

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный  
университет»

На правах рукописи

Перегудова Елизавета Дмитриевна

**Математическое моделирование и визуализация процесса  
посадки летательного аппарата на ледяное основание**

Направление подготовки 01.04.02  
«Прикладная математика и информатика»

**АВТОРЕФЕРАТ  
МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ**

2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика»

**Лошманов Антон Юрьевич**

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент И.о зав. лабораторией химических и фазовых превращений в материалах, ведущий научный сотрудник ИМиМ ДВО РАН

**Жилин Сергей Геннадьевич**

Защита состоится 22 июня 2018 г. в 09.50 часов по адресу: 681000, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27, ауд. 321/3.

Автореферат разослан 15 июня 2018 г.

Секретарь ГЭК

А.А. Сиротин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

*Актуальность темы.* Интерес к развитию и освоению Арктических районов возрастает с каждым годом. Использование авиации для исследования Севера сопряжено со строительством аэродромов в данной местности либо использованием ледяного покрова в качестве взлетно-посадочных полос.

При этом для минимизации рисков необходимо оценить поведение ледяного покрова под действием ударной нагрузки на него в момент касания шасси самолета.

Поэтому большой интерес представляет задача, связанная с динамическим воздействием нагрузки на ледяной покров в условиях переменной глубины водоема, при ударе шасси самолета, в момент касания при посадке.

*Целью* данной работы является исследование влияния переменной глубины водоема на прогибы ледяного покрова при ударе нагрузки сверху.

Для достижения указанной цели поставлены следующие *задачи*:

- изучить преобразование Фурье;
- решить задачу о воздействии ударного импульса на упругую пластину, плавающую над наклонным дном аналитически;
- решить задачу о воздействии ударного импульса на упругую пластину, плавающую над наклонным дном численно в математическом пакете MathCAD;

*Объектом* исследования является процесс посадки самолета на ледяной покров.

*Предметом* исследования являются параметры, влияющие на распространение волн при ударе шасси самолета.

Для решения поставленных задач использовались следующие *методы* исследования: теоретические (анализ) и эмпирические (изучение литературы и результатов деятельности).

*Научная новизна* исследования заключается в следующем: ставится и решается трехмерная задача в условиях переменной глубины водоема.

*Достоверность и обоснованность результатов исследования.*

Основана на классических подходах механики сплошных сред и строгих математических выкладках.

*Практическая значимость* полученных результатов исследований состоит в том, что рассмотренная задача позволяет решить проблему использования ледяного покрова для обустройства ледовых аэродромов и переправ.

*Апробация результатов.* Результаты работы докладывалась на:

– Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-38-00089 "Исследования напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, вызванного движением по нему нагрузки переменной интенсивности".

Результаты работы опубликованы в материалах международной конференции The Twenty-sixth (2016) International Offshore and Polar Engineering Conference, Rhodes (Rodos), Greece, June 26–July 2, 2016 .

Matiushina A.A., Pogorelova A.V., Kozin V.M., Peregudova E.D. "Modeling of an Airplane Taking-off and Landing on the Ice Cover in Variable Water Depth Conditions" // The Twenty-sixth (2016) International Offshore and Polar Engineering Conference, Rhodes (Rodos), Greece, June 26–July 2, 2016

*Публикации.* По результатам выполненных в диссертации исследований автором опубликовано 2 работы:

– Перегудова, Е.Д. Решение задачи о колебании плавающей упругой пластины под действием импульсной нагрузки / Е.Д. Перегудова, А.В. Погорелова // Певзнерские чтения : материалы региональной науч.- практ. конф.. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «АмГПУ», 2015. - С.150.

– Перегудова, Е.Д. Математическое моделирование процесса посадки летательного аппарата на ледяной покров / Е.Д. Перегудова, А.Ю. Лошманов // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов : материалы 47-й науч.- техн. конф. студентов и аспирантов. - Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КНАГТУ», 2017. - С.848-850.

*Структура и объем.* Магистерская диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы – 59 страниц, в том числе 10 рисунков, 2 таблицы и 1 приложение.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

*Введение* раскрывает актуальность темы, определяются цели и задачи исследования, объект, предмет, указываются научная новизна, практическая значимость, достоверность и обоснованность результатов исследования.

*В первой главе* вводятся определения преобразования Фурье.

Преобразование Фурье – это просто математический процесс, который позволяет нам взять функцию времени (сейсмическую трассу) и выразить ее как функцию частоты (спектр).

Первым человеком, поведавшим миру об этом методе, был французский математик Жан Батист Жозеф Фурье, французский математик, который, в своей диссертации Аналитическая теория теплоты (1822), использовал тригонометрический ряд, обычно называемый рядом Фурье, чтобы выразить разрывные функции в виде суммы бесконечного ряда синусоид и косинусоид.

*Во второй главе* рассматриваем задачу, связанную с ударом шасси самолета при посадке на ледяной покров.

Задача о распространении волн в ледяном покрове вызвала к себе интерес еще в конце XIX века. В 1887 г. появилась одна из первых работ, посвященных этому вопросу (Greenhill, A.G. Wavemotion in hydrodynamics. Несколько позже, в 1916 г, выходит работа того же автора, где исследуется движение нагрузки по ледяному покрову. А. Гринхилл впервые получил уравнение, связывающее фазовую скорость с волновым числом. В основе исследований лежало рассмотрение потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести с нелинейными граничными условиями на свободной поверхности, моделирующими влияние ледяного покрова.

Рассмотрим систему координат  $OXYZ$ , которая располагается следующим образом:  $OXY$  совпадает с невозмущенной поверхностью раздела лед-вода. Ось  $z$  направлена вертикально вверх (рисунок 1).

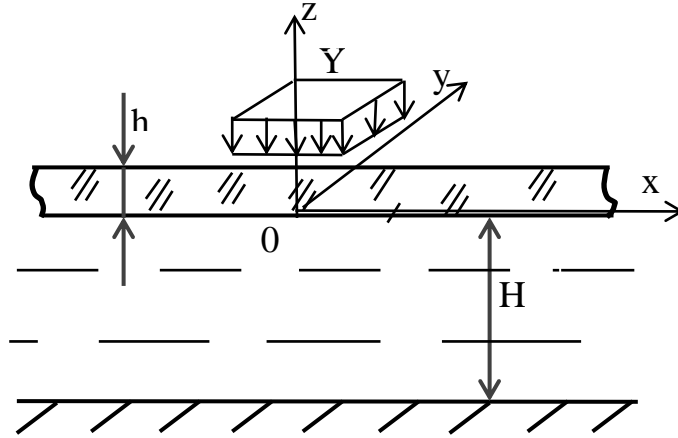


Рисунок 1 – Схема задачи

Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, тогда движение жидкости потенциальное, т.е. существует потенциал  $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ , такой, что скорость  $V$  движения жидкости имеет координаты  $V = \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}, \frac{\partial \Phi'}{\partial y'}, \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)$ .

Потенциал скоростей движения жидкости  $\Phi$  должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = 0. \quad (2.1)$$

Граничные условия для функции прогиба льда  $w(x, y, t)$  и функции потенциала скоростей движения жидкости  $\Phi(x, y, z, t)$  записываются как:

$$\kappa \left( \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) w' + \varepsilon \frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} + w' + \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} = Y'(x, y, t), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = 0, z = -1, \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right|_{z=0} = \frac{\partial w'}{\partial t'}. \quad (2.4)$$

Предполагается, что функции  $\Phi(x, y, z, t)$  и  $w(x, y, t)$  удовлетворяют необходимым условиям для применения преобразования Фурье к ним:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, z, t) \times \exp(ik((x - x_1)\cos\theta + (y - y_1)\sin\theta)) dx dy, \quad (2.5)$$

$$w(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} k dk \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y, t) \times \exp(ik((x - x_1)\cos\theta + (y - y_1)\sin\theta)) dx dy. \quad (2.6)$$

Перейдем к безразмерным величинам, обезразмерим уравнение (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), используя следующие преобразования:

$$x = \frac{x'}{H}, y = \frac{y'}{H}, z = \frac{z'}{H}, L = \frac{L'}{H}, B = \frac{B'}{H}, w = \frac{w'}{H}, t = t' \sqrt{\frac{g}{H}}, \Phi = \frac{\Phi'}{H \sqrt{gH}},$$

$$q = \frac{q'}{\rho_2 g}, Y = \frac{Y'}{\rho_2 g H}, b = b' \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Найдем частные производные, до второго порядка включительно, уравнения (2.5) по переменным  $x$ ,  $y$ , и  $z$ .

Проделав другие преобразования, получим итоговую формулу следующего вида:

$$w(x, y, t) = \frac{-4Y_0}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{c}}{c\sqrt{a}} \lambda d\lambda \int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{c} \sin(t\sqrt{\frac{a}{c}})}{\alpha(\lambda^2 - \alpha^2)} \sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \sin\left(\frac{B\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}{2}\right) \times$$

$$\times \cos(\alpha x) \cos(y\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) \sin\left(\sqrt{\frac{a}{c}} t\right) d\alpha.$$

Получили формулу для расчета прогиба пластины при ударе об нее сверху в трехмерной постановке для постоянной глубины водоема.

*Третья глава* посвящена задаче, о воздействии импульсной нагрузки на ледяной покров в условиях переменной глубины водоема.

Рассмотрим трехмерную задачу о воздействии ударного импульса на упругую пластину, плавающую над наклонным дном, глубина которого  $H(x) = H_0(1 - th(\alpha \frac{x'}{H_0}))$ , где  $H_0$  - глубина в точке приложения импульса,  $tg\varphi = \alpha$  -

тангенс угла наклона поверхности в точке  $x'=0$ , импульс  $Y$  задается следующей формулой  $Y' = Y_0 Y(x, y) P'(t')$  (рисунок 2).

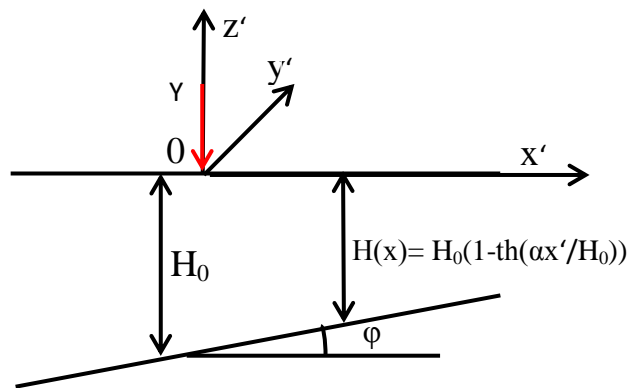


Рисунок 2 – Схема задачи

Введем новую систему координат:

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = y, \\ \zeta = \frac{z}{1 - \text{th}(\alpha x)}. \end{cases}$$

Предполагаем, что  $\alpha$  малая величина, и решение поставленной задачи будем искать асимптотическим методом:

$$w = w_0 + \alpha w_1 + \dots$$

где  $w_0$  - решение соответствующее постоянной глубине водоема,

$w_1$  - второе слагаемое в первом приближении.

Решение нулевого приближения запишется следующим образом:

$$w_0(\xi, \eta, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_{-\pi}^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y_0 \sqrt{c} \sin\left(t \sqrt{\frac{a}{c}}\right)}{c \sqrt{a}} \times \exp(ik((\xi - x_1) \cos\theta + (\eta - y_1) \sin\theta)) dx_1 dy_1. \quad (3.5.1)$$

В первом приближении получим:



$$w_1 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \alpha^2} \sin\left(\frac{B\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}{2}\right) \sin(\alpha\xi) \cos(\eta\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}) \times \left[ O\left(-\frac{L}{2\alpha} \cos\left(\alpha \frac{L}{2}\right) + \frac{1}{\alpha^2} \sin\left(\alpha \frac{L}{2}\right)\right) - J \frac{1}{\alpha} \sin\left(\alpha \frac{L}{2}\right) \right] d\alpha. \quad (3.7)$$

Итоговая формула имеет следующий вид:

$$W' = (W_0 + \alpha W_1) H\left(1 - th\left(\alpha \frac{x}{H}\right)\right).$$

Рассмотрим задачу посадки самолета в реальных условиях, с заданными параметрами (таблицы 1, 2).

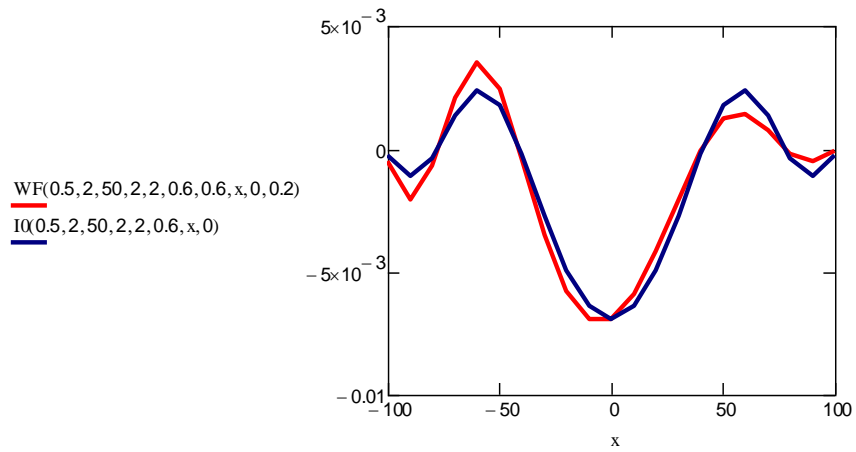
Таблица 1 - Параметры пластины и нагрузки

Параметр	Обозначение	Значение
Глубина водоема, м	H	50
Плотность пластины, кг/м <sup>3</sup>	$\rho_1$	900
Плотность воды, кг/м <sup>3</sup>	$\rho_2$	1000
Коэффициент Пуассона,	$\nu$	1/3
Модуль Юнга, Н/м <sup>2</sup>	E	$5 \cdot 10^9$
Ударная нагрузка, кг/мс	$Y_0$	$1,61 \cdot 10^5$

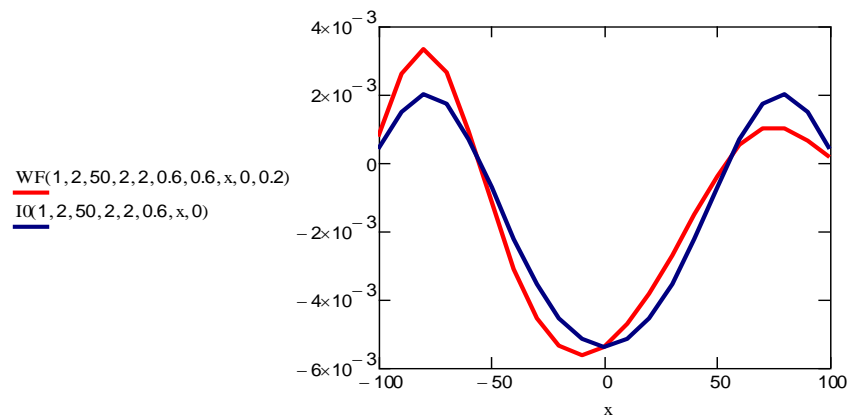
Таблица 2 - Характеристика самолёта Ил-76ТД

Параметр	Обозначение	Значение
Вес самолета, Н	M	1,48
Площадь области, м <sup>2</sup>	S	4
Вертикальная составляющая скорости, м/с	V	4,26
Посадочная скорость, м/с	$V_0$	58

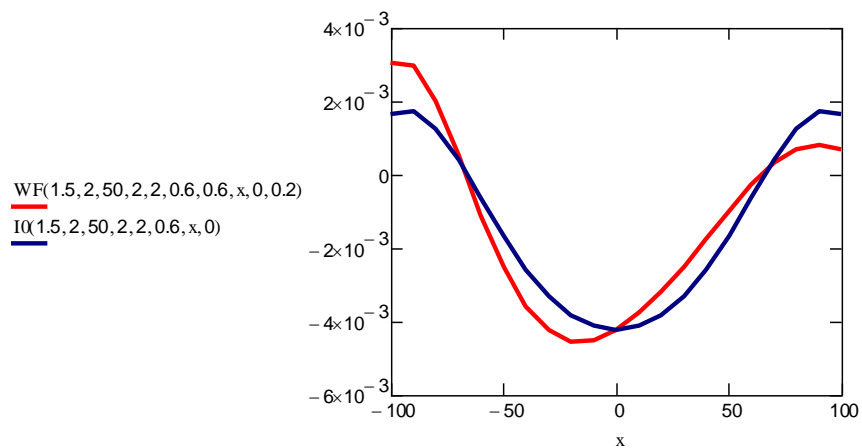
Данная задача была реализована в математическом пакете MathCAD (рисунки 3 - 8).



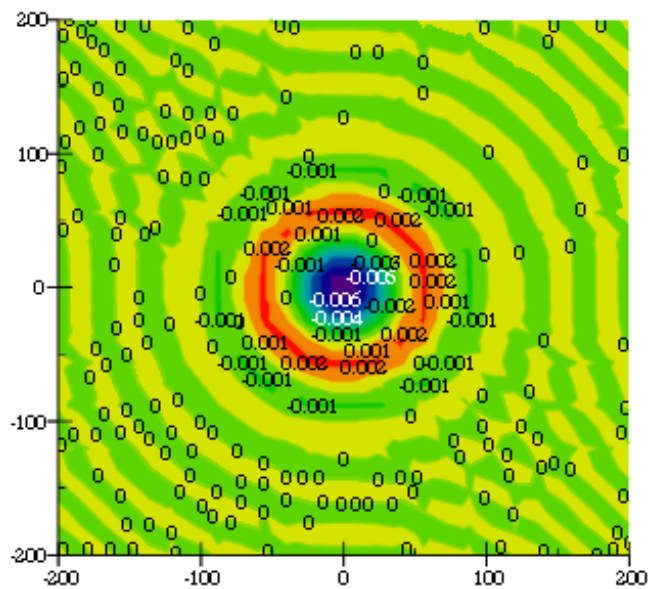
IO – прогиб ледяного покрова при ровном дне;  
 WF - прогиб ледяного покрова при переменной глубине водоема ( $\alpha=0.2$ )  
 Рисунок 3 - Прогиб ледяного покрова толщиной 2 метра при  $t=0.5$ с



IO – прогиб ледяного покрова при ровном дне;  
 WF - прогиб ледяного покрова при переменной глубине водоема ( $\alpha=0.2$ )  
 Рисунок 4 - Прогиб ледяного покрова толщиной 2 метра при  $t=1$ с

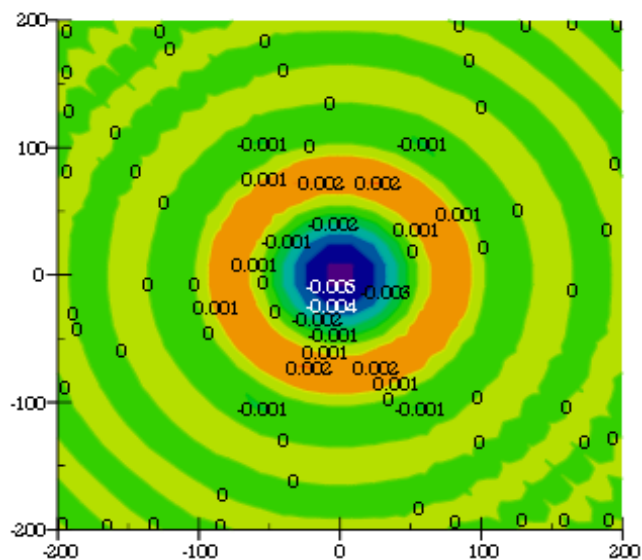


IO – прогиб ледяного покрова при ровном дне;  
 WF - прогиб ледяного покрова при переменной глубине водоема ( $\alpha=0.2$ )  
 Рисунок 5 - Прогиб ледяного покрова толщиной 2 метра при  $t=1.5$ с



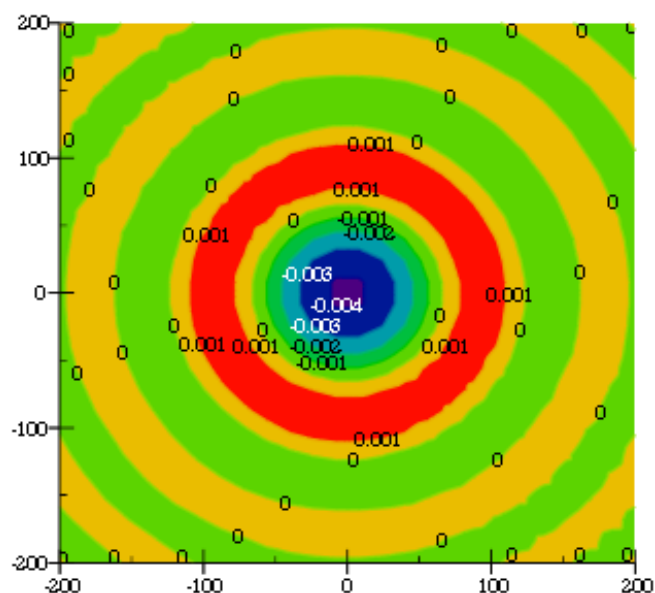
U01

Рисунок 6 - Линии уровня, для ледяного покрова толщиной 2 метра и  $t=0.5\text{с}$ , при постоянной глубине водоема



U01

Рисунок 7 - Линии уровня, для ледяного покрова толщиной 2 метра и  $t=1\text{с}$ , при постоянной глубине водоема



U01

Рисунок 8 - Линии уровня, для ледяного покрова толщиной 2 метра и  $t=1.5c$ , при постоянной глубине водоема

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1 Перегудова, Е.Д. Решение задачи о колебании плавающей упругой пластины под действием импульсной нагрузки / Е.Д. Перегудова, А.В. Погорелова // Певзнерские чтения : материалы региональной науч.- практ. конф. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «АмГПГУ», 2015. - С.150.

2 Перегудова, Е.Д. Математическое моделирование процесса посадки летательного аппарата на ледяной покров / Е.Д. Перегудова, А.Ю. Лошманов // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов : материалы 47-й науч.- техн. конф. студентов и аспирантов. - Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КНАГТУ», 2017. - С.848-850.