90° в аргументе u синуса в формуле (5.43) соответствует множителю j в формуле (5.42). В точках $\omega t = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, будут узлы тока и пучности напряжения.

График стоячих волн напряжения и тока для трех смежных моментов времени $\omega t_1 = 0$, $\omega t_2 = \pi/2$ и $\omega t_3 = 3\pi/2$ показан на рис. 5.8. Сплошными

5.5. Определение комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплекс напряжения и тока в начале линии

Как и раньше, через x будем обозначать расстояние от начала линии до текущей точки на ней (рис. 5.3).

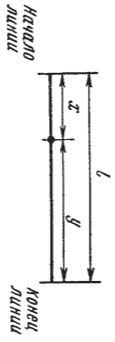


Рис. 5.3

Пусть в начале линии при $x = 0$ напряжение и ток соответственно равны \dot{U}_1 и \dot{I}_1 . Составим уравнения для определения постоянных \dot{A}_1 и \dot{A}_2 через \dot{U}_1 и \dot{I}_1 . Из выражений (5.13) и (5.16) следует ($x = 0$):

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_2 + \dot{A}_1; \quad (5.22)$$

$$j Z_{сб} \dot{I}_1 = \dot{A}_2 - \dot{A}_1. \quad (5.23)$$

Для определения \dot{A}_1 из выражения (5.22) вычтем выражение (5.23), получим

$$\dot{A}_1 = 0,5 (\dot{U}_1 - j Z_{сб} \dot{I}_1) = \dot{A}_1 e^{j\omega t}; \quad (5.24)$$

$$\dot{A}_2 = 0,5 (\dot{U}_1 + j Z_{сб} \dot{I}_1) = \dot{A}_2 e^{j\omega t}, \quad (5.25)$$

где \dot{A}_1 — модуль; ωt — аргумент комплекс \dot{A}_1 ; \dot{A}_2 — модуль, ωt — аргумент комплекс \dot{A}_2 .

Подставим выражения (5.24) и (5.25) в выражение (5.13), получим

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_1 - j Z_{сб} \dot{I}_1}{2} e^{jx} + \frac{\dot{U}_1 + j Z_{сб} \dot{I}_1}{2} e^{-jx} = \dot{U}_1 \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} - j Z_{сб} \dot{I}_1 \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2}.$$

Известно, что

$$ch x = 0,5 (e^x + e^{-x}), \quad sh x = 0,5 (e^x - e^{-x}).$$

Поэтому

$$0,5 (e^{jx} + e^{-jx}) = ch jx; \quad 0,5 (e^{jx} - e^{-jx}) = sh jx.$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \dot{U}_1 ch jx - j Z_{сб} sh jx. \quad (5.26)$$

Аналогичные преобразования, примененные к уравнению (5.16), дают

$$\dot{I} = j ch jx \dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{Z_{сб}} sh jx. \quad (5.27)$$

$$Z_B \approx \sqrt{\frac{R_0}{C_0}} \left[1 + j \left(-\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0} \right) \right].$$

и $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$:

$$Z_B = \sqrt{L_0/C_0}.$$

Для линии синусоидального тока с малыми потерями, когда $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ с учетом уравнения (5.20) имеем

$$Z_B = \sqrt{R_0/G_0}.$$

Рассмотрим вопрос о волновом сопротивлении. Для постоянного тока ($\omega = 0$) из уравнения (5.17) с учетом уравнения (5.19) следует, что

$$\alpha = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad \beta = j\omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Из формулы (5.21) следует, что коэффициент затухания α и коэффициент фазы β соответственно равны

$$\gamma \approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0} + \frac{G_0}{C_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (5.21)$$

и разложим биномы в ряды, ограничившись двумя членами каждого ряда, т.е. воспользуемся соотношением $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. Получим

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_0 C_0} \left(1 - j \frac{R_0}{\omega L_0} - j \frac{G_0}{\omega L_0 C_0} \right)^{1/2}$$

формулу (5.18) следующим образом:

малыми потерями, когда $\frac{R_0}{\omega L_0} \ll 1$ и $\frac{G_0}{\omega C_0} \ll 1$ с этой целью перепишем

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}, \quad (5.14)$$

принято называть **постоянной распространения**. Формулу (5.14) можно представить в виде

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (5.15)$$

где α – **коэффициент затухания**, характеризует затухание падающей волны на единицу длины линии, скажем, на 1 м (км); β – **коэффициент фазы**, он характеризует изменение фазы падающей волны на единицу длины линии, например на 1 м (км):

$$[\gamma] = [\alpha] = [\beta] = 1/\text{м}.$$

Ток I найдем из уравнения (5.7):

$$I = -\frac{1}{Z_0} \frac{dU}{dx} = \frac{-\dot{A}_1 e^{jx} + \dot{A}_2 e^{-jx}}{Z_0/\gamma}. \quad (5.16)$$

Отношение $Z_0/\gamma = Z_0/\sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{Z_0/Y_0}$ в решении (5.16), имеющее размерность сопротивления с учетом обозначений (5.9) и (5.10), обозначают Z_B и называют **волновым сопротивлением**:

$$Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_B e^{j\theta_B}, \quad (5.17)$$

где z_B – модуль, θ_B – аргумент волнового сопротивления Z_B .

Следовательно, решение (5.16) с учетом (5.17)

$$I = \frac{\dot{A}_2}{Z_B} e^{-jx} - \frac{\dot{A}_1}{Z_B} e^{jx}.$$

Как говорилось ранее [см. формулу (5.15)], постоянная распространения равна

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (5.18)$$

Для линии постоянного тока $\omega = 0$ и потому

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0}. \quad (5.19)$$

Для линии синусоидального тока без потерь ($R_0 = G_0 = 0$)

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (5.20)$$

Стоячие волны в линии без потерь при коротком замыкании на конце линии.

Из формул (5.38) и (5.39) следует, что при коротком замыкании на конце линии

$$U = jI_2 \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y; \quad (5.44)$$

$$I = I_2 \cos \beta y. \quad (5.45)$$

Для перехода к мгновенным значениям напряжения и тока умножим правые части формул (5.44) и (5.45) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведенный возьмем мнимые части:

$$u = \sqrt{2} j I_2 \sqrt{L_0/C_0} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ); \quad (5.46)$$

$$i = \sqrt{2} I_2 \cos \beta y \sin \omega t.$$

В правой части формулы для напряжения (5.46) есть множитель $\sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ)$, как и в формуле (5.43) для тока i . Следовательно, картина стоячей волны напряжения при коротком замыкании на конце линии качественно повторяет картину стоячей волны тока при холостом ходе линии. Аналогично, картина стоячей волны тока в короткозамкнутой линии качественно повторяет картину стоячей волны напряжения при холостом ходе линии.

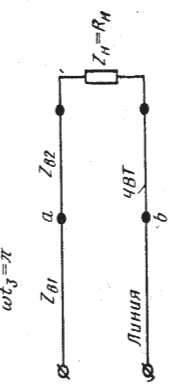
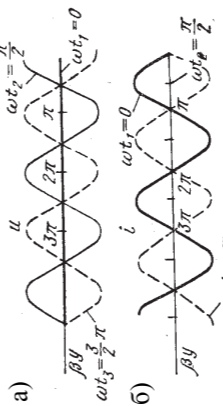


Рис. 5.8



охладились для тока. $\omega t_2 = \pi$ и $\omega t_3 = \frac{3\pi}{2}$ для напряжения и $\omega t_1 = 0$ и $\omega t_2 = \pi$ для тока.

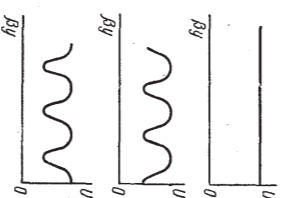
5.10. Бегущие, стоячие и смешанные волны в линиях без потерь. Коэффициенты бегущей и стоячей волн

При согласованной нагрузке на линии имеются только бегущие волны напряжения ($U = \dot{U}_2 e^{j\beta y}$) и тока ($I = \dot{I}_2 e^{j\beta y}$). Так как при любом $y |e^{j\beta y}| = 1$, то для бегущей волны действующее значение напряжения и тока вдоль линии неизменно (рис.5.9, а). При возникновении на линии стоячих волн действующее значение напряжения на линии изменяется в функции расстояния y пропорционально $|\cos \beta y|$ при холостом ходе [см. формулу (5.41)] или пропорционально $|\sin \beta y|$ при коротком замыкании [см. формулу (5.44)].

При несогласованной активной нагрузке на линии возникает смешанная волна – комбинация бегущей и стоячей волн. Если обозначить $m = Z_B/Z_{\text{н}}$, то

$$U = \dot{U}_2 \cos \beta y + j m \dot{U}_2 \sin \beta y = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{U}_2 \sin \beta y + j \dot{U}_2 (m - 1) \sin \beta y$$

Рис. 5.9



$$U = \dot{U}_2 e^{j\beta y} + j \dot{U}_2 (m - 1) \sin \beta y.$$

Первое слагаемое определяет бегущую, второе – стоячую волны. Распределение напряжения на линии в функции расстояния y

$$U = \dot{U}_2 \sqrt{\cos^2 \beta y + m^2 \sin^2 \beta y}.$$

При $m > 1$ напряжение на конце линии минимально, а через четверть длины волны $\beta y = \pi/2$ максимально (рис. 5.9, б). При $m < 1$ напряжение на конце линии максимально, а через $\beta y = \pi/2$ минимально (рис. 5.9, в).

Коэффициентом бегущей волны называют отношение минимума напряжения смешанной волны к ее максимуму:

$$K_{Б.В} = U_{\text{мин}} / U_{\text{макс}} \\ K_{С.В} = K_{Б.В}.$$

Коэффициент стоячей волны

Отраженной электромагнитной волной (рис. 5.5) называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной вол-

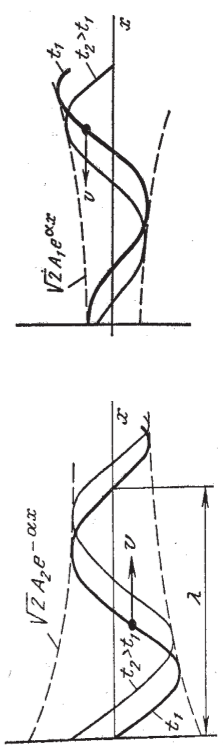


Рис. 5.4

Рис. 5.5

ность электрического и магнитного полей. Падающая волна, распространяясь от источника энергии к приемнику, несет энергию, заключенную в ее электрическом и магнитном полях.

Падающей электромагнитной волной (рис. 5.4) называют процесс перемещения электромагнитного состояния (электромагнитной волны) от источника энергии к приемнику, т.е. в нашем случае в направлении увеличения координаты x . Электромагнитное состояние определяется совокупностью электрического и магнитного полей. Падающая волна, распространяясь от источника энергии к приемнику, несет энергию, заключенную в ее электрическом и магнитном полях.

$$i = -\frac{A_1}{Z_B} \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_B) + \frac{A_2}{Z_B} \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_B) \quad (5.31)$$

$$u = A_1 \sqrt{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x) + A_2 \sqrt{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x) \quad (5.30)$$

Для перехода от комплексов напряжения и тока к функциям времени умножим правые части формул (5.28) и (5.29) на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ и от произведенный возьмем минимальную часть:

$$i = \frac{A_1}{Z_B} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_B)} + \frac{A_2}{Z_B} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_B)} \quad (5.29)$$

Аналогичную операцию проделаем с формулой (5.16), причем в до-

$$U = A_1 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_0 + \beta x)} + A_2 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t + \psi_0 + \beta x)} \quad (5.28)$$

заменим γ на $\alpha + j\beta$, получим

$$\text{Подставим в формулу } A_2 e^{j\omega t} \text{ вместо } A_2 e^{j\omega t} \text{ вместо } A_2 e^{j\omega t} \quad (5.13)$$

5.6. Падающие и отраженные волны в линии

Следовательно,

$$\alpha = k \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 C_0}; \quad (5.33)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0};$$

$$\varphi_B = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}. \quad (5.34)$$

Из формул (5.33) и (5.34) следует, что коэффициент затухания α и фазовая скорость v_ϕ в линии без искажений действительно не зависят от частоты.

В линии без искажений волновое сопротивление

$$Z_B = \sqrt{Z_0 / Y_0} = \sqrt{L_0 / C_0}$$

является действительным числом и также не зависит от частоты.

Чтобы убедиться, что форма волны напряжения в конце линии u_2 полностью подобна форме волны напряжения в начале линии u_1 , возьмем напряжение на входе линии в виде суммы двух синусоидальных колебаний, одно из которых имеет частоту ω_1 , а другое $2\omega_1$, и составим выражение для напряжения u_2 . Пусть напряжение u_1 равно

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega_1 t + \psi_2).$$

Так как для линии без искажения коэффициент затухания α не зависит от частоты, то амплитуды обеих колебаний на расстоянии l уменьшаются в одинаковой степени и становятся равными $U_{1m} e^{-\alpha l}$ и $U_{2m} e^{-\alpha l}$.

Для линии без искажения коэффициент фазы β прямо пропорционален частоте, поэтому для частоты $2\omega_1$ коэффициент β в два раза больше, чем для частоты ω_1 .

Следовательно, мгновенное значение напряжения в конце линии равно

$$u_2 = U_{1m} e^{-\alpha l} \sin(\omega_1 t + \psi_1 - \beta l) + U_{2m} e^{-\alpha l} \sin(2\omega_1 t + \psi_2 - 2\beta l) = U_{1m} e^{-\alpha l} \sin[\omega_1(t - \beta l) + \psi_1] + U_{2m} e^{-\alpha l} \sin[2\omega_1(t - 2\beta l/2\omega_1) + \psi_2].$$

Вынесем $e^{-\alpha l}$ за скобку и обозначим время $t - \beta l / \omega$ через t . Получим

$$u_2 = e^{-\alpha l} [U_{1m} \sin[\omega_1 t + \psi_1] + U_{2m} \sin[2\omega_1 t + \psi_2]].$$

Если сопоставить последнее выражение с выражением для u_1 , то можно сделать вывод, что напряжение в конце линии имеет ту же форму, что и напряжение в начале линии. Однако оно уменьшено по амплитуде за счет затухания и смещено во времени на $\beta l / \omega = 1 / v_\phi$ — на время движения волны по линии длиной l .

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна представляет собой электромагнитную волну, полученную в результате наложения движущихся навстречу падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

5.9. Определение стоячих электромагнитных волн

В линиях без потерь при холостом ходе, коротком замыкании, а также при чисто реактивных нагрузках возникают стоячие электромагнитные волны.

Стоячая электромагнитная волна представляет собой электромагнитную волну, полученную в результате наложения движущихся навстречу падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

Стоячая электромагнитная волна образована стоячими волнами напряжения и тока. Математически такие волны описываются произведе-

на встречно падающей и отраженной электромагнитных волн одинаковой интенсивности.

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(k + j\omega);$$

$$Y_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(k + j\omega);$$

$$\gamma = (k + j\omega)\sqrt{L_0 C_0}.$$

но

$$R_0 / L_0 = G_0 / C_0. \tag{5.32}$$

Для сокращения записи обозначим

$$R_0 / L_0 = G_0 / C_0 = k.$$

По определению

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0},$$

Для того чтобы линия была неискажающей, коэффициент затухания α и фазовая скорость v_ϕ не должны зависеть от частоты; α и v_ϕ не зависят от частоты, если между параметрами линии существует следующее соотношение:

Неискажающие линии находят применение в телефонии. При телефонном разговоре по таким линиям не искажается тембр голоса, т.е. не искажается спектральный состав голоса.

При движении электромагнитной волны по линии без искажений волны напряжения и тока уменьшаются по амплитуде, но формы волн напряжения в конце и начале линии подобны; точно также подобны формы волн тока в начале и конце линии.

Линия без искажений представляет собой линию, вдоль которой волны всех частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и затухают в равной степени.

Под *длиной волны* (λ) понимают расстояние, на которое распространяется волна за один период $T = 1 / f$:

$$\lambda = vT = v / f.$$

5.7. Линия без искажений

Возьмем произвольную по времени от обеих частей последнего равенства

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \psi_n) + \psi_n = 0 \quad \text{или} \quad \omega - \beta - \frac{dx}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$v_\phi = dx / dt = \omega / \beta.$$

Каждая компонента падающей волны (волна напряжения или волна тока) представляет собой синусоидальное колебание; амплитуда которого уменьшается по мере роста x (множитель $e^{-\alpha x}$), а аргумент является функцией времени и координаты x .

Падающая электромагнитная волна образована падающей волной тока напряжения [второе слагаемое формулы (5.30)] и падающей волной тока образована отраженной волной напряжения [первое слагаемое формулы (5.30)] и отраженной волной тока [первое слагаемое формулы (5.31)].

Знак «минус» у отраженной волны тока свидетельствует о том, что поток энергии, который несет с собой отраженная электромагнитная волна, движется в обратном направлении по сравнению с потоком энергии, который несет с собой падающая волна.

Каждая компонента падающей волны (волна напряжения или волна тока) представляет собой синусоидальное колебание; амплитуда которого уменьшается по мере роста x (множитель $e^{-\alpha x}$), а аргумент является функцией времени и координаты x .

Каждая компонента отраженной электромагнитной волны затухает по мере продвижения волны от конца линии к началу (множитель $e^{\alpha x}$). Физически эффект уменьшения амплитуд падающей и отраженной волн по мере их продвижения по линии объясняется наличием потерь в линии.

На рис. 5.4 изображены графики распределения падающей волны напряжения вдоль линии (в функции x) для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Падающая волна распространяется слева направо. При построении принято $\omega t_1 + \psi_n = 0$.

На рис. 5.5 представлены графики распределения отраженной волны напряжения для двух смежных моментов времени: t_1 и $t_2 > t_1$. Отраженная волна распространяется справа налево.

Отношение напряжения отраженной волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называют *коэффициентом отражения* по напряжению и обозначают K_u . В соответствии с формулой (5.13)

$$K_u = \frac{A_1 e^{j\psi}}{A_2 e^{-j\psi}} = \frac{Z_n - Z_0}{Z_n + Z_0}.$$

При согласованной нагрузке $K_u = 0$, при холостом ходе $K_u = 1$. Коэффициент отражения по току $K_i = -K_u$.

Фазовой скоростью (v_ϕ) называют скорость, с которой нужно перемещаться вдоль линии, чтобы наблюдать одну и ту же фазу колебания, или иначе: фазовая скорость — это скорость перемещения по линии неизменно-го фазового состояния. Если фаза падающей волны напряжения неизменна, то в соответствии с формулой (5.28)

$$\omega t + \psi_n - \beta x = \text{const}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_2 ch\gamma y - \dot{I}_2 Z_0 sh\gamma y;$$

$$I = \dot{I}_2 ch\gamma y + \frac{\dot{U}_2}{Z_0} sh\gamma y.$$

Для определения напряжения \dot{U} и тока I в любой точке линии обратимся к формулам (5.26) и (5.27):

ным.

При этом волновое сопротивление $Z_0 = \sqrt{L_0 / C_0}$ является чисто активным.

т.е. коэффициент затухания $\alpha = 0$, а коэффициент фазы $\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$.

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0},$$

Известно, что если $R_0 = G_0 = 0$, то

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_0 (ch\gamma l + sh\gamma l)}{sh\gamma l + ch\gamma l} = Z_0.$$

Если нагрузка согласована (т.е. $Z_2 = Z_0$), то из выражения (5.37) следует, что входное сопротивление равно волновому:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_0^2 ch\gamma l + Z_0 sh\gamma l}{Z_0^2 sh\gamma l + ch\gamma l}. \tag{5.37}$$

или

$$Z_{\text{вх}} = \frac{I_2 Z_0^2 ch\gamma l + I_2 Z_0 sh\gamma l}{I_2 Z_0^2 sh\gamma l + I_2 ch\gamma l} = \frac{I_2 Z_0^2 (ch\gamma l + sh\gamma l)}{I_2 Z_0 (sh\gamma l + ch\gamma l)} = Z_0.$$

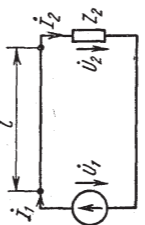


Рис. 5.9

Входное сопротивление нагруженной линии. На рис. 5.9 изображена схема, состоящая из источника напряжения \dot{U}_1 и линии с распределенными параметрами параметрами длиной l и нагрузки Z_2 . Входное сопротивление равно

$$\gamma y = (\alpha + j\beta)y = (0 + j\beta)y = j\beta y.$$

Гиперболический косинус от мнимого аргумента jx равен кругловому косинусу от аргумента x :

$$ch jx = 0,5 (e^{jx} + e^{-jx}) = 0,5 (\cos x + j \sin x + \cos x - j \sin x) = \cos x,$$

следовательно,

$$ch \gamma y = ch j\beta y = \cos \beta y.$$

Гиперболический синус от аргумента jx равен кругловому синусу от аргумента x , умноженному на j :

$$sh jx = 0,5 (e^{jx} - e^{-jx}) = 0,5 (\cos x + j \sin x - \cos x + j \sin x) = j \sin x,$$

следовательно,

$$sh \gamma y = sh j\beta y = j \sin \beta y.$$

Поэтому для линии без потерь формулы (5.26) и (5.27) перепишем следующим образом:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y - j \dot{I}_2 Z_0 \sin \beta y; \tag{5.38}$$

$$I = \dot{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta y. \tag{5.39}$$

Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе.

При холостом ходе $I_2 = 0$. Поэтому входное сопротивление с учетом формул (5.38) и (5.39) равно

$$Z_{\text{вх.х.х}} = \frac{\dot{U}}{I} = \frac{\dot{U}_2 \cos \beta y}{j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta y} = -j Z_0 \frac{\cos \beta y}{\sin \beta y} = -j \sqrt{L_0 / C_0} = jx.$$

Исследуем характер изменения $Z_{\text{вх.х.х}}$ при изменении расстояния y от конца линии до текущей точки на ней.

В интервале значений βy от 0 до $\pi/2$ $\text{tg} \beta y$ изменяется от 0 до ∞ , поэтому $Z_{\text{вх.х.х}}$ имеет емкостный характер (множитель $-j$) и по модулю изменяется от ∞ до 0 (рис. 5.7, а).

На рис. 5.7, а расположено кривой выше оси абсцисс соответствует индуктивному характеру реактивного сопротивления линии x , ниже оси — емкостному.

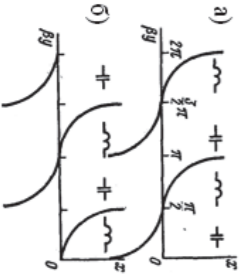


Рис. 5.7

и затем, сопоставив значения βl , найденные по (5.47) и (5.48), определить k , округлив его значение до ближайшего целого числа.

$$\beta l = \omega l / v_0 \phi \tag{5.48}$$

Отсюда

$$2\beta l - 2\pi k = v.$$

где k – целое число, то

$$e^{j(\nu + 2\pi k)} = e^{j\nu},$$

она будет равна $M e^{j\nu}$. Тогда $e^{2\omega l} = M$, и так как

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + th\gamma l}{1 - th\gamma l}.$$

Отсюда

$$th\gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}.$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней формулы на $e^{-\gamma l}$, получим

$$th\gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

но

$$th\gamma l = \frac{sh\gamma l}{ch\gamma l} = \frac{B}{A} \frac{\sqrt{B/C}}{\sqrt{B/C}} = \frac{\sqrt{BC}}{A},$$

Для определения γl составим выражение для $th\gamma l$

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{B/C}.$$

лой

Для определения волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$ воспользуемся формулой

$$A = 1 + Z_4 / Z_5; \quad B = Z_4; \quad C = 2 / Z_5 + Z_4 / Z_5^2.$$

или

$$Z_4 = B; \quad Z_5 = B / (A - 1)$$

Для симметричной П-схемы

Решением этих уравнений является сумма любых функции f_1 и f_2 , причем аргументом функции f_1 является $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, аргументом функции f_2 является $\left(t + \frac{x}{v}\right)$:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем обозначать

$$u_n = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad u_0 = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Следовательно, $u = u_n + u_0$,

где u_n, u_0 относятся к отраженной и падающей волнам.

Вид функций f_1 и f_2 определяется граничными условиями в начале и конце линии. Функции f_1 и f_2 в общем случае должны позволять дважды дифференцировать их по x и t .

Решение уравнения для тока

$$i = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Для сокращения записи обозначим

$$i_n = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad i_0 = \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

тогда $i = i_n + i_0$.

5.16. Практическое приложение

Задача 5.1. Найти фазовую скорость для воздушной двухпроводной линии с малыми потерями.

Решение

Из условий малых потерь следует, что $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$, поэтому

$$v_0 = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 C_0}.$$

Индуктивность единицы длины двухпроводной воздушной линии равна

• предполагаем полиномы $N(p)$ и $M(p)$ либо по убывающим, либо по возрастающим степеням p ;

(6.1). С этой целью:

Таким образом, возникает задача о переходе от выражения (6.1) к выражению (6.2), т.е. задача о последовательном упорядоченном определении элементов лестничной схемы ($Z_1, Z_3, \dots; Y_2, Y_4, Y_6, \dots$) по выражению

$$Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}} \tag{6.2}$$

Далее определим входное сопротивление всей схемы

$$\frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}$$

Входное сопротивление по отношению к тем же зажимам

$$\frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}$$

Суммарная проводимость правой части схемы по отношению к зажимам $m - n$ с учетом ветви с проводимостью Y_4 равна $Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}$.

Она равна $\frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}$.

Найдем входную проводимость правой части схемы по отношению к зажимам $n - m$ чтобы убедиться в этом, сделаем небольшие выкладки.

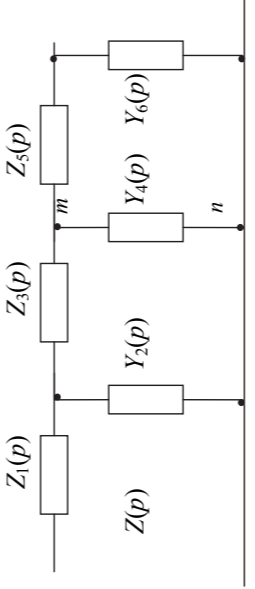


Рис. 6.1

5.17. Вопросы для самоконтроля

- 1) Какие параметры линии называются продольными?
- 2) Каков физический смысл коэффициента затухания и коэффициента фазы?
- 3) В каких единицах измеряется коэффициент фазы?
- 4) Запишите уравнения однородной двухпроводной линии.
- 5) Что собой представляет неискжаская линия?
- 6) Какова скорость распространения волн в воздушных средах?
- 7) Какую линию можно считать линией без потерь?
- 8) В каких случаях в линии возникают стоячие волны напряжения и тока?
- 9) В каких пределах изменяется сопротивление разомкнутой на конце линии при изменении частоты напряжения на входе?
- 10) Почему разомкнутая на конце линия при включении потребляет ток от источника?
- 11) За счет чего ток и напряжения вдоль линии с распределенными параметрами неодинаковы для одного и того же момента времени?
- 12) Каков физический смысл постоянной распространения γ и волнового сопротивления $Z_{\text{в}}$?
- 13) Из каких условий определяются постоянные \hat{A} и \hat{A}_2 ?
- 14) Как показать, что сигнал, проходя по линии без искажений, не изменяет своей формы?
- 15) Почему стремятся нагрузку брать согласованной с $Z_{\text{в}}$?
- 16) В чем различие между бегущей и стоячей волнами в физическом и математическом отношении?
- 17) Какую волну называют смешанной?
- 18) В каком смысле можно говорить об эквивалентной замене линии четырёхполюсником?
- 19) Каково назначение четвертьволнового трансформатора?

6. СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

6.1. Характеристика синтеза

Синтезом линейной электрической цепи называют определение структуры цепи и числовых значений составляющих ее элементов R, L, C по известным операторным выражениям этой цепи или по временным характеристикам при воздействии на вход импульса определенной формы. Одному и тому же операторному выражению, принятому в качестве исходного при синтезе, может соответствовать несколько различных схем

Такую схему принято называть *цепной* схемой. Исследование распределения тока и напряжения вдоль цепной схемы удобно проводить, используя теорию линий с распределенными параметрами.

5.14. Цепная схема

На практике приходится встречаться со схемой, представляющей собой каскадное включение нескольких одинаковых симметричных четырехполюсников (рис. 5.10).

Из первого находим $Z_1/Z_3 = ch a - 1$ и подставляем во второе.

$$ch a = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \quad \text{и} \quad Z_c = \sqrt{B/C} = \sqrt{2Z_1Z_3 + Z_1^2}.$$

Положим, что требуется найти сопротивление Z_1 и Z_3 такого четырехполюсника, собранного по Т-схеме, полагая известными затухание (в неперях) и характеристическое сопротивление Z_c . Исходим из двух соотношений:

5.13. Четырехполюсник заданного затухания

Включаемый между источником сигнала и нагрузкой четырехполюсник, предназначенный для ослабления амплитуды сигнала в заданное число раз, называют четырехполюсником заданного затухания (*аттенюатором*). Его собирают обычно по симметричной Т-схеме или П-схеме и настраивают согласованно.

Положим, что требуется найти сопротивление Z_1 и Z_3 такого четырехполюсника, собранного по Т-схеме, полагая известными затухание (в неперях) и характеристическое сопротивление Z_c . Исходим из двух соотношений:

Рассмотрим теперь последовательность операций при замене линии с распределенными параметрами эквивалентным ей четырехполюсником. Известны u/l и Z_0 . Требуется найти сопротивление Z_1 и Z_3 в Т-схеме (Z_4 и Z_5 в П-схеме). С этой целью по формулам подраздела 5.11 находим значения коэффициентов A, B, C , а затем определяем Z_1 и Z_3 для Т-схемы (или сопротивления Z_4 и Z_5 для П-схемы).

Любой ли симметричный четырехполюсник можно заменить участком линии с распределенными параметрами и любую ли линию с распределенными параметрами можно заменить четырехполюсником?

Очевидно, подобную замену можно осуществить, если полученные в результате расчета параметры таковы, что заменяющее устройство физически можно выполнить. Как правило, замена участка линии с распределенными параметрами четырехполюсником возможна всегда, а обратная замена — не всегда. Она невозможна в тех случаях, когда в результате расчета волновое сопротивление окажется чисто мнимым числом: в реальных линиях этого не бывает.

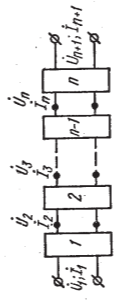


Рис. 5.10

Действительно, в предыдущем параграфе говорилось о замене одного четырехполюсника отрезком линии длиной l , имеющей постоянную распространения u и волновое сопротивление Z_0 . Если число четырехполюсников равно n , то длина отрезка линии с распределенными параметрами будет в n раз больше, т.е. равна nl . Обозначим напряжение и ток на выходе n и четырехполюсника через \dot{U}_{n+1} и \dot{I}_{n+1} , тогда напряжение и ток на входе первого четырехполюсника

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{n+1} ch n l + \dot{I}_{n+1} Z_0 sh n l, \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_0} sh n l + \dot{I}_{n+1} ch n l, \end{aligned}$$

Напряжение и ток на входе k от начала четырехполюсника ($k \leq n$)

$$\begin{aligned} \dot{U}_k &= \dot{U}_{n+1} ch(n-k+1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} Z_0 sh(n-k+1) \gamma l, \\ \dot{I}_k &= \frac{\dot{U}_{n+1}}{Z_0} sh(n-k+1) \gamma l + \dot{I}_{n+1} ch(n-k+1) \gamma l. \end{aligned}$$

5.15. Постановка задачи о переходных процессах в цепях с распределенными параметрами

Из уравнений (5.1) и (5.4) при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$ следует, что ток и напряжение являются функциями двух переменных: расстояния x от начала линии и времени t . После их дифференцирования по x и по t можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $L_0 C_0 = 1/v^2$ или $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ есть скорость распространения электромагнитной волны по линии.

Если дифференцирование провести в обратном порядке, то можно получить уравнение для тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

Видно, что полученные уравнения являются уравнениями второго порядка в частных производных. Из курса математики известно, что уравнения такого вида называют *волновыми*.

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (6.1)$$

то должны выполняться следующие пять условий:

- 1) Все коэффициенты a и b в числителе и знаменателе должны быть неотрицательны (в дальнейшем будет ясно, что условие 1 вытекает из условия 3).
- 2) Наивысшая степень полинома числителя (n) не может отличаться от наивысшей степени полинома знаменателя (m) более чем на 1. То же и в отношении минимальных степеней числителя и знаменателя.
- 3) Если условиться значения p , при которых $Z(p) = 0$, называть нулями функции $Z(p)$, а значения p , при которых $Z(p) = \infty$, называть полюсами.

6.2. Условия, которым должны удовлетворять входные сопротивления двухполюсников

Если представить входное сопротивление двухполюсника в виде отношения двух полиномов, расположенных по убывающим степеням оператора p ,

Методика синтеза цепей по заданным временным функциям здесь не рассматривается. В теории автоматического регулирования распространены синтез, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик, в импульсной технике подбор параметров электронных и полупроводниковых схем, т.е. в известном смысле синтез этих схем, производят используя спектральный метод.

Методика синтеза цепей по заданным временным функциям здесь не рассматривается.

В теории автоматического регулирования распространены синтез, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик, в импульсной технике подбор параметров электронных и полупроводниковых схем, т.е. в известном смысле синтез этих схем, производят используя спектральный метод.

Синтез развивался главным образом по двум направлениям: по известным операторным функциям: по известной функции для двухполюсников и по передаточной функции для четырехполюсников; по временным характеристикам, т.е. по известному временному отклику системы при воздействии импульса обычно прямоугольной формы. Эти два направления взаимно дополняют и развивают друг друга. В настоящее время наибольшие результаты достигнуты на первом из упомянутых направлений.

Задачи синтеза ставят и решают в теории сложных фильтров, в теории корректирующих контуров в автоматике, связи, радиотехнике, а также в кибернетике при создании предсказывающих и сглаживающих устройств. Синтез развивался главным образом по двум направлениям: по известным операторным функциям: по известной функции для двухполюсников и по передаточной функции для четырехполюсников; по временным характеристикам, т.е. по известному временному отклику системы при воздействии импульса обычно прямоугольной формы. Эти два направления взаимно дополняют и развивают друг друга. В настоящее время наибольшие результаты достигнуты на первом из упомянутых направлений.

Нули, расположенные на мнимой оси плоскости p , должны быть только простыми, не кратными. Если вместо p в выражение $Z(p)$ подставить $j\omega$, то при любом значении ω должно быть $Re Z(j\omega) \geq 0$.

Известно, что свободные процессы описываются слагаемыми вида $A_k e^{p_k t}$ и обязательно должны затухать во времени; p_k — корни уравнения $Z(p) = 0$. Но затухать свободные процессы (слагаемые вида $A_k e^{p_k t}$) могут только в том случае, если действительная часть p_k отрицательна. Отсюда следует, что нули уравнения $Z(p) = 0$ должны обязательно находиться в левой части плоскости p .

Поскольку каждому планарному двухполюснику соответствует дуальный, а входная проводимость дуального двухполюсника

$$Y(p) = Z(p) / k,$$

где k — некоторый коэффициент, имеющий размерность Ом², то входное сопротивление дуального двухполюсника равно $k / Z(p)$. Нули дуального двухполюсника, являющиеся полюсами исходного, также должны быть расположены в левой части плоскости p .

Из курса математики известно, что если имеются два кратных корня уравнения

$$N(p) = 0,$$

то соответствующие им слагаемые в решении берутся в виде

$$(C_1 + C_2 t) e^{j\omega t}.$$

Если допустить, что на мнимой оси могут быть два кратных корня $p = j\beta$, то соответствующая им свободная составляющая $(C_1 + C_2 t) e^{j\omega t}$ нарастала бы до бесконечности, чего физически быть не может.

Все коэффициенты a и b в числителе и знаменателе $Z(p)$ должны быть положительны. Если бы это условие нарушилось, то на основании леммы, вытекающей из теоремы Гурвица, среди корней уравнения $Z(p) = 0$ появились бы корни с положительной действительной частью.

Входное сопротивление или входная проводимость лестничной (цепной) схемы (рис. 6.1), в которой продолжные сопротивления названы Z_1, Z_3, Z_5, \dots и поперечные проводимости Y_2, Y_4, Y_6, \dots , могут быть представлены непрерывной дробью.

В заключение отметим, что могут встретиться такие сопротивления $Z(p)$, которые невозможно представить лестничной схемой. В этом случае

$$\left| \frac{O_2}{O_1} \right| \left| \frac{O_3}{O_2} \right| \left| \frac{O_4}{O_3} \right| \left| \frac{O_5}{O_4} \right| \left| \frac{O_5}{O_3} \right| \left| \frac{O_4}{Z_5} \right| \left| \frac{O_3}{Z_5 O_4} \right| \left| \frac{O_2}{Z_3} \right| \left| \frac{O_1}{Y_4} \right| \left| \frac{O_1 Y_2}{Y_2} \right| \left| \frac{O_1}{M} \right| \left| \frac{M Z^{-1}}{N} \right| \left| \frac{M}{Z_1} \right|$$

На основании изложенного процесс последовательного определения элементов цепи (см. рис. 6.1) можно представить следующим алгоритмом:

$$\frac{O_2}{O_1} = Y_2 + \frac{O_3}{O_2} \cdot \frac{1}{1 + Z_3 + \frac{O_2}{O_1}} \cdot \frac{O_2}{O_1}$$

$$O_2 = Z_3 + \frac{O_2}{O_1} + \frac{O_3}{O_2} \cdot \frac{O_2}{O_1}$$

поэтому

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{O_2}{O_1} + \frac{O_3}{O_2} \cdot \frac{O_2}{O_1}$$

но

$$1 + Z_3 + \frac{O_2}{O_1} = \frac{O_2}{O_1} + \frac{O_3}{O_2} \cdot \frac{O_2}{O_1}$$

При делении O_1/M будет получено частное Y_2 и остаток

остаток O_1/M :

При делении полинома N на полином M будет получена часть частного O_1/M и остаток O_1/M .

Можно отметить, что если в процессе деления возникнет необходимость перейти от расположения полиномов по убывающим степеням к расположению их по возрастающим степеням, то эта операция вполне допустима.

Рис. 6.3

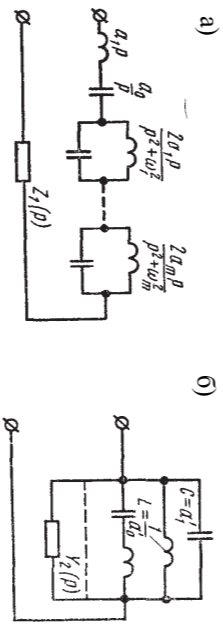


Рис. 6.3

После того как найдено a_k , можно определить L_k и C_k двухполюсника (см. рис. 6.2, е):

$$C_k = 1 / (2a_k); \quad L_k = 1 / (\omega_k^2 C_k).$$

Реализацию двухполюсника можно осуществлять не только по его входному сопротивлению $Z(p)$, но и по его входной проводимости $Y(p) = 1 / Z(p)$. Входную проводимость $Y(p)$ представляют в виде схемы (рис. 6.3, б)

$$Y(p) = a_k p + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Y_1(p). \tag{6.3}$$

В соответствии с правой частью выражения (6.3) двухполюсник осуществляют в виде параллельного соединения емкости a_k , индуктивности $1 / a_k$, двухполюсников по типу (см. рис. 6.2, з) двухполюсника минимальной реактивной проводимости $Y_k(p)$, не содержащего полюсов на мнимой оси (ему соответствуют слагаемые вида $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$).

Коэффициенты a_0 и a_k определяют путем нахождения интегральных вычетов функции $Y(p)$ соответственно при $p = 0$ и $p = j\omega_k$, а $C = a^{-1} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}$.

Если функция

$$Y_2(p) = \sum \frac{m}{p+n},$$

то её реализуют в виде параллельного соединения двухполюсников (см. рис. 6.2, е).

Если функция

$$Y_2(p) = \sum \frac{mp}{p+s},$$

то её реализуют параллельным соединением двухполюсников (см. рис. 6.2, ж).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

602 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

602 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

602 Вопросы для самопроверки 9.9

600 Практическое приложение 9.9

661 Метод Бруна 9.9

661 (Фостера) выделения простейших составляющих 9.9

661 Реализация двухполюсников путем последовательного выделения входных сопротивлений 9.9

681 вхождение в область 9.9

681 характеристика сингуса 9.9

681 СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ 9.9

681 Вопросы для самоконтроля 9.9

681 Практическое приложение 9.9

661 с распределенными параметрами 9.9

811 Построение эквивалентных схем 9.9

811 в цепи с сосредоточенными параметрами 9.9

811 Являясь элементом цепи 9.9

911 распределение энергии 9.9

911 в цепи с сосредоточенными параметрами 9.9

911 Импульсная характеристика 9.9

511 Бегущие волны 9.9

21. Соцегев, А. Ф. Теоретические основы электротехники : учеб. пособие / А. Ф. Соцегев. – Комсомольск-на-Амуре : Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2002.

22. Соцегев, А. Ф. Теоретические основы электротехники. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие / А. Ф. Соцегев. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2006. – 162 с.

23. Соцегев, А. Ф. Теоретические основы электротехники. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие / А. Ф. Соцегев. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2003. – 162 с.

24. Соцегев, А. Ф. Использование электронных учебных пособий при чтении курса ТОЭ / А. Ф. Соцегев // Современные технологии в высшем профессиональном образовании : материалы межрегиональной научно-методической конф., Хабаровск, 22-26 ноября 2004 г. : в 2 т. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2004.

25. Теоретические основы электротехники. В 3 ч. Ч. 1 : учеб. пособие / Е. В. Лановенко, В. С. Сяпкин, А. Ф. Соцегев, А. Н. Степанов ; под ред. А. Ф. Соцегева. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2005. – 145 с.

26. Теоретические основы электротехники. В 3 ч. Ч. 3 : учеб. пособие / Е. В. Лановенко, В. С. Сяпкин, А. Ф. Соцегев, А. Н. Степанов ; под ред. А. Ф. Соцегева. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2007. – 173 с.

27. Курсовая работа по фундаментальной подготовке (методические материалы преподавателям и студентам) : учеб. пособие / А. Р. Куделько, Е. В. Лановенко, А. Ф. Соцегев [и др.] ; под ред. А. Ф. Соцегева. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2006. – 64 с.

Кэффициент a_k в выражении $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ определяют как интегральный вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p = j\omega_k$ (ему же равен вычет функции $Z(p)$ при $p = -j\omega_k$, т.к. они оба действительны).

$$a_0 = \text{Res}Z(p) = N(0)/M'(0).$$

цепи определяют как интегральный вычет функции $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ в полюсе $p = 0$.

Индуктивность равна $a_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}$ (см. рис. 6.3, а). Величину a_0 в

сопротивления b_0 .

$Z_1(p) = b_0$. В этом случае $Z_1(p)$ реализуют в виде активного

полосников (см. рис. 6.2, d);

3) $Z_1(p) = b_0$. В этом случае $Z_1(p)$ реализуют в виде активного

полосников (см. рис. 6.2, d);

цепи определяют как интегральный вычет функции $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ в полюсе $p = 0$.

Индуктивность равна $a_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}$ (см. рис. 6.3, а). Величину a_0 в цепи определяют как интегральный вычет функции $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ в полюсе $p = 0$.

Индуктивность равна $a_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}$ (см. рис. 6.3, а). Величину a_0 в цепи определяют как интегральный вычет функции $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ в полюсе $p = 0$.

$$Z(p) = \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$$
, например, соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоско-

параллельный резонансный контур. Слагаемому $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$, например, соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоско-

$$Z(p) = \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$$
, например, соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоско-

параллельный резонансный контур. Слагаемому $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$, например, соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоско-

рис. 6.3

параллельный резонансный контур. Слагаемому $\frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$, например, соответствует пара полюсов $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, находящихся на мнимой оси плоско-

Суть метода Фостера. Этот способ реализации двухполюсника запишем операторные сопротивления для простейших одно- и двухэлементных двухполюсников (рис. 6.2):

- рис. 6.2, а $C = 1/a_0$;
- рис. 6.2, б $L = a_1$;
- рис. 6.2, в $2a_k = 1/C_k$;
- рис. 6.2, г $\omega_k^2 = 1/(L_k C_k)$;
- рис. 6.2, е $a_k = R_k$;
- рис. 6.2, ж $d = 1/R_k$;
- рис. 6.2, з $d = 1/R_k$;

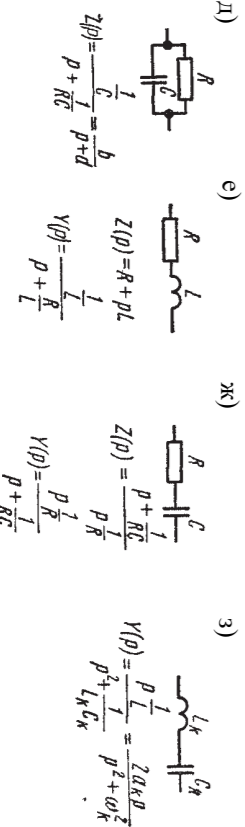
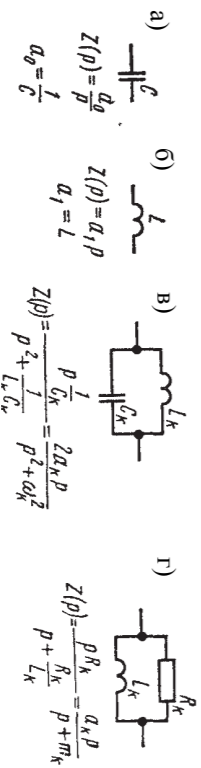


Рис. 6.2

78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172

ОГЛАВЛЕНИЕ

3.10.	Расчет переходных процессов операторным методом при действии в цепи синусоидальных источников.....	79
3.11.	Практическое приложение.....	81
3.12.	Вопросы для самопроверки.....	94
4.	НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.....	95
4.1.	Основные понятия и определения.....	95
4.2.	Нелинейные электрические цепи постоянного тока.....	98
4.3.	Статическое и дифференциальное сопротивление в нелинейных цепях.....	100
4.4.	Расчет простейшей нелинейной магнитной цепи постоянного тока.....	100
4.5.	Расчет нелинейных магнитных цепей постоянного тока методом двух узлов.....	101
4.6.	Расчет нелинейных электрических цепей переменного тока.....	104
4.6.1.	Метод кусочно-линейной аппроксимации.....	104
4.6.2.	Метод математической аппроксимации.....	110
4.6.3.	Метод Эйлера.....	111
4.6.4.	Метод математического моделирования.....	112
4.6.5.	Метод расчета нелинейных цепей переменного тока по эквивалентным действующим значениям.....	114
4.7.	Выпрямление переменного тока и напряжения.....	116
4.8.	Инвертирование постоянного напряжения и тока.....	125
4.9.	Особые явления в нелинейных цепях переменного тока.....	127
4.10.	Усиление постоянного и переменного напряжений и тока.....	130
4.11.	Регулирование постоянного и переменного напряжения и тока.....	135
4.12.	Практическое приложение.....	137
4.13.	Вопросы для самопроверки.....	154
5.	ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	156
5.1.	Основные определения.....	156
5.2.	Составление дифференциальных уравнений для однофазной линии с распределенными параметрами.....	158
5.3.	Решение уравнений линии с распределенными параметрами при установившемся синусоидальном режиме.....	160
5.4.	Постоянная распространения и волновое сопротивление.....	162
5.5.	Определение комплексов напряжения и тока в любой точке линии через комплекс напряжения и тока в начале линии.....	164
5.6.	Падающие и отраженные волны в линии.....	165
5.7.	Линия без искажений.....	167
5.8.	Определение напряжения и тока в линии без потерь.....	170
5.9.	Определение стоячих электромагнитных волн.....	172

условиями Дерихле (см. пп. 5 – 12).

Если же минимум $\text{Re}Z(j\omega)$ существует при некоторой $\omega = \omega_0$, отличающейся от 0 и ∞ , то дальнейшую реализацию производят в соответствии с условиями Дерихле (см. пп. 5 – 12).

Если частота, при которой действительная часть комплексного сопротивления имеет минимум $\text{Re}Z(j\omega)$, равна нулю или бесконечности, то уже на этой стадии делается попытка реализовать $Z(p)$ лестничной схемой. Подсчитаем также минимальное значение $\text{Re}Z(j\omega)$, которое назовем R_{\min} .

3) Из $Z(p)$ вычитают R_{\min} и находят $Z_1(p)$. Этой операции соответствует переход от схемы (см. рис. 6.4, б) к схеме (рис. 6.4, в). Заметим, что степени числителя и знаменателя $Z_1(p)$ одинаковы.

$$a_k = \text{Res}_{p=j\omega_k} Z_{\text{зад.}}(p).$$

Этот этап соответствует переходу от цепи (рис. 6.4, а) к цепи (рис. 6.4, б). Коэффициент

$$Z_{\text{зад.}}(p) - \sum_{k=1}^n \frac{2a_k p}{p^2 + \omega_k^2} = Z(p).$$

Функция $Z(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси и представляет собой функцию минимального реактивного сопротивления.

2) Полагая $p = j\omega$, в $Z(j\omega)$ выделяют действительную часть, т.е. находят $\text{Re}Z(j\omega)$ и определяют частоту ω , при которой $\text{Re}Z(j\omega)$ минимальна. Эта частота может быть равна нулю, бесконечности или иметь некоторое конечное значение (в последнем случае ее будем называть ω_0). Эта частота может быть равна нулю, бесконечности или иметь некоторое конечное значение (в последнем случае ее будем называть ω_0). Подсчитаем также минимальное значение $\text{Re}Z(j\omega)$, которое назовем R_{\min} .

6.4. Метод Бруне

Основные этапы метода Бруне следующие.

1) Прежде всего, проверяют, не содержит ли заданное $Z(p)$ — назовем его $Z_{\text{зад.}}(p)$ — полюсов на мнимой оси. Если они имеются, то из состава $Z_{\text{зад.}}(p)$ выделяют соответствующие этим полюсам один или несколько последовательно включенных параллельных резонансных контуров. В результате получают

ответствует полное $Y(p)$ при $p = 0$, который реализуют индуктивностью.

$$-pL_2 I_2 + pL_3 I_3 = pL_3 I_3 - pMI_1.$$

Подставляя в эти две строки $I_1 = I_2 + I_3$ и учитывая, что каждое из уравнений должно удовлетворяться при любых значениях токов, получим

$$M = L_2; \quad L_4 = L_1 + L_2; \quad L_5 = L_2 + L_3,$$

где L_4 и L_5 положительны. Окончательная схема изображена на рис. 6.4, ж. 12) Если условиться сумму степеней полиномов в числителе и знаменателе $Z_{\text{зад.}}(p)$ называть порядком $Z_{\text{зад.}}(p)$, то совокупность перечисленных операций (цикл Бруне) позволяет снизить порядок на 4. Естественно, что потребность в каком-либо одном или нескольких этапах в любом конкретном примере может и не возникнуть (например, в этапах 1 или 3).

Для $Z_{\text{зад.}}(p)$, порядок которых достаточно высок, может возникнуть потребность применить эту последовательность операций не один раз. В заключение заметим, что если (см. п. 5) $X_1 < 0$, то $L_1 < 0$, а вычитание (согласно п. 7) сопротивления $-pL_1$ сводится к прибавлению сопротивления $+pL_1$.

Некоторым недостатком метода Бруне является его относительная сложность и необходимость введения в схему идеального трансформатора с коэффициентом связи

$$K^2 = M^2 / (L_4 L_5) = 1.$$

6.5. Практическое приложение

Задача 6.1. Определить параметры лестничных схем (рис. 6.5, а), для которых операторное сопротивление равно

$$Z(p) = \frac{p^4 + 9p^2 + 8}{p^3 + 3p},$$

располагая сначала при делении полиномы по убывающим, а затем (для реализации второй схемы) по возрастающим степеням p .

Как будет видно дальше, в процессе деления не возникнет необходимости в переходе от расположения полиномов по убывающим к расположению по возрастающим степеням p .

Решение

Произведем деление числителя на знаменатель заданного сопротивления $Z(p)$, располагая слагаемые по убывающим степеням p .

На рис. 6.5, б изображена схема, и на ней указаны соответственно в генри и фарадах значения индуктивностей и емкостей, полученные при делении, когда слагаемые были расположены по убывающим степеням p .

Схема и параметры для второго случая, когда при делении слагаемые расположены по возрастающим степеням p , даны на рис. 6.5, в.

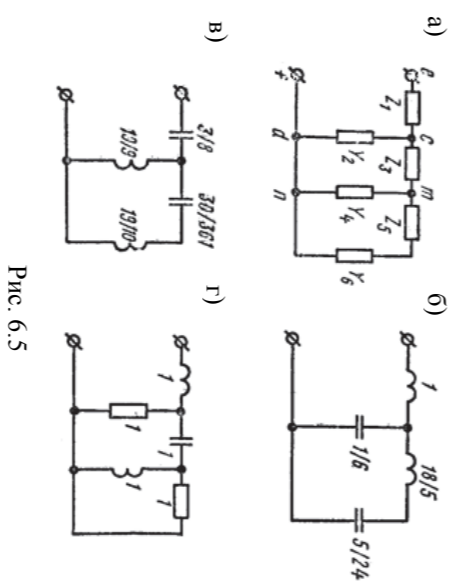


Рис. 6.5

Рассмотрим далее пример, который является иллюстрацией того, что иногда в процессе деления возникает необходимость изменения порядка расположения слагаемых (рис. 6.5, з).

Задача 6.2. Реализовать $Z(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}{p(p^2 + 2p + 2)}$.

Решение

Так как $Z(p)$ имеет полюс при $p = 0$, то в схеме может быть выделена последовательно включенная емкость $C = 1 / a_0$, где

$$a_0 = \text{Res}_{p=0} Z(p) = \frac{2}{2} = 1.$$

Функция $Z(p)$ не имеет полюсов, лежащих на мнимой оси. Поэтому в состав сопротивления не входят последовательно включенные двухполюсники типа (см. рис. 6.2, в). Определим, какое $Z(p)$ осталось реализовать (назовем его $Z_3(p)$)

$$Z_3(p) = Z(p) - \frac{a_0}{p} = \frac{p^3 + 2p}{p^2 + 2p + 2}.$$

Функция $Z_3(p)$ имеет нуль при $p = 0$. Для реализации оставшейся части схемы перейдем к проводимости

$$Y_3(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{p(p + 2)}.$$

20. Примеры расчета электрических цепей по курсу «Теоретические основы электротехники»: учеб. пособие / Е. В. Лановенко, В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев, А. Н. Степанов. — Комсомольск-на-Амуре : Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 1999. — 120 с.

19. Саяпин, В. С. Расчетно-графические задания по курсу «Теоретические основы электротехники»: учеб. пособие / В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев, А. Н. Степанов. — Комсомольск-на-Амуре : Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 1998. — 76 с.

18. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях : учеб. пособие / А. Д. Абрамов, А. Р. Куделько, В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев. — Комсомольск-на-Амуре : КНАПИ, 1993. — 51 с.

17. Расчет нелинейных электрических цепей : учеб. пособие / А. Д. Абрамов, А. Р. Куделько, В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев ; под ред. А. Р. Куделько. — Хабаровск : Хабаровский политехн. ин-т, 1991. — 76 с.

16. Примеры расчета электрических цепей по курсу «Теоретические основы электротехники» / А. И. Елшин, А. Р. Куделько, В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев. — Хабаровск : Хабаровский политехн. ин-т, 1985. — 92 с.

15. Лосев, А. К. Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / А. К. Лосев. — М. : Высш. шк., 1987. — 512 с.

14. Карни, Ш. Теория цепей. Анализ и синтез / Ш. Карни ; пер. с англ. ; под ред. С. Е. Лондона. — М. : Связь, 1973.

13. Демирчян, К. С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей : учеб. пособие / К. С. Демирчян, К. А. Бутырин. — М. : Высш. шк., 1988. — 335 с.

12. Каплянский, А. Е. Теоретические основы электротехники / А. Е. Каплянский, А. П. Лысенко, П. А. Пологовский. — М. : Высш. шк., 1972. — 447 с.

11. Попов, В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. — М. : Высш. шк., 1985. — 496 с.

10. Матханов, П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей / П. Н. Матханов. — М. : Высш. шк., 1986. — 352 с.

9. Матханов, П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи / П. Н. Матханов. — М. : Высш. шк., 1986. — 352 с.

8. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. проф. П. А. Ионкина. — М. : Энергоиздат, 1982. — 768 с.

7. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основы теории линейных цепей. Т. 2. Нелинейные цепи и основы электромагнитного поля / под ред. проф. П. А. Ионкина. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

6. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

5. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

4. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

3. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

2. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

1. Т. 2 3 т. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. — М. : Высш. шк., 1979. — 545 с.

Обратим внимание на то, что в знаменателе $Y_0(p)$ имеется слагаемое $-p^3L_1$, которое при дальнейшей реализации приведет к появлению в схеме отрицательной индуктивности.

8) Поскольку при $p = j\omega_0$ $Z_1(p) - pL_1 = 0$, то $Y_0(p) = \infty$, т.е. $p = j\omega_0$ является полюсом $Y_0(p)$. Наличие полюса у $Y_0(p)$ позволяет представить оставшуюся часть двухполюсника ветвью из последовательно соединенных L_2 и C_2 , настроенной в резонанс на частоту ω_0 , и параллельно ей соединенного двухполюсника с сопротивлением $Z_2(p)$ (рис. 6.4, з):

$$Y_0(p) = \frac{1}{Z_1(p) - pL_1} = \frac{p^2 + b_1p + a_0}{-p^3L_1 + p^2(1 - b_1L_1) + p(a_1 - b_1L_1) + a_0}$$

то проводимость оставшейся для реализации части двухполюсника равна

$$Z_1(p) = \frac{p^3 + a_1p^2 + a_0}{p^2 + b_1p + b_0}$$

7) Составим разность $Z_1(p) - pL_1$ и приведем ее к общему знаменателю. Так, например, если исходить из того, что

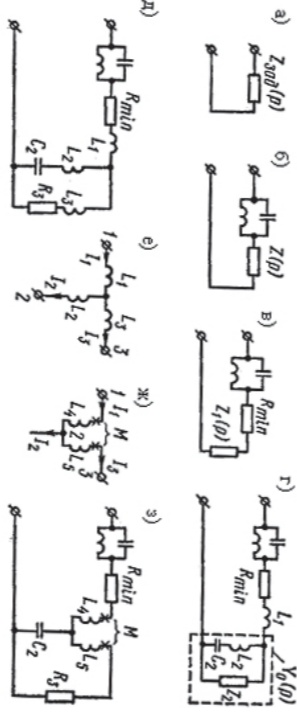
$$L_1 = X_1 / \omega_0.$$

то проводимость оставшейся для реализации части двухполюсника равна

5) Подсчитывают $Z_1(p)$ при $p = j\omega_0$. Так как при частоте $p = j\omega_0$ действительная часть $Z(p) = R_{\min}$, то действительная часть разности $Z_1(j\omega_0) - R_{\min}$ равна нулю, т.е. $Z_1(j\omega_0)$ представляет собой чисто реактивное сопротивление $Z_1(j\omega_0) = jX_1$.

6) Возможны два случая. Первый, когда $X_1 > 0$, второй, когда $X_1 < 0$. Будем полагать $X_1 = \omega_0 L_1 > 0$. Тогда

Рис. 6.4



$$Y_0 = \frac{1}{p^2 Z_2(p) + \dots} \tag{6.4}$$

9) Полагаем $Z_2(p) = N(p) / M(p)$. Степени полиномов $N_2(p)$ и $M_2(p)$ должны быть такими, чтобы после приведения правой части выражения (6.4) к общему знаменателю степень полинома числителя правой части равнялась степени полинома числителя правой части, то же и в отношении степеней знаменателей. Так, если $Y_0(p)$ соответствует выражению (6.4), то

$$Z_2(p) = (c_1p + c_0) / d_0.$$

Методом неопределенных коэффициентов можно найти c_1 , c_0 , d_0 и L_2 . В рассматриваемом случае

$$c_1 = -L_1\omega_0^2; \quad c_0 = a_0; \quad d_0 = b_0; \\ L_2 = \frac{L_1\omega_0^2}{(b_0 - \omega_0^2)}; \quad c_2 = \frac{1}{(\omega_0^2 L_2)}.$$

Разность $(b_0 - \omega_0^2) > 0$; это следует из того, что условие $X_1 > 0$ означает, что

$$\text{Im} \left[\frac{p^3 + a_1p^2 + a_0}{p^2 + b_1p + b_0} \right] > 0,$$

а при $p = j\omega_0$

$$\text{Re}Z_1(p) = 0.$$

10) Реализацию $Z_2(p)$ производят, как правило, лестничной схемой. Так, в рассматриваемом примере $Z_2(p)$ реализуют индуктивностью $L_3 = c_1 / d_0 = -\omega_0 L_1 / b_0$ и активным сопротивлением $R_3 = a_0 / b_0$ (рис. 6.4, д). Важно обратить внимание на то, что L_3 оказалась отрицательной.

11) Так как физически осуществить отрицательную индуктивность невозможно, то дальнейший этап реализации в методе Бруне состоит в том, чтобы три магнитно не связанные индуктивности L_1 , L_2 и L_3 заменить трансформатором, состоящим из индуктивностей L_4 и L_5 , между которыми имеется магнитная связь (взаимная индуктивность M). Это действие является обратным по отношению к операции «развязывания» магнитно связанных цепей.

На рис. 6.4, е изображены два участка цепи (левый – до преобразования, правый – после преобразования), показаны положительные направления токов в ветвях и указаны одноименные зажимы катушек. Напряжения между точками 1 и 2 для обоих участков цепи в силу их эквивалентности должны быть одинаковы, т.е.

$$pL_1I_1 + pL_2I_2 = pL_4I_1 - pMI_3;$$

1. Атабеков, Г. И. Линейные электрические цепи / Г. И. Атабеков. – М.: Энергия, 1978. – 592 с.

2. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М.: Высш. шк., 1987. – 528 с.

3. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. проф. Л. А. Бессонова. – М.: Высш. шк., 1988. – 543 с.

4. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

5. Нейман, Л. Р. Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л.: Энергоиздат, 1981. – Т. 1-2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Приведенные численные решения типовых задач в конце каждого раздела способствуют лучшему усвоению и пониманию теоретических положений, а также помогают студентам в решении самостоятельных задач.

Параграфы разделов по мере их изложения строятся от простого к сложному, что позволяет обучаемым лучше усваивать материал.

В пособии приведено достаточное количество схем и диаграмм для визуального восприятия тех или иных положений.

Основными понятиями и определениями в начале каждого раздела знакомит студента с теми величинами и законами, которыми ему надо будет пользоваться в процессе изучения материала.

Анализ переходных процессов в цепях содержит классический метод, метод интеграла Дюамеля и операторный метод. Кратко рассмотрены методы Эйлера и Рунге-Кутты в применении к переходным процессам.

Нелинейные цепи разделены на две части по роду токов. Анализируются основные наиболее распространенные методы расчетов.

В разделе цепей с распределенными параметрами главное внимание уделено установившимся режимам. Синтез электрических цепей рассмотрен на примере двухполюсников.

Основная цель пособия – дать студентам представление о методах синтеза электрических цепей, а также о методах анализа и синтеза.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Электротехника».

Рецензенты: д.т.н., профессор В. А. Козлов, д.т.н., профессор В. А. Козлов.

Составила: д.т.н., профессор В. А. Козлов.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Энергоатомиздат».

Сдано в печать 10.05.1989 г.

Листов 10.

Уч. изд. 100 экз.

Цена 1 руб. 50 коп.