

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

В. В. Лихтин, А. В. Сюй

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2012

УДК 517.95(07)
ББК 22.161.88я7
Л656

Рецензенты:

Н. С. Ловизин, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
лаборатории «Математическое моделирование технологических
процессов» Института материаловедения и металлургии ДВО РАН;
Кафедра «Физика» ФГБОУ ВПО «Дальневосточный государственный
гуманитарный университет» зав кафедрой, д-р физ.-мат. наук,
профессор В. И. Крылов

Лихтин, В. В.

Л656 Нестационарные уравнения математической физики : учеб. пособие
/ В. В. Лихтин, А. В. Сюй. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО
«КнАГТУ», 2012. – 93 с.
ISBN 978-5-7765-0939-1

В работе рассмотрены основные классы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Изложены основные задачи, приводящие к уравнениям гиперболического и параболического типов. Значительная часть пособия посвящена основным методам решения уравнений гиперболического и параболического типов, а именно, методам Даламбера и разделения переменных Фурье. К пособию прилагается электронное приложение, которое содержит анимационные фильмы, наглядно демонстрирующие различные колебательные процессы, оно размещено на сайте КнАГТУ: <http://www.knastu.ru/activity/education/fkt/vm.html>.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей, изучающих уравнения математической физики.

УДК 517.95(07)
ББК 22.161.88я7

ISBN 978-5-7765-0939-1

© Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального
образования «Комсомольский-на-Амуре
государственный технический
университет», 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	5
1.1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными.....	5
1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.....	7
1.3. Приведение к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.....	10
2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.....	13
2.1. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны.....	13
2.2. Колебания бесконечной струны. Решение Даламбера.....	17
2.3. Свободные колебания конечной струны с закрепленными концами. Метод Фурье.....	23
2.4. Вынужденные колебания струны, закреплённой на концах.....	29
2.5. Вынужденные колебания струны, не закреплённой на концах (общая первая краевая задача).....	35
2.6. Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны.....	38
2.7. Колебания прямоугольной мембраны.....	42
2.8. Уравнение и функции Бесселя.....	50
2.9. Уравнение колебаний круглой мембраны с закреплённым краем.....	55
3. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.....	60
3.1. Вывод уравнения теплопроводности.....	60
3.2. Решение однородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня методом Фурье и его физический смысл.....	63
3.3. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня методом Фурье.....	68
3.4. Распространение тепла в тонком однородном стержне конечной длины (первая краевая задача).....	70
3.5. Задача о распространении тепла в конечном стержне, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой.....	78
3.6. Решение уравнения распространения тепла в бесконечном цилиндре методом Фурье.....	83
4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	92

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи, связанные с колебательными процессами, сводятся к линейным дифференциальным уравнениям математической физики. Уравнения математической физики – довольно сложный, с очень высокой степенью обобщенности и абстракции раздел математики, для изучения которого требуются знания многих других разделов, таких как: обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, кратные интегралы, теория поля и т.д. Предлагаемое издание – попытка найти компромисс классического изложения с простотой и доступностью для будущих инженеров, которые не имеют специального математического образования.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей при изучении курса «Уравнения математической физики».

Содержание пособия представлено в виде трех разделов.

Первый раздел имеет общий характер и посвящен дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка, которые чаще всего встречаются в различных приложениях. Приведены классификация уравнений и преобразование их к каноническому виду.

Во втором разделе рассматриваются задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. А именно, задачи о малых поперечных колебаниях струны и мембраны.

В третьем разделе рассматриваются задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. А именно, задачи о распределении температуры в тонком стержне и бесконечном цилиндре.

Рассмотрены основные методы решения. К ним относятся метод распространяющихся волн Даламбера и метод разделения переменных Фурье.

Особенность данного пособия состоит в том, что все изменяющиеся во времени процессы, к которым приводят рассмотренные в нем задачи, моделируются при помощи пакета математических программ MathCAD. Полученные модели используются для создания анимационных фильмов, которые наглядно демонстрируют в том числе колебательные процессы. Набор анимационных фильмов – важная составляющая пособия, которая

представлена в виде электронного приложения, которое размещено на сайте КнАГТУ: <http://www.knastu.ru/activity/education/fkt/vm.html>.

Уравнения математической физики – один из немногих разделов математики, где рассматриваются задачи, которые позволяют пройти все основные стадии ее решения – от физической модели до компьютерной. Этот факт имеет большое значение, так как устанавливает очевидную связь физических явлений с математическим аппаратом, который эти явления описывает, и программными средствами, которые на основе математической модели позволяют построить компьютерную модель реального физического явления. Поэтому целесообразно изучать уравнения математической физики параллельно или после изучения какой-либо математической программы, например, MathCAD.

Авторы выражают благодарность В.Н. Логинову, доценту кафедры математика КнАГТУ, за ряд ценных замечаний.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1.1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными

Обыкновенные дифференциальные уравнения связывают одну независимую переменную, функцию этой переменной и ее производные. Общий интеграл уравнения n -го порядка содержит ровно n произвольных постоянных. Так, например, уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y(x)$ имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$, общий интеграл которого – $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Уравнение с частными производными связывает функцию нескольких независимых переменных, ее аргументы и частные производные по этим аргументам. К таким уравнениям сводятся многие задачи математики, физики, аэро- и гидродинамики и других наук.

Если, например, неизвестная функция $u = u(x, y)$ является функцией двух независимых переменных, то в общем случае дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка относительно этой функции имеет вид:

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xy}, u''_{xx}, u''_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Задача интегрирования уравнения с частными производными состоит в том, чтобы найти все решения данного уравнения.

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} - 5xy = 0$ относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решение. Перенесем второе слагаемое в правую часть и проинтегрируем уравнение по переменной x , считая y константой. В результате получим:

$$u(x, y) = \frac{5}{2}x^2y + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y .

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что найденная функция удовлетворяет уравнению, то есть является его решением.

Пример 1.2. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ и проинтегрируем по переменной x . Поскольку при этом y считается постоянной величиной, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y . Его общее решение будет иметь вид:

$$u(x, y) = \int \varphi(y) dy + \psi(x).$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция переменной x . Так как функция $\varphi(y)$ произвольна, то интеграл от нее является произвольной функцией от y . Следовательно, решение уравнения определяется двумя произвольными функциями, одна из которых зависит от x , а другая – от y .

Таким образом, решение обыкновенного дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, а решение уравнения с частными производными – произвольные функции.

Напомним, что через произвольные постоянные общего решения обыкновенного дифференциального уравнения находят его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (решение задачи Коши). Наличие произвольных функций в решении уравнения с частными производными также используется для нахождения частного решения этого уравнения, удовлетворяющего некоторым условиям, которые называются краевыми условиями. К ним относятся: начальные условия, описывающие состояние системы в начальный момент времени, и граничные условия, которым должна удовлетворять искомая функция. Краевые условия определяются всегда исходя из физических условий задачи.

Далее рассматриваются лишь некоторые основные вопросы, которые касаются решения отдельных видов дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, наиболее часто встречающиеся на практике.

1.2. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Для сокращения и удобства записи в дальнейшем будем использовать обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = u_{yy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}.$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (1.1).

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.2)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y . Если же эти коэффициенты зависят также и от u, u_x, u_y , то уравнение называется квазилинейным.

Уравнение называется линейным, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее производных, то есть имеет вид:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (1.3)$$

где все коэффициенты функции только x и y .

Если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Если все коэффициенты уравнения (1.3) постоянные, то уравнение называется линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (1.4)$$

допускающего обратное преобразование, можно получить новое уравнение, эквивалентное уравнению (1.2). Преобразование будет иметь смысл, если в результате его уравнение примет более простую форму.

Используя правило дифференцирования сложной функции двух переменных, выразим производные уравнения (1.2) через новые переменные, получим:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в уравнение (1.2), будем иметь:

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + a_{22} \xi_y \eta_y, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных.

Поставим задачу: выбрать ξ и η так, чтобы в уравнении (1.5) коэффициенты $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{22}$ обратились в нуль. Для этого, как следует из выражений для этих коэффициентов, требуется найти решение уравнения с частными производными первого порядка

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \quad (1.6)$$

Вопрос о решении уравнения (1.6) решает следующая лемма.

Функция $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (1.6) тогда и только тогда, когда соотношение $\varphi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.7)$$

Докажем прямое утверждение. Пусть функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.6). Подставляя в уравнение (1.6) эту функцию, перепишем его в виде

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0. \quad (*)$$

Пусть функция y определена неявным соотношением $\varphi(x, y) = c$.

Используя правило дифференцирования неявных функций одной переменной, получим: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$.

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Из чего, очевидно, следует, что функция y удовлетворяет уравнению (1.7), а значит, $\varphi(x, y) = c$ – общий интеграл этого уравнения. Что и требовалось доказать.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Уравнение (1.7) называется характеристическим для уравнения (1.3), а его интегралы – характеристиками.

Решая уравнение (1.7) как квадратное относительно $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (1.8)$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1.2).

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ – гиперболический тип,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ – эллиптический тип,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ – параболический тип.

1.3. Приведение к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Будем рассматривать область G , во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области проходят две характеристики. Для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для эллиптического – комплексно сопряжены, для параболического – действительны и совпадают между собой.

Пусть $\varphi(x, y) = c$ и $\psi(x, y) = c$ характеристики уравнения гиперболического типа, полагая $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ и поделив после преобразований на коэффициент при $u_{\xi\eta}$, получим уравнение вида

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.9)$$

Мы получили каноническую форму уравнений гиперболического типа. Этот тип уравнений можно привести и к другой форме. Для этого положим

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Уравнение (1.9) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

Для уравнений параболического типа уравнения (1.8) совпадают, и мы получим один общий интеграл уравнения (1.7), а именно $\varphi(x, y) = const$.

Воспользуемся формулой (1.4), где $\psi(x, y)$ – любая функция, линейно независимая с функцией $\varphi(x, y)$.

После преобразований получим каноническую форму уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

В случае уравнения эллиптического типа уравнения (1.8) дают интегралы $\varphi(x, y) = c$ и $\varphi^*(x, y) = c$, где $\varphi(x, y)$ и $\varphi^*(x, y)$ – комплексно сопряженные функции. Чтобы избавиться от мнимой составляющей, введем новые переменные по формулам

$$\xi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \eta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

После преобразований получим каноническую форму уравнения эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Если коэффициенты линейного уравнения (1.3) постоянные, то характеристическое уравнение имеет решение

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + c_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + c_2.$$

В результате преобразования уравнение приводится к одной из форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + c \cdot u + f = 0 \quad \text{— эллиптический тип;}$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + c \cdot u + f = 0 \quad \text{— гиперболический тип;}$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + c \cdot u + f = 0 \quad \text{— параболический тип.}$$

Пример 1.3. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0.$$

Решение. Запишем, чему равны для нашего случая коэффициенты. Так как $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{22} = 1 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$, имеем уравнение параболического типа. Характеристическое уравнение имеет вид: $\frac{dy}{dx} = 1$.

Решая его, находим, что общий интеграл уравнения $x - y = c$.

Положим $\xi = x - y$, а в качестве другой переменной возьмем $\eta = x + y$. При этом: $\xi_x = 1, \xi_y = -1, \eta_x = 1, \eta_y = 1$. Тогда

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\xi\eta} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\eta} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y = -u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = -u_{\xi\xi} \xi_y - u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\eta} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставляя значения частных производных в исходное уравнение, после простых преобразований получим: $u_{\eta\eta} + u = 0$.

Пример 1.4. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

Решение. $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = 2 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -1$, т.е. имеем уравнение эллиптического типа. Уравнение характеристик – $dy^2 + 2dxdy + 2dx^2 = 0$ или $y'^2 + 2y' + 2 = 0$.

Отсюда $y' = -1 \pm i$. Получаем два семейства комплексно-сопряженных характеристик: $y + x - ix = c_1$ и $y + x + ix = c_2$.

Тогда $\varphi(x, y) = y + x - ix$, $\varphi^*(x, y) = y + x + ix$. Делаем замену переменных: $\xi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} = x + y$, $\eta = \frac{\varphi^* - \varphi}{2i} = x$. При этом $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = 1$, $\eta_y = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + u_{\xi\eta} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + u_{\xi\eta} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y = u_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

Пример 1.5. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Решение. Здесь $a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = x^2 y^2 > 0$ – уравнение гиперболического типа (если $x = 0$ или $y = 0$, то получаем простейшие уравнения, которые были рассмотрены в подразделе 1.1). Уравнение характеристик: $x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0 \Rightarrow (xdx + ydy)(xdy - ydx) = 0$.

Отсюда $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$ и $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$. Проинтегрировав эти уравнения, получим два семейства характеристик: $xy = c_1$ и $\frac{y}{x} = c_2$.

Вводим новые переменные: $\xi = xy$ и $\eta = \frac{y}{x}$. Далее необходимо выразить частные производные по старым переменным через новые и подставить в исходное уравнение. В результате получим:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0.$$

2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны

Пусть конечные точки струны закреплены, а сама струна туго натянута. Если вывести струну из положения равновесия (например, оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия (поперечные колебания), причем в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Введем в этой плоскости систему прямоугольных координат xOy . Тогда, если в начальный момент времени струна располагалась вдоль оси Ox , то u будет означать отклонение струны от положения равновесия. В процессе колебания величина отклонения u будет зависеть от абсциссы точки струны x и от времени t . Таким образом, чтобы знать положение любой точки струны в произвольный момент времени, надо найти зависимость u от x и t , т.е. найти функцию $u(x, t)$. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$ представляет форму колеблющейся струны в момент времени t , частная производная $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x, t)$ даёт при этом угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x .

При изменении t форма струны, очевидно, изменяется, и, чтобы представить себе процесс колебаний, мы должны построить несколько графиков функции $u(x, t)$ при различных значениях t , т.е. сделать несколько мгновенных снимков колеблющейся струны. При постоянном значении x функция $u(x, t)$ дает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси Oy , производная $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t(x, t)$ – скорость этого

движения, а вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – ускорение.

Наша задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого сделаем предварительно несколько упрощающих предположений. Будем считать струну абсолютно

гибкой, т. е. не сопротивляющейся изгибу. Это означает, что если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения T , заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне. Струна предполагается упругой и подчиняющейся закону Гука. Изменение величины силы натяжения при этом пропорционально изменению длины струны. Примем, что струна однородна и обозначим буквой ρ ее линейную плотность (ρ – масса единицы длины струны).

Предположим, далее, что на струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные оси Ou , которые могут меняться вдоль струны и со временем. Силы эти будем считать непрерывно распределенными вдоль струны. Величину силы, направленной вверх, условимся считать положительной, а вниз – отрицательной. Плотность распределения этих сил вдоль струны является функцией абсциссы x и времени t . Обозначим ее через $g(x, t)$. Если, в частности, единственной внешней силой является вес струны, то $g(x, t) = \rho g$, где ρ – плотность струны, а g – ускорение силы тяжести.

Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, мы пока пренебрегаем.

Будем изучать только малые колебания струны. Если обозначить через $\alpha(x, t)$ острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой x в момент времени t , то условие малости колебаний заключается в том, что величиной $\alpha^2(x, t)$ можно пренебрегать. Кроме того, так как α – малая величина, справедливы приближенные равенства:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha. \quad (2.1)$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, то в силу полученных условий заключаем, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0.$$

Отсюда сразу следует, что в процессе колебания мы можем пренебречь изменением длины любого участка струны. Действительно, длина участка $M_1 M_2$ в момент времени t (рис. 2.1) равна

$$M_1 M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx \approx x_2 - x_1. \quad (2.2)$$

Покажем теперь, что при наших предположениях величину силы натяжения T можно считать постоянной, не зависящей ни от точки ее приложения, ни от времени t . Возьмем для этого какой-либо участок струны $M_1 M_2$ (рис. 2.2) в момент времени t и заменим действие отброшенных участков силами натяжений T_1 и T_2 .

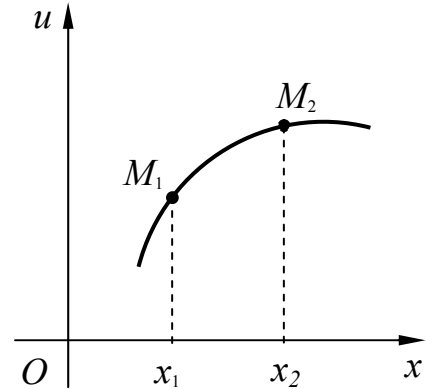


Рис. 2.1

Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси Ou и внешние силы также параллельны этой оси, то сумма проекций сил натяжения на ось Ox должна равняться нулю, т.е.

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (2.3)$$

Отсюда в силу (2.1) заключаем, что $T_1 = T_2$. Так как точки M_1 и M_2 выбраны произвольно, то это и доказывает, что в данный момент времени силы натяжения во всех точках равны между собой.

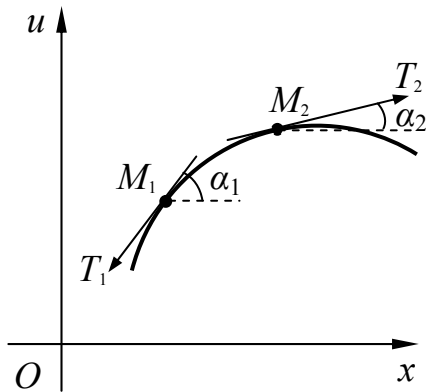


Рис. 2.2

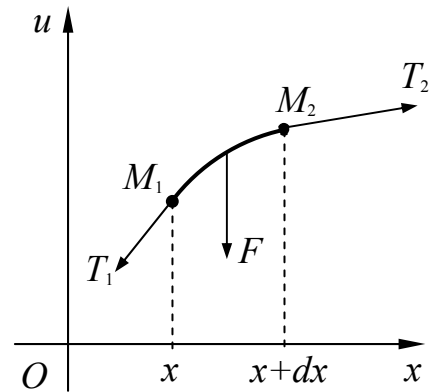


Рис. 2.3

Поскольку мы пренебрегаем изменением длины любого участка струны, то в силу закона Гука неизменным остается и натяжение струны. Итак, мы показали, что в пределах выбранной точности, натяжение струны есть величина постоянная. Примем ее равной T_0 .

Перейдем теперь к выводу уравнения колебаний струны. Выделим бесконечно малый участок струны $M_1 M_2$, проектирующийся в интервал

$[x, x + dx]$ оси абсцисс (рис. 2.3). На него действуют силы натяжения T_1 и T_2 , заменяющие влияние отброшенных частей струны. Как уже отмечалось выше, силы T_1 и T_2 направлены по касательным к струне в точках M_1 и M_2 , а величина этих сил равна T_0 . Согласно равенству (2.3), сумма проекций сил T_1 и T_2 на ось Ox равна нулю. Вычислим сумму проекций этих же сил на ось Ou :

$$-T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

$$\text{Так как } \sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = u'_x(x + dx, t), \quad \sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = u'_x(x, t),$$

то

$$T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0 [u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)] \approx T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.4)$$

Здесь мы заменили частное приращение производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ при переходе от аргументов (x, t) к аргументам $(x + dx, t)$ её частным дифференциалом, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Равнодействующую внешних сил, приложенных к участку M_1M_2 в момент времени t , обозначим через F . Согласно определению функции $g(x, t)$ и приближенному равенству (2.2), можно считать, что

$$F \approx g(x, t) M_1 M_2 \approx g(x, t) dx. \quad (2.5)$$

Направление равнодействующей F определится знаком функции $g(x, t)$ (направление F на рис. 2.3 соответствует случаю $g(x, t) < 0$).

После того как найдены все силы, действующие на участок M_1M_2 , применим к нему второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих сил (в силу малости участка M_1M_2 мы рассматриваем его просто как материальную точку).

Так как масса участка M_1M_2 струны равна ρ , то $M_1M_2 = \rho dx$. Используя формулы (2.4) и (2.5), получим:

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t) dx.$$

Сократив на dx и разделив все члены равенства на ρ , приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t) \quad (2.6)$$

($a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ – положительная постоянная величина). В результате мы получили линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (2.6) называется *уравнением колебаний струны* или *одномерным волновым уравнением*. Это одно из простейших и в то же время важнейших дифференциальных уравнений математической физики.

Если $g(x, t) \equiv 0$, то уравнение (2.6) называется *однородным*. Оно описывает свободные колебания струны без воздействия внешних усилий. В противном случае уравнение называется *неоднородным* и описывает вынужденные колебания струны. Когда на струну действуют только силы тяжести, а натяжение струны T_0 велико, мы вправе пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения струны по сравнению с первым и рассматривать, таким образом, колебания струны как свободные.

2.2. Колебания бесконечной струны. Решение Даламбера

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечной струны. Если представить себе очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникшие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния. Так, если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны. Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до концов веревки и, отразившись, пойдут обратно. Следовательно, не учитывая влияния концов струны, мы тем самым не будем учитывать влияния отраженных волн.

Таким образом, мы приходим к задаче о свободных колебаниях неограниченной струны, которая формулируется так: решить однородное линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (2.7)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2.8)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси. Никакие другие условия на искомую функцию $u(x, t)$ не накладываются. Такая задача называется задачей с начальными условиями, или задачей Коши. Метод ее решения называется методом Даламбера или методом бегущих волн.

Уравнение характеристик $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ распадается на два:

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Характеристиками являются прямые $x - at = c_1$, $x + at = c_2$.

Введя новые переменные $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, получим канонический вид уравнения колебаний $u_{\xi\eta} = 0$.

Интегрируя по ξ , получим $u_\eta = f^*(\eta)$.

Интегрируя по η (при фиксированном значении ξ), будем иметь:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Подставив ξ и η , получим

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (2.9)$$

Учитывая начальные условия (2.8), получим

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (2.10)$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.11), получим

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + c. \quad (2.12)$$

Решая (2.12) совместно с (2.10), будем иметь:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{c}{2}, \quad (2.13)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{c}{2}. \quad (2.14)$$

Учитывая, что функции f_1 и f_2 определены для любого аргумента, заменяем x в (2.13) на $x + ax$ и в (2.14) на $x - ax$. Подставляя полученные выражения в (2.9), получим

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + a \cdot t) + \varphi(x - a \cdot t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[\int_{x_0}^{x+at} \psi(z) dz - \int_{x_0}^{x-at} \psi(z) dz \right]$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + a \cdot t) + \varphi(x - a \cdot t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) называется формулой Даламбера или решением Даламбера задачи Коши, для уравнения (2.7) колебаний неограниченной струны. Из формулы следует существование и единственность решения данной задачи.

Выясним физический смысл полученного решения. Рассмотрим два частных случая.

Пусть начальные скорости точек струны равны нулю и струна колеблется в результате начального отклонения. В этом случае в формуле (2.15) надо положить $\psi(x) \equiv 0$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (2.16)$$

Функцию (2.16) можно рассматривать как наложение (суперпозицию) колебаний двух волн. Первая волна $\frac{1}{2} \varphi(x - at)$ распространяется со скоростью a вправо (прямая волна), а вторая волна $\frac{1}{2} \varphi(x + at)$ – с той же скоростью влево (обратная волна).

В начальный момент времени $t = 0$ профили обеих волн совпадают и повторяют начальное отклонение струны с половинной амплитудой.

Предположим, что в начальный момент функция $\varphi(x)$ отлична от нуля только на некотором интервале $(-l, l)$. Для простоты изложения считаем функцию $\varphi(x)$ четной. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $|x| > l$. Проследим за изменением формы струны в любой момент времени.

Файл `animat_1.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует процесс колебания струны в зависимости от времени при

$\varphi(x) = -\frac{x^2}{100} + 1$, $l = 10$. Здесь голубым цветом изображены прямая

$\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ и обратная $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ волны. Для наглядности прямая и обратная волны смещены на одну единицу масштаба вниз и вверх соответственно. В начальный момент времени прямая и обратная волны совпадают. Красным цветом изображается сумма этих волн, т.е. результирующее колебание $u(x,t)$. Далее прямая и обратная волны начинают движение каждая в своем направлении. Из этой демонстрации, в частности, можно сделать вывод о характере колебания точки струны с фиксированной абсциссой x . Если $|x| > l$, то в начальный момент точка струны лежит на оси абсцисс, она не участвует в начальном отклонении. Волна (прямая или обратная) дойдет до этой точки в момент времени $t_1 = \frac{|x|-l}{a}$, и с этого момента точка струны начнет колебаться. Как только волна пройдет через рассматриваемую точку, т.е., начиная с момента $t_2 = \frac{|x|+l}{a}$, эта точка снова будет находиться в покое. В момент времени t_1 до точки x доходит передний фронт волны, а в момент t_2 – задний фронт. Таким образом, рассматриваемая точка струны участвует в колебательном процессе при $\frac{|x|-l}{a} < t < \frac{|x|+l}{a}$.

Кроме того, можно сделать важное заключение о том, что коэффициент $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ в уравнении колебаний струны (2.6) имеет смысл скорости распространения вдоль струны начальных отклонений.

Пусть теперь начальное смещение $\varphi(x) \equiv 0$, а $\psi(x)$ отлично от нуля в промежутке $(-l, l)$ и вне этого промежутка $\psi(x) = 0$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс (волна импульса). Тогда в соответствии с (2.15) решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (2.17)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_0^x \psi(z) dz. \quad (2.18)$$

Используя (2.18), запишем (2.17) в виде

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at). \quad (2.19)$$

То есть по струне распространяются две волны импульса – прямая $-\Psi(x - at)$ и обратная $\Psi(x + at)$, а результирующая волна $u(x, t)$ является суммой (суперпозицией) этих волн.

Допустим для определенности, что на промежутке $(-l, l)$ $\psi(x) = k$, где k – константа, отличная от нуля. Это допущение не повлияет на дальнейший ход наших рассуждений, так как если $\psi(x)$ отлична от постоянной на этом промежутке, то изменится лишь профиль $\Psi(x)$. Вычислим функцию $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_0^x \psi(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ \frac{k}{2a}(x+l) & \text{при } -l \leq x \leq l, \\ \frac{kl}{a} & \text{при } x > l. \end{cases} \quad (2.20)$$

Проследим за изменением формы струны в любой момент времени.

Файл `animat_2.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует процесс колебания струны в зависимости от времени при $l = 10, a = 1, k = \frac{1}{5}$. Здесь голубым цветом изображены прямая и обратная

волны. Для наглядности прямая и обратная волны смещены на одну единицу масштаба вниз и вверх соответственно. Красным цветом изображается сумма этих волн, то есть результирующее колебание (2.19).

Прямая и обратная волны начинают движение каждая в своем направлении

со скоростью $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Раньше всех в момент $t = \frac{l}{a}$ максимального

отклонения $h = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(z) dz$ достигает точка $x = 0$. Затем, с течением

времени, этого отклонения достигают и другие точки струны, а именно, в

момент $t > \frac{l}{a}$ этого отклонения достигают все точки струны, для которых

$|x| < at - l$. Каждая точка x , получившая начальную скорость (т.е. для

которой $|x| < l$) с момента $t = 0$, начинает перемещаться вверх и достигает максимального отклонения h в момент $t = \frac{|x| + l}{a}$, после чего она остается в покое на высоте h . Точка x , для которой $|x| > l$, остается в покое до момента $t = \frac{|x| - l}{a}$, после которого она начинает отклоняться вверх и достигает отклонения h в момент $t = \frac{|x| + l}{a}$, затем остается в покое на этой высоте. Таким образом, с течением времени, каждая точка струны под влиянием начальных скоростей, сообщенных участку струны, поднимается на высоту h .

Вывод: действие импульса заключается в том, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, определяемый интегралом (2.17), и остаются в этом положении. Волна как бы оставляет след после своего прохождения.

Файл `animat_3.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует результирующее колебание струны (2.15) как наложение волн начального отклонения (2.16) и начального импульса (2.20). Параметры волн такие же, как и в приведенных выше примерах. Для наглядности волны начального отклонения и начального импульса смещены на три единицы масштаба вверх и вниз соответственно. Результирующее колебание изображается красным цветом.

Полученные результаты для колебаний бесконечной струны не могут быть применены к реальному колебанию физической струны. Действительно, при их выводе не были учтены многие факторы. В частности, опыт учит нас, что струна какой угодно длины, выведенная из положения равновесия или ударенная, колеблется. Законы колебания бесконечной струны (2.16) и (2.17) этого не показывают потому, что колебания конечной струны происходят вследствие отражения отклонений от закрепленных концов струны, а при рассмотрении бесконечной струны мы не учитываем влияния концов. Поэтому практически решения (2.16) и (2.17) применимы только для таких моментов t , для которых отклонения точек струны не успели дойти до ее концов. Кроме того, начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть такими, чтобы в течение всего

процесса $u_x(x, t)$ была малой величиной, которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

2.3. Свободные колебания конечной струны с закрепленными концами. Метод Фурье

Метод разделения переменных или метод Фурье или метод наложения стоячих волн является одним из важнейших методов решения уравнений математической физики. Найдем решение задачи о свободных колебаниях конечной струны, закрепленной на концах методом Фурье, т.е. будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2.21)$$

удовлетворяющее однородным или нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.22)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.23)$$

Рассмотрим основную вспомогательную задачу.

Найти отличные от тождественного нуля решения уравнения (2.21), удовлетворяющие только граничным условиям (2.22), в виде произведения $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, т.е. в виде произведения функции только от x на функцию только от t . Такой подход дает возможность выбирать одну из функций $X(x)$ или $T(t)$ произвольно.

Подставляя $X(x) \cdot T(t)$ вместо $u(x, t)$ в уравнение (2.21), получим

$$XT'' = a^2 X''T.$$

Поделив последнее уравнение на XT , будем иметь:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Левая часть этого выражения зависит только от x , а правая – только от переменной t .

Так как последнее равенство справедливо для любых значений x и t (можно, например, зафиксировать x и менять t), то левая и правая части сохраняют постоянное значение, которое для удобства дальнейших выкладок обозначим – λ :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (2.24)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (2.25)$$

Учитывая граничные условия (2.22):

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0,$$

находим:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (2.26)$$

Нетрудно проверить, что если постоянная λ отрицательна или равна нулю, то не существует отличной от тождественного нуля функции $X(x)$, удовлетворяющей краевым условиям (2.26). Поэтому постоянная λ должна быть положительной. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче дополнительных условий нет.

Задача решения уравнения (2.24) с условиями (2.26) называется задачей о собственных значениях или *задачей Штурма-Лиувилля*.

Ненулевое решение уравнения (2.24) запишется в виде

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Из граничных условий находим:

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Так как $X(x) \neq 0$, то $C_2 \neq 0$, поэтому $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Отсюда $\sqrt{\lambda} l = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$.

Числа λ_n называются собственными значениями краевой задачи (задачи Штурма–Лиувилля).

Им соответствуют функции $X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$, где C_n – произвольные постоянные, которые называются собственными функциями.

В виду произвольности выбора одной из функций $X(x)$ или $T(t)$ положим $C_n = 1$.

Тем же собственным значениям будут соответствовать решения уравнения (2.25)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at ,$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Итак, частными решениями основной вспомогательной задачи будут функции

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x .$$

Сумма частных решений также является решением этой задачи:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x . \quad (2.27)$$

Если определить A_n и B_n по начальным условиям (2.23), то тем самым мы найдем решение поставленной задачи (2.21) – (2.23).

Подставив $t = 0$ в выражение (2.27), получим

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) . \quad (2.28)$$

Аналогично для производной $u_t(x, t)$:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x) . \quad (2.29)$$

Чтобы найти A_n и B_n , используем теорию рядов Фурье, из которой известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, т.е. функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, заданная в промежутке $0 \leq x \leq l$, раскладывается в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi .$$

Если функция $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Дирихле, то

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi , \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi . \end{aligned}$$

Сравнение этих рядов с формулами (2.28) и (2.29) показывает, что для выполнения начальных условий (2.23) надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n.$$

Таким образом, окончательно, решение задачи о свободных колебаниях конечной струны с закрепленными концами имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (2.30)$$

Очевидно, ряд (2.30) должен сходиться, а функция $u(x, t)$ должна быть дифференцируемой. В противном случае выражение (2.30) не может быть решением рассматриваемого дифференциального уравнения.

Пример 2.1. Струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы $u = \frac{x(l-x)}{m}$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 2.4).

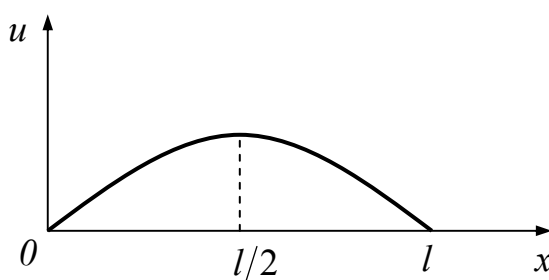


Рис. 2.4

Решение. Другими словами, необходимо найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) = \frac{x(l-x)}{m}, \quad u_t(x,0) = \psi(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Находим коэффициенты A_n и B_n по формулам (2.30)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{lm} \int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= -\frac{2}{\pi n m} \int_0^l (lx - x^2) d \cos \frac{\pi n x}{l} = -\frac{2}{\pi n m} (lx - x^2) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n m} \int_0^l (l - 2x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2l}{\pi^2 n^2 m} \int_0^l (l - 2x) d \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{2l}{\pi^2 n^2 m} (l - 2x) \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \frac{4l}{\pi^2 n^2 m} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= -\frac{4l^2}{\pi^3 n^3 m} \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l = \frac{4l^2}{\pi^3 n^3 m} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Здесь дважды использовалась формула интегрирования по частям.

Очевидно, что $B_n = 0$. Подставляя A_n и B_n в (2.30), получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2}{n^3 \pi^3 m} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n \pi a t}{l} \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

Если $n = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то $1 - (-1)^n = 0$, а если $n = 2k - 1$, то $1 - (-1)^n = 2$, поэтому окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{8l^2}{m \pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1) \pi a t}{l} \sin \frac{(2k-1) \pi x}{l}.$$

Файл `animat_4.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует колебания струны как суммы первых трех ненулевых гармоник.

Обратимся к интерпретации найденного решения. Рассмотрим каждое отдельное слагаемое в формуле (2.30), то есть функцию

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Видим, что все точки струны колеблются с одинаковой частотой $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$ и фазой. Амплитуда каждой точки зависит от координаты x и постоянна. Это легко доказать. Действительно, исследуем функцию $\varphi(t) = a \cos t + b \sin t$ на экстремум. $\varphi'(t) = -a \sin t + b \cos t = 0$, откуда

$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{b}{a}$. Далее, воспользовавшись тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, найдем:

$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. После подстановки выражений для $\cos t$

и $\sin t$ в функцию $\varphi(t)$ получим $\sqrt{a^2 + b^2}$ – максимальное значение функции $\varphi(t)$. Таким образом, очевидно, максимальное значение функции

$u_n(x, t)$ будет $\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{\pi n}{l} x$. Это означает, что все точки струны

одновременно достигают максимальных отклонений и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания струны называются

стоячими волнами. Точки, в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, в течение всего

процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x, t)$. Очевидно, координаты этих точек будут

$$x = \frac{ml}{n}, \quad (m = 1, 2, \dots, n-1).$$

Точки, в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, совершают колебания с

максимальной амплитудой, равной $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, и называются пучностями стоячей волны. Каждая струна может иметь колебания строго

определенных частот $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$. Они называются собственными частотами

струны. Наименьшая из собственных частот $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ называется

частотой основного тона и вносит наибольший вклад в результирующее колебание струны. Она тем выше, чем короче струна (т.е. чем меньше l), чем больше натяжение T и чем легче струна (чем меньше ρ). Остальные частоты ω_n называются частотами соответствующих обертонов.

Файл `animat_5.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует первые три гармоники колебания струны (стоячие волны). Колебания красного, синего и зеленого цвета: первая гармоника (основной тон), вторая гармоника (первый обертон), третья гармоника (второй обертон) соответственно. Пучности стоячих волн выделены точками того

же цвета, что и соответствующая им волна. Очевидно, что число пучностей каждой волны соответствует номеру ее гармоники. Узлы стоячих волн совпадают с точками пересечения волны с горизонтальной осью (ось времени). У гармоники основного тона узлов нет. Для остальных волн, очевидно, число узлов на единицу меньше номера ее гармоники.

2.4. Вынужденные колебания струны, закреплённой на концах

Пусть на струну, закреплённую на концах, действует внешняя сила. Чтобы исследовать колебания этой струны рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t), \quad (2.31)$$

в котором $G(x, y) = \frac{1}{\rho} g(x, t)$, где ρ – линейная плотность струны, а $g(x, t)$

– плотность распределения внешних сил.

Начальные и граничные условия примут вид:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2.32)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (2.33)$$

Так же, как и при решении обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, будем искать решение уравнения (2.31) в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \quad (2.34)$$

Функцию $v(x, t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла однородному уравнению $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и условиям (2.32), (2.33).

Тогда функция $w(x, t)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(x, t), \quad (2.35)$$

начальным и граничным условиям:

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0.$$

Легко проверить, что при таком выборе функций v и w их сумма (2.34) будет являться искомым решением.

Функция $v(x, t)$ описывает свободные колебания струны, происходящие только вследствие придания точкам струны начальных отклонений и скоростей. Функция $w(x, t)$ описывает вынужденные колебания, которые совершаются под действием внешних сил при отсутствии начальных возмущений.

Будем искать функцию $w(x, t)$ в виде ряда по собственным функциям $\sin \frac{k\pi x}{l}$ однородной задачи

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.36)$$

где $\gamma_k(t)$ – не определенные пока функции от t .

Прежде всего, заметим, что функция $w(x, t)$ действительно удовлетворяет краевым условиям $w(0, t) = 0$, $w(l, t) = 0$, так как все собственные функции обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = l$. Чтобы функция $w(x, t)$ удовлетворяла и начальным условиям, достаточно считать, что $\gamma_k(0) = 0$ и $\gamma'_k(0) = 0$.

Запишем уравнение (2.35) в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = G(x, t)$$

и заменим функцию $w(x, t)$ рядом (2.36), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma''_k(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = G(x, t). \quad (2.37)$$

Разложим теперь функцию $G(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд по синусам по аргументу x :

$$G(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.38)$$

где

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (2.39)$$

(при интегрировании t считается постоянным).

Если, в частности, плотность распределения внешних сил не зависит от времени, то функция $G(x, t)$ не зависит от t , т.е. $G(x, t) = G(x)$ и формула (2.38) представляет собой обычное разложение в ряд Фурье по синусам. В этом случае функции $g_k(t)$ постоянны.

Если же функция $G(x, t)$ не зависит от x , а зависит только от времени t , т.е. $G(x, t) = G(t)$, то функции $g_k(t)$ будут равны

$$g_k(t) = \frac{2G(t)}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k - \text{чётное,} \\ \frac{4}{k\pi} G(t), & \text{если } k - \text{нечётное.} \end{cases} \quad (2.40)$$

Приравнявая в разложениях (2.37) и (2.38) коэффициенты при собственных функциях, составим дифференциальные уравнения для отыскания неизвестных функций $\gamma_k(t)$:

$$\gamma_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_k(t) = g_k(t). \quad (2.41)$$

К полученному неоднородному уравнению второго порядка следует присоединить установленные выше начальные условия

$$\gamma_k(0) = 0, \quad \gamma_k'(0) = 0. \quad (2.42)$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим два комплексно сопряженных корня.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.41), будет иметь вид:

$$\gamma_{k_{oo}}(t) = A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l},$$

где A_k, B_k – произвольные постоянные.

Если $g_k(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, то есть правая часть уравнения (2.41) имеет специальный вид, то частное решение можно найти методом неопределённых коэффициентов.

В случае если $g_k(t)$ – произвольная функция, то для отыскания её частного решения используют метод вариации произвольных постоянных:

$$\gamma_{k_{un}}(t) = A_k(t) \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k(t) \sin \frac{k\pi at}{l}.$$

Подставим выражение $\gamma_{k_{\text{ин}}}(t)$ в (2.41) и получим:

$$\gamma_k(t) = \frac{1}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \sin \frac{k\pi a(t-\tau)}{l} d\tau. \quad (2.43)$$

После того как все функции $\gamma_k(t)$ найдены, остаётся подставить их в формулу (2.36), и мы получим искомую функцию $w(x, t)$.

Пример 2.2. Найдём вынужденные колебания струны, на которую в момент времени $t = 0$ начинает действовать постоянная сила, равная силе тяжести.

Решение. Необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -g$$

при нулевых начальных и краевых условиях:

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0.$$

В этом случае задача сильно упрощается, поскольку все коэффициенты $g_k(t)$ разложения (2.38) постоянны. По формуле (2.39)

$$g_k = -\frac{2g}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2g}{k\pi} (1 - \cos k\pi),$$

$$g_{2n} = 0, \quad g_{2n+1} = -\frac{4g}{(2n+1)\pi}.$$

Очевидно, функции $\gamma_{2n}(t)$ тождественно равны нулю.

Для функций с нечётными индексами $\gamma_{2n+1}(t)$ уравнение (2.41) принимает вид:

$$\gamma_{2n+1}'' + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_{2n+1} = -\frac{4g}{(2n+1)\pi}. \quad (*)$$

Частное решение неоднородного уравнения – постоянная величина, равная $-\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}$. Следовательно, общим решением уравнения (*)

будет функция

$$A_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} + B_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{l} - \frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}.$$

Подставляя начальные условия (2.42), находим произвольные постоянные:

$$A_{2n+1} = -\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Итак, функции $\gamma_{2n+1}(t)$ найдены:

$$\gamma_{2n+1}(t) = -\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \right].$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.36), получим решение $w(x, t)$, описывающее вынужденные колебания струны, совершающиеся под действием силы тяжести:

$$w(x, t) = -\frac{4gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

(знак минус указывает на то, что в начальный момент времени точки струны отклоняются вниз).

Каждая точка струны совершает сложное периодическое колебание с периодом $\frac{2l}{a}$. В момент времени $t = \frac{2l}{a}k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) все точки струны проходят положение равновесия. Легко заметить, что наибольшие отклонения от положения равновесия будут наблюдаться для середины струны ($x = \frac{l}{2}$) в моменты времени $t = \frac{l}{a}, \frac{3l}{a}$ и т.д. (Это можно установить и аналитически: при $x = \frac{l}{2}$ и $t = \frac{l}{a} + \frac{2nl}{a}$ обе частные производные

$\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$ обращаются в нуль). Поскольку

$$\sin \frac{(2n+1)\pi}{l} \frac{l}{2} = (-1)^n, \quad \text{а} \quad \cos \frac{(2n+1)\pi a}{l} \frac{l}{a} = -1,$$

то

$$|w|_{\max} = \left| w\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{a}\right) \right| = \frac{8gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Известно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

следовательно,

$$|w|_{\max} = \frac{gl^2}{4a^2}.$$

Пример 2.3. Найдём вынужденные колебания струны без начальных смещений и скоростей, если на струну действует равномерно распределённая сила с плотностью $g(x, t) = A\rho \sin \omega t$, зависящей от времени (ρ – линейная плотность струны).

Решение. В этом случае функция $G(x, t) = \frac{g(x, t)}{\rho} = A \sin \omega t$ не зависит от x и по формуле (2.40) мы получим:

$$g_{2n}(t) = 0, \quad g_{2n+1}(t) = \frac{4A}{(2n+1)\pi} \sin \omega t.$$

Заметим, что $\gamma_{2n}(t) = 0$. Функции же $\gamma_{2n+1}(t)$ находим по формуле (2.43)

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4lA}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \int_0^l \sin \omega \tau \sin \frac{(2n+1)\pi a(t-\tau)}{l} d\tau.$$

Обозначим $\omega_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi a}{l}$. Произведя все необходимые вычисления, получим

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4lA}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \cdot \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2}.$$

Найденное выражение имеет смысл для любого n только в случае, если частота ω вынуждающей силы не совпадает ни с одной из нечётных собственных частот струны (отсутствует резонанс).

Подставляя выражение для $\gamma_{2n+1}(t)$ в формулу (2.36), завершаем решение задачи:

$$w(x, t) = \frac{4lA}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Файл `animat_6.avi` содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания струны как суммы первых трех ненулевых гармоник.

2.5. Вынужденные колебания струны, не закреплённой на концах (общая первая краевая задача)

Рассмотрим вынужденные колебания ограниченной струны под действием внешней силы $g(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, причем концы ее не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t)$$

при начальных и граничных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2.44)$$

$$u(0, t) = x_1(t), \quad u(l, t) = x_2(t). \quad (2.45)$$

К этой задаче нельзя применить метод Фурье, но задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями.

Введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = x_1(t) + [x_2(t) - x_1(t)] \frac{x}{l}, \quad (2.46)$$

$$w(0, t) = x_1(t), \quad w(l, t) = x_2(t). \quad (2.47)$$

Будем искать решение в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (2.48)$$

где v – пока неизвестная функция.

Очевидно, что в силу граничных условий (2.45) и (2.47) функция v удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \quad (2.49)$$

Из (2.44), (2.46), (2.48) получим начальные условия для функции v

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = \varphi(x) - x_1(0) - [x_2(0) - x_1(0)] \frac{x}{l} = \varphi_1(x), \quad (2.50)$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - w_t(x, 0) = \psi(x) - x_1'(0) - [x_2'(0) - x_1'(0)] \frac{x}{l} = \psi_1(x). \quad (2.51)$$

Подставим (2.48) в исходное уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G_1(x, t), \quad (2.52)$$

где

$$G_1(x, t) = G(x, t) - x_1''(t) - [x_2''(t) - x_1''(t)] \frac{x}{l}. \quad (2.53)$$

Задача нахождения функции v сводится к решению уравнения (2.52) при нулевых граничных условиях (2.49) и начальных условиях (2.50), (2.51).

Пример 2.4. Рассмотрим поперечные колебания струны длиной l , закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей силы, вызывающей смещение этого конца, равное $A \sin \omega t$. При этом будем предполагать, что в момент времени $t = 0$ начальные смещение и возмущение отсутствуют.

Решение. Очевидно, что задача сводится к решению однородного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = x_1(t) = 0, \quad u(l, t) = x_2(t) = A \sin \omega t$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad u_t(x, l) = \psi(x) = 0.$$

Будем искать решение задачи в виде (2.48)

$$u(x, t) = w + v.$$

По формуле (2.46) находим, что

$$w(x, t) = \frac{Ax}{l} \sin \omega t.$$

Функция v должна удовлетворять нулевым краевым условиям

$$v(0, t) = v(l, t) = 0.$$

Начальные условия найдем по формулам (2.50), (2.51):

$$v_t(x, 0) = -\frac{A\omega x}{l} = \psi_1(x), \quad v(x, 0) = \varphi_1(x) = 0.$$

По формуле (2.53) находим:

$$G_1(x, t) = \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t.$$

Тогда на основании (2.52) функция $v(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t.$$

Решение этой задачи рассматривалось в подразделе 2.4.

Будем искать решение в виде суммы двух функций

$$v(x, t) = p(x, t) + q(x, t).$$

Здесь $p(x, t)$ – решение однородного уравнения

$$p_{tt} = a^2 p_{xx},$$

удовлетворяющее следующим краевым и начальным условиям:

$$p(0, t) = p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad p_t(x, 0) = -\frac{A\omega x}{l}.$$

$q(x, t)$ – решение неоднородного уравнения

$$q_{tt} = a^2 q_{xx} + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t,$$

удовлетворяющее нулевым краевым и начальным условиям:

$$q(0, t) = q(l, t) = 0, \quad q(x, 0) = q_t(x, 0) = 0.$$

По формулам (2.30) находим:

$$p(x, t) = \frac{2A\omega l}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

По формулам (2.36), (2.39) и (2.43) находим:

$$q(x, t) = 2lA\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega l \sin \frac{\pi k t}{l} - \pi k \sin \omega t}{\pi^2 k^2 (\omega^2 l^2 - \pi^2 k^2)} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{Ax}{l} \sin \omega t + \frac{2A\omega l}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} + \\ & + 2lA\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega l \sin \frac{\pi k t}{l} - \pi k \sin \omega t}{\pi^2 k^2 (\omega^2 l^2 - \pi^2 k^2)} \sin \frac{\pi k x}{l}. \end{aligned}$$

Файл animat_7.avi содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания струны как суммы первых четырех ненулевых гармоник.

2.6. Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны

Говоря о мембране, мы подразумеваем упругую свободно изгибающую пленку. Пусть в состоянии покоя мембрана занимает некоторую область D в плоскости xOy , а затем, будучи каким-то образом выведенной из этого состояния, начинает колебаться так, что все ее точки колеблются в направлении, перпендикулярном плоскости xOy (поперечные колебания мембраны). Отклонения точек мембраны от плоскости xOy будем обозначать через u . Величина u зависит от координат точки (x, y) мембраны и от времени t . Функция $u(x, y, t)$ и является искомой. При фиксированных x и y эта функция дает закон колебания точки (x, y) мембраны, при этом частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ определяют соответственно скорость и ускорение движущейся точки. Если зафиксировать t , то $u = u(x, y, t)$ представляет форму поверхности колеблющейся мембраны в момент времени t . Вектор $\vec{n} = \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right\}$ является нормалью к этой поверхности, которая образует острый угол с осью Ou .

Направляющие косинусы нормали находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}, \quad \cos \beta = -\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}, \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Мы будем изучать малые колебания мембраны, такие, что угол γ отклонения нормали от оси Ou настолько мал, что

$$\cos \gamma \approx 1. \quad (2.55)$$

Из формул (2.54) и (2.55) следует, что

$$\cos \alpha = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos \gamma = 1.$$

Следовательно, вектор $\vec{n}$ является единичным вектором:

$$|\vec{n}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1. \quad (2.56)$$

Площадь поверхности мембраны в произвольный момент времени t выражается интегралом

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy. \quad (2.57)$$

В силу (2.56) и (2.57) имеем:

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy = \iint_D dx dy.$$

Таким образом, площадь поверхности мембраны в произвольный момент времени такая же, как и в начальный момент. Заключаем, что изменением площади поверхности мембраны в процессе колебания можно пренебречь. Это, разумеется, относится как ко всей мембране, так и к любой ее части.

Перейдем теперь от геометрических предположений к механическим. Пусть натяжение мембраны будет T . Это означает, что если вырезать какой-нибудь участок мембраны, то действие отброшенной части следует заменить силами, распределенными вдоль контура L выделенного участка. Поскольку мембрана свободно изгибается, то эти силы будут действовать в касательных плоскостях к мембране по направлению нормалей к контуру L . Будем считать, что мембрана находится под действием равномерного натяжения. Это значит, что к любому элементу ds контура L приложена сила, величина которой Tds , где T – постоянная плотность натяжения. Так как площадь вырезанной части мембраны во все время колебаний считается неизменной, то величину T можно считать постоянной во всех сечениях мембраны.

Найдем равнодействующую сил натяжения, приложенных к контуру L (рис. 2.5).

Выберем произвольно на элементе ds контура точку P . Обозначим через $\vec{ds}$ вектор, приложенный к точке P , направленный по касательной к контуру и по модулю равный дифференциалу длины дуги ds . Если x, y, u – координаты точки P , то $\vec{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + du\vec{k}$.

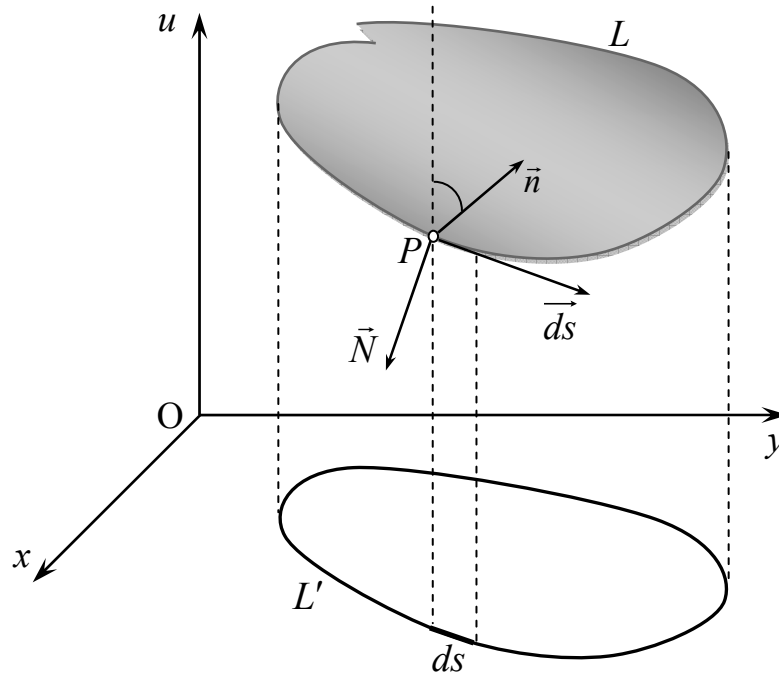


Рис. 2.5

Вектор, вдоль которого направлена сила натяжения в точке P , перпендикулярен вектору $\vec{ds}$ и нормали $\vec{n}$ к поверхности мембраны в этой точке. Следовательно, он имеет направление векторного произведения векторов $\vec{ds}$ и $\vec{n}$. Вычисляя векторное произведение, получим вектор

$$\vec{N} = [\vec{ds}, \vec{n}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & du \\ -\frac{du}{dx} & -\frac{du}{dy} & 1 \end{vmatrix}.$$

Из (2.56) $|\vec{n}| = 1$, тогда $|\vec{N}| = ds \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = ds$. Это значит, что сила натяжения, действующая на элемент ds , равна $T\vec{N}$; направление её совпадает с направлением вектора $\vec{N}$, а величина $-T|\vec{N}| = Tds$. Проекция этой силы на ось Ou будет

$$T \cdot n_{p_{Ou}} \vec{N} = T \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Чтобы найти проекцию равнодействующей всех сил натяжения, надо полученное выражение проинтегрировать по контуру L , т.е. вычислить интеграл

$$T \int_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Подынтегральное выражение зависит только от x и y . Поэтому криволинейный интеграл по контуру L можно заменить интегралом по контуру L' , где L' – проекция L на плоскость xOy . Преобразуя последний интеграл по формуле Грина, получим:

$$T \int_{L'} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = T \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (2.58)$$

Воспользовавшись условиями малости u_x^2 и u_y^2 легко проверить, что проекции равнодействующей силы натяжения на оси Ox и Oy равны нулю. Это ясно и так, поскольку по условию все точки мембраны колеблются только в направлении, перпендикулярном плоскости xOy .

Чтобы вывести дифференциальное уравнение колебаний мембраны, выделим бесконечно малый участок $d\sigma$ области D , окружающей точку (x, y) . Поскольку с течением времени площадь поверхности любой части мембраны не изменяется, то в любой момент времени масса части мембраны, проектирующейся в этот участок, равна $\rho d\sigma$. Здесь ρ – поверхностная плотность мембраны, считающаяся постоянной, так как мембрана предполагается однородной. Ускорение точек выбранного

элементарного участка равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. При свободных колебаниях мембраны

единственной действующей силой будет проекция на ось Ou сил натяжения, определяемая по формуле (2.58). Применяя к двойному интегралу, взятому по области $d\sigma$, теорему о среднем, запишем

выражение для этой проекции в виде $T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma$. Рассматривая

выделенный участок как материальную точку и применяя второй закон Ньютона, составим уравнение

$$\rho d\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma.$$

Сокращая на $d\sigma$ и вводя обозначение $\frac{T}{\rho} = a^2$, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.59)$$

Уравнение (2.59) называется уравнением колебаний мембраны. Оно является двумерным однородным волновым уравнением и описывает свободные колебания мембраны. Коэффициент a в этом уравнении представляет скорость распространения волн.

Пусть, кроме того, на мембрану действуют внешние силы, параллельные оси Ou и противоположенные ей (например, вес мембраны), плотность распределения которых по мембране мы обозначим через $\rho g(x, y, t)$. Можно показать, что в этом случае уравнение колебаний мембраны будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -g(x, y, t). \quad (2.60)$$

Уравнение (2.60) является двумерным неоднородным волновым уравнением и описывает вынужденные колебания мембраны.

Пусть в положении покоя мембрана занимает область D плоскости xOy , ограниченную контуром L , который является краем мембраны. Тогда условия

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad u'_t|_{t=0} = F(x, y) \quad (2.61)$$

называются начальными условиями для уравнения (2.60), а определенные в области D функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ являются соответственно начальным отклонением и начальной скоростью точек мембраны.

Задача решения уравнения (2.60) совместно с условиями (2.61) называется смешанной задачей для уравнения колебаний мембраны.

2.7. Колебания прямоугольной мембраны

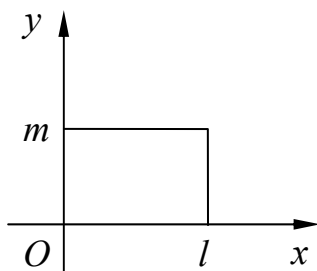


Рис. 2.6

Рассмотрим мембрану, которая в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = t$ (рис. 2.6).

Задача о колебаниях мембраны сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.62)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad u'_t|_{t=0} = F(x, y) \quad (2.63)$$

и краевыми условиями, заданными на границе прямоугольника:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=m} = 0. \quad (2.64)$$

Поставленную задачу будем решать методом Фурье. Ищем решение уравнения (2.62), удовлетворяющее краевым условиям (2.64), в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (2.64)$$

Из первого условия (2.64) следует, что $X(0)Y(y)T(t) = 0$. Так как нас интересуют решения, тождественно не равные нулю, то $X(0) = 0$. Аналогично составим и остальные условия, налагаемые на функции $X(x)$ и $Y(y)$. Выписав их все вместе, получим:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \quad (2.65)$$

Дифференцируя дважды функцию (2.64) по каждому из аргументов, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''YT, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XYT''$$

(как и раньше, аргументы у функций для сокращения записи опущены).

Подставляя выражения для производных в уравнение (2.62), получим

$$\frac{T''}{T} = a^2 \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right).$$

Левая часть равенства не зависит от переменных x и y , а правая часть – от переменной t . Поэтому оно может соблюдаться только при условии, что ни левая, ни правая части не зависят ни от одной из переменных, т.е.

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{const.}$$

Далее, так как отношение $\frac{X''}{X}$ зависит только от x , а $\frac{Y''}{Y}$ – только от y , то сумма $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$ может быть постоянной лишь при условии, что каждое из этих слагаемых есть, в свою очередь, величина постоянная, т.е.

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\eta^2.$$

Обе последние постоянные выбраны отрицательными, так как в противном случае нельзя будет удовлетворить краевым условиям (2.65) без того, чтобы функция обратилась в тождественный нуль (соответствующие рассуждения в подразделе 2.3).

В результате для определения функций $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ получаем уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (2.66)$$

$$Y''(y) + \eta^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0, \quad (2.67)$$

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \eta^2)T(t) = 0. \quad (2.68)$$

Решения уравнений (2.66) и (2.67) имеют вид:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad Y(y) = D_1 \cos \eta y + D_2 \sin \eta y.$$

Краевые условия $X(0) = X(l) = 0$ приводят к соотношениям $C_1 = 0$ и $\lambda l = k\pi$, где k – целое число. Только при соблюдении последнего требования уравнение (2.66) имеет ненулевое решение. Аналогично, из условий $Y(0) = Y(m) = 0$ следует, что $D_1 = 0$ и $\eta m = n\pi$, где n – целое число. Собственные числа λ_k и η_n определяются формулами

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad \text{и} \quad \eta_n = \frac{n\pi}{m},$$

где k и n – любые целые положительные числа. Каждой паре собственных чисел соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{и} \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (2.69)$$

Из (2.69) ясно, что если брать числа k и n отрицательными, то новых собственных функций не получится. Также, очевидно, что, умножая любую из собственных функций на произвольную постоянную, мы будем

снова получать решение уравнения (2.66) или (2.67) с нулевыми краевыми условиями.

Перейдем к уравнению (2.68). Для каждой пары собственных чисел $\frac{k\pi}{l}$ и $\frac{n\pi}{m}$ оно имеет вид:

$$T''(t) + \pi^2 \alpha^2 \left(\frac{\kappa^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения обозначим функцией $T_{\kappa,n}(t)$ с двумя индексами. Произвольные постоянные, входящие в его общее решение, придется также обозначить буквами с двумя индексами: $a_{\kappa,n}$ и $b_{\kappa,n}$. С учетом принятых обозначений будем иметь:

$$T_{\kappa,n}(t) = a_{\kappa,n} \cos \varpi_{\kappa,n} t + b_{\kappa,n} \sin \varpi_{\kappa,n} t, \quad (2.70)$$

где $\varpi_{\kappa,n} = \pi \alpha \sqrt{\frac{\kappa^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$ – собственные частоты колебаний мембраны.

Составив произведение функций (2.69) и (2.70), образуем функции $u_{\kappa,n}(x, y, t)$, удовлетворяющие уравнению (2.62) и краевым условиям (2.64). Каждой паре положительных чисел k и n соответствует функция

$$u_{\kappa,n}(x, y, t) = (a_{\kappa,n} \cos \varpi_{\kappa,n} t + b_{\kappa,n} \sin \varpi_{\kappa,n} t) \sin \lambda_{\kappa} x \sin \eta_n y, \quad (2.71)$$

Прежде чем переходить ко второй части метода Фурье – отысканию решения, удовлетворяющего начальным условиям, выясним свойства функций (2.71).

Функции $u_{\kappa,n}(x, y, t)$ описывают собственные колебания мембраны. Каждая из них представляет собой стоячую волну для прямоугольной мембраны. Запишем формулу (2.71) в виде

$$u_{\kappa,n}(x, y, t) = F_{\kappa,n} \sin(\varpi_{\kappa,n} t + \varphi_{\kappa,n}) \sin \lambda_{\kappa} x \sin \eta_n y,$$

где

$$F_{\kappa,n} = \sqrt{a_{\kappa,n}^2 + b_{\kappa,n}^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{\kappa,n} = \frac{a_{\kappa,n}}{b_{\kappa,n}}.$$

Ясно видно, что каждая точка (x, y) мембраны совершает простое гармоническое колебание с частотой $\varpi_{\kappa,n}$ и амплитудой $F_{\kappa,n} \sin \lambda_{\kappa} x \sin \eta_n y$. Все точки проходят положение равновесия в одни и те же моменты времени, определяемые равенствами $\varpi_{\kappa,n} t + \varphi_{\kappa,n} = r\pi$, где r

принимает значения $0, 1, 2, 3, \dots$. Точно также одновременно точки достигают максимального отклонения (в ту или другую сторону). Помимо линий контура, будет $k - 1$ узловых линий, параллельных оси Oy : $x = \frac{l}{k}, x = \frac{2l}{k}, \dots, x = \frac{(k-1)l}{k}$ и $n - 1$ линий, параллельных оси Ox : $y = \frac{m}{n}, y = \frac{2m}{n}, \dots, y = \frac{(n-1)m}{n}$ (при этих значениях x и y собственные функции обращаются в нуль). Эти линии разобьют мембрану на $n \times k$ прямоугольников, причем в двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) отклонения будут направлены в разные стороны. Центр каждого такого прямоугольника будет являться пучностью, так как в этих точках $\sin \lambda_k x \sin \eta_n y = \pm 1$. Количество пучностей определяется произведением $n \times k$.

Для большей наглядности рассмотрим сначала самое простое колебание, соответствующее случаю $k = n = 1$:

$$u_{1,1}(x, y, t) = F_{1,1} \sin(\varpi_{1,1}t + \varphi_{1,1}) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{m}.$$

Его частота $\varpi_{1,1} = \pi a \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2}}$ является наименьшей собственной частотой и характеризует основной тон мембраны. Особенно просто выражение для частоты основного тона в случае квадратной пластинки ($m = l$). Здесь $\varpi_{1,1} = \frac{\pi a \sqrt{2}}{l} = \frac{\pi \sqrt{2}}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, где T – натяжение, а ρ – плотность мембраны. Эта частота в $\sqrt{2}$ раз больше, чем частота колебаний струны, имеющей ту же длину, что и длина стороны мембраны. При колебании мембраны контур ее остается неподвижным. Так как все точки мембраны находятся внутри прямоугольника $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq y \leq m$, то функции $\sin \frac{\pi x}{l}$ и $\sin \frac{\pi y}{m}$ положительны и все точки мембраны одновременно находятся то по одну сторону плоскости xOy , то по другую в зависимости от знака $\sin(\varpi_{1,1}t + \varphi_{1,1})$.

Наибольшую амплитуду колебаний будет иметь точка, для которой $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$ и $\sin \frac{\pi y}{m} = 1$, т.е. точка с координатами $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)$ - центр мембраны.

Узловые линии совпадают с контуром мембраны.

Файл animat_9.avi содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания мембраны частоты основного тона. Линии красного цвета представляют собой сечения поверхности мембраны плоскостями, перпендикулярными поверхности мембраны в начальный момент времени и параллельными её границе. Точка пересечения этих линий – пучность.

Проанализируем колебания мембраны, описываемые функцией

$$u_{3,1}(x, y, t) = F_{3,1} \sin(\omega_{3,1}t + \varphi_{3,1}) \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{m}.$$

Узловые линии определяются из уравнений $\sin \frac{3\pi x}{l} = 0$ и $\sin \frac{\pi y}{m} = 0$.

Помимо точек контура, это будут отрезки прямых $x = \frac{l}{3}$ и $x = \frac{2l}{3}$. Эти отрезки разбивают мембрану на три прямоугольника так, что в двух соседних отклонения будут направлены в разные стороны. Центр каждого такого прямоугольника будет являться пучностью. То есть будет три пучности, координаты которых $\left(\frac{l}{6}, \frac{m}{2}\right)$, $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)$ и $\left(\frac{5l}{6}, \frac{m}{2}\right)$.

Файл animat_10.avi содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания мембраны частоты обертона, соответствующего рассмотренному выше случаю. Линии красного цвета представляют собой сечения поверхности мембраны плоскостями, перпендикулярными поверхности мембраны в начальный момент времени и параллельными её границе. Точки пересечения этих линий – пучности. Линии зеленого цвета – узловые линии.

Вернемся к задаче отыскания решения (2.62), удовлетворяющего начальным условиям (2.63). Как обычно, будем искать его в виде ряда, составленного из частных решений (2.71). Каждое частное решение зависит от двух индексов: k и n , поэтому нам придется образовать двойную сумму

$$u(x, y, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\kappa, n} \cos \varpi_{\kappa, n} t + b_{\kappa, n} \sin \varpi_{\kappa, n} t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (2.72)$$

Заставляя индексы суммирования k и n пробегать все положительные числа независимо друг от друга, мы тем самым учтем все частные решения вида (2.71). Подставляя $t = 0$ в функцию $u(x, y, t)$ и в производную $\frac{\partial u}{\partial t}$, получим:

$$u|_{t=0} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\kappa, n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = f(x, y), \quad (2.73)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varpi_{\kappa, n} b_{\kappa, n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = F(x, y). \quad (2.74)$$

Формулы (2.73) и (2.74) представляют разложение функций двух переменных в двойные ряды Фурье. С подобным разложением мы сталкиваемся впервые и поэтому рассмотрим его подробнее. Возьмем систему функций $\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}$ и покажем, что в области $D: 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m$ она ортогональна. Это значит, что двойной интеграл, взятый по области D от произведения двух различных функций системы, равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^m \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dx dy = \\ & = \left(\int_0^l \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} dx \right) \left(\int_0^m \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dy \right). \end{aligned}$$

Поскольку система функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ ортогональна в интервале $[0, l]$, а система $\sin \frac{n\pi y}{m}$ — в интервале $[0, m]$, то написанное выражение равно нулю, если соблюдается хотя бы одно из неравенств $k_1 \neq k_2$ и $n_1 \neq n_2$. Если же $k_2 = k_1 = k$ и $n_2 = n_1 = n$, то

$$\int_0^l \int_0^m \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \sin^2 \frac{n\pi y}{m} dx dy = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^m \sin^2 \frac{n\pi y}{m} dy = \frac{lm}{4}.$$

Исходя из установленных соотношений, легко найти коэффициенты $a_{k,n}$ и $b_{k,n}$ разложений (2.73) и (2.74). Формулы для их отыскания совершенно аналогичны обычным формулам Фурье:

$$a_{k,n} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x,y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy, \quad (2.75)$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{lm \varpi_{k,n}} \int_0^l \int_0^m F(x,y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} dx dy. \quad (2.76)$$

Подставив выражения (2.75) и (2.76) в формулу (2.72), завершим решение задачи.

Пример 2.5. Найдем колебания квадратной мембраны ($l = m = 1$), всем точкам которой приданы одинаковые начальные скорости v_0 (разумеется, это не касается неподвижно закрепленных точек контура мембраны). При этом функция $F(x, y)$ оказывается разрывной.

Начальные условия (2.63) имеют вид:

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = v_0.$$

Следовательно, в решении (2.72) все коэффициенты $a_{k,n} = 0$. Коэффициенты $b_{k,n}$ найдем по формуле (2.76), полагая в ней $F(x, y) = v_0$, $l = m = 1$, $\varpi_{k,n} = \pi a \sqrt{k^2 + n^2}$ найдем:

$$b_{k,n} = \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} \int_0^1 \int_0^1 \sin k\pi x \sin n\pi y dx dy.$$

Разбивая двойной интеграл на произведение двух обычных определенных интегралов, получим

$$\begin{aligned} b_{k,n} &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} \cos k\pi x \Big|_0^1 \cos n\pi y \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} (1 - \cos k\pi)(1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

Если хотя бы одно из чисел k или n четное, то $b_{k,n} = 0$, так как тогда, по крайней мере, одна из скобок равна нулю. Поэтому положим $k = 2r + 1$ и $n = 2s + 1$, где r и s – любые целые неотрицательные числа. В результате будем иметь:

$$b_{2r+1,2s+1} = \frac{16v_0}{\pi^3 a(2r+1)(2s+1)\sqrt{(2r+1)^2 + (2s+1)^2}},$$

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r+1,2s+1} \sin \pi a t \sqrt{(2r+1)^2 + (2s+1)^2} \sin(2r+1)\pi x \sin(2s+1)\pi y.$$

Файл animat_8.avi содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания мембраны как суперпозицию начальных обертонов соответствующих $r, s = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.8. Уравнение и функции Бесселя

Для того чтобы перейти к решению задачи о колебаниях круглой мембраны, мы предварительно должны познакомиться с функциями Бесселя. Функции Бесселя являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (2.77)$$

Это уравнение называется *уравнением Бесселя*. И само уравнение, и его решения встречаются не только в задаче о колебаниях круглой мембраны, но и в очень большом числе других задач.

Параметр k , входящий в уравнение (2.77), может принимать любые положительные значения. Решения уравнения при заданном k называются *бесселевыми функциями* порядка k (иногда их называют цилиндрическими функциями). Рассмотрим детально лишь наиболее простые случаи, когда $k = 0$ и $k = 1$, так как в дальнейшем изложении нам встретятся только бесселевы функции нулевого и первого порядков.

Уравнение Бесселя нулевого порядка имеет вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \quad (2.78)$$

При $x = 0$ коэффициент при первой производной терпит разрыв, как говорят, точка $x = 0$ для уравнения (2.78) является особой. В этом случае мы не можем заранее сказать, существуют ли решения уравнения, принимающие определенные значения при $x = 0$. Теорема существования и единственности решения здесь неприменима.

Уравнение (2.78) не принадлежит ни к одному из типов уравнений второго порядка, допускающих решение простыми приемами, поэтому будем его решать при помощи степенных рядов. Предположим, что решение можно представить в виде ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (2.79)$$

Продифференцируем этот ряд дважды:

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots$$

и подставим в дифференциальное уравнение (2.78), получим:

$$\begin{aligned} & (2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots) + \\ & + \frac{1}{x}(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots) + \\ & + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при всех степенях x , мы получим систему уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов c_i .

Начнем с члена, содержащего $\frac{1}{x}$, коэффициент при нем

$$c_1 = 0. \quad (2.80)$$

Условие (2.80) показывает, что решение в виде ряда (2.79) может существовать только тогда, когда $c_1 = y'|_{x=0} = 0$. Это и означает, что произвольно задавать значение первой производной y' при $x = 0$ нельзя.

Выпишем коэффициенты при нечетных степенях x : x, x^3 и т.д.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2c_3 + 3c_3 + c_1 = 0, \\ 5 \cdot 4c_5 + 5c_5 + c_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Поскольку $c_1 = 0$, то и все последующие коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, т.е.

$$c_3 = c_5 = \dots = c_{2k+1} = \dots = 0. \quad (2.81)$$

Перейдем к отысканию коэффициентов с четными индексами. Последовательно выбирая слагаемые, содержащие свободный член, x^2, x^4 и т.д., получим

$$\begin{cases} 2c_2 + 2c_2 + c_0 = 0, \\ 4 \cdot 3c_4 + 4c_4 + c_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Можно написать и общую рекуррентную формулу, связывающую любые два коэффициента, индексы которых отличаются друг от друга на две единицы. Собирая члены, содержащие x^n , получим

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

или

$$(n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0. \quad (2.82)$$

Легко проверить, что все написанные выше уравнения представляют частные случаи равенства (2.82).

Оставляя коэффициент c_0 произвольным, последовательно выразим через него все остальные четные коэффициенты:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}$$

и вообще

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2^2 4^2 \dots (2n)^2} = (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (2.83)$$

Таким образом, подставляя (2.83) в (2.79), найдем решение уравнения Бесселя при $k=0$

$$\begin{aligned} y &= c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \dots \right) = \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Покажем, что ряд (2.84) сходится при всех значениях x . Применяя признак Даламбера, составим отношение абсолютных величин двух последовательных членов ряда

$$\left| \frac{x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)} [(n+1)!]^2} \div \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right| = \left| \frac{x^2}{2^2 (n+1)^2} \right|.$$

Это отношение при любом значении x стремится к нулю, что и доказывает абсолютную сходимость ряда.

Постоянная $c_0 = y|_{x=0}$ может быть выбрана произвольно. Если ее положить равной единице, то получим функцию

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad (2.85)$$

которая называется функцией Бесселя первого рода порядка 0. Она является решением уравнения (2.78) при начальных условиях

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

Как известно, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка представляет линейную комбинацию двух его частных решений y_1 и y_2 при условии, что их отношение $\frac{y_1}{y_2}$ не является постоянной величиной.

Одним из таких решений является функция Бесселя $J_0(x)$. Второе частное решение уже не будет функцией, непрерывной при $x = 0$. Аналитическое выражение этого решения значительно более сложное, и мы его не приводим. Отметим только, что это второе решение называют функцией Бесселя второго рода (или еще функцией Неймана) и обычно обозначают через $N_0(x)$. Отличительная его черта состоит в том, что $|N_0(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

Для функции Бесселя $J_0(x)$ составлены подробные таблицы. График функции $J_0(x)$ похож на график затухающих колебаний.

Функция $J_0(x)$ четная и имеет бесчисленное множество корней μ_i . Приведем значение первых из них с двумя знаками после запятой: $\mu_1 = 2.40$; $\mu_2 = 5.52$; $\mu_3 = 8.65$; $\mu_4 = 11.79$ и т.д.

Отметим, что для больших номеров n разность $\mu_n - \mu_{n-1} \approx \pi$.

Найдем еще выражение для функции Бесселя первого порядка, т.е. $J_1(x)$. Подставляя ряд (2.79) и его производные в уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0, \quad (2.86)$$

получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Объединяя первую, вторую и четвертую суммы вместе и замечая, что слагаемые, содержащие $\frac{1}{x}$ (во второй и четвертой суммах), уничтожаются, перепишем последнее равенство в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) c_n x^{n-2} - \frac{c_0}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Отсюда ясно, что $c_0 = 0$.

Рекуррентная формула, при помощи которой коэффициент c_n выражается через c_{n-2} , выглядит так:

$$(n^2 - 1) c_n + c_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2).$$

Поскольку $c_0 = 0$, то отсюда последовательно получаем, что все коэффициенты с четными индексами равны нулю:

$$c_2 = c_4 = \dots = c_{2n} = \dots = 0.$$

Коэффициенты с нечетными индексами можно выразить через c_1 :

$$c_3 = -\frac{c_1}{(3^2 - 1)}, \quad c_5 = \frac{c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1)}, \dots, c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1]}.$$

Знаменателю выражения для c_{2n+1} удобнее придать несколько иной вид:

$$\begin{aligned} (3^2 - 1)(5^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1] &= (2 \cdot 4)(4 \cdot 6) \dots 2n(2n+2) = \\ &= (2 \cdot 4 \dots 2n)(4 \cdot 6 \dots 2(n+1)) = 2^{2n} n! (n+1)! \end{aligned}$$

Подставляя коэффициенты c_n в разложение (2.79), и, полагая $c_1 = \frac{1}{2}$, получим частное решение уравнения (2.86), которое и называется функцией Бесселя первого рода порядка 1:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}. \quad (2.87)$$

Функция (2.87) нечетная и так же, как и функция $J_0(x)$, имеет бесчисленное множество корней ν_i . Приведем значения первых из них с двумя знаками после запятой:

$$\nu_1 = 3.83, \quad \nu_2 = 7.02, \quad \nu_3 = 10.17, \quad \nu_4 = 13.32.$$

Для больших n разность $\nu_n - \nu_{n-1} \approx \pi$.

Отметим часто встречающуюся формулу

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad (2.88)$$

которая получается дифференцированием ряда (2.85) для $J_0(x)$. Эта формула позволяет при помощи таблиц для $J_1(x)$ вычислить значения $J_0'(\mu_k)$.

Согласно формуле (2.88), функция $J_0(x)$ имеет экстремумы именно в тех точках, в которых функция $J_1(x)$ обращается в нуль, т.е. в точках ν_i . Корни функций Бесселя нулевого и первого порядков перемежаются, т.е. между двумя любыми последовательными корнями функции $J_0(x)$ лежит обязательно один корень функции $J_1(x)$, и наоборот.

Рассуждая аналогично, можно найти выражение для функции Бесселя любого целого порядка k

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+k}}{2^{2n+k} n!(n+k)!}. \quad (2.89)$$

Из общей формулы (2.89) при $k = 0$ и $k = 1$ получаются функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$. Во всех случаях каждый раз находим одно частное решение уравнения Бесселя, формула для второго частного решения, как было отмечено выше, имеет более сложный вид, а соответствующая функция (функция Неймана) обладает тем свойством, что $|N_k(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

2.9. Уравнение колебаний круглой мембраны с закрепленным краем

Пусть мембрана занимает круг радиуса l на плоскости (x, y) с центром в начале координат. Введем на этой плоскости полярные координаты (r, φ) , так что уравнение края мембраны будет $r = l$. Тогда отклонение точек мембраны будет функцией $u = u(r, \varphi, t)$ при краевом условии

$$u|_{r=l} = 0. \quad (2.90)$$

Задача о свободных колебаниях мембраны в полярных координатах сводится к решению уравнения

$$u_{tt}'' - a^2 \left[\frac{1}{r} (ru_r')' + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}'' \right] = 0, \quad (2.91)$$

при краевом условии (2.90) и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad u'_t|_{t=0} = F(r, \varphi). \quad (2.92)$$

Будем искать стоячие волны на круглой мембране, то есть отличные от тождественного нуля решения уравнения (2.91), удовлетворяющие краевому условию (2.90) и имеющие вид:

$$u = R(r)\Phi(\varphi)T(t).$$

Из уравнения (2.91) находим, что

$$\frac{T''}{T} - a^2 \left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} \right] = 0.$$

Положим

$$\frac{T''}{T} = -\nu^2 a^2, \quad \frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu^2, \quad (2.93)$$

где ν^2 – положительная постоянная.

Первое уравнение (2.93) показывает, что мы получаем, как и в предыдущих случаях, периодическую зависимость от времени, характерную для колебательных процессов:

$$T(t) = A \cos(\nu at) + B \sin(\nu at). \quad (2.94)$$

Второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -r^2 \left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \nu^2 \right],$$

откуда следует, что

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = c, \quad -r^2 \left[\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \nu^2 \right] = c,$$

где c – некоторая постоянная, которая не может быть произвольной в виду того, что функция $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической с периодом 2π поскольку $u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t)$. Это будет иметь место только в том случае, когда $c = -k^2$, где k – целое положительное число. Действительно, тогда

$$\Phi(\varphi) = D_1 \cos(k\varphi) + D_2 \sin(k\varphi), \quad (2.95)$$

где D_1 и D_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, для функции $R(r)$ мы получаем уравнение

$$-r^2 \left[\frac{1}{r} \frac{(rR')'}{R} + \nu^2 \right] = -k^2 \quad \text{или} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\nu^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Введем новую независимую переменную $x = \nu r$ и положим

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\nu}\right) = y.$$

Тогда после преобразований последнее уравнение примет вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Это уравнение является уравнением Бесселя, которое рассматривалось в предыдущем параграфе. Поэтому его общее решение

$$R\left(\frac{x}{\nu}\right) = C_1 J_k(x) + C_2 N_k(x),$$

где $J_k(x)$ и $N_k(x)$ – бесселевы функции первого и второго рода. Отсюда следует, что

$$R(r) = C_1 J_k(\nu r) + C_2 N_k(\nu r).$$

Но в силу того, что $\lim_{r \rightarrow 0} |N_k(\nu r)| = \infty$ и в центре мембраны $R(r)$ должно оставаться конечным (иначе мы получили бы бесконечный прогиб мембраны, что невозможно), то $C_2 = 0$. Таким образом,

$$R(r) = C_1 J_k(\nu r). \quad (2.96)$$

В силу краевого условия (2.90) $R(l) = 0$, то есть нужно еще потребовать, чтобы

$$J_k(\nu l) = 0. \quad (2.97)$$

Равенство (2.97) означает, что νl должно быть одним из корней функции $J_k(x)$ (см. подраздел 2.7), то есть $\nu l = \mu_n^{(k)}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Это равенство показывает, что постоянная ν в уравнениях (2.93) не может быть произвольной, а должна иметь одно из значений

$$\nu = \frac{\mu_n^{(k)}}{l}.$$

Следовательно, по формуле (2.96)

$$R(r) = C_1 J_k \left(\frac{\mu_n^{(k)}}{l} r \right).$$

Учитывая соотношения (2.94) и (2.95), получаем стоячие волны для круглой мембраны:

$$u = \left(AC_1 \cos \frac{\mu_n^{(k)} at}{l} + BC_1 \sin \frac{\mu_n^{(k)} at}{l} \right) \times \\ \times (D_1 \cos(k\varphi) + D_2 \sin(k\varphi)) J_k \left(\frac{\mu_n^{(k)}}{l} r \right). \quad (2.98)$$

Узловыми линиями для такой стоячей волны являются k диаметров, делящих мембрану на $2k$ одинаковых секторов (вдоль этих диаметров $D_1 \cos(k\varphi) + D_2 \sin(k\varphi) = 0$) и $n-1$ концентрических окружностей, вдоль которых $J_k \left(\frac{\mu_n^{(k)}}{l} r \right) = 0$, то есть $r = l \frac{\mu_i^{(k)}}{\mu_n^{(k)}} (i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$.

Наибольший интерес представляет случай, когда круглая мембрана колеблется, сохраняя форму поверхности вращения вокруг оси, проходящей через центр мембраны и перпендикулярной ей, т.е. когда u не зависит от φ . Такие колебания называются осесимметричными. Для таких колебаний начальные условия (2.92) принимают вид:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad u'_t|_{t=0} = F(r). \quad (2.99)$$

Очевидно, для таких колебаний стоячие волны (2.98) также не должны зависеть от φ , из чего следует, что необходимо положить $k = 0$. Тогда $\Phi(\varphi) = D_1 = \text{const}$ (см. (2.95)). Следовательно, осесимметричные стоячие волны задаются функцией

$$u = \left(AC_1 D_1 \cos \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} + BC_1 D_1 \sin \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right).$$

Эта функция зависит только от одного индекса $n = 1, 2, 3, \dots$, и поэтому мы ее перепишем в виде

$$u_n = \left(\alpha_n \cos \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} + \beta_n \sin \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right). \quad (2.100)$$

Далее будем искать решение общей задачи об осесимметричных колебаниях круглой мембраны при начальных условиях (2.99) в виде наложения осесимметричных стоячих волн (2.100):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} + \beta_n \sin \frac{\mu_n^{(0)} at}{l} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right). \quad (2.101)$$

Для определения коэффициентов α_n и β_n мы имеем следующие равенства:

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right) = f(r) \quad (0 \leq r < l), \quad (2.102)$$

$$u'_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{(0)}}{l} \beta_n J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right) = F(r) \quad (0 \leq r < l). \quad (2.103)$$

Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью разложения функций $f(r)$ и $F(r)$ в ряды, которые аналогичны ряду Фурье. Можно доказать, что при достаточно общих предположениях о функциях $f(r)$ и $F(r)$ такое разложение возможно.

Опуская математические выкладки, приведем формулы для определения коэффициентов α_n и β_n в разложениях (2.102) и (2.103):

$$\alpha_n = \frac{2}{l^2 J_0'^2 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} \right)} \int_0^l f(r) r J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right) dr, \quad (2.104)$$

$$\beta_n = \frac{2}{l \mu_n^{(0)} J_0'^2 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} \right)} \int_0^l F(r) r J_0 \left(\frac{\mu_n^{(0)}}{l} r \right) dr. \quad (2.105)$$

По аналогии с рядами Фурье ряды (2.102) и (2.103) с коэффициентами, определенными формулами (2.104) и (2.105), называются рядами Фурье-Бесселя соответствующих функций, а коэффициенты α_n и β_n – коэффициентами Фурье-Бесселя.

Подставляя значения коэффициентов α_n и β_n из формул (2.104) и (2.105) в ряд (2.101), находим искомое разложение $u(r, t)$.

Для примера рассмотрим задачу о свободных осесимметричных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем без начальных

скоростей, которая в начальный момент времени имеет форму кругового параболоида с вершиной, проецирующейся в центр окружности края мембраны. А именно, решим уравнение (2.91) при краевом условии (2.90) и начальных условиях (2.99), где $f(r) = 0.5\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)$ и $F(r) = 0$. Для определенности примем $a = l = 1$.

Воспользовавшись формулами (2.104) и (2.105), получим:

$$\alpha_n = \frac{2}{J_0'^2(\mu_n^{(0)})} \int_0^1 0.5(1-r^2) r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr, \quad \beta_n = 0.$$

Подставив найденные значения коэффициентов α_n и β_n в (2.101), с учетом (2.88) окончательно будем иметь

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\mu_n^{(0)})} \cos(\mu_n^{(0)} at) J_0(\mu_n^{(0)} r) \int_0^1 0.5(1-r^2) r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr.$$

Файл animat_14.avi содержит анимационный фильм, демонстрирующий колебания мембраны как суперпозицию начальных десяти обертонов. Файлы animat_15.avi, animat_16.avi и animat_17.avi содержит анимационные фильмы, демонстрирующие колебания мембраны первого, второго и третьего обертонов соответственно.

В заключении отметим, что задача о вынужденных осесимметричных колебаниях круглой мембраны решается методом Фурье аналогично ранее рассмотренным случаям.

3. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

3.1. Вывод уравнения теплопроводности

В изотропной теплопроводящей среде распространение тепла происходит в соответствии со следующим законом Фурье: если $u = u(P, t)$ – температура среды в точке P в момент времени t , то через любую площадку ΔS в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}$ к ней за промежуток времени от t_1 до t_2 проходит количество тепла, равное

$$\Delta Q = - \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s \right] dt,$$

где k – коэффициент теплопроводности, который мы будем считать постоянным, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции $u(P, t)$ по направлению вектора $\vec{n}$.

Тогда количество тепла, проходящее за этот промежуток времени внутрь некоторой замкнутой поверхности σ , ограничивающей область τ , будет

$$Q_{\sigma} = k \int_{t_1}^{t_2} \left[\oint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds \right] dt.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial n} = a_n$, где $\vec{a} = \text{grad } u$, a_n – проекция этого вектора на направление нормали, то по теореме Остроградского-Гаусса

$$Q_{\sigma} = k \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \text{div} \vec{a} dV \right] dt = k \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \Delta u dV \right] dt,$$

поскольку $\text{div grad } u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

В области τ могут находиться источники тепла, плотность мощностей которых обозначим $g(P, t)$, так что за рассматриваемый промежуток времени в области τ за счет этих источников возникает количество тепла, равное

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} g dV \right] dt.$$

Общее количество тепла $Q_{\sigma} + Q$ может быть подсчитано еще и другим способом, исходя из изменения температуры в точках области τ . На изменение температуры малого объема ΔV от $u_1 = u(P, t_1)$ до $u_2 = u(P, t_2)$ требуется количество тепла равное

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta V \right] dt,$$

где c – теплоемкость среды, отнесенная к единице массы, а ρ – объемная плотность среды (будем считать c и ρ постоянными). Это означает, что общее количество тепла, необходимое для изменения температуры во всех точках области τ , равно

$$c\rho \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt.$$

Таким образом, приравнявая выражения для общего количества тепла, полученные двумя различными способами, будем иметь

$$c\rho \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt = k \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \Delta u dV \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} g dV \right] dt$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} (c\rho u'_t - k\Delta u - g) dV \right] dt = 0.$$

Так как промежуток времени (t_1, t_2) произволен, то отсюда следует, что в любой момент времени

$$\iiint_{\tau} (c\rho u'_t - k\Delta u - g) dV = 0,$$

а так как область τ произвольна, то в любой точке среды в любой момент времени должно иметь место равенство:

$$c\rho u'_t - k\Delta u - g = 0$$

или

$$u'_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{1}{c\rho} g(x, y, z, t), \quad (3.1)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности. Уравнение (3.1)

является неоднородным уравнением параболического типа и называется уравнением теплопроводности. Если $g \equiv 0$, то уравнение называется однородным.

Рассмотрим тонкий теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Теплоизолированность боковой поверхности стержня означает, что через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой. Стержень предполагается настолько тонким, что в каждый момент времени температура всех точек одного и того же поперечного сечения стержня будет одной и той же. Если принять ось стержня за ось абсцисс, то температура u будет являться функцией координаты x и времени t . Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{1}{c\rho} g(x, t). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называется одномерным уравнением теплопроводности.

3.2. Решение однородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня методом Фурье и его физический смысл

Сформулируем задачу Коши для однородного уравнения (3.2)

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (3.3)$$

Если стержень очень длинный, то на процессы, протекающие в его средней части, главное влияние оказывает начальное распределение температуры. Влияние температурных условий на концах стержня в течение довольно длительного времени почти не будет сказываться. В задачах такого типа стержень считают бесконечным. Краевые условия при этом отпадают, и на искомую функцию $u(x, t)$ накладываются только начальные условия.

Задача Коши для однородного уравнения состоит в том, чтобы найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (3.3) и единственному начальному условию:

$$u|_{t=0} = f(x) \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.4)$$

Прежде чем решить уравнение (3.3) при начальном условии (3.4), мы несколько упростим задачу, введя вместо времени t новую переменную

$$\tau = a^2 t. \quad (3.5)$$

Тогда

$$u_t = u_\tau \tau_t = a^2 u_\tau.$$

Уравнение (3.3) примет вид

$$u_\tau = u_{xx}, \quad (3.6)$$

не зависящий от физических свойств стержня. Так как при $t = 0$ и $\tau = 0$, то в качестве начального условия мы будем иметь

$$u|_{\tau=0} = f(x). \quad (3.7)$$

Чтобы решить эту задачу, применим метод Фурье. Этот метод состоит из двух частей. Будим искать частные решения уравнения (3.6) в

виде произведения двух функций $X(x)T(\tau)$, каждая из которых зависит только от одной из независимых переменных. Подставляя это произведение вместо u в уравнение (3.6), получим

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau),$$

или

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.8)$$

Обе части этого уравнения должны быть постоянными, поскольку его левая часть не зависит от x , а правая – от τ . Обозначим постоянную, которой должны быть равны левая и правая части равенства (3.8) через k . Тогда уравнение (3.8) распадается на два уравнения:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = k, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = k. \quad (3.9)$$

Первое из них имеет общее решение $T(\tau) = Ce^{k\tau}$.

Поскольку ни в одном сечении стержня (ни при каком фиксированном x) температура $u = X(x)T(t)$ не может неограниченно возрастать по абсолютной величине при $\tau \rightarrow \infty$, то k должна быть отрицательна. Положим $k = -\lambda^2$. Тогда $T(\tau) = Ce^{-\lambda^2\tau}$.

Второе из уравнений (3.9) принимает вид $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ и имеет общее решение $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

Таким образом, частное решение уравнения (3.6)

$$u = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x)e^{-\lambda^2\tau}$$

или

$$u = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x)e^{-\lambda^2\tau},$$

где $\alpha = AC$ и $\beta = BC$. Так как C, A, B – произвольные постоянные относительно x и τ , то α и β могут зависеть от λ , т.е. $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$. Таким образом, окончательно, семейство частных решений уравнения (3.6) будет иметь вид:

$$u_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x]e^{-\lambda^2\tau}. \quad (3.10)$$

Ввиду отсутствия краевых условий (стержень бесконечен) λ может принимать произвольные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому вместо суммирования (которое применялось в методе Фурье при наложении

стоячих волн, имеющих дискретные собственные частоты) мы должны здесь налагать решения (3.10) непрерывно, т.е. образовать решение уравнения (3.6) интегрированием по λ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (3.11)$$

Функция (3.11) является решением уравнения (3.6), если несобственный интеграл (3.11) сходится.

Остается только подобрать неизвестные функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ так, чтобы решение (3.11) удовлетворяло начальному условию (3.7), т.е. чтобы

$$u|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (3.12)$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)$ надо представить в виде интеграла (3.12). Эта задача решается интегралом Фурье, который является интегральным аналогом ряда Фурье.

Воспользуемся следующим утверждением. Если непрерывную на всей оси Ox функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье на любом конечном интервале и если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, т.е. функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси Ox , то она может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (3.13)$$

Или, так как $\cos \lambda(\xi - x) = \cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x$, то (3.13) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \cos \lambda x + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \sin \lambda x \right] d\lambda.$$

Окончательно будем иметь

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (3.14)$$

где

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (3.15)$$

Таким образом, очевидно, что для уравнения (3.3) начальное условие (3.4) будет удовлетворено, если коэффициенты $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ определены по формулам (3.15). Поэтому, возвращаясь в (3.11) к старой переменной t , по формуле (3.5) получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (3.16)$$

Для физического истолкования решения (3.16) его необходимо преобразовать. Опуская математические выкладки, запишем окончательный результат преобразований:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.17)$$

Рассмотрим функцию

$$U(x, t, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}. \quad (3.18)$$

Допустим, что начальное распределение температур $f(x)$ имеет вид (рис. 3.1):

$$f(x) = f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{если } |x - x_0| < h, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > h. \end{cases}$$

Тогда распределение температур в стержне по формуле (3.17) будет иметь вид:

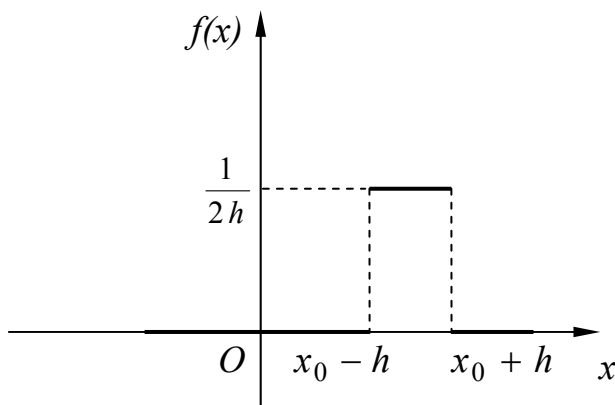


Рис. 3.1

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_h(\xi) U(x, t, \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} U(x, t, \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2h} U(x, t, \bar{\xi}) \int_{x_0-h}^{x_0+h} d\xi = U(x, t, \bar{\xi}), \end{aligned}$$

где $\bar{\xi}$ – некоторая промежуточная точка интервала $(x_0 - h, x_0 + h)$. Здесь мы использовали теорему о среднем интегрального исчисления. Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получим $u(x, t) = U(x, t, x_0)$.

Это означает, что функция $U(x, t, x_0)$ представляет распределение температур в стержне в момент $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ в точке x_0 имелся бесконечный пик температуры, а в остальных частях стержня температура была равна нулю. Такое начальное распределение температур описывается так называемой δ -функцией (дельта функцией) и обозначается через $\delta(x - x_0)$. Дельта функция не является функцией в обычном смысле этого термина и формально определяется следующими свойствами:

1. $\delta(x - x_0) = 0$ для $x \neq x_0$;
2. $\int \delta(x - x_0) dx = 1$ по любому интервалу, содержащему точку x_0 .

Физически начальное распределение температур $f(x) = \delta(x - x_0)$ может быть приближенно реализовано следующим образом. В момент $t = 0$ на очень короткий промежуток времени к точке x_0 стержня подносится узкое пламя очень высокой температуры (тепловой импульс мощности $c\rho$).

Функция $U(x, t, x_0)$ называется функцией источника. График этой функции в любой момент времени $t > 0$ представляет собой кривую Гаусса, симметричную относительно прямой $x = x_0$. Кроме того, можно

показать, что для любого момента времени
$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, x_0) dx = 1.$$

Это означает, что площадь под каждой из кривых $y = U(x, t, x_0)$ равна единице (она пропорциональна общему количеству тепла $c\rho$, сообщенному стержню тепловым импульсом).

Файл `animat_11.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует, как выравнивается температура в стержне после воздействия теплового импульса. Нетрудно видеть, что тепло распространяется мгновенно, так как температура начинает изменяться во всех точках стержня в момент приложения импульса.

Само решение (3.17) может рассматриваться как наложение функций источников, соответствующих непрерывному ряду тепловых импульсов в точках x с плотностью распределения мощностей (количеств тепла) $c\rho f(x)$.

Аналогично решается задача о распространении тепла в бесконечной пластине, то есть задача Коши для однородного двумерного уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{t=0} = f(x, y).$$

В этом случае

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta.$$

Соответствующая задача в трехмерном случае

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad u|_{t=0} = f(x, y, z),$$

имеет решение

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta.$$

3.3. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня методом Фурье

Перейдем к решению задачи Коши для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности (3.2) при начальном условии (3.4).

Представим функцию $\frac{1}{c\rho}g(x, t)$ в виде интеграла Фурье по формулам (3.14) и (3.15):

$$\frac{1}{c\rho}g(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(\lambda, t)\cos \lambda x + \gamma_2(\lambda, t)\sin \lambda x] d\lambda, \quad (3.19)$$

где

$$\gamma_1(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c\rho} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \gamma_2(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c\rho} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi, \quad (3.20)$$

и будем искать решение в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda, t) \cos \lambda x + \beta(\lambda, t) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.2) с учетом (3.19), найдем:

$$\begin{aligned} u &= \int_{-\infty}^{\infty} [(\alpha'_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \alpha(\lambda, t)) \cos \lambda x + (\beta'_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \beta(\lambda, t)) \sin \lambda x] d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(\lambda, t) \cos \lambda x + \gamma_2(\lambda, t) \sin \lambda x] d\lambda. \end{aligned}$$

Очевидно, последнее равенство будет выполняться, если положить, для всех $\lambda, t \geq 0$

$$\alpha'_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \alpha(\lambda, t) = \gamma_1(\lambda, t), \quad \beta'_t(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \beta(\lambda, t) = \gamma_2(\lambda, t). \quad (3.22)$$

Далее потребуем, чтобы функция (3.21) удовлетворяла начальному условию (3.4). Для этого нужно, чтобы

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda, 0) \cos \lambda x + \beta(\lambda, 0) \sin \lambda x] d\lambda,$$

то есть

$$\alpha(\lambda, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \beta(\lambda, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (3.23)$$

Из обыкновенных дифференциальных уравнений (3.22) при начальных условиях (3.23) найдем:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda, t) &= \int_0^t \gamma_1(\lambda, s) e^{-a^2 \lambda^2 (t-s)} ds + \alpha(\lambda, 0) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \\ \beta(\lambda, t) &= \int_0^t \gamma_2(\lambda, s) e^{-a^2 \lambda^2 (t-s)} ds + \beta(\lambda, 0) e^{-a^2 \lambda^2 t}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.21) и учитывая формулы (3.20), получим искомое решение:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda, 0) \cos \lambda x + \beta(\lambda, 0) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t [\gamma_1(\lambda, s) \cos \lambda x + \gamma_2(\lambda, s) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 (t-s)} ds = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) U(x, t, \xi) d\xi + \\
&+ \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(\lambda, s) \cos \lambda x + \gamma_2(\lambda, s) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 (t-s)} d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) U(x, t, \xi) d\xi + \frac{1}{c\rho} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, s) U(x, t-s, \xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.24}$$

[в этих преобразованиях использована формула (3.18)].

Формула (3.24) показывает, что решение в данном случае является суммой решения однородного уравнения (3.3), удовлетворяющего начальному условию (3.4), и решения неоднородного уравнения (3.2), удовлетворяющего нулевому начальному условию (этот факт имеет место для любых линейных дифференциальных уравнений). Таким образом, температура в стержне складывается из температуры, которая имела бы место в момент t в точке x при наличии начальных температур, но при отсутствии источников тепла в стержне, и из температуры, которая имела бы место при наличии источников тепла, но при нулевой начальной температуре.

3.4. Распространение тепла в тонком однородном стержне конечной длины (первая краевая задача)

Рассмотрим тонкий однородный изолированный с боков стержень конечной длины. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности помимо начального условия к уравнению необходимо присоединить граничные условия, которые могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах стержня. Число различных типов граничных условий велико. В рамках данного пособия мы ограничимся рассмотрением основных, наиболее важных типов граничных условий.

Так называемая общая первая краевая задача формулируется следующим образом: найти решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{1}{c\rho} g(x, t) \text{ при } x \in (0, l) \text{ } t \in (0, T] \quad (3.25)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (3.26)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (3.27)$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $f(x)$ - заданные функции.

Рассмотрим частный случай этой задачи, а именно: найти решение $u(x, t)$ однородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (3.28)$$

при однородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (3.29)$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x). \quad (3.30)$$

Применяя метод Фурье разделения переменных, ищем частные решения уравнения (3.28) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.31)$$

Подставляя u из (3.31) в (3.28), получаем два уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.32)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.33)$$

Граничные условия (3.29) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (3.34)$$

Для нахождения нетривиальных решений уравнения (3.28) вида (3.31), удовлетворяющих граничным условиям (3.29), нужно найти нетривиальные решения уравнения (3.33), удовлетворяющие условиям (3.34).

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма-Лиувилля).

Рассуждая так же, как и ранее в разделе 2, делаем вывод, что только для значений параметра λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.35)$$

существуют нетривиальные решения уравнения (3.33), равные

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.36)$$

Значениям $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения уравнения (3.32)

$$T_n(t) = a_n e^{-(a n \pi / l)^2 t}. \quad (3.37)$$

Тогда функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = a_n e^{-(a n \pi / l)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (3.38)$$

удовлетворяют уравнению (3.28) и граничным условиям (3.29) при любых постоянных a_n .

Решение уравнения (3.28), удовлетворяющее начальному условию (3.30), ищем в виде формального ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(a n \pi / l)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.39)$$

Требуя выполнения начального условия (3.30), получаем

$$f(x) = u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (3.40)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi. \quad (3.41)$$

Не трудно показать, что ряд (3.39) с коэффициентами a_n , определяемыми по формуле (3.41), удовлетворяет всем условиям поставленной задачи.

Рассмотрим физический смысл полученного решения. Поступим так же, как в подразделе 3.2, при рассмотрении аналогичного вопроса.

Подставим (3.41) в (3.39). Опуская математические выкладки, получим

$$u(x, t) = \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(a n \pi / l)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} f(\xi) d\xi.$$

Обозначим

$$G(x, t, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(an\pi/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}. \quad (3.42)$$

Тогда функцию $u(x, t)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, t, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (3.43)$$

Можно показать, что функция $G(x, t, x_0)$, где $x_0 \in (0, l)$, представляет температуру стержня в любой точке x в фиксированный момент времени t , вызванную действием мгновенного точечного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в момент $t = 0$ в точке x_0 .

Эта функция называется функцией мгновенного точечного источника.

Файл `animat_12.avi` содержит анимационный фильм, который демонстрирует, как выравнивается температура в стержне после теплового импульса.

Само решение (3.43) может рассматриваться как наложение функций источников, соответствующих непрерывному ряду тепловых импульсов в точках x с плотностью распределения мощностей (количеств тепла) $c\rho f(x)$.

Пример 3.1. Определить распределение температуры в каждой точке медного стержня длиной $l = 10$ см с нетеплопроводной внешней поверхностью, если на концах стержня поддерживается температура, равная 0°C , а начальная температура $f(x) = 50x$. Для меди известны следующие константы: $c = 0,094$; $k = 0,9$; $\rho = 8,9$.

Решение: Эта задача сводится к решению однородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho} = \frac{0,9}{0,094 \cdot 8,9} = 1,07$ при граничных условиях $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ и начальном условии $u|_{t=0} = f(x) = 50x$.

Решение будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(an\pi/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{10} \int_0^{10} 50x \sin \frac{n\pi x}{10} dx = \frac{100}{10} \int_0^{10} x \sin \frac{n\pi x}{10} dx = -\frac{100}{n\pi} \int_0^{10} x d \cos \frac{n\pi x}{10} = \\
&= -\frac{100}{n\pi} \left(x \cos \frac{n\pi x}{10} \Big|_0^{10} - \int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{10} dx \right) = \\
&= -\frac{100}{n\pi} \left(10 \cos(n\pi) - \frac{10}{n\pi} \int_0^{10} \cos \frac{n\pi x}{10} d \left(\frac{n\pi x}{10} \right) \right) = \\
&= -\frac{100}{n\pi} \left(10 \cdot (-1)^n - \frac{10}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{10} \Big|_0^{10} \right) = -\frac{1000 \cdot (-1)^n}{n\pi}. \\
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1000 \cdot (-1)^n}{n\pi} e^{-\frac{1,07 \cdot 3,14^2 n^2}{100} t} \sin \frac{n\pi x}{10} = \\
&= -\frac{1000}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-1,05 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{10}.
\end{aligned}$$

Ответ: $u(x, t) = -\frac{1000}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-1,05 n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{10}.$

Прежде чем перейти к решению общей первой краевой задачи, рассмотрим еще один частный случай. Найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{1}{c\rho} g(x, t), \text{ где } x \in (0, l) \quad t \in (0, T], \quad (3.44)$$

при однородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (3.45)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x). \quad (3.46)$$

Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям (3.38) предыдущей задачи, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.47)$$

Далее представим функцию $\frac{1}{c\rho} g(x, t)$ в виде ряда Фурье

$$\frac{1}{c\rho} g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.48)$$

где

$$g_n(t) = \frac{2}{lc\rho_0} \int_0^l g(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi. \quad (3.49)$$

Подставляя (3.47) и (3.48) в исходное уравнение (3.44), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left[\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 u_n(t) + u'_n(t) - g_n(t) \right] = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$\left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 u_n(t) + u'_n(t) - g_n(t) = 0. \quad (3.50)$$

Пользуясь начальным условием (3.46), получим

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n \pi x}{l} = f(x). \quad (3.51)$$

Далее раскладываем функцию $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (3.52)$$

где $f_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$

Подставив (3.52) в (3.51), приравнявая коэффициенты разложения, получим

$$u_n(0) = f_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (3.53)$$

Решая, например методом вариации, линейное уравнение (3.50) при начальном условии (3.53), находим $u_n(t)$ и подставляем найденное решение в (3.47).

Наиболее простое решение получается если начальное условие нулевое, т.е. $u|_{t=0} = f(x) = 0$. Действительно, в этом случае

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n \pi x}{l} = 0.$$

Откуда следует, что $u_n(0) = 0$. Решая уравнение (3.50) с нулевым начальным условием, получим

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} g_n(\tau) d\tau. \quad (3.54)$$

Подставляя (3.54) в (3.47), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} g_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Решение можно было найти и другим способом. Найти решение поставленной задачи при нулевом начальном условии, после чего сложить его с решением соответствующего однородного уравнения с заданным начальным условием.

Перейдем к решению общей первой краевой задачи. То есть задачи отыскания решения уравнения (3.25) при неоднородных граничных условиях (3.26) и начальном условии (3.27).

Метод Фурье, с помощью которого мы предполагаем решить задачу, в случае краевых условий (3.26) неприменим, так как они неоднородны. Поэтому, прежде чем применять метод Фурье, мы должны свести задачу к такой, в которой краевые условия однородны. Поступим также, как в подразделе (2.5).

Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad (3.55)$$

где функция $w(x,t)$ определяется формулой

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t)). \quad (3.56)$$

При таком выборе функции $w(x,t)$ граничные условия для нее совпадают с граничными условиями (3.26)

$$w(0,t) = \psi_1(t), \quad w(l,t) = \psi_2(t). \quad (3.57)$$

В свою очередь, граничные условия для функции $v(x,t)$ становятся однородными, так как в силу (3.55)

$$v|_{x=0} = u|_{x=0} - w|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = u|_{x=l} - w|_{x=l} = 0, \quad (3.58)$$

а начальное условие

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = f(x) - \psi_1(0) - (\psi_2(0) - \psi_1(0)) \frac{x}{l}. \quad (3.59)$$

Подставим (3.55) в уравнение (3.28), получим

$$v_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + \frac{1}{c\rho} g(x, t) - w_t,$$

или, так как $w_{xx} = 0$

$$v_t = a^2 v_{xx} + \frac{1}{c\rho} g(x, t) - w_t. \quad (3.60)$$

Таким образом, решение общей первой краевой задачи сводится к решению неоднородного уравнения (3.60) при однородных краевых условиях (3.58) и начальном условии (3.59), которая была рассмотрена выше.

Пример 3.2. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq 10$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его левом конце поддерживается температура $u|_{x=0} = t$, а на правом конце - $u|_{x=l} = 5t$. Начальная температура стержня равна нулю.

Решение. Эта задача сводится к решению однородного уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t) = t, \quad u|_{x=10} = \psi_2 = 5t$$

и начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x) = 0.$$

Будем искать решение задачи в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

По формуле (3.56) $w(x, t) = t + \frac{x}{10}(5t - t) = t + \frac{2x}{5}t$.

Функция $v(x, t)$ должна удовлетворять уравнению $v_t = v_{xx} - w_t$.

Значит $v_t = v_{xx} - 1 - \frac{2x}{5}$, при нулевых краевых условиях $v|_{x=0} = v|_{x=10} = 0$ и

начальном условии $v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = 0$.

По формуле (3.49) находим

$$g_n(t) = \frac{1}{5} \int_0^{10} \left(-1 - \frac{2\xi}{5} \right) \sin\left(\frac{\pi \xi}{10} \right) d\xi = 2 \frac{5(-1)^n - 1}{\pi}.$$

По формуле (3.54) находим

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{10}\right)^2(t-\tau)} 2 \frac{5(-1)^n - 1}{\pi n} d\tau = 200 \frac{5(-1)^n - 1 + e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{100}} (5(-1)^{n+1} + 1)}{\pi^3 n^3}.$$

Используя (3.47), будем иметь

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 200 \frac{5(-1)^n - 1 + e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{100}} (5(-1)^{n+1} + 1)}{\pi^3 n^3} \sin \frac{\pi n x}{10}.$$

Окончательно, складывая $v(x, t)$ и $w(x, t)$, находим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 200 \frac{5(-1)^n - 1 + e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{100}} (5(-1)^{n+1} + 1)}{\pi^3 n^3} \sin \frac{\pi n x}{10} + t + \frac{2x}{5} t.$$

Файл animat_13.avi содержит анимационный фильм, который демонстрирует полученную зависимость.

3.5. Задача о распространении тепла в конечном стержне, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой

Пусть через оба конца стержня происходит свободный теплообмен с внешней средой. Количество тепла, отнесенное к единице площади торцевого сечения, таким образом проходящее во внешнюю среду, пропорционально перепаду температуры между торцевым сечением стержня и внешней средой, т.е. равно $h_0(u|_{x=0} - u_0^*)$ – для конца $x = 0$, и $h_l(u|_{x=l} - u_0^*)$ – для конца $x = l$, где h_0 и h_l – коэффициенты внешней теплопроводности соответственно на концах $x = 0$ и $x = l$, а u_0^* и u_l^* (являющиеся, вообще говоря, функциями от t) – температуры внешних сред, соприкасающихся соответственно с концами $x = 0$ и $x = l$. Эти же количества тепла должны быть равны тепловым потокам, отнесенным к единице площади, через соответствующие торцевые сечения стержня, т.е. $-k \frac{\partial u}{\partial n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к торцевым сечениям.

Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ для торца $x = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$ для торца $x = l$.

Приравнивая соответствующие количества тепла, получим следующие краевые условия:

$$h_0(u|_{x=0} - u_0^*) = ku'_x|_{x=0}, \quad h_l(u|_{x=l} - u_l^*) = -ku'_x|_{x=l}. \quad (3.61)$$

Отметим, что если какой-либо конец стержня теплоизолирован, то это означает, что соответствующий коэффициент теплопроводности равен нулю, т.е. краевое условие будет $u'_x = 0$.

Рассмотрим случай, когда $h_0 = h_l$. Положим $h = \frac{h_0}{k} = \frac{h_l}{k}$. Краевые условия (3.61) примут вид:

$$\begin{cases} [u'_x - h(u - u_0^*)]_{x=0} = 0, \\ [u'_x + h(u - u_0^*)]_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Пусть $u_0^* = 0$ (если $u_0^* \neq 0$, то вводим новую функцию $\tilde{u} = u - u_0^*$, для которой краевые условия будут однородны). Граничные условия приобретают вид:

$$\begin{cases} [u'_x - hu]_{x=0} = 0, \\ [u'_x + hu]_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Начальное условие - прежнее:

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.63)$$

Таким образом, мы приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (3.64)$$

при граничных (3.62) и начальном (3.63) условиях.

Следуя методу Фурье, ищем частные решения уравнения (3.64), удовлетворяющие условиям (3.62), в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.65)$$

Подстановка (3.65) в (3.64) даёт

$$XT' = a^2 X''T.$$

Откуда

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = c = const. \quad (3.66)$$

Чтобы удовлетворить условиям (3.62), очевидно, нужно потребовать:

$$\left. \begin{aligned} X'(0) - hX(0) &= 0, \\ X'(l) + hX(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Положив $c = -\lambda^2$, из (3.66) получим:

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (3.68)$$

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0. \quad (3.69)$$

Мы пришли к краевой задаче для уравнения (3.68) при условиях (3.67).

Из уравнения (3.68) получим

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (3.70)$$

В силу (3.67) должны иметь:

$$\begin{cases} C_2 \lambda - hC_1 = 0, \\ (-C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l) \lambda + h(C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l) = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{2 \lambda h}{\lambda^2 - h^2}. \quad (3.72)$$

Определив положительные корни трансцендентного уравнения (3.72), мы найдем собственные значения.

Пусть $\lambda = \lambda_n$ - n -й положительный корень уравнения (3.72). В силу (3.71) можем принять $C_1 = \lambda_n$, $C_2 = h$.

Тогда для собственных функций получаем выражения

$$X_n(x) = \lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.73)$$

При $\lambda = \lambda_n$ уравнение (3.69) дает

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.74)$$

Таким образом, с учетом (3.65), (3.73), (3.74) получим частные решения

$$u_n(x, t) = A_n (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x) e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.75)$$

Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x) e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (3.76)$$

В силу условия (3.63), имеем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x) = f(x).$$

Подсчет коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x\}$ даёт:

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.77)$$

Таким образом, решение задачи дается рядом (3.76), где коэффициенты подсчитываются по формулам (3.77).

Интеграл в знаменателе (3.77) может быть подсчитан следующим образом.

Из равенства $X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0$ вытекает, что $\lambda_n^2 X_n^2 = -X_n X_n''$.

Поэтому

$$\lambda_n^2 \int_0^l X_n^2 dx = -[X_n X_n']_{x=0}^{x=l} + \int_0^l X_n'^2 dx. \quad (3.78)$$

Из (3.73)

$$X_n = \lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x,$$

$$X_n' = -\lambda_n^2 \sin \lambda_n x + h \lambda_n \cos \lambda_n x.$$

Следовательно,

$$\lambda_n^2 X_n^2 + X_n'^2 = \lambda_n^4 + h^2 \lambda_n^2, \quad (3.79)$$

$$\lambda_n^2 \int_0^l X_n^2 dx + \int_0^l X_n'^2 dx = (\lambda_n^4 + h^2 \lambda_n^2) l.$$

Из (3.78) и (3.79) вытекает, что

$$2\lambda_n^2 \int_0^l X_n^2 dx = (\lambda_n^4 + h^2 \lambda_n^2) l - [X_n X_n']_{x=0}^{x=l}. \quad (3.80)$$

С другой стороны, из граничных условий и из (3.79) при $x = 0$ и $x = l$ получаем $\lambda_n^2 X_n^2 + h^2 X_n^2 = \lambda_n^4 + h^2 \lambda_n^2$, или

$$X_n^2 = \lambda_n^2. \quad (3.81)$$

Запишем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} [X_n X_n' - h X_n^2]_{x=0} &= 0, \\ [X_n X_n' + h X_n^2]_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

В силу (3.81) найдем, что $[X_n X_n']_{x=0}^{x=l} = -2h\lambda_n^2$.

Подстановка в (3.80) дает $\int_0^l X_n^2 dx = \frac{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h}{2\lambda_n^2}$.

Таким образом, вместо (3.77) можем писать

$$A_n = \frac{2 \int_0^l f(x)(\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x) dx}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.82)$$

В случае, когда на конце $x = 0$ происходит теплообмен со средой температуры u_0 , а на конце $x = l$ – со средой температуры u_1 , задачу можно свести к данной с помощью подстановки $u = v + w$, где функция $v = v(x)$ зависит лишь от x и удовлетворяет уравнению

$$v'' = 0, \quad (3.83)$$

при условиях

$$\begin{aligned} [v' - h(v - u_0)]_{x=0} &= 0, \\ [v' + h(v - u_1)]_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Функция w удовлетворяет уравнению

$$w_t' = a^2 w_{xx}'', \quad (3.85)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} [w_x' - hw]_{x=0} &= 0, \\ [w_x' + hw]_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

При этом начальное условие $w(x, 0) = f(x) - v(x)$.

В силу (3.83) функция $v = v(x)$ имеет вид $v = Ax + B$ и для определения постоянных A и B нужно воспользоваться условиями (3.84). Это приведет к системе

$$\left. \begin{aligned} A - h(B - u_0) &= 0, \\ A + h(Al + B - u_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

Для функции w задача этого типа рассмотрена выше.

Пример 3.3. Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на каждом из его концов происходит конвективный теплообмен с внешней средой одинаковой теплопроводности, имеющей на концах $x = 0$ и $x = l$ постоянную температуру u_0 и u_l соответственно. Начальная температура произвольна.

Решение:

Задача сводится к решению уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

при краевых условиях

$$u_x(0, t) - h[u(0, t) - u_0] = 0, \quad u_x(l, t) + h[u(l, t) - u_l] = 0,$$

и начальном условии $u(x, 0) = f(x)$.

Решение ищем в виде $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, где $v(x)$ решение (3.83) при условиях (3.84), $w(x, t)$ решение (3.85) при условиях (3.86).

Найдем $v(x)$, решив систему (3.87):

$$v(x) = h \frac{u_l - u_0}{2 + lh} x + \frac{u_l + (1 + lh)u_0}{2 + lh}.$$

Из (3.76) следует

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \left(\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right).$$

Из (3.72) найдем λ_n .

Воспользовавшись формулой (3.82), учитывая, что $w(x, 0) = f(x) - v(x)$, найдем:

$$A_n = \frac{2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l [f(x) - v(x)] \left(\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right) dx.$$

Окончательно получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l [f(x) - v(x)] \left(\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right) dx \times \\ \times e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \left(\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right) + h \frac{u_l - u_0}{2 + lh} x + \frac{u_l + (1 + lh)u_0}{2 + lh}.$$

3.6. Решение уравнения распространения тепла в бесконечном цилиндре методом Фурье

Пусть боковая поверхность бесконечного круглого цилиндра радиуса R поддерживается при постоянной температуре. Если в начальный момент времени температура в каждой точке зависит только от ее расстояния r до оси цилиндра, то и в последующем температура будет зависеть лишь от r и времени t . Тепловой поток при этом всегда направлен по радиусам цилиндра. Таким образом, температура $u = u(r, t)$.

Преобразуем общее уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ (a – коэффициент температуропроводности) к цилиндрическим координатам, учитывая, что функция $u(r, t)$ не зависит от φ и z . Придем к уравнению радиального распространения тепла в цилиндре

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (3.88)$$

Начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad (3.89)$$

где $\varphi(r)$ – заданная функция в интервале $0 \leq r \leq R$.

Краевым условием будет условие постоянства температуры боковой поверхности цилиндра

$$u|_{r=R} = u_0. \quad (3.90)$$

Будем считать, что $u_0 = 0$, т.е. что краевое условие (3.90) однородное. В противном случае нужно ввести новую функцию $\tilde{u}(r, t) = u(r, t) - u_0$. При этом уравнение (3.88) не изменится, а начальное и краевое условия примут вид: $\tilde{u}|_{t=0} = \varphi(r) - u_0$ и $\tilde{u}|_{r=R} = 0$.

Применим к решению задачи метод Фурье. Далее поступаем так же, как и при решении задачи о колебаниях круглой мембраны (см. подраздел 2.5). Полагая $u(r, t) = U(r)T(t)$, разделяя переменные, находим:

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (3.91)$$

$$U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + \lambda^2 U(r) = 0, \quad (3.92)$$

где λ – произвольный параметр.

Решение (3.91) имеет вид:

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 a^2 t}. \quad (3.93)$$

Для функции $U(r)$ получаем

$$U(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r). \quad (3.94)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} N_0(x) = \infty$, то из условия конечности температур на оси цилиндра следует, что $C_2 = 0$. Чтобы решение удовлетворяло однородному краевому условию нужно положить

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (3.95)$$

Таким образом, собственными числами задачи являются величины $\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}$, где μ_k – корни функции Бесселя нулевого порядка. Каждому собственному числу μ_k соответствует собственная функция

$$u_k(r, t) = e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r).$$

Искомую функцию определяем как суперпозицию собственных функций

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r). \quad (3.96)$$

Подберем коэффициенты C_k так, чтобы

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = \varphi(r).$$

Воспользовавшись формулой (2.104), найдем

$$C_k = \frac{2}{R^2 J_0'^2(\mu_k)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) \varphi(r) dr. \quad (3.97)$$

Отметим, что для вычисления $J_0'^2(\mu_k)$ можно воспользоваться формулой (2.88).

Вычисляя коэффициенты C_k по формулам (3.97) и подставляя в ряд (3.96), получаем окончательное решение задачи.

Почти также решается задача в случае теплоизоляции боковой поверхности цилиндра. Краевое условие запишется тогда в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

(нормаль к боковой поверхности цилиндра направлена по радиусу).

Для определения собственных чисел взамен уравнения (3.95) мы получим уравнение $J_0'(\lambda R) = 0$, или согласно формуле (2.88):

$$J_1(\lambda R) = 0.$$

Таким образом, собственными числами являются величины $\lambda_k = \frac{\nu_k}{R}$, где ν_k – нули функции Бесселя первого порядка.

Решение задачи определяется формулами (3.96) и (3.97), в которых корни функции $J_0(x)$ нужно заменить на корни функции $J_1(x)$.

Общий случай краевых условий $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} + hu\Big|_{r=R} = 0$ может быть

рассмотрен точно также, однако уравнение для отыскания собственных чисел приобретает более сложный вид, а именно $\lambda J'_0(\lambda R) + hJ_0(\lambda R) = 0$. Решение этого уравнения требует более детального знакомства с теорией бесселевых функций.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям (задача Штурма-Лиувилля).

$$1.1 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

$$1.6 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \leq x \leq 1, \\ y(3/4) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$1.2 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/2 \leq x \leq 2, \\ y(3/2) = y'(2) = 0. \end{cases}$$

$$1.7 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi \leq x \leq 2\pi, \\ y(\pi) = y'(2\pi) = 0. \end{cases}$$

$$1.3 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi, \\ y(\pi/2) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$1.8 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/4, \\ y(\pi/2) = y'(3\pi/4) = 0. \end{cases}$$

$$1.4 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/4 \leq x \leq \pi/2, \\ y(\pi/4) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

$$1.9 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \leq x \leq 3/2, \\ y(1) = y'(3/2) = 0. \end{cases}$$

$$1.5 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/2 \leq x \leq 1, \\ y(1/2) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$1.10 \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/4 \leq x \leq 1/2, \\ y(1/4) = y'(1/2) = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Привести к каноническому виду следующие дифференциальные уравнения:

$$2.1 \quad 4y^2 z''_{xx} + 2(1 - y^2) z''_{xy} - z''_{yy} - \frac{4y}{1 + y^2} z'_x + \frac{2y}{1 + y^2} z'_y = 0,$$

$$2.2 \quad z''_{xx} + 2z''_{xy} - 3z''_{yy} = 0,$$

$$2.3 \quad z''_{xx} + 2\cos x \cdot z''_{xy} - \sin^2 x \cdot z''_{yy} - \sin x \cdot z'_y = 0,$$

$$\begin{aligned}
2.4 \quad & z''_{xx} - 2x \cdot z''_{xy} + x^2 z''_{yy} - z'_y = 0, \\
2.5 \quad & z''_{xx} - 2x \cdot z''_{xy} + x^2 z''_{yy} + z'_x - (1+x)z'_y = 0, \\
2.6 \quad & z''_{xx} - 2x \cdot z''_{xy} + x^2 z''_{yy} - z'_x + (x-1)z'_y = 0, \\
2.7 \quad & y^2 z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + z'_x = 0, \\
2.8 \quad & y^2 z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + (1+y)z'_x + z'_y = 0, \\
2.9 \quad & y^2 z''_{xx} + 2y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} + (1-y)z'_x - z'_y = 0, \\
2.10 \quad & z''_{xx} + 2x^2 z''_{xy} + x^4 z''_{yy} + 2x \cdot z'_y = 0.
\end{aligned}$$

Задача 3. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду.

$$\begin{aligned}
3.1 \quad & 4z''_{xx} + 8z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0, & 3.6 \quad & 3z''_{xx} + 16z''_{xy} + 16z''_{yy} = 0, \\
3.2 \quad & 3z''_{xx} + 8z''_{xy} + 4z''_{yy} = 0, & 3.7 \quad & 25z''_{xx} + 20z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0, \\
3.3 \quad & 3z''_{xx} + 4z''_{xy} + z''_{yy} = 0, & 3.8 \quad & z''_{xx} + 8z''_{xy} + 12z''_{yy} = 0, \\
3.4 \quad & z''_{xx} + 4z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0, & 3.9 \quad & 12z''_{xx} + 8z''_{xy} + z''_{yy} = 0, \\
3.5 \quad & 16z''_{xx} + 16z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0, & 3.10 \quad & 49z''_{xx} + 28z''_{xy} + 3z''_{yy} = 0.
\end{aligned}$$

Задача 4. Методом Фурье найти решение линейного однородного уравнения 2-го порядка (первая смешанная задача).

$$\begin{aligned}
4.1 \quad & \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-1), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0. \end{cases} & 4.4 \quad & \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-2), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(2, t) = 0. \end{cases} \\
4.2 \quad & \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 3/2, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-3/2), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(3/2, t) = 0. \end{cases} & 4.5 \quad & \begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, 0 < x < 1/2, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-1/2), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1/2, t) = 0. \end{cases} \\
4.3 \quad & \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-3), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(3, t) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$4.6 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-1), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.9 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-2), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.7 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 2/3, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-2/3), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(2/3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.10 \quad \begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-3), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.8 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1/2, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x(x-1/2), u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, u(1/2, t) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Методом Фурье найти решение линейного уравнения 2-го порядка $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t)$ с заданными начальными и граничными условиями $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = F(x), 0 \leq x \leq s, u(0, t) = \varphi(t), u(s, t) = \psi(t), 0 \leq t \leq T$. Функции $g(x, t), f(x), F(x), \varphi(t), \psi(t)$ для каждого варианта задаются следующим образом:

$$5.1 \quad g(x, t) = \frac{x(s^2 - x^2)}{s^3}, f(x) = \frac{s^2 - x^2}{2s^2}, F(x) = 0, \varphi(t) = \frac{1}{2}, \psi(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos \omega t);$$

$$5.2 \quad g(x, t) = \frac{x^2(s-x)^2}{s^4} \sin kt, f(x) = \frac{x(s-x)}{s^2}, F(x) = 0, \varphi(t) = 0, \psi(t) = 0;$$

$$5.3 \quad g(x, t) = \frac{x(s-x)}{s^2} \sin kt, f(x) = 0, F(x) = \frac{x(s-x)(s-2x)}{s^3}, \varphi(t) = 0, \psi(t) = 0;$$

$$5.4 \quad g(x, t) = 0, f(x) = \frac{x}{s}, F(x) = \frac{x(s-x)}{s^2}, \varphi(t) = 0, \psi(t) = \cos \omega t;$$

$$5.5 \quad g(x, t) = 0, f(x) = \frac{x(s-x)(s-3x)}{s^3}, F(x) = \omega \frac{s-x}{s}, \varphi(t) = \sin \omega t, \psi(t) = 0;$$

$$5.6 \quad g(x, t) = e^{-t} \frac{x(s-x)}{s^2}, f(x) = \frac{x(s-x)(s-2x)}{s^3}, F(x) = 0, \varphi(t) = 0, \psi(t) = 0;$$

$$5.7 \quad g(x, t) = \frac{x(s-x)}{s^2}, f(x) = \frac{x^2(s-x)^2}{s^4}, F(x) = 0, \varphi(t) = 1 - \cos \omega t, \psi(t) = 0;$$

$$5.8 \quad g(x, t) = \frac{x(s-x)(s-2x)}{s^3}, f(x) = 0, F(x) = \omega \frac{x}{s}, \varphi(t) = 0, \psi(t) = \sin \omega t;$$

$$5.9 \quad g(x, t) = \frac{x^2(s-x)^2}{s^4}, \quad f(x) = \frac{s-x}{s}, \quad F(x) = 0, \quad \varphi(t) = 1, \quad \psi(t) = 0;$$

$$5.10 \quad g(x, t) = \frac{x(s-x)(3s-x)}{s^3}, \quad f(x) = 0, \quad F(x) = \omega \frac{x(s+x)}{2s^2}, \quad \varphi(t) = 0, \quad \psi(t) = \sin \omega t.$$

Задача 6.

6.1 Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны с закрепленным краем, если ее стороны l и m и всем точкам мембраны приданы начальные скорости v_0 .

6.2 Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны с закрепленным краем, если ее стороны l и m и всем точкам мембраны приданы начальные скорости $v_0 = x$.

6.3 Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны с закрепленным краем, если ее сторона l и в начальный момент времени по центру мембраны ударяют квадратным молоточком со стороной $\frac{l}{3}$ так, что стороны мембраны и молоточка параллельны, а соответствующие точки мембраны получают начальные скорости v_0 .

6.4 Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны с закрепленным краем, если ее сторона l и в начальный момент времени центр мембраны оттянули на высоту $\frac{l}{4}$, после чего отпустили без начальных скоростей.

6.5 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем, если ее радиус l и всем точкам мембраны приданы начальные скорости v_0 .

6.6 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем, если ее радиус l и в начальный момент времени по центру мембраны ударяют круглым молоточком радиуса $\frac{l}{3}$ так, что соответствующие точки мембраны получают начальные скорости v_0 .

6.7 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем, если ее радиус l и в начальный момент времени мембрана имеет форму параболоида вращения так, что край и вершина параболоида совпадают с краем и центром мембраны соответственно.

Расстояние между вершиной параболоида и центром мембраны в свободном состоянии равно $\frac{l}{2}$.

6.8 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем, если ее радиус l и в начальный момент времени мембрана имеет форму прямого конуса вращения так, что край и вершина конуса совпадают с краем и центром мембраны соответственно. Расстояние между вершиной конуса и центром мембраны в свободном состоянии равно $\frac{l}{2}$.

6.9 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем радиуса l , если в начальный момент времени центральная часть мембраны, concentрический с мембраной круг радиуса $\frac{l}{2}$, имеет форму параболоида вращения так, что край и вершина параболоида совпадают с краем этого круга и центром мембраны соответственно. Расстояние между вершиной параболоида и центром мембраны в свободном состоянии равно $\frac{l}{4}$.

6.10 Решить задачу о свободных колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем радиуса l , если в начальный момент времени центральная часть мембраны, concentрический с мембраной круг радиуса $\frac{l}{2}$, имеет форму прямого конуса вращения так, что край и вершина конуса совпадают с краем этого круга и центром мембраны соответственно. Расстояние между вершиной конуса и центром мембраны в свободном состоянии равно $\frac{l}{4}$.

Задача 7.

7.1 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах поддерживается нулевая температура, а начальная температура $f(x) = u_0 = \text{const} \neq 0$.

7.2 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах поддерживается нулевая температура, а начальная температура

$$f(x) = -\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{4}.$$

7.3 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах поддерживается постоянная температура $u|_{x=0} = u_0$, $u|_{x=l} = u_l$. Начальная температура стержня равна нулю.

7.4 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах поддерживается постоянная температура $u|_{x=0} = u_0$, $u|_{x=l} = u_l$. Начальная температура стержня $f(x) = -\left|x - \frac{l}{2}\right| + \frac{l}{2}$.

7.5 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его левом конце поддерживается температура $u|_{x=0} = 0$, а на правом конце — $u|_{x=l} = kt$, где $k = \text{const} \neq 0$. Начальная температура стержня равна нулю.

7.6 Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых $g(x, t) = t \sin \frac{\pi x}{l}$. На его концах поддерживается нулевая температура, а начальная температура $f(x) = u_0 = \text{const} \neq 0$.

7.7 Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на каждом из его концов происходит конвективный теплообмен с внешней средой одинаковой теплопроводности, имеющей на концах $x = 0$ и $x = l$ постоянную температуру u_0 и u_l , соответственно. Начальная температура $f(x) = x$.

7.8 Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если оба конца стержня теплоизолированы. Начальная температура $f(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$.

7.9 Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его левый конец теплоизолирован, а на правом конце происходит конвективный теплообмен с внешней средой, имеющей постоянную температуру u_0 . Начальная температура $f(x) = u_0 = \text{const} \neq 0$.

7.10 Найти распределение температуры в бесконечном цилиндре радиуса R , если на его боковой поверхности поддерживается нулевая температура, а начальная температура $\varphi(r) = r$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики : учеб. пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 7-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.

2. Линейные уравнения математической физики / под ред. Л. А. Люстернина и А. Р. Янпольского. – М. : Наука, 1964. – 368 с.

3. **Араманович, И. Г.** Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 287 с.

4. **Михлин, С. Г.** Курс математической физики / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1968. – 575 с.

5. **Кошляков, Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 708 с.

6. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ГИФМЛ, 1959. – Т. 2.

7. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1970. – Т. 1.

8. **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Физматлит, 2005. – Т. 1-2.

9. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики : учеб. для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Наука, 2000.