

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

**Ю. Н. Чудинов**

**ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ПК «ЛИРА-САПР». СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ  
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

Утверждено в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом Федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Комсомольск-на-Амуре  
2023

УДК 004.4:624.04(07)  
ББК 38.112я7+32.973.2-018.2я7  
Ч-842

***Рецензенты:***

Кафедра технических дисциплин ФГБОУ ВО «Приамурский  
государственный университет имени Шолом-Алейхема»,  
зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент *А. П. Афанасьев*;  
*С. Д. Чижумов*, канд. техн. наук, доцент, ведущий инженер  
учебно-научной и инновационной лаборатории «Вычислительная  
механика» ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого»

**Чудинов, Ю. Н.**

Ч-842 Задачи строительной механики с применением ПК «Ли́ра-САПР». Статически определимые системы : учеб. пособие / Ю. Н. Чудинов. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2023. – 83 с.

ISBN 978-5-7765-1547-7

В учебном пособии рассматривается решение задач строительной механики с применением ПК «Ли́ра-САПР». Подробно описаны алгоритмы расчета статически определимых стержневых систем – составной балки, рамы, арки. Выполняются сравнение и анализ аналитических и численных решений в программе MathCAD.

Предназначено для студентов специальности 08.05.01 – «Строительство уникальных зданий и сооружений». Также материал может быть полезен студентам направлений 08.03.01, 08.04.01 – «Строительство» и специалистам, работающим в области проектирования зданий и сооружений.

УДК 004.4:624.04(07)  
ББК 38.112я7+32.973.2-018.2я7

ISBN 978-5-7765-1547-7

© Чудинов Ю.Н., 2023  
© ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ СОСТАВНЫХ БАЛОК И РАМ.....	7
1.1. Выбор исходных данных.....	7
1.2. Расчет многопролетных статически определимых балок.....	10
1.2.1. Расчет многопролетной статически определимой балки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» по заданной расчетной схеме.....	12
1.2.2. Активные и реактивные усилия. Метод сечений в строительной механике.....	18
1.2.3. Расчет отдельных этажей составной балки.....	20
1.2.4. Консольно-балочные прогоны .....	23
1.3. Расчет составных статически определимых рам.....	30
2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК.....	36
2.1. Выбор исходных данных.....	36
2.2. Классификация арок. Основной принцип работы арок .....	37
2.3. Основной принцип работы арок. Построение геометрических зависимостей для арок в программе MathCAD.....	40
2.4. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР».....	45
2.4.1. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» по заданной схеме.....	46
2.4.2. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» разложением на две составляющих.....	57
2.4.3. Анализ результатов расчета арки по второй и третьей расчетным схемам .....	59
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ БАЛОК.....	60
3.1. Определение перемещений балки интегрированием дифференциального уравнения.....	62
3.2. Определение перемещений консольной балки в ПК «Ли́ра-СА́ПР».....	67
3.3. Определение перемещений балки в программе «ЭСПРИ».....	72
3.4. Аналитический расчет в программе MathCAD с помощью интеграла Мора (формулы Верещагина).....	73
3.5. Построение линии прогибов и углов поворота в программе MathCAD с помощью справочных формул и численного решения в ПК «Ли́ра-СА́ПР».....	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	79
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	79
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЫХ ФИГУР.....	81
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ФОРМУЛЫ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ЭПЮР.....	82

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Строительная механика» является главным звеном в процессе подготовки инженеров-строителей, связывающим цикл прочностных дисциплин с циклом специальных дисциплин по проектированию строительных конструкций. В настоящее время кардинально изменились технологии проектирования. Сейчас на производстве практически все расчеты конструкций выполняются с применением САПР-систем, и очень часто только этим и ограничивается процесс проектирования. К сожалению, многие проектировщики за последнюю истину принимают результаты численных расчетов, забывая о простой истине, что любая программа – это всего лишь инструмент и только, действия которого обязательно необходимо контролировать и анализировать. Почему так происходит?

Можно отметить одну не очень хорошую деталь в методике подготовки инженеров-строителей. В учебном плане специалистов, как правило, есть дисциплины с достаточным числом часов, чтобы студенты на младших курсах хорошо освоили материал в области сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, строительной механики. Но на старших курсах при изучении цикла дисциплин по проектированию строительных конструкций как-то часто забывается все важное и интересное, касающееся прочностных расчетов, то, что студенты изучали ранее, а основной упор делается на конструктивные расчеты железобетонных, металлических, деревянных конструкций и автоматизацию расчетов с применением САПР-систем. На самом деле должна быть очень тесная непрерывная связь циклов дисциплин «Механика» и «Строительные конструкции», а дисциплины, дающие студентам знания, умения и навыки в области автоматизированного проектирования конструкций, должны идти параллельно с изучением теории конструкций и ни в коем случае не заменять ее. Ведь никто же на производстве не дает проектировщику отдельные задачи: «Вычислите мне усилия в конструкции» или «Подберите сечение элемента». Обычно задача ставится следующим образом: «Запроектируйте объект, чтобы все его несущие конструкции удовлетворяли требованиям двух групп метода расчета по предельным состояниям».

Все большее внедрение расчетов с применением САПР-систем объясняется тем простым фактом, что в последние годы повсеместно находит применение строительство зданий и сооружений из монолитного железобетона, все больше возводится высотных зданий, уникальных сооружений. Для таких объектов перед проектировщиками очень часто стоит задача правильного выбора корректной расчетной схемы, и такой выбор невозможно сделать без глубоких знаний в области строительной механики.

Все вышеизложенное предполагает долговременную подготовку молодых специалистов в области проектирования строительных конструк-

ций, которая наиболее полно может быть реализована только в рамках специалитета, где знание теоретических положений должно подкрепляться навыками и умениями реализации расчетных задач с применением САПР-систем. Поэтому материал пособия ориентирован в первую очередь на студентов, обучающихся по программе «Строительство уникальных зданий и сооружений», хотя частично может быть полезен и бакалаврам, обучающимся по направлению «Строительство».

Материал данного пособия во многом опирается на пособие [8], где излагается основной теоретический материал и приводятся примеры расчетов плоских стержневых систем. По мнению автора, ни в коем случае нельзя уменьшать объем изучаемых классических разделов строительной механики, заменяя аналитические расчеты численными. Данное пособие, в котором рассматривается решение задач с применением ПК «Лира-САПР» из пособия [8], только дополняет теоретическую базу знаний, а главное дает студенту возможность получить практические навыки и умения работы в САПР-системах. Использование для анализа полученных аналитических и численных результатов расчетов программы MathCAD позволяет провести более глубокий анализ решаемых задач и уже на младших курсах освоить технологию «параллельных» аналитических и численных расчетов.

Особая ответственность при выборе методики обучения дисциплине «Строительная механика» лежит на преподавателе. Безусловно, главным является усвоение студентом теоретических знаний. Если студент не умеет выполнять аналитические расчеты и не понимает сути решаемой задачи, то ни о каком применении САПР-систем в учебном процессе речи не должно идти. Только когда студент покажет твердые знания теоретических положений рассматриваемого раздела строительной механики, ему можно разрешать выполнение расчетов с применением САПР-систем.

С помощью материалов данного учебного пособия студенты должны выполнить численные расчеты плоских стержневых конструкций в ПК «Лира-САПР»: составной балки, рамы, арки. При изложении материала предполагается, что студенты владеют начальными базовыми знаниями функционала ПК «Лира-САПР» (этот материал изучается ранее в рамках дисциплины «Информационные технологии в строительстве»), и детально эта тема в данном пособии не раскрывается. Для получения начальных знаний по работе в ПК «Лира-САПР» можно порекомендовать пособие по расчету стержневых строительных конструкций [12].

Перечислим основные цели выполняемых расчетов стержневых конструкций в ПК «Лира-САПР»:

1. Получение знаний, навыков и умений по численным расчетам стержневых конструкций в ПК «Лира-САПР» с привязкой к практическим задачам.

Имеется достаточно большой объем литературы отдельно по теории расчета конструкций и отдельно по алгоритмам (функционалу) расчета строительных конструкций в ПК «Лира-САПР» [4, 5, 7]. Но многие пользователи (не только студенты, но даже и некоторые проектировщики) имеют смутное представление, как работает этот «черный ящик» под названием ПК «Лира-САПР». Очень часто пользователи задают исходные данные, получают результаты, но не знают внутреннего алгоритма ПК «Лира-САПР» (или другого расчетного комплекса) и иногда даже не могут правильно интерпретировать результаты расчетов.

2. Освоение технологии параллельных аналитических и автоматизированных расчетов с целью контроля и анализа результатов расчета. Данная технология предполагает также применение программы «MathCAD».

Из объема всего материала, излагаемого в пособии, настоятельно предлагаем особое внимание студентам уделить двум важным вопросам:

- 1) методу сечений в строительной механике;
- 2) определению перемещений стержневых конструкций.

В рамках дисциплины «Строительная механика» студенты рассматривают примеры определения внутренних усилий в простых расчетных схемах. Но именно на таких простых примерах студенты должны понять суть метода сечений, на основе которого происходит анализ более сложных расчетных схем реальных объектов. К этой же теме можно отнести такие понятия, как активные и реактивные усилия, понимание физической сути которых обязательно для любого проектировщика.

Перемещения для любой конструкции являются не только основными параметрами деформированной схемы, но и главным фактором, определяющим внутренние усилия, возникающие в элементах. Учет или неучет тех или иных видов перемещений (деформаций) во многом определяют математическую модель реального объекта. Именно исходя из того факта, что практически все расчетные САПР-системы базируются на методе конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, в пособии приводятся примеры построения линии прогибов балки различными методами. Этот материал должен в будущем помочь студентам при изучении дисциплины «Расчет строительных конструкций методом конечных элементов» образовательной программы «Строительство уникальных зданий и сооружений», которая наряду с циклом дисциплин «Механика» и «Строительные конструкции» является главенствующей в процессе подготовки инженеров-проектировщиков.

В пособии приводится информация по теории расчета стержневых систем, по работе с САПР-системами, но **главной целью** пособия является изложение методики обучения студентов расчету конструкций с комплексным применением САПР-систем и обязательным контролем и анализом получаемых результатов. Есть достаточно много печатной литературы,

видеоуроков, посвященных отдельно проектированию конструкций и отдельно функционалу ПК «Лира-САПР». Но в то же время существует определенный дефицит работ, где рассматриваются практически важные задачи, привязанные в комплексе с решением их с помощью САПР-систем.

## 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ СОСТАВНЫХ БАЛОК И РАМ

В данном разделе будут рассмотрены примеры расчетов двух статически определимых плоских стержневых систем с применением ПК «Лира-САПР»:

задача 1 «Расчет составной статически определимой балки»;

задача 2 «Расчет составной статически определимой рамы».

Варианты заданий для этих задач приняты из пособия [8], численные расчеты в ПК «Лира-САПР» приводятся для примеров, рассматриваемых в виде образцов в этом же пособии.

В рамках расчетно-графической работы по дисциплине «Строительная механика» (раздел «Статически определимые системы») студенты сначала выполняют ручные аналитические расчеты этих двух задач, а затем проводят численные расчеты в ПК «Лира-САПР». Главным итогом проделанной работы должны быть анализ расчетов и сравнение численных и аналитических результатов.

### 1.1. Выбор исходных данных

Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц в соответствии с его личным учебным шифром. Шифром считаются три последние цифры номера зачетной книжки.

Для выбора исходных данных необходимо под шифром расположить три первые буквы русского алфавита, например:

шифр	3	7	5
буквы	а	б	в

Из каждой графы таблицы исходных данных, обозначенной определенной буквой, необходимо взять только одно значение из десяти, стоящее в той строке, номер которой соответствует номеру буквы. Например, для указанного выше шифра необходимо взять следующие исходные данные к задачам 1 и 2 (табл. 1.1): из граф «а» строку 3, т.е.  $a = 4$  м;  $q_1 = -40$  кН/м; из граф «б» строку 7, т.е.  $b = 3$  м;  $l = 3$  м;  $q_2 = 20$  кН/м;  $P_2 = -60$  кН; из граф «в» строку 5, т.е.  $c = 3$  м;  $h = 3$  м;  $P_1 = 40$  кН;  $M = 120$  кН·м.

Таблица 1.1

Исходные данные к задачам 1 и 2

Номер строки	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$l$ , м	$h$ , м	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$M$ , кН·м
1	2	4	4	3	3	20	40	40	60	-80
2	3	2	3	4	4	30	-50	-60	80	-60
3	4	3	2	5	5	-40	60	-80	100	-90
4	2	4	4	6	6	50	-20	100	-60	100
5	3	4	3	4	3	-60	30	40	-40	120
6	4	2	2	5	4	50	-40	-80	80	70
7	2	3	4	3	5	40	20	-40	-60	40
8	3	4	3	4	6	-30	-30	60	40	-50
9	4	2	2	5	3	20	50	100	-80	90
0	2	3	4	6	4	-30	-60	-60	100	80
	а	б	в	б	в	а	б	в	б	в

Номер расчетной схемы определяется последней цифрой шифра. Знак минус в исходных данных указывает на то, что на расчетных схемах необходимо изменить направления нагрузок  $q_1$  и  $P_2$  на противоположные (знак минус при этом опускается).

Так, например, расчетная схема к задаче 1 в соответствии с исходными данными примет вид, показанный на рис. 1.1.

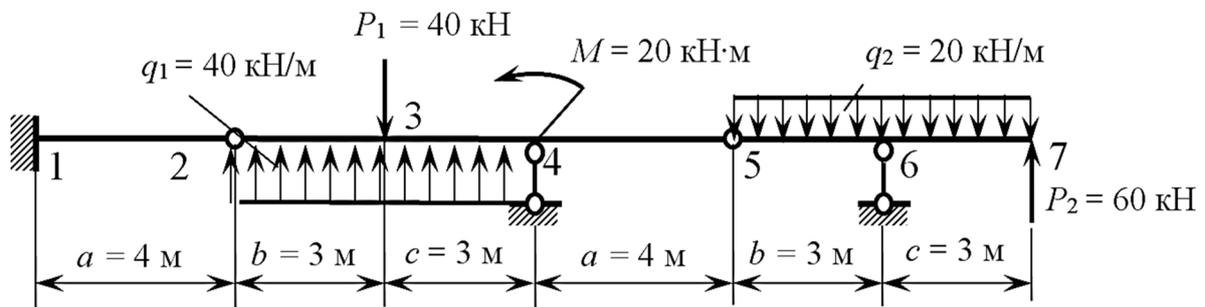


Рис. 1.1. Расчетная схема балки

### Задача 1. Многопролетные статически определимые балки

Для балки (рис. 1.2), размеры и нагрузка для которой выбираются из табл. 1.1, требуется выполнить расчет в ПК «Лира-САПР», вывести эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и сравнить результаты численного расчета с ранее выполненными аналитическими расчетами.

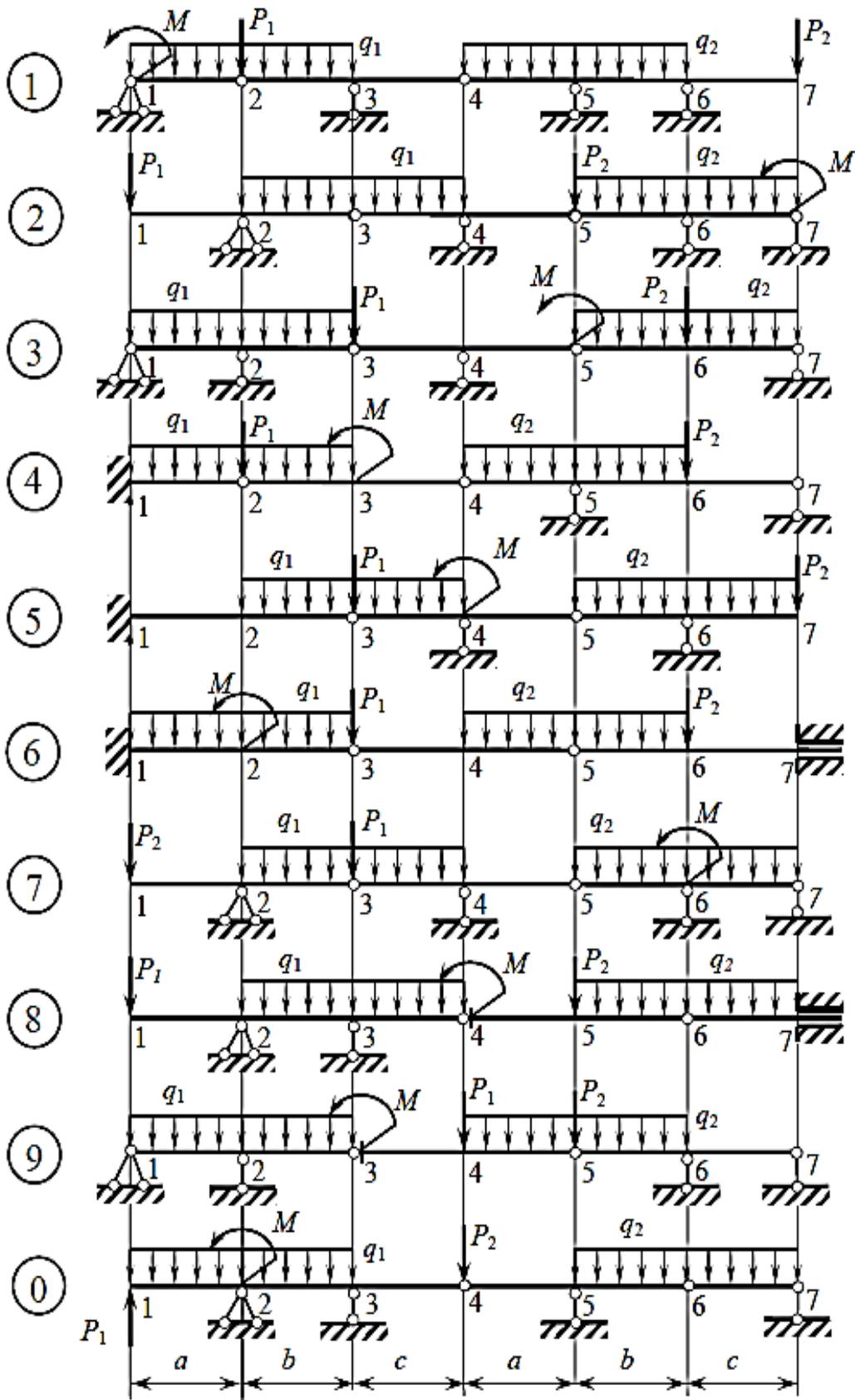


Рис. 1.2. Расчетные схемы балок к задаче 1

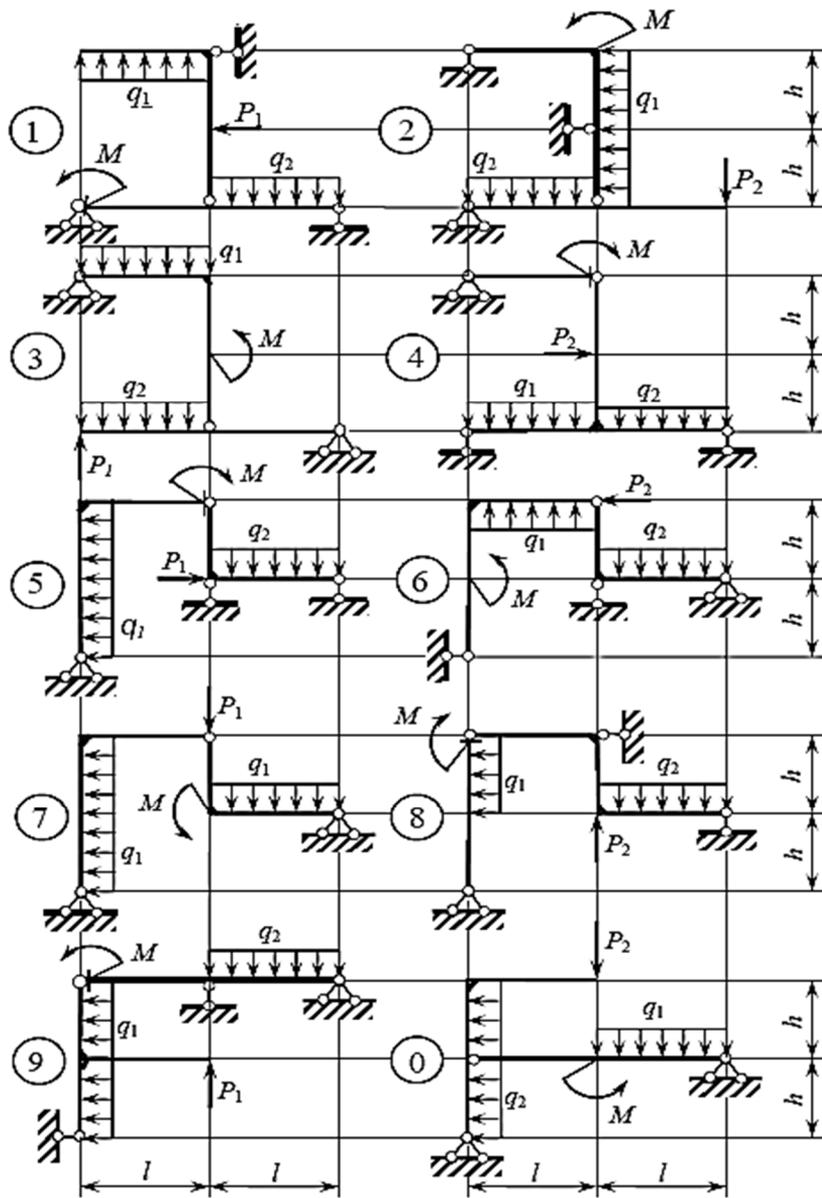


Рис. 1.3. Расчетные схемы рам к задаче 2

### **Задача 2. Составные статически определимые рамы**

Для рамы (рис. 1.3), размеры и нагрузка для которой выбираются из табл. 1.1, требуется выполнить расчет в ПК «Лира-САПР», вывести эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и сравнить результаты численного расчета с ранее выполненными аналитическими расчетами.

### **1.2. Расчет многопролетных статически определимых балок**

Многопролетная статически определимая балка образуется из про- стых балок, соединенных между собой концами при помощи идеальных шарниров. Наиболее характерным практическим примером строительных

конструкций, расчетные схемы которых представляют собой многопролетные статически определимые балки, являются деревянные консольно-балочные прогоны (рис. 1.4). За счет рационального расположения шарниров, в зависимости от поставленной задачи, можно получить равномерную и равнопрогибную расчетные схемы, которые будут давать наиболее эффективные решения, позволяющие сэкономить материал. Пример расчета такой конструкции будет приведен ниже в п. 1.2.3.

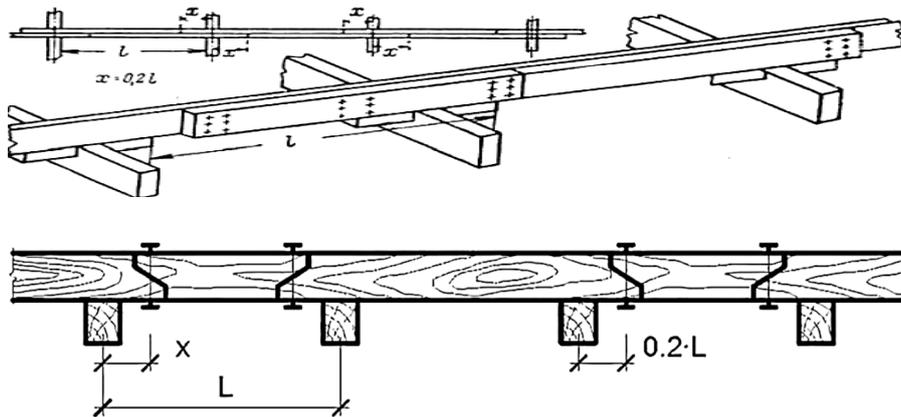


Рис. 1.4. Консольно-балочные прогоны

Для облегчения расчета многопролетных статически определимых балок обычно заданную расчетную схему преобразуют в статически эквивалентную поэтажную схему. Рассмотрим пример расчета (рис. 1.5) такой конструкции [8, подразд. 3.2].

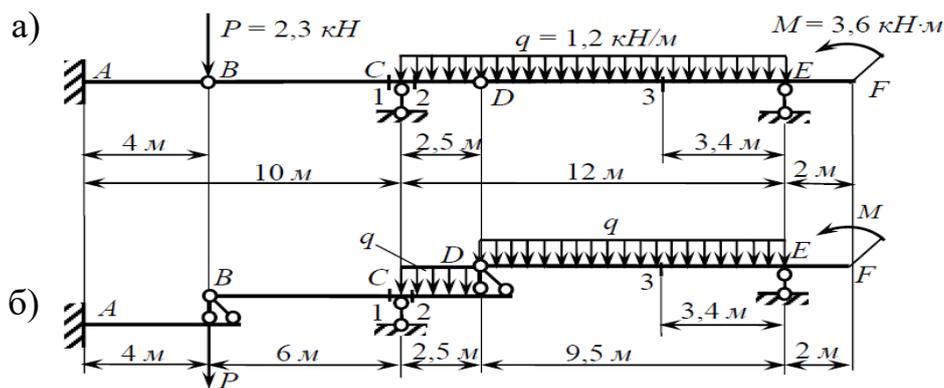


Рис. 1.5. Расчетная (а) и поэтажная (б) схемы многопролетной балки

Произведем в ПК «Ли́ра-САПР» сначала расчет многопролетной балки по заданной схеме. Затем аналогично ранее выполненному аналитическому расчету проведем расчеты трех однопролетных отдельных балок (этажей).

### 1.2.1. Расчет многопролетной статически определимой балки в ПК «Лира-САПР» по заданной расчетной схеме

Выполним расчет согласно стандартному алгоритму статического расчета конструкций в ПК «Лира-САПР»:

- 1) выбор признака схемы (типа расчетной схемы) в зависимости от числа степеней свободы в узлах конечных элементов (КЭ);
- 2) создание геометрической схемы;
- 3) задание граничных условий (исключение степеней свободы в отдельных узлах);
- 4) задание шарниров (при необходимости);
- 5) задание и присваивание жесткостей отдельным КЭ;
- 6) задание нагрузок;
- 7) статический расчет;
- 8) анализ полученных результатов.

Еще раз поясним, что предполагается, что студент ранее в рамках дисциплины «Информационные технологии в строительстве» уже выполнял статические расчеты фермы, балки, рамы, поэтому детально основы функционала ПК «Лира-САПР» здесь не раскрываются. В пособии кратко приводятся сведения по алгоритмам решаемых задач, а особое внимание уделяется анализу получаемых результатов и сравнению с аналитическими решениями.

Если же студенты имеют пробелы по основам работы в ПК «Лира-САПР», то более подробную информацию по статическому расчету конструкций можно посмотреть в пособиях [10, 11, 12].

После запуска ПК «Лира-САПР» появится диалоговое окно, в котором необходимо выбрать признак схемы (тип расчетной задачи), задать имя задачи (файла) и при необходимости дать краткое описание задачи (рис. 1.6).

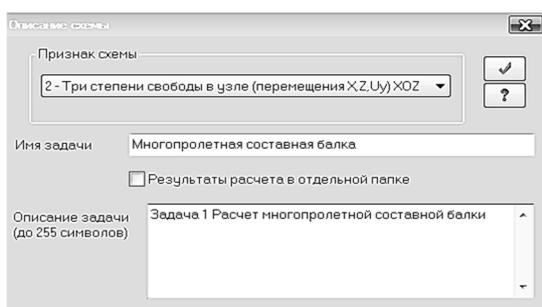


Рис. 1.6. Задание признака схемы

Для расчета многопролетной балки выбираем признак схемы 2. Также рекомендуется приводить краткое описание задачи, чтобы в дальнейшем было проще понять, какую именно задачу решает данный файл.

Можно в ПК «Лира-САПР» условно выделить три способа создания геометрической схемы конструкций:

- 1) из отдельных узлов и КЭ;
- 2) по шаблонам;
- 3) комбинированный.

В данном случае удобнее всего создать геометрическую схему балки с помощью окна (шаблона) «Создание плоских фрагментов и сетей», последовательно задав в окне по оси  $Ox$  длины отдельных участков балки (рис. 1.7).



Рис. 1.7. Создание геометрической схемы многопролетной балки

Далее необходимо задать граничные условия (условия закрепления) балки.

Приведем три типа наиболее часто встречающихся на практике граничных условий (типа опор) при расчете плоских стержневых конструкций (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Основные варианты закрепления узлов для плоских систем

Наименование закрепления	Графическое изображение	Исключенные степени свободы	Визуализация на расчетной схеме
1. Шарнирно-подвижная опора		Линейное вертикальное перемещение по оси $Oz$ <input type="checkbox"/> $x$ <input type="checkbox"/> $u_x$ <input type="checkbox"/> $y$ <input type="checkbox"/> $u_y$ <input checked="" type="checkbox"/> $z$ <input type="checkbox"/> $u_z$	
2. Шарнирно-неподвижная опора		Два линейных перемещения: по осям $Ox$ и $Oz$ <input checked="" type="checkbox"/> $x$ <input type="checkbox"/> $u_x$ <input type="checkbox"/> $y$ <input type="checkbox"/> $u_y$ <input checked="" type="checkbox"/> $z$ <input type="checkbox"/> $u_z$	
3. Жесткая заделка		Два линейных перемещения: по осям $Ox$ и $Oz$ и поворот вокруг оси $Oy$ <input checked="" type="checkbox"/> $x$ <input type="checkbox"/> $u_x$ <input type="checkbox"/> $y$ <input checked="" type="checkbox"/> $u_y$ <input checked="" type="checkbox"/> $z$ <input type="checkbox"/> $u_z$	

Для рассматриваемой задачи в узле 1 необходимо задать жесткую заделку, в узлах 3 и 6 – шарнирно-подвижную опору.

Технически процедура закрепления узлов решается в два этапа. Сначала выделяются узлы, где необходимо задать опоры, затем отмечаются степени свободы, которые необходимо исключить, и выполняется подтверждение операции (рис. 1.8).

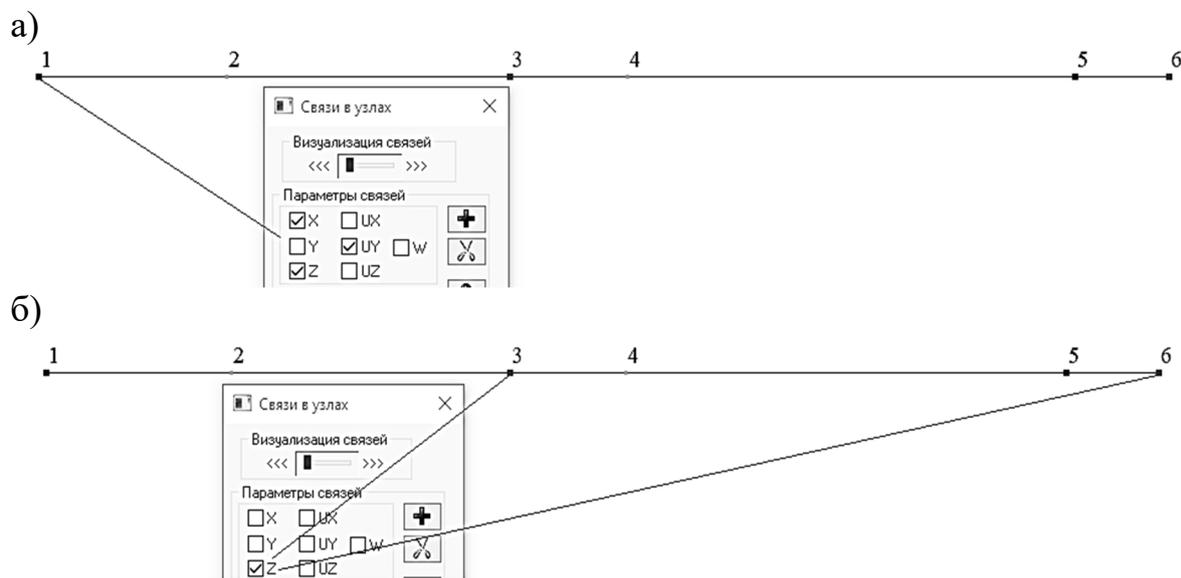


Рис. 1.8. Задание граничных условий: а – жесткая заделка; б – шарнирно-подвижная опора

Рассматриваемая составная балка имеет два шарнира (см. рис. 1.5, а). Принято говорить: «Врежем шарнир в узел». Но в ПК «Лира-САПР» шарнир является свойством КЭ, а не узла. Поэтому для установки шарнира в узел 2 необходимо добавить шарнир в правый узел КЭ 1 или в левый узел КЭ 2.

По аналогии для установки шарнира в узел 4 необходимо добавить шарнир в правый узел КЭ 3 или в левый узел КЭ 4 (рис. 1.9).

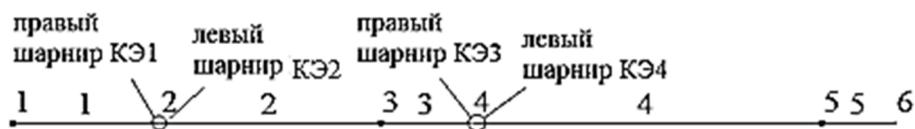


Рис. 1.9. Варианты добавления шарниров

Теоретически шарниры могут быть заданы в узлах КЭ по всем степеням свободы. Но на практике при расчете балок, рам, пространственных стержневых конструкций наиболее часто применяется шарнир, моделирующий отсутствие сопротивления элемента при повороте его в местной системе координат относительно оси  $Oy$ .

Для задания шарниров необходимо первоначально выделить требуемый КЭ, в открывшемся диалоговом окне «Шарниры» отметить номер узла КЭ (1, 2) и применить это действие. Мы выберем на схеме КЭ 1 и КЭ 3 и добавим шарниры относительно оси  $O_u$  во вторых (правых) узлах (рис. 1.10).

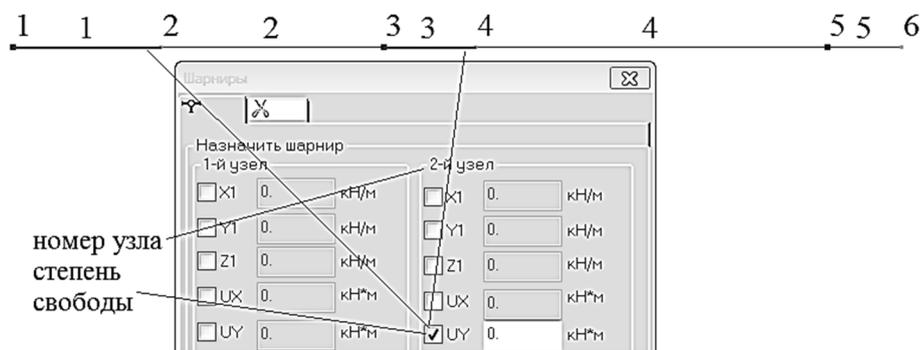


Рис. 1.10. Добавление шарниров во вторые узлы КЭ 1 и КЭ 3

Задание жесткостей в ПК «Лира-САПР» выполняется с помощью диалогового окна «Жесткости и материалы» – закладка «Жесткости» (рис. 1.11).

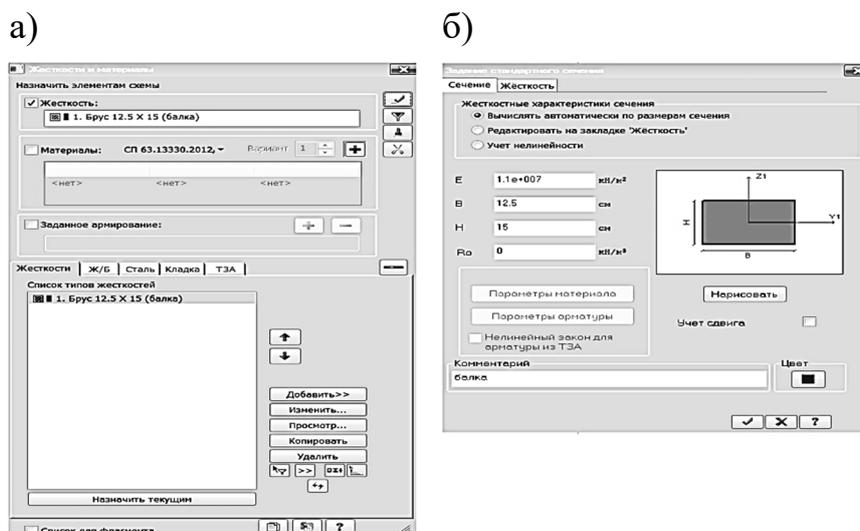


Рис. 1.11. Окна: а – «Жесткости и материалы»;  
б – «Жесткости балки»

Зададим сечение балки  $0,125 \times 0,15$  м. Модуль упругости примем равным  $E = 1 \times 10^7$  кПа (дерево). После создания жесткости необходимо выделить все элементы расчетной схемы (проще всего это сделать комбинацией клавиш  $Ctrl + A$ ) и применить команду назначения жесткостей.

Последний этап создания расчетной модели в балке – задание нагрузок. В реальных задачах проектирования строительных конструкций обычно

необходимо задавать несколько нагружений (задавать таблицу нагружений). Для простого статического расчета у нас будет только одно нагружение.

Нам необходимо приложить сосредоточенную силу  $P = 2,3$  кН в узел 2, задать равномерно распределенную нагрузку  $q = 1,2$  кН/м на КЭ 3 и КЭ 4, а также изгибающий момент  $M = 3,6$  кН·м в узел 6.

Напомним правило знаков, принятое в ПК «Лира-САПР», для внешних нагрузок. Положительными считаются те сосредоточенные (линейные) нагрузки, направление действия которых противоположно направлению осей, по которым они действуют. Положительным считается момент, направленный против часовой стрелки. Ниже на рис. 1.12 приведена процедура задания внешних нагрузок на балку. В данной задаче все нагрузки согласно правилу знаков задаем положительными.

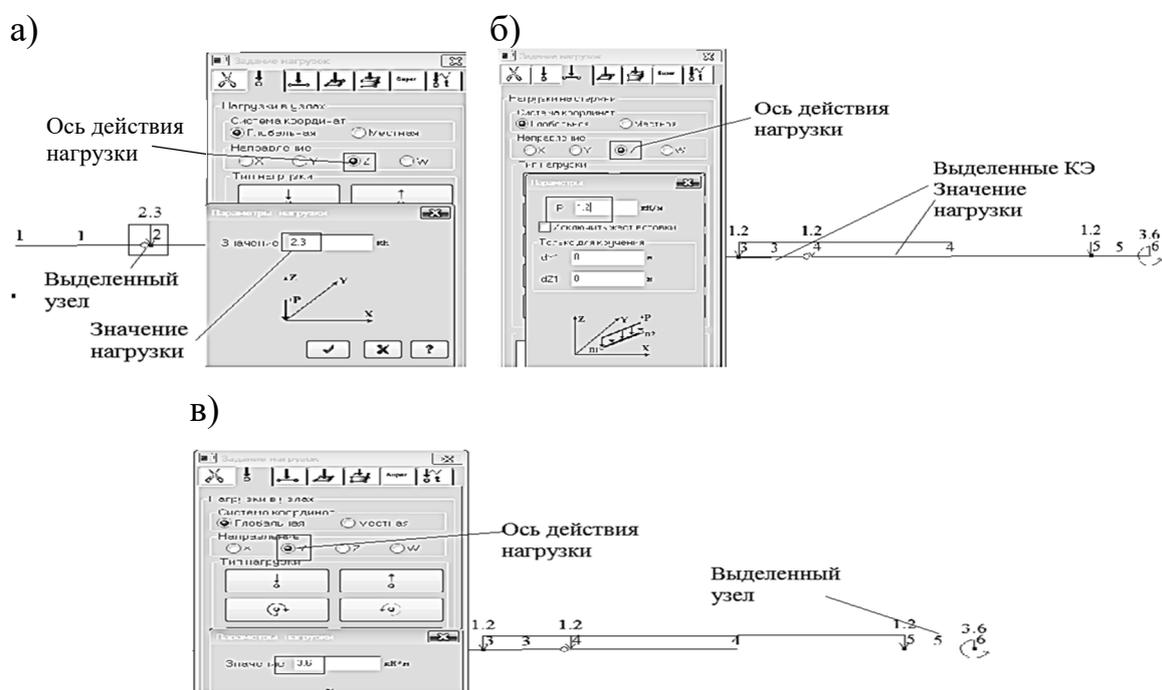


Рис. 1.12. Задание нагрузок: а – сосредоточенной силы; б – равномерно распределенной нагрузки; в – изгибающего момента

После того как создана расчетная модель балки, рекомендуется сохранить файл под именем «Составная балка» и запустить его на расчет.

После того как программа выполнит статический расчет балки, перейдем на закладку «Анализ» для вывода на экран эпюр поперечных сил и изгибающих моментов. Сравним результаты расчетов внутренних усилий, полученных в ПК «Лира-САПР» (рис. 1.13), и результаты аналитических расчетов [8, с. 29, рис. 3.5].

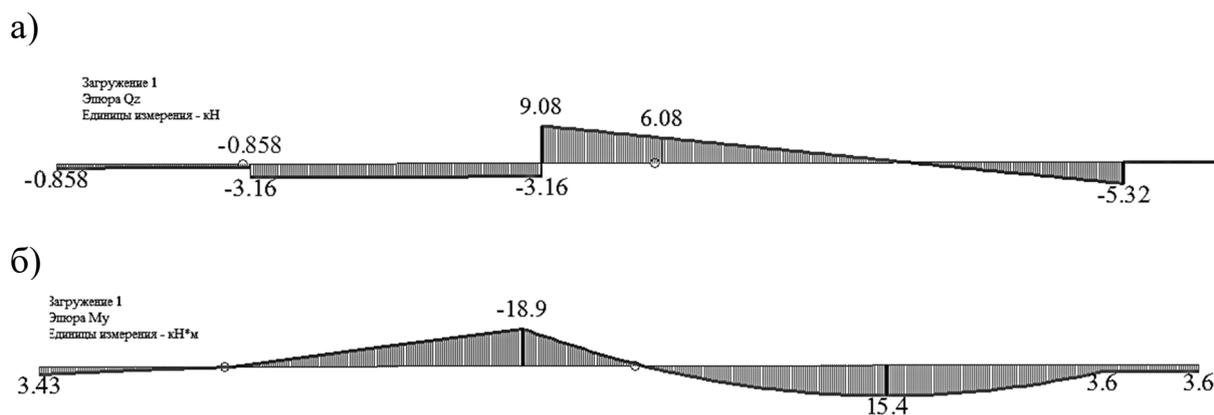


Рис. 1.13. Эпюры внутренних усилий, полученные в ПК «Ли́ра-САПР»:  
а – эпюра поперечных сил; б – эпюра изгибающих моментов

Так как математические модели составной балки в аналитическом и численном решениях были идентичными (учитывались одни и те же компоненты напряженного состояния), то результаты расчетов полностью совпали. Главное различие в получаемых результатах аналитического и численного расчетов изгибаемых стержневых конструкций наиболее часто обусловлено тем фактом, что МКЭ учитывает продольные деформации в отличие от классических методов строительной механики.

Можно спорить, плохо это или хорошо – применение численных расчетов в рамках дисциплины «Строительная механика», но такой проверочный расчет позволяет студенту как минимум контролировать ход своего аналитического решения. И если не выполняются проверки, то результаты в ПК «Ли́ра-САПР» могут показать студенту, где он именно ошибается. Или, как другой вариант, ошибка может быть допущена в численном расчете. Тогда необходимо разбираться с расчетами в ПК «Ли́ра-САПР». Но, конечно, этот простой расчет не является главной целью задачи. По сути, программа дала нам окончательный итоговый расчет усилий в составной балке, но необходимо далее полностью повторить ранее выполненные аналитические расчеты с главной целью более детально разобраться в технологии расчета составных балок с применением «поэтажного» метода. Но прежде чем описывать алгоритм «поэтажного» метода определения усилий, необходимо изложить физический смысл, заложенный в этом методе. А для этого сначала необходимо понять характер (причину) нагрузок (усилий), возникающих в конструкциях.

### 1.2.2. Активные и реактивные усилия. Метод сечений в строительной механике

На любую конструкцию действуют два типа внешних сил: 1) активные и 2) реактивные. Активные внешние силы – это вес конструкций, снеговая, ветровая нагрузка и т.п. В нашем примере расчета составной балки активные силы – это равномерно распределенная нагрузка, сосредоточенная нагрузка, сосредоточенный момент.

Реактивные силы – это реакции связей, наложенные на конструкцию. В задачах поперечного изгиба балок, когда на балку действуют только нагрузки, перпендикулярные ее оси, горизонтальные реакции и продольные внутренние усилия равны нулю. Поэтому аналитическим методом в этой задаче студент первоначально должен вычислить четыре реакции: три вертикальные  $R_A$ ,  $R_C$ ,  $R_E$ , а также реактивный момент  $M_A$ . Горизонтальная реакция в заделке будет равна нулю по озвученной выше причине. А затем, используя метод сечений, необходимо построить эпюры внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил), возникающих в балке.

Задача является статически определимой. Имеем пять неизвестных реакций, можем составить пять уравнений статического равновесия. Но не получается составить такое уравнение для всей балки, где было бы одно неизвестное. Но оказывается, можно легко вычислить все реакции связей, разбив многопролетную балку сечениями по шарнирам, расположенными в точках  $B$  и  $D$ .

В общем случае в сечении балки возникают три вида внутренних усилий: 1) изгибающий момент; 2) поперечная сила; 3) продольная сила. Но когда сечение выполняется по шарниру, то в нем будет действовать только поперечная сила. Момент в идеальном шарнире равен нулю, а продольные силы равны нулю во всех сечениях балки. На рис. 1.14 показана расчетная схема «верхнего» этажа балки, полученная сечением по точке  $D$ .

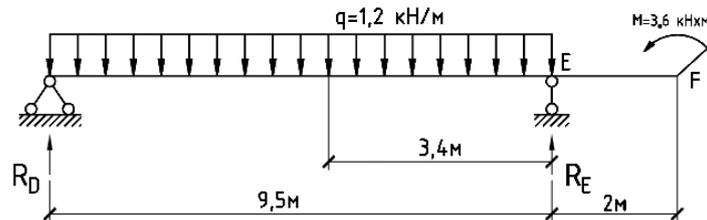


Рис. 1.14. Расчетная схема «верхнего» этажа составной балки

В какой-то степени этот прием «разрезания» составной балки на отдельные элементы можно назвать аналогичным классическому методу се-

чений, который обычно применяется в строительной механике для определения внутренних усилий.

На самом деле понятно, что никакой связи в точке  $D$  нет – в этом сечении действует неизвестная пока поперечная сила  $Q_D$ . И, рассматривая отдельно расчетную схему (см. рис. 1.14), мы заменяем внутреннее усилие ( $Q_D$ ) на реактивное усилие ( $R_D$ ), т.е. превращаем внутреннее усилие в реактивную внешнюю силу.

Почему на пояснении этого вроде простого приема автор счел необходимым заострить внимание? Потому что такая процедура вырезания из сложной расчетной схемы отдельной более простой расчетной схемы является очень распространенным приемом в задачах проектирования строительных конструкций.

Можно привести самые наглядные примеры, с которыми студенту однозначно придется столкнуться в дальнейшем и в учебном процессе, и, скорее всего, в реальном проектировании.

1. Расчет неразрезного ригеля многоэтажного каркасного здания. При выполнении курсового проекта 1 по дисциплине «Железобетонные и каменные конструкции» полная расчетная схема «разрезается» на упрощенные расчетные схемы верхнего, типового и нижнего этажей сечениями по середине высоты этажей (рис. 1.15). Как и в рассматриваемом примере расчета составной балки, внутренние усилия (поперечные и продольные силы) в местах сечения расчетной схемы заменяются реактивными усилиями (вводятся шарнирно-неподвижные связи). Моменты в этих сечениях принимаются равными нулю, так как вследствие симметрии расчетной схемы моменты (внутренние усилия) приблизительно равны нулю.

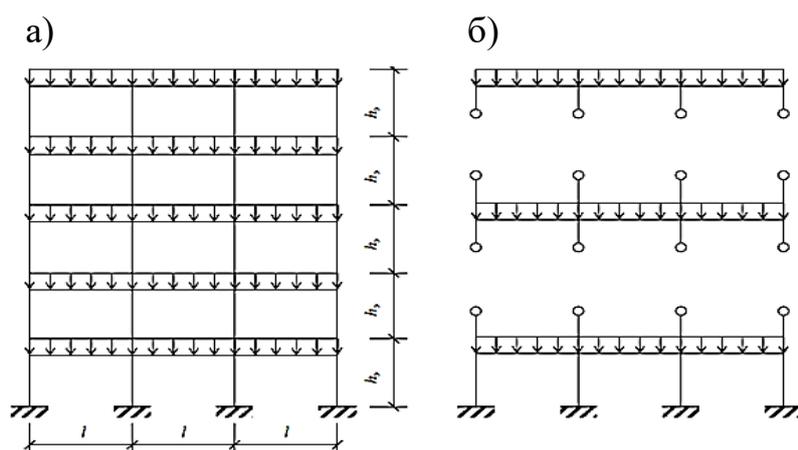


Рис. 1.15. Расчетные схемы поперечной рамы многоэтажного каркасного здания: а – полная расчетная схема; б – упрощенные расчетные схемы верхнего, типового и нижнего этажей

2. Раздельный расчет несущих конструкций надземной части зданий и фундаментов. Во многих (или даже в большинстве) случаях статический расчет зданий выполняется по расчетным схемам, где влияние фундаментов (податливости основания) на напряженно-деформированное состояние (НДС) основных несущих конструкций моделируется реактивными усилиями (реакциями). Здесь также по аналогии с составной балкой из полной расчетной схемы здания вычленяется надземная часть здания, из статического расчета которой определяются реакции в сечениях сопряжения с фундаментом. Хотя на самом деле надземная часть здания и фундамент – это единое целое, и в местах их соединения возникают внутренние усилия, а не реактивные (рис. 1.16).

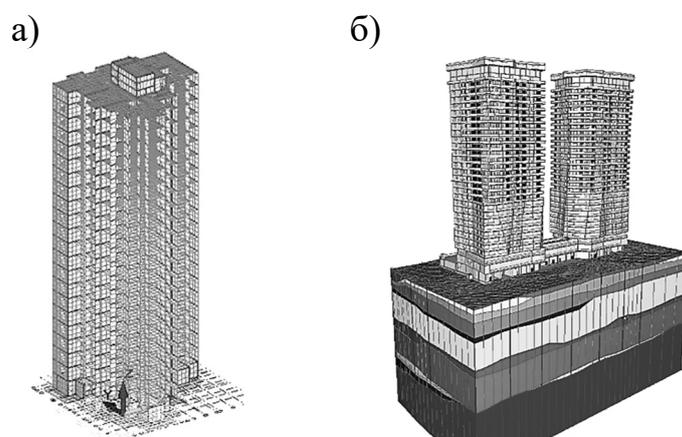


Рис. 1.16. Расчетные схемы: а – несущий каркас надземной части здания; б – система «основание – фундамент – несущий каркас надземной части здания»

Далее выполняется подбор размеров фундамента (армирования) по вычисленным ранее реакциям, которые превращаются в новом расчете во внешние нагрузки. Раздельный расчет здания и основания в ряде случаев дает надежные и эффективные результаты, и не имеет смысла без особой необходимости усложнять расчетные схемы, тем самым увеличивая вероятность возможных ошибок. Но для высотных зданий достоверные результаты можно получить только при использовании единой расчетной модели «здание – фундамент – основание».

### ***1.2.3. Расчет отдельных этажей составной балки***

Последовательность расчетов в ПК «Лири-САПР» будет абсолютно идентична ручным расчетам «поэтажного метода».

Напомним алгоритм решения задачи статического расчета многопролетной составной балки:

1. Отсекаем по шарниру (узел 4) верхний этаж. Заменяем влияние отсеченной левой части составной балки «виртуальными» реакциями в узле 4 по осям  $Ox$  и  $Oz$ . Выполняем статический расчет верхнего этажа. В узле 4 получаем значение «виртуальной» реакции, равное 6,08 кН (см. рис. 1.13, *a*).

2. Вычленим из составной балки второй этаж сечениями по шарнирам в узлах 2 и 4. Узел 2 закрепляем по осям  $Ox$  и  $Oz$ . В узел 4 дополнительно прикладываем нагрузку, равную 6,08 кН, моделирующую давление верхнего этажа. Выполняем статический расчет среднего этажа. В узле 2 получаем значение «виртуальной» реакции, равное -3,16 кН (см. рис. 1.13, *a*).

3. Вычленим из составной балки первый этаж сечением по шарниру в узле 2. В узел 2 дополнительно прикладываем нагрузку, равную -3,16 кН, моделирующую давление среднего этажа. Выполняем статический расчет нижнего этажа.

Далее описанные процедуры выполним в ПК «Ли́ра-САПР». Чтобы получить картину, соответствующую поэтажной расчетной схеме, мы поднимаем на расстояние 6 м верхний этаж, 4 и 2 м – средний и нижний этажи составной балки.

### Расчет верхнего этажа

Создадим расчетную схему верхнего этажа с помощью операции копирования. Выделим КЭ 4 и КЭ 5 (см. рис. 1.10), активизируем команду «Копирование по параметрам» (рис. 1.17), находящуюся на вкладке «Редактирование», зададим смещение 6 м по оси  $Oz$  и применим команду.

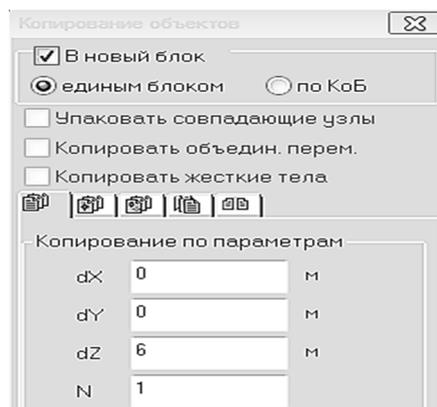


Рис. 1.17. Создание копии КЭ 4 и КЭ 5

Так как мы рассекаем стержневые элементы по шарнирам, то заменим влияние отсеченной левой части балки «виртуальной» реакцией (закрепляем узел 7 по осям  $Ox$  и  $Oz$ ).

Расчетная схема верхнего этажа составной балки показана на рис. 1.18.

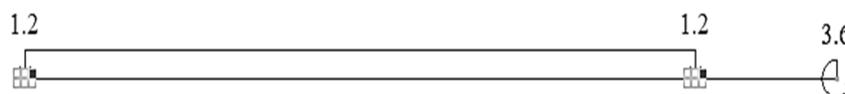


Рис. 1.18. Расчетная схема верхнего этажа составной балки

Далее запустим файл на расчет, сравним численные результаты расчетов отдельного этажа (рис. 1.19) с аналитическими результатами [8, с. 27, рис. 3.2].

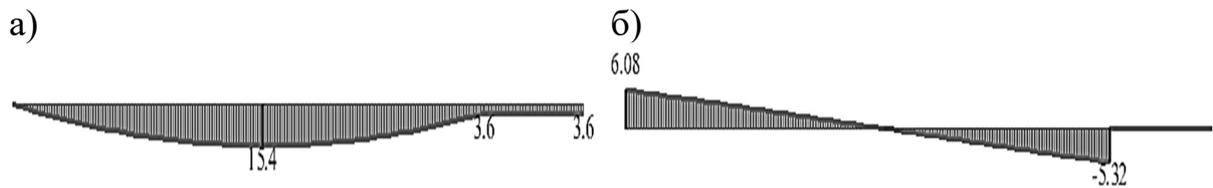


Рис. 1.19. Эпюры внутренних усилий верхнего этажа составной балки, полученные в ПК «Лира-САПР»: а – эпюра поперечных сил; б – эпюра изгибающих моментов

Как и ожидалось, результаты численных и аналитических расчетов практически совпали.

### Расчет среднего этажа

Создадим расчетную схему среднего этажа также с помощью операции копирования. Выделим КЭ 2 и КЭ 3 (см. рис. 1.10), активизируем команду «Копирование по параметрам», находящуюся на вкладке «Редактирование», зададим смещение 4 м по оси  $Oz$  и применим команду. Далее закрепляем узел 10 (крайний левый) по осям  $Ox$  и  $Oz$ , а в узел 4 дополнительно прикладываем нагрузку, равную 6,08 кН, моделирующую давление верхнего этажа. Расчетная схема верхнего этажа составной балки показана на рис. 1.20.



Рис. 1.20. Расчетная схема среднего этажа составной балки

Далее запустим файл на расчет и сравним численные результаты расчетов отдельного этажа (рис. 1.21) с аналитическими результатами [8, с. 28, рис. 3.3].

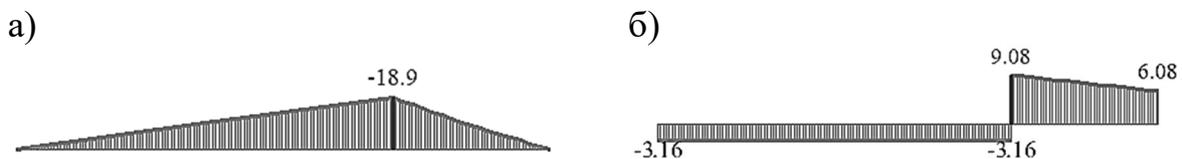


Рис. 1.21. Эпюры внутренних усилий среднего этажа составной балки, полученные в ПК «Лира-САПР»: а – эпюра поперечных сил; б – эпюра изгибающих моментов

### Расчет первого этажа

Создадим расчетную схему первого этажа с помощью операции копирования. Выделим КЭ 1, активизируем команду «Копирование по параметрам», находящуюся на вкладке «Редактирование», зададим смещение 2 м по оси  $Oz$  и применим команду. Далее в узел 2 дополнительно прикладываем нагрузку, равную -3,16 кН, моделирующую давление среднего этажа. Расчетная схема верхнего этажа составной балки показана на рис. 1.22.



Рис. 1.22. Расчетная схема первого этажа составной балки

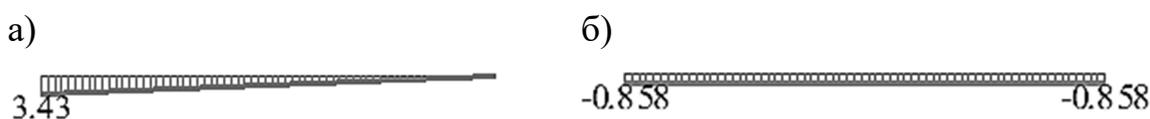


Рис.1.23. Эпюры внутренних усилий первого этажа составной балки, полученные в ПК «Лира-САПР»: а – эпюра поперечных сил; б – эпюра изгибающих моментов

Далее запустим файл на расчет и сравним численные результаты расчетов отдельного этажа (рис. 1.23) с аналитическими результатами [8, с. 29, рис. 3.4].

#### 1.2.4. Консольно-балочные прогоны

При устройстве стропильных конструкций деревянных зданий, с точки зрения статической работы, можно выделить три типа прогонов:

- 1) разрезные;
- 2) неразрезные;
- 3) консольно-балочные.

Разрезной прогон, расчетная схема которого представляет шарнирно опертую балку, очень прост в изготовлении, но дает неэкономичное решение. И так как в нем возникает большой изгибающий момент, то максимальные пролеты таких прогонов должны быть не более 3 м.

Консольно-балочные прогоны представляют собой многопролетные неразрезные балки, в которых на определенных расстояниях от опор устраиваются шарниры. В зависимости от того, какое предельное состояние является определяющим при конструировании элементов, возможны два варианта расположения шарниров:

1. При расположении стыков на расстоянии  $x = 0,14645L$  от опор получается равномоментное решение прогонов.

2. При расположении стыков на расстоянии  $x = 0,2113L$  от опор получается равнопрогибное решение прогонов.

Выполним расчет в ПК «Лира-САПР» прогона, имеющего семь пролетов длиной по 1 м (рис. 1.24).

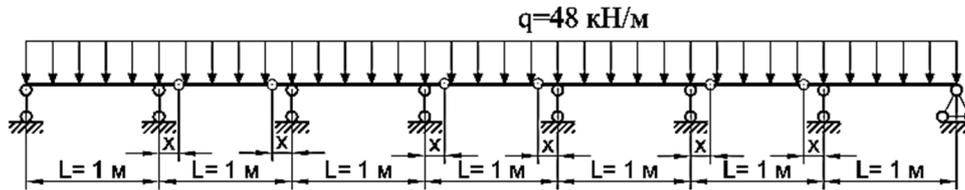


Рис. 1.24. Расчетная схема равномоментного (равнопрогибного) прогона

На практике величина пролетов обычно больше. Здесь мы примем такое значение пролета для упрощения задания данных. Сечение прогона примем таким же, как и в примере расчета выше (см. п. 1.2.1) –  $0,125 \times 0,15$  м. На все пролеты прогона действует равномерно распределенная нагрузка, равная 48 кН/м.

Алгоритм создания расчетной схемы прогона следующий (при наличии затруднений более подробно стандартные операции в ПК «Лира-САПР» можно посмотреть в учебном пособии [1]):

1. **Создание геометрической схемы с помощью окна (шаблона) «Создание плоских фрагментов и сетей»** (рис. 1.25).

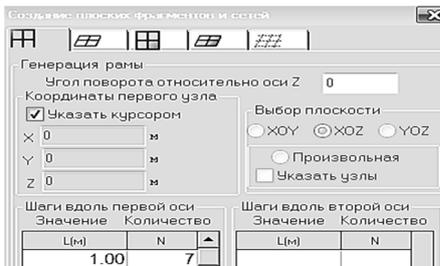


Рис. 1.25. Создание геометрической схемы прогона

2. **Создание дополнительных узлов.**

В этой задаче логичнее сначала задать дополнительные узлы в сечениях, где будут находиться шарниры, и только потом задать граничные условия. Если сразу задать опоры, то далее они будут копироваться вместе с узлами и придется тратить время на их удаление. Поэтому сначала «вреем шарниры» в сечения, где эпюра моментов неразрезного прогона имеет нулевые точки. Это сечения, в которых значения изгибающих моментов будут равны нулю. Так как у нас длина пролетов равна 1 м, то шарниры будут расположены на расстояниях от опор, равных  $0,14645$  м. Для того чтобы в случае аварийного выхода из работы одного из пролетов вся конструкция не разрушилась, принимают встречное расположение шарниров. В нашем примере необходимо добавить по два шарнира в пролеты с четными номерами – 2, 4, 6. В ПК «Лира-САПР» эта операция будет иметь следующие этапы:

на нас длина пролетов равна 1 м, то шарниры будут расположены на расстояниях от опор, равных  $0,14645$  м. Для того чтобы в случае аварийного выхода из работы одного из пролетов вся конструкция не разрушилась, принимают встречное расположение шарниров. В нашем примере необходимо добавить по два шарнира в пролеты с четными номерами – 2, 4, 6. В ПК «Лира-САПР» эта операция будет иметь следующие этапы:

1) добавление дополнительных узлов в сечения, где необходимо расположить шарниры;

2) задание шарниров относительно оси  $Oy$  в пролетах 2, 4 и 6.

Выполнить операцию создания новых узлов проще всего копированием. Выделим сначала узлы 2, 4, 6 и, раскрыв на вкладке «Создание и редактирование» меню пиктограммы «Копирование», щелкнем по опции «Копирование по параметрам» (рис. 1.26, а). В открывшемся окне «Копирование объектов» зададим смещение по оси  $X$ , равное 0,14645 м, и применим команду. На расчетной схеме отобразятся узлы 9, 10, 11, находящиеся слева от опор.

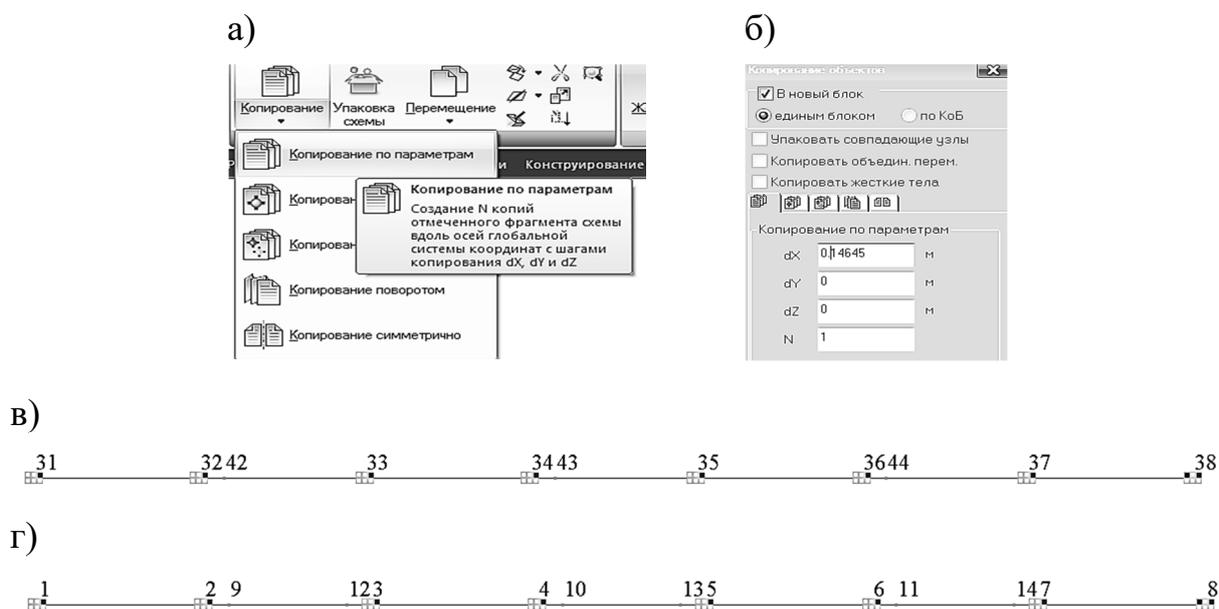


Рис. 1.26. Создание дополнительных узлов: а – копирование по параметрам; б – окно задания смещения; в – измененная расчетная схема после создания узлов слева от опор; г – итоговая откорректированная расчетная схема после добавления узлов

Для создания узлов, находящихся справа от опор, повторим ранее выполненную операцию. Выделим узлы 3, 5 и 7 (предварительно сняв выделение с узлов 2, 4 и 6 – выделение узлов должно остаться после предыдущего копирования) и выполним те же действия, что и ранее, только заменив значение смещения на  $-0,14645$  м. На расчетной схеме отобразятся узлы 12, 13, 14, находящиеся справа от опор. При добавлении узлов произойдет перенумерация КЭ. Причем есть вероятность, что в разных версиях программы она может выполняться по-разному. Поэтому далее, говоря о номерах КЭ, предлагаем пользователю ориентироваться не на конкретные номера КЭ, а на то, каким образом они расположены на расчетной схеме прогона.

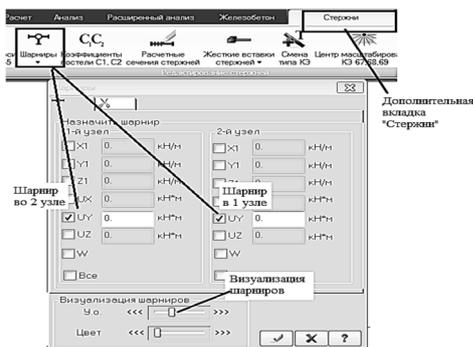


Рис. 1.27. Создание шарниров в четных пролетах прогона

после выделения элементов щелчком по новой появившейся вверху вкладке «Стержни» и далее по команде «Шарниры». Отметим степени свободы  $U_y$  (угол поворота относительно оси  $Oy$ ) и перегоним бегунок «Визуализация шарниров» в среднее положение (рис. 1.27). Применим команду .

На расчетной схеме отобразятся созданные шарниры (рис. 1.28).

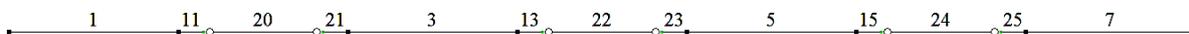


Рис. 1.28. Геометрическая схема с шарнирами

**3. Задание граничных условий.** Узлы 1-7 закрепим (рис. 1.29) по оси  $Oz$  (шарнирно-подвижная опора), а узел 8 – по осям  $Oz$  и  $Ox$  (шарнирно-неподвижная опора).



Рис. 1.29. Расчетная схема с закрепленными опорами

**4. Задание жесткостей элементов.** Так как мы приняли сечение прогона такое же, как и для ранее рассматриваемой задачи, то проще всего не создавать новую жесткость, а скопировать ее из ранее созданного файла. В данном примере это принесет небольшую экономию времени, но при расчете конструкций, которые имеют большой список разнотипных жесткостей, возможность копирования очень эффективна. Откроем файл «Составная балка», с помощью вкладки «Жесткости связи» активизируем окно «Жесткости и материалы» и скопируем в буфер жесткость балки (рис. 1.30, а). Далее перейдем в файл по расчету прогона, также откроем окно «Жесткости и материалы» и вставим жесткость (рис. 1.30, б).

**5.** Хотя скопированная жесткость отобразится в списке жесткостей, но она не будет активной. Поэтому необходимо сделать ее текущей двойным кликом мыши, выделить все элементы расчетной схемы (комбинация клавиш  $Ctrl + A$ ) и применить команду.

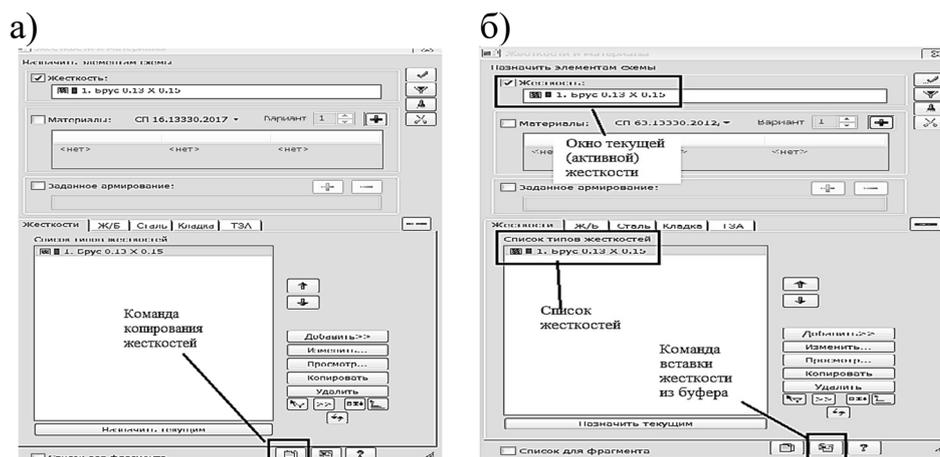


Рис. 1.30. Копирование жесткости из другого файла:  
 а – копирование жесткости; б – вставка жесткости

**6. Задание нагрузки.** Выделим все КЭ расчетной схемы и далее с помощью вкладки «Стержни», команды «Нагрузка на стержни», пиктограммы «Равномерно распределенная нагрузка» зададим значение нагрузки 48 кН/м и применим команду (рис. 1.31).

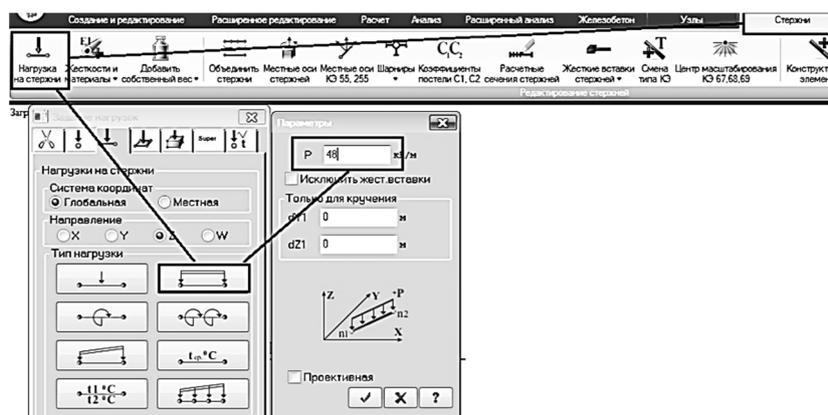


Рис. 1.31. Порядок задания нагрузки на прогон

Расчетная схема прогона создана, сохраним файл под именем «Равномоментный прогон» и запустим его на расчет. Перейдем к анализу результатов статического расчета, открыв вкладку «Анализ». Уберем с экрана с помощью пиктограммы «Флаги рисования» лишнюю информацию (номера узлов и элементов, нагрузку), а с помощью команды «Исходная схема» на вкладке «Деформации» перейдем к изображению недеформированной схемы прогона. Отообразим эпюру изгибающих моментов с помощью команды  $M_y$  на вкладке «Усилия в стержнях». Как мы видим (рис. 1.32), все опорные и максимальные пролетные моменты для всех пролетов кроме двух крайних оказались равными значению 3 кН·м.

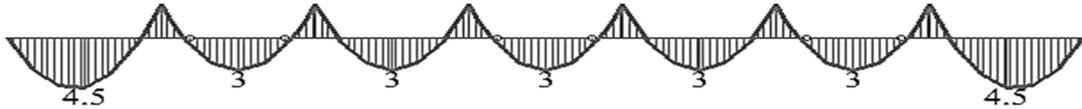


Рис. 1.32. Эпюра изгибающих моментов для прогона с равными пролетами

В крайних пролетах величина максимального изгибающего момента оказалась в 1,5 раза больше. Для получения идеальной равномоментной схемы необходимо уменьшить длину крайних пролетов на величину  $0,135L$ . Проведем такой численный эксперимент.

Вернемся в режим создания и редактирования расчетной схемы, выделим всю конструкцию и скопируем ее по параметрам вверх по оси  $Oz$  на 1 м. Далее нам необходимо уменьшить длины первого и последнего пролетов на  $0,135$  м. Эту операцию проще всего провести с помощью инструмента «Фонарик». Активируем этот инструмент и щелкнем мышью сначала по первому узлу скопированного прогона (№ 15). В поле координаты по оси  $Ox$  введем новое значение  $0,135$  м и применим команду. Далее аналогично изменим координату последнего узла прогона на  $6,865$  м (рис. 1.33).

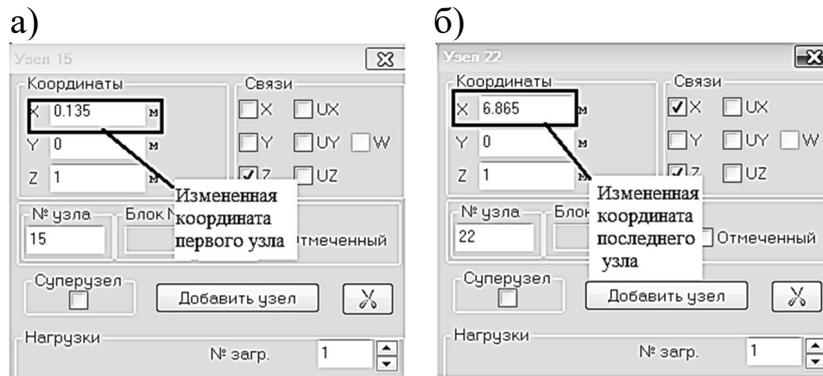


Рис. 1.33. Изменение координат первого (а) и последнего (б) узлов прогона

Сохраним файл, запустим на расчет и далее выведем на экран эпюру изгибающих моментов (рис. 1.34).



Рис. 1.34. Эпюра изгибающих моментов для прогона с уменьшенными крайними пролетами

Можно спорить, насколько строителям целесообразно с точки зрения технологии выполнения работ «городить» прогоны с таким идеальным расположением шарниров, но главная цель расчета – это просто показать возможность получения эффективных экономических решений, которые позволяют сэкономить финансовые средства только за счет оптимизаций расчетной схемы прогонов.

Но не всегда для деревянных конструкций при подборе сечений элементов определяющими являются требования по несущей способности (прочности). Древесина имеет относительно низкое значение модуля упругости, в ряде случаев прогоны могут иметь запас прочности, а размеры сечения будут подбираться из условия максимально допустимых прогибов.

Как выше уже указывалось, для получения равнопрогибной схемы шарниры должны быть расположены на расстоянии  $0,2113L$  от опор. Создадим прогон для этого варианта, сделав копию расчетной схемы (см. рис. 1.29). Выполнив команду копирования по параметрам, поднимем исходную схему на 2 м вверх по оси  $Oz$ . Далее поменяем координаты шести узлов (сечения, где находятся шарниры), сместив их на расстояние 0,2113 м от опор. Опять это будет удобно сделать с помощью инструмента «фонарик». Описывать повторно эту процедуру не будем, просто приведем ниже координаты этих узлов по оси  $Ox$ : 1,2113; 1,7877; 3,2113; 3,7887; 5,2113; 5,7887. Выполнив эти изменения, запустим файл на расчет и далее перейдем к анализу результатов статического расчета. Ниже на рис. 1.35 показана эпюра изгибающих моментов для последнего расчетного случая.



Рис. 1.35. Эпюра изгибающих моментов для варианта равнопрогибного прогона

Для того чтобы проверить равенство прогибов в средних пролетах прогона, опять используем инструмент «фонарик».

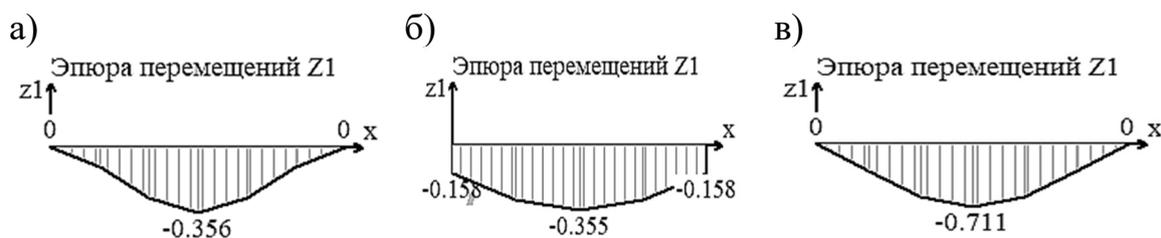


Рис. 1.36. Эпюры прогибов для третьего (а) и четвертого (б) пролетов равнопрогибного прогона и третьего (в) пролета равномоментного прогона

Щелчком левой кнопкой мыши по КЭ в третьем пролете равнопрогибного прогона откроем окно свойств этого элемента. В этом окне отметим опцию «Эпюры», в открывшемся далее окне «Эпюры сечений» оставим активной только эпюру прогибов « $Pz$ » (рис. 1.36, *a*). Далее повторим эти же действия для КЭ в четвертом пролете. Как мы и ожидали, значения максимальных прогибов практически оказались равными (рис. 1.36, *b*). Чтобы понять разницу в величине максимальных значений прогибов для двух рассматриваемых расчетных схем прогонов, также приведем эпюру прогибов для третьего пролета равномоментного решения прогона (рис. 1.36, *в*). В этом случае прогиб оказался в 2 раза больше.

### 1.3. Расчет составных статически определимых рам

Сама задача расчета плоских рам относительно простая. Студенты в рамках дисциплины «Сопротивление материалов» уже вычисляли реакции в балках, строили эпюры внутренних усилий. Выделим то основное, на что стоит обратить особенное внимание при выполнении этой задачи в ПК «Лири-САПР»:

1. Условие равенства внутренних и внешних усилий в отдельных узлах рамы. С подобными проверками (расчетами) студенту много раз придется сталкиваться в будущем. Из таких условий равенства, например, можно определять значения реакций в узлах расчетной схемы, где имеются закрепления.

2. Задание внешнего сосредоточенного момента. Самая распространенная ошибка начинающих пользователей ПК «Лири-САПР» – задание момента относительно оси  $Oz$  (эта ось стоит по умолчанию при задании нагрузок), тогда как надо создавать момент, действующий относительно оси  $Oy$ .

3. Корректное задание шарнира в узлах, где действует внешний сосредоточенный момент. В зависимости от того, с какой стороны от узла в расчетной схеме приложен момент, необходимо делать выбор – в каком именно КЭ необходимо «врезать» шарнир. Если момент действует слева от узла, то шарнир необходимо врезать справа. Если момент действует справа от узла, то шарнир необходимо врезать слева. Ниже на конкретном примере расчета плоской рамы будет пояснено это требование.

4. Учет продольных деформаций элементов сжатия-растяжения в ПК «Лири-САПР». В отличие от аналитических расчетов, где учитываются только деформации изгиба, метод конечных элементов (МКЭ) учитывает изменение длины элементов от деформаций растяжения-сжатия. Для данной задачи это не принципиально, но при расчете статически неопределимых систем методом перемещений это очень часто приводит к существенным различиям в результатах аналитического и численного расчетов. От-

дельного рассмотрения заслуживает тема учета продольных деформаций колонн для высотных каркасных зданий. Для таких конструктивных систем учет продольных деформаций может не только количественно, но и качественно поменять картину распределения усилий между элементами здания.

5. Корректное задание жесткостей в ПК «Ли́ра-САПР». В программе жесткости задаются в явном виде (параметрически или численно) для любых задач, тогда как в аналитических расчетах жесткости могут вообще не задаваться (для статически определимых систем) или задаваться условно в виде соотношений элементов (для статически неопределимых систем).

6. Глобальная и локальная системы координат в ПК «Ли́ра-САПР». Обычно локальные системы стержневых элементов согласованы с общей (глобальной) системой координат. Если же это не так, то это может привести к «некорректному» отображению результатов расчета.

#### ***Расчет составных статически определимых рам в ПК «Ли́ра-САПР»***

Выполним в ПК «Ли́ра-САПР» расчет плоской рамы МКЭ [8, подразд. 3.3]. Расчетная схема рамы приведена на рис. 1.37. Изначально студенты определяют усилия в элементах рамы аналитически с помощью уравнений статического равновесия, далее они должны проверить корректность этих проведенных расчетов параллельным расчетом в ПК «Ли́ра-САПР».

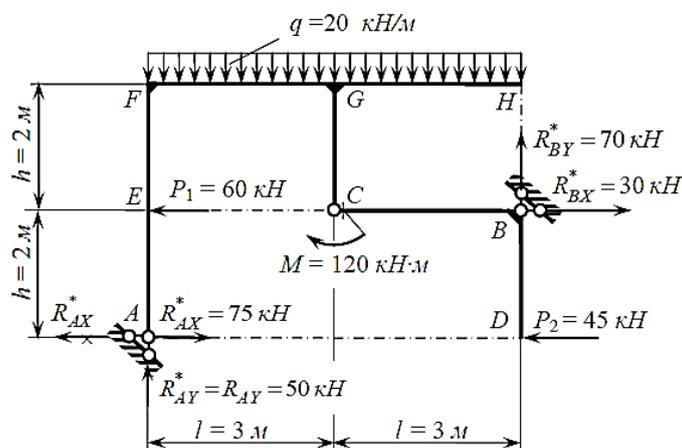


Рис. 1.37. Расчетная схема плоской рамы

Алгоритм статического расчета рамы в ПК «Ли́ра-САПР» остается прежним (геометрия, связи, шарниры, жесткости, нагрузки, расчет).

Начнем с создания жесткости элементов. В отличие от ручного счета САПР-системы требуют в обязательном порядке задания физико-механических и геометрических характеристики сечений. Примем, что все элементы нашей рамы выполнены из прокатного профиля – балочного

двутавра № 30Б1. Зададим эту жесткость с помощью окна «Жесткости и материалы» и закладки «База металлических сечений» (рис. 1.38).

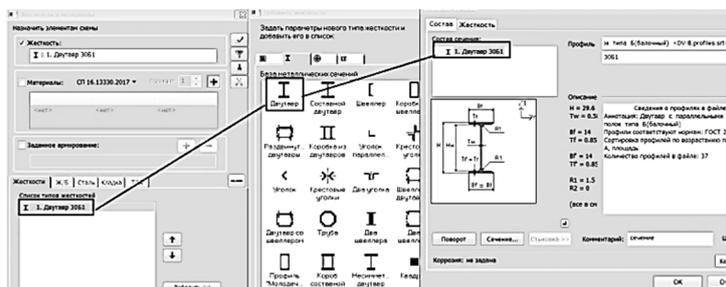


Рис. 1.38. Создание жесткости элементов рамы

Геометрическую схему рамы проще всего создать с помощью шаблона «Создание плоских фрагментов и сетей». Зададим два горизонтальных пролета длиной по 3 м и два этажа высотой по 2 м (рис. 1.39).



Рис. 1.39. Создание геометрической схемы плоской рамы:  
а – задание параметров рамы; б – первоначальная схема рамы

По умолчанию программа изначально отображает раму в изометрии,

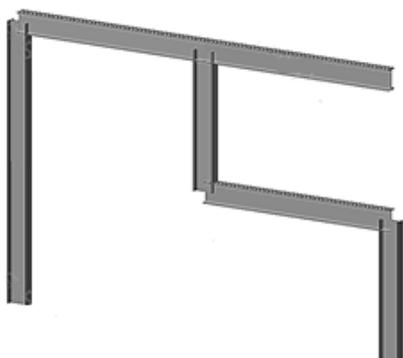


Рис. 1.40. Пространственная модель плоской рамы

поэтому переведем изображение в плоскость  $XZ$  с помощью окна «Проекция». Выведем на экран с помощью инструмента «Флаги рисования» номера КЭ и, сравнив полученную схему с исходной (см. рис. 1.37), убеждаемся, что КЭ 3, 6 и 7 лишние. Выделим эти элементы и удалим их. Также удалим узел 2. Можно также убедиться, например, с помощью окна «Пространственная модель 3D-графика», что программа автоматически присвоила всем элементам ранее созданную жесткость (рис. 1.40).

Далее зададим граничные условия, закрепив узлы 1 и 6 по осям  $X$  и  $Z$ . Подробно не будем описывать эту простую операцию. Необходимо активировать режим работы с узлами , выделить узлы, открыть окно задания связей, отметить необходимые степени свободы и применить команду.

На процедуре задания шарнира в узле 5, который соединяет КЭ 4 и КЭ 8, остановимся более детально. Есть два варианта создания шарнира в этом узле: шарнир может быть задан или в КЭ 4, или в КЭ 8. Напомним, что в ПК «Лири-САПР» шарнир – это признак элемента, а не узла, т.е. шарнир задается для элемента, а узел «наследует» это свойство.

Варианты задания шарнира в узле 5 были бы не принципиальными, если бы в этом же узле не был приложен сосредоточенный момент, равный 120 кН·м, действующий по часовой стрелке. Поясним это обстоятельство (процедуру). Внешний момент мы зададим для узла 5, но в зависимости от того, для какого элемента будет создан шарнир, этот момент по-разному будет учтен в расчетной схеме. По заданию (см. рис. 1.37) момент действует слева от шарнира, т.е. в первом узле КЭ 8. Отсюда следует, что шарнир необходимо задать для КЭ 4. Поэтому выделим КЭ 4, предварительно активизировав режим работы с элементами , и так же, как мы делали в примерах расчета составных балок, освободим связь по оси  $Y$    $UY$  в первом узле элемента.

Далее зададим сосредоточенный момент, равный 120 кН·м, в узле 5. Выделим этот узел, далее с помощью вкладки «Узлы», команды «Нагрузки в узлах», пиктограммы «Сосредоточенный момент» зададим значение 120 кН·м и применим команду (рис. 1.41). Особо хотим обратить внимание на тот факт, что программа всегда изначально предлагает создать момент относительно оси  $Oz$ , и пользователи часто делают здесь ошибку – забывают поменять ось  $Oz$  на ось  $Oy$ . Напомним правило знаков для внешних моментов в ПК «Лири-САПР» – положительным считается то усилие, которое вращает элемент против часовой стрелки. У нас в примере момент вращает по часовой стрелке, поэтому вводим его значение с минусом.

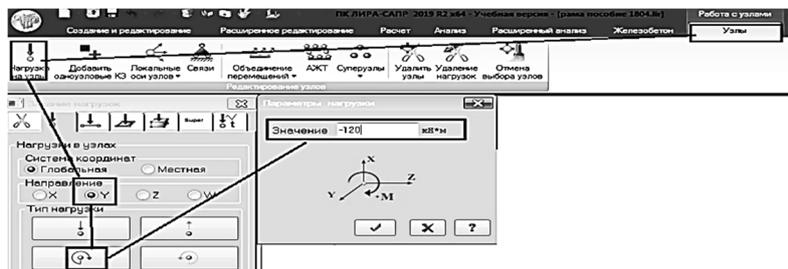


Рис. 1.41. Порядок задания внешнего момента в узел 5

Предлагаем пользователю самостоятельно провести небольшой эксперимент. Сделать копию созданной расчетной схемы (проще всего опера-

цией копирования по параметрам), в этой схеме удалить шарнир в КЭ 4, и добавить аналогичный шарнир в первый узел КЭ 8. После этого запустить файл на расчет. Ниже на рис. 1.42 приведены эпюры изгибающих моментов для двух вариантов расчета.

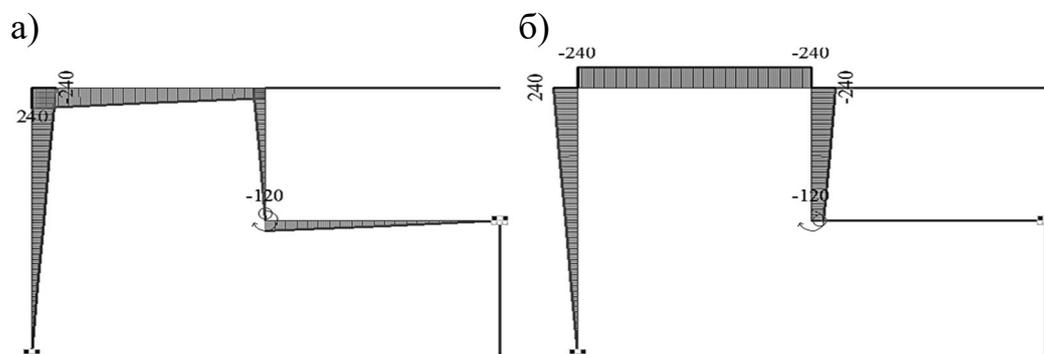


Рис. 1.42. Эпюры изгибающих моментов: а – шарнир в КЭ 4; б – шарнир в КЭ 8

Как и ожидалось, правильной является первая расчетная схема. Именно в ней момент действует слева от врезанного шарнира.

Для окончательного формирования расчетной схемы нам осталось задать сосредоточенные силы и равномерно распределенные нагрузки. Поэтому сначала выделяем узел 3 ( $E$ ), прикладываем к нему нагрузку по оси  $Ox$  (рис. 1.43).

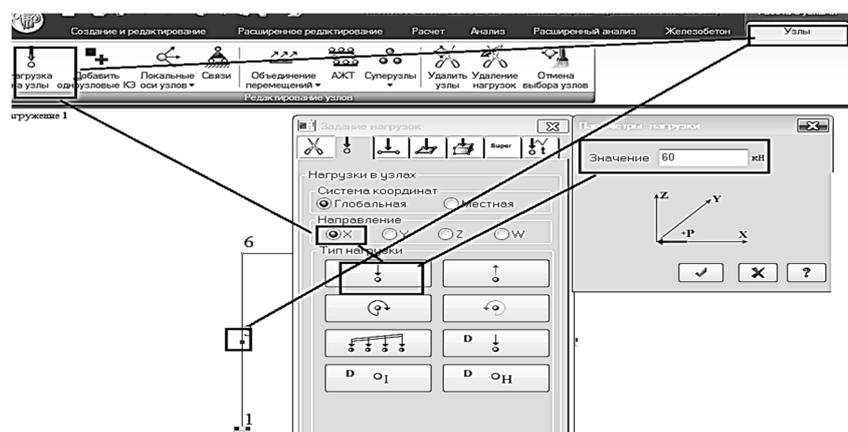


Рис. 1.43. Порядок задания сосредоточенной силы в узел 3 ( $E$ )

Здесь так же, как и при задании внешнего момента необходимо не забыть поменять направление нагрузки (ось  $Oz$  на ось  $Ox$ ). По аналогии зададим сосредоточенную силу, равную 45 кН, в узел 3 ( $D$ ).

Последним действием зададим нагрузку на два верхних горизонтальных элемента рамы (рис. 1.44).

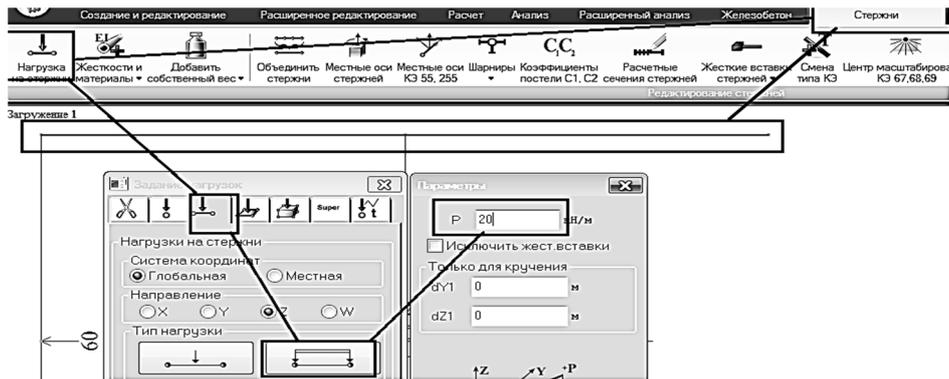


Рис. 1.44. Порядок задания равномерно распределенной нагрузки на два горизонтальных элемента

После выполненных действий сохраняем файл и запускаем его на расчет. На рис. 1.45 показаны итоговая расчетная схема и эпюры внутренних сил (изгибающих моментов, продольных и поперечных сил).

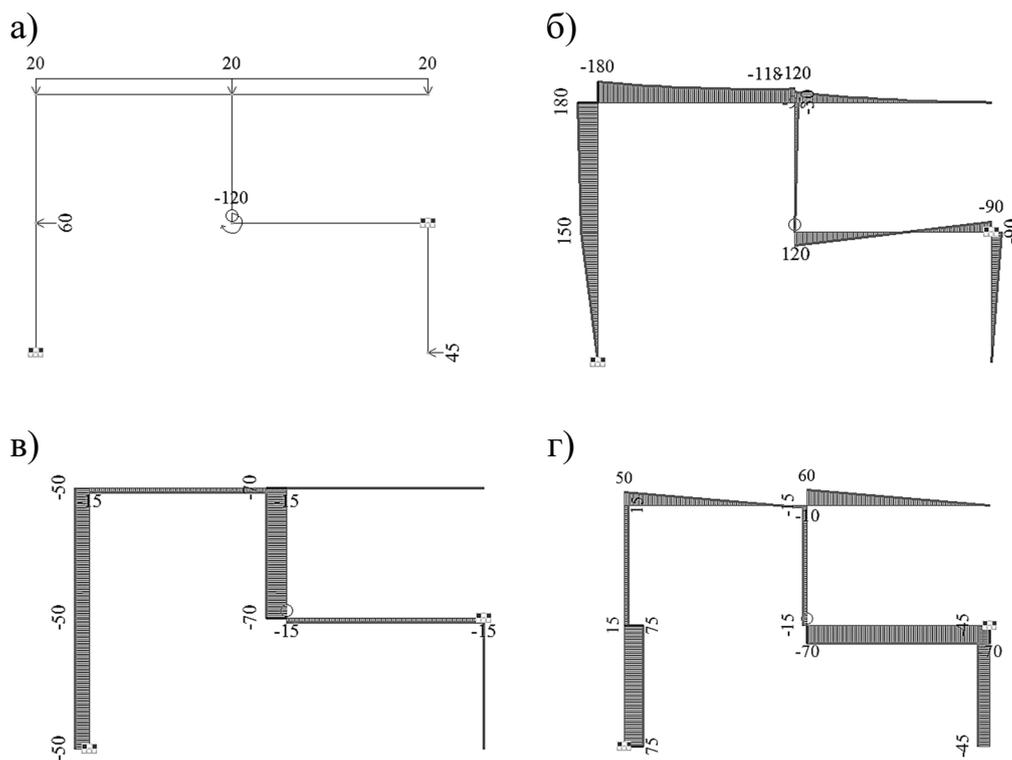


Рис. 1.45. Плоская рама: а – итоговая расчетная схема; б – эпюра изгибающих моментов; в – эпюра продольных сил; г – эпюра поперечных сил

Полученные численные результаты расчетов плоской рамы полностью совпадают с результатами аналитического расчета [8, с. 43, рис. 3.15].

## 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

В данном разделе будет рассмотрен пример расчета трехшарнирной арки с применением ПК «Ли́ра-САПР» и программы MathCAD.

Варианты заданий для этой задачи, как и в первом разделе, приняты из пособия [8]. Численный расчет арки в ПК «Ли́ра-САПР» приводится для примера, рассматриваемого в виде образца в этом же пособии (см. п. 3.6.2).

Расчет арки также входит в состав расчетно-графической работы по дисциплине «Строительная механика» (раздел «Статически определимые системы»).

### 2.1. Выбор исходных данных

Для арки (рис. 2.1), очертание и нагрузка которой выбираются из табл. 2.1, требуется:

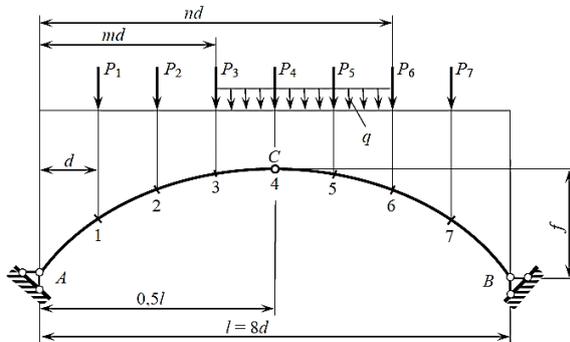


Рис. 2.1. Расчетная схема арки к задаче 3

а) построить основные геометрические зависимости в программе MathCAD;

б) выполнить расчет трехшарнирной арки по заданной схеме в ПК «Ли́ра-САПР»;

в) разложить заданную схему арки на две составляющих (балочную схему и схему для распора), выполнить расчет в ПК «Ли́ра-САПР» и проанализировать результаты расчетов. Правила выбора исходных данных по номеру варианта приведены выше (см. подразд. 1.1).

ходных данных по номеру варианта приведены выше (см. подразд. 1.1).

Таблица 2.1

Исходные данные к задаче 3

Номер строки	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	$P_4$ , кН	$P_5$ , кН	$P_6$ , кН	$P_7$ , кН	$q$ , кН/м
1	80	0	0	0	80	80	0	16
2	0	120	0	0	0	120	0	24
3	0	0	160	160	160	160	0	32
4	0	80	0	0	0	0	80	16
5	0	0	120	120	0	0	120	24
6	160	0	0	0	0	0	160	32
7	0	0	80	80	80	160	0	16
8	0	120	0	0	120	120	0	24
9	0	0	160	160	160	80	0	32
0	80	0	0	0	0	0	160	16
	а	б	в	а	б	в	а	в

Продолжение табл. 2.1

Номер строки	$f/l$	$l, м$	$m$	$N$	Номер сечения	Очертание оси арки
1	0,30	20	0	5	1	Парабола
2	0,35	24	1	6	2	Эллипс
3	0,40	28	2	7	3	Окружность
4	0,30	32	3	8	5	Парабола
5	0,35	36	0	6	6	Эллипс
6	0,40	20	1	7	7	Окружность
7	0,30	24	2	8	2	Парабола
8	0,35	28	3	5	3	Эллипс
9	0,40	32	0	6	5	Окружность
0	0,30	36	1	7	6	Парабола
	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$

Приведем справочную информацию по геометрии арок.

Ординаты точек оси арки и геометрические функции углов наклона касательных определяются по следующим формулам:

а) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - (0,5l - x)^2} + f - R; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R};$$

б) при очертании оси по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x);$$

в) при очертании оси по эллипсу

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l - x)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{l} \frac{l - x}{\sqrt{x(l - x)}}.$$

Для двух последних случаев

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi.$$

## 2.2. Классификация арок. Основной принцип работы арок

По характеру своей работы арки относятся к распорным конструкциям, в которых при воздействии внешней нагрузки помимо вертикальных составляющих реакций возникает горизонтальная составляющая опорной реакции (распор). Горизонтальный распор арок  $H$  или передается непосредственно на фундаменты или контрфорсы, или воспринимается затяжкой.

Арки чаще всего применяют в качестве основных несущих конструкций покрытий промышленных, сельскохозяйственных и общественных зданий.

Основные элементы арки показаны на рис. 2.2.

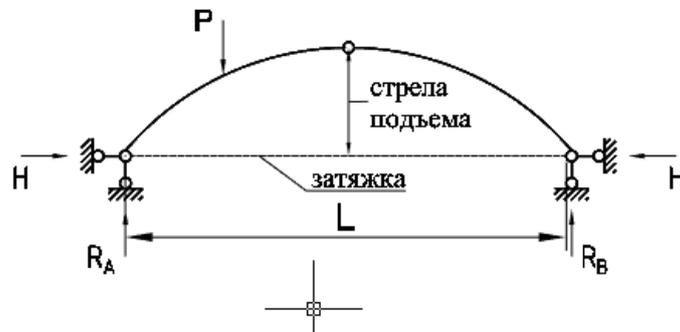


Рис. 2.2. Основные элементы расчетной схемы арки

Арки классифицируют по разным признакам.

По *статической схеме* различают трехшарнирные и двухшарнирные арки (рис. 2.3).



Рис. 2.3. Типы арок по статической работе

По *схеме опирания* арки разделяют на арки с затяжками, воспринимающими распор, и арки без затяжек, распор которых передается на опоры (рис. 2.4).

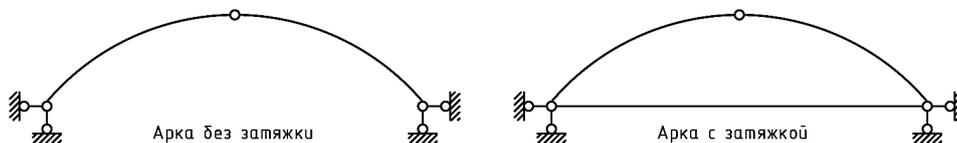


Рис. 2.4. Классификация арок по схеме опирания

Затяжки изготавливают обычно из арматуры или прокатной стали. Если конструкция эксплуатируется в условиях химически агрессивных сред, где возможна коррозия металла, то допустимо применение деревянных клееных затяжек.

По **форме оси** можно выделить следующие группы:

- стрельчатые, состоящие из полуарок, оси которых располагаются на двух окружностях, смыкающихся в ключе под углом (рис. 2.5, а);
- круговые (рис. 2.5, б);
- треугольные из прямых полуарок (рис. 2.5, в);
- пятиугольные (рис. 2.5, г).

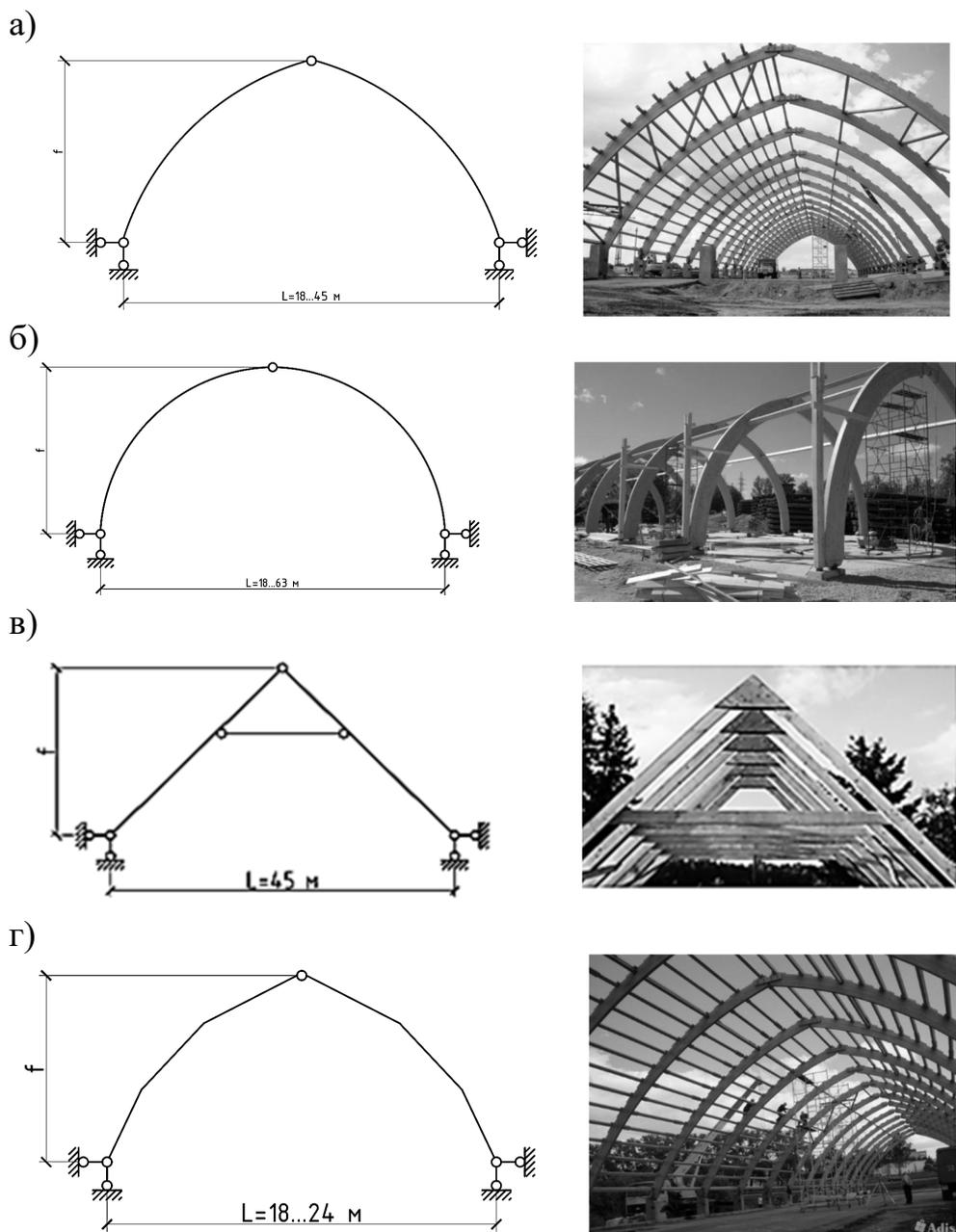


Рис. 2.5. Классификация арок по форме оси

По **виду материалов** арки могут быть выполнены из металла, дерева, камня, бетона, железобетона.

### 2.3. Основной принцип работы арок. Построение геометрических зависимостей для арок в программе MathCAD

Работа арок интересна тем, что дает возможность провести ряд аналогий с другими широко применяемыми строительными конструкциями:

1. Разложение параметров НДС на несколько составляющих – принцип суперпозиции, который часто применяется в различных технических расчетах. Но при этом необходимо отметить, что принцип суперпозиции справедлив только для решения линейных задач.

2. Искусственное создание активных и реактивных линейных усилий, которые дают изгибающие моменты обратного знака по сравнению с усилиями от основной нагрузки. В арке это усилие распора, которое возникает из-за криволинейной оси очертания конструкции. Похожий принцип уменьшения расчетных усилий реализуется в предварительно напряженном железобетоне, когда усилие обжатия бетона создает момент обратного знака (растягивает верхнюю зону сечения, тогда как основная нагрузка растягивает нижнюю зону). В деревянных треугольных фермах для уменьшения изгибающего расчетного момента в верхнем поясе в ряде случаев устраивают дополнительные элементы. Вследствие возникающего при этом эксцентриситета создается момент обратного знака.

Проводимые далее расчеты арки в ПК «Лира-САПР» дают возможность наглядно продемонстрировать, как можно разложить все параметры НДС на две составляющих.

**Параметры НДС арки** можно определить как сумму двух слагаемых:

1) усилий, возникающих в арке от вертикальной внешней нагрузки и вертикальных реакций;

2) усилий, возникающих в арке от горизонтальной внешней нагрузки и реакций распора

$$S_{ар} = S_{бал} + S_{расп.}$$

Усилия от вертикальных составляющих обычно дают очень большие значения изгибающих моментов. В рассматриваемом ниже примере максимальный момент от этих составляющих равен 1860 кН·м. Понятно, что даже если удастся с большим трудом подобрать сечение арки по условиям прочности, то условие пригодности по эксплуатации по прогибам вряд ли удастся выполнить. Но уменьшить итоговые расчетные изгибающие моменты позволяет вторая составляющая НДС арки – усилия от действия распора.

Если вертикальные усилия растягивают нижние волокна сечения арки, то распор, наоборот, растягивает верхние волокна. В итоге суммарные изгибающие моменты оказываются в разы меньше «балочных». В нашем примере максимальный итоговый момент в арке равен 327 кН·м.

Отметим еще одну характерную особенность арки, связанную с ее криволинейной формой. Вследствие геометрии арки в ней в отличие от балки возникают не только изгибающие моменты и поперечные силы, но и продольные силы. То есть арка – это сжато-изгибаемый элемент. Если вычисление реакций и усилий изгибающих моментов для статически-определимой трехшарнирной арки является относительно несложной технической задачей, то вычисление продольных и поперечных сил в различных сечениях арки является достаточно громоздким и трудозатратным действием. Связано это с тем, что в каждом сечении арки продольные и поперечные силы должны вычисляться в местных системах координат.

Существует практика расчетов усилий в арках в программе Excel, но более удобным, мощным и эффективным инструментом для решения подобных задач является программа MathCAD. Поэтому студентам, независимо от варианта задания, предлагается первое задание – создание в программе MathCAD файла-шаблона, в котором выполняются автоматические расчеты всех основных геометрических характеристик арки (с различными формами очертания оси).

Ниже на рис. 2.6 – 2.8 приведены примеры оформления расчетов в программе MathCAD.

#### **Основные геометрические характеристики арки с очертанием оси в виде окружности**

##### *Исходные данные*

Пролет  $L := 24 \text{ м}$

Стрела подъема  $f := \frac{L}{3} = 8 \text{ м}$

Радиус окружности  $R := \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8 \cdot f} = 13 \text{ м}$

Уравнение окружности  $y_1(x) := \sqrt{R^2 - (x - 0.5 \cdot L)^2} + f - R$

##### *Геометрические функции углов наклона касательных*

$$\sin \phi_1(x) := \frac{L - 2 \cdot x}{2R}$$

$$\cos \phi_1(x) := \frac{y_1(x) + R - f}{R}$$

$$\tan \phi_1(x) := \frac{\sin \phi_1(x)}{\cos \phi_1(x)}$$

Рис. 2.6. Геометрические характеристики арки, имеющей форму окружности (начало)

Вычисление производных уравнения окружности

$$\frac{d}{dx} \sqrt{R^2 - (x - 0.5 \cdot L)^2} \rightarrow \frac{2 \cdot x - 24.0}{2 \cdot \sqrt{169 - (x - 12.0)^2}}$$

$$\frac{2 \cdot x + -1.0 \cdot L}{2 \cdot \sqrt{R^2 - (x + L \cdot -0.5)^2}} \rightarrow \frac{2 \cdot x - 24.0}{2 \cdot \sqrt{169 - (x - 12.0)^2}}$$

$$\frac{0.5 \cdot (L - 2.0 \cdot x)}{\sqrt{L \cdot x - 0.25 \cdot L^2 + R^2 - 1.0 \cdot x^2}} \rightarrow \frac{-1.0 \cdot x + 12.0}{\sqrt{24 \cdot x + -1.0 \cdot x^2 + 25.0}}$$

$$\frac{0.5 \cdot (L - 2.0 \cdot x)}{\sqrt{L \cdot x - 0.25 \cdot L^2 + R^2 - 1.0 \cdot x^2}}$$

$$\tan \phi_{1an}(x) := \frac{2 \cdot x + -1.0 \cdot L}{2 \cdot \sqrt{R^2 - (x + L \cdot -0.5)^2}}$$

$$y_{кас}(x) := \tan \phi_1(0.1 \cdot L) \cdot x + y_1(0.1 \cdot L) - \tan \phi_{1an}(0.1 \cdot L) \cdot 0.1 \cdot L$$

Графики окружности, тригонометрических функций углов наклона касательной



Рис. 2.6. Геометрические характеристики арки, имеющей форму окружности (окончание)

## Основные геометрические характеристики арки с очертанием оси в виде параболы

Исходные данные

Пролет  $L := 24$  м

$$\text{Уравнение параболы} \quad y_2(x) := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x)$$

Геометрические функции углов наклона касательных

$$\tan \phi_2(x) := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot (L - 2 \cdot x)$$

$$\cos \phi_2(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_2(x)}}$$

$$\sin \phi_2(x) := \tan \phi_2(x) \cdot \cos \phi_2(x)$$

Вычисление производных из уравнения окружности

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x) \right] \rightarrow \frac{4}{3} - \frac{x}{9} \quad \frac{4 \cdot f \cdot (L - x)}{L^2} - \frac{4 \cdot f \cdot x}{L^2} \rightarrow \frac{4}{3} - \frac{x}{9}$$



Рис. 2.7. Геометрические характеристики арки, имеющей форму параболы

## Основные геометрические характеристики арки с очертанием оси в виде эллипса

Исходные данные

Пролет  $L := 24$  м

Уравнение эллипса  $y_3(x) := \frac{2 \cdot f}{L} \cdot \sqrt{x \cdot (L - x)}$

Геометрические функции углов наклона касательных

$$\tan \phi_3(x) := \frac{f}{L} \cdot \frac{(L - x)}{\sqrt{x \cdot (L - x)}}$$

$$\cos \phi_3(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_3(x)}}$$

$$\sin \phi_3(x) := \tan \phi_3(x) \cdot \cos \phi_3(x)$$

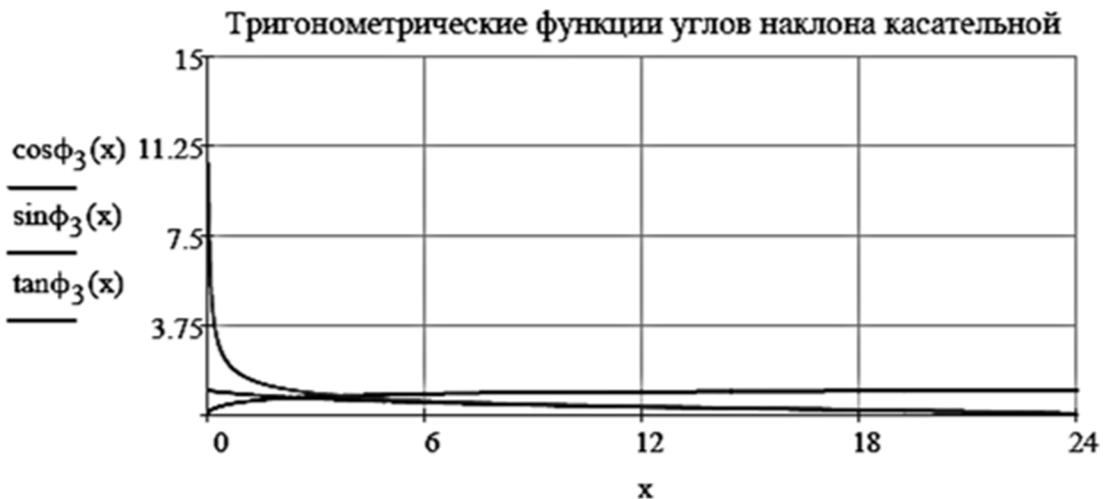


Рис. 2.8. Геометрические характеристики арки, имеющей форму эллипса

## 2.4. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-САПР»

Рассмотрим пример расчета трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-САПР» [8, п. 3.6.2]. На рис. 2.9 показана расчетная схема арки.

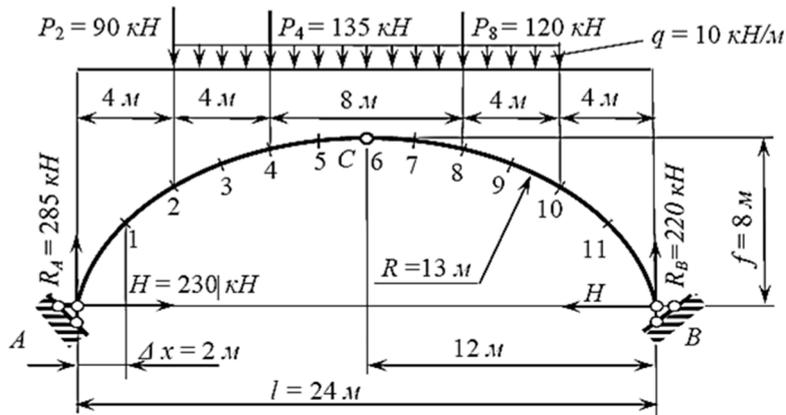


Рис. 2.9. Расчетная схема арки

Ранее все студенты в рамках дисциплины должны были выполнить аналитический расчет внутренних усилий для аналогичной задачи. Далее они должны произвести параллельный численный расчет арки МКЭ по трем расчетным схемам.

**Первая схема** (см. рис. 2.9) – расчет арки в ПК «Ли́ра-САПР» по заданной расчетной схеме с целью выполнения контроля проведенных ранее аналитических вычислений на предмет их корректности и оценки получаемой при этом погрешности.

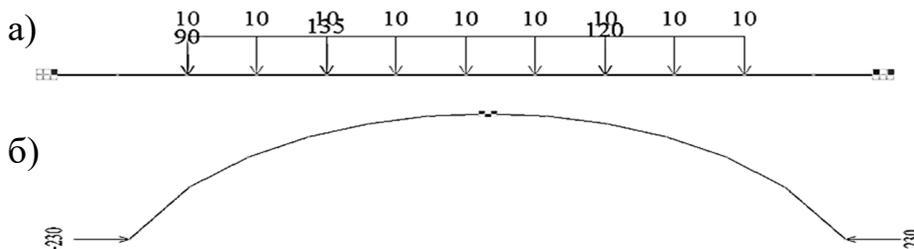


Рис. 2.10. Составляющие расчетные схемы арки:  
а – «балочная» схема; б – «распорная» схема

**Вторая и третья схемы** (рис. 2.10) – разложение расчетной схемы на две составляющих («балочная» схема, схема с распором) и их расчет с дальнейшей проверкой принципа суперпозиции, что в сумме усилия по этим двум расчетным схемам должны дать итоговые усилия в арке. Внешняя нагрузка для расчета по балочной схеме заранее задана, а величина распора проще всего находится из составления уравнения равенства нулю

моментов отсеченной левой (правой) части арки относительно конькового шарнира. В нашей задаче распор получился равным 230 кН.

Расчет арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» также может быть интересен студентам (и даже проектировщикам) тем, что дает новые знания по функционалу этого программного комплекса. Ниже будут рассмотрены вид новый распределенной нагрузки (проективная) и интересная возможность ПК «Ли́ра-СА́ПР» – «нагрузка на фрагмент».

#### ***2.4.1. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» по заданной схеме***

Статический расчет арки в ПК «Ли́ра-СА́ПР» мало чем отличается от расчета балок и рам. Главное отличие – это новые инструменты создания геометрии конструкции. У студентов в заданиях могут быть три варианта формы очертания оси арки: 1) окружность; 2) парабола; 3) эллипс. В аналитических расчетах вычисления ведутся именно по «гладким» криволинейным функциям осей очертания арки. ПК «Ли́ра-СА́ПР» (как и большинство других расчетных САПР-систем) в своей библиотеке КЭ имеет только линейные стержневые элементы. То есть любую конструкцию, имеющую криволинейные очертания, программа будет рассчитывать как систему с кусочно-ломаным линейным очертанием. Может сразу возникнуть вопрос: «Насколько большую погрешность мы получим при замене криволинейной оси арки кусочно-линейной?». Практика расчетов показывает, что даже достаточно грубое разбиение дает небольшую погрешность по сравнению с точным аналитическим решением. Критерием истины как всегда может служить процедура расчетов арки с разным шагом разбиения и сравнением результатов расчета. Даже если мы не будем знать точное решение, небольшое расхождение численных результатов будет говорить об удовлетворительной сходимости.

Запишем исходные данные для нашего примера [8, п. 3.6.2]. Ось арки очерчена по окружности, пролет арки 24 м, стрела подъема арки 8 м. Нам не задан радиус окружности, но его значение вычислено в программе MathCAD – 13 м (см. рис. 2.6). Сечение арки примем из сварного двутавра. Размеры стенки – 12×1100 мм, размеры полок – 2,5×200 мм. Так как арка является статически определимой конструкцией, то размеры и форма сечения элементов арки не будут влиять на результаты вычисления внутренних усилий. Но если стоит задача определения перемещений (прогибов) арки, то жесткостные характеристики должны быть заданы строго в соответствии с параметрами реальной конструкции.

В данном примере арка разделена на двенадцать участков с одинаковой проекцией на ось  $Ox$ , равной 2 м ( $24/12 = 2$ ). Главная причина такого разбиения – схема приложения внешней нагрузки (см. рис. 2.9). На арку

действуют три сосредоточенные нагрузки:  $P_2 = 90$  кН (сечение 2),  $P_4 = 135$  кН (сечение 4),  $P_8 = 120$  кН (сечение 8). Кроме того, на участках с 3-го по 10-й к арке приложена равномерно распределенная нагрузка  $q = 10$  кН/м.

Приступим к формированию заданной расчетной схемы арки в ПК «Ли́ра-САПР». Создадим новый файл, выбрав при этом второй признак (три степени свободы –  $Z, X, Uy$ ). Сразу зададим жесткость сечения арки, в дальнейшем она автоматически будет присвоена элементам. Открыв окно «Жесткости и материалы», перейдем на закладку «Добавить жесткость» и в базе металлических сечений выберем «Составной двутавр». В нашем примере сечения полок и стенки выполнены из листовой стали, но теоретически и полка, и стенка могут иметь другой сечение (швеллер, двутавр и т.д.). Обратим внимание, что свойства (сортамент, вид профиля, его номер) задаются отдельно для полок и стенки. На рис. 2.11 показана процедура создания жесткости сечения арки.

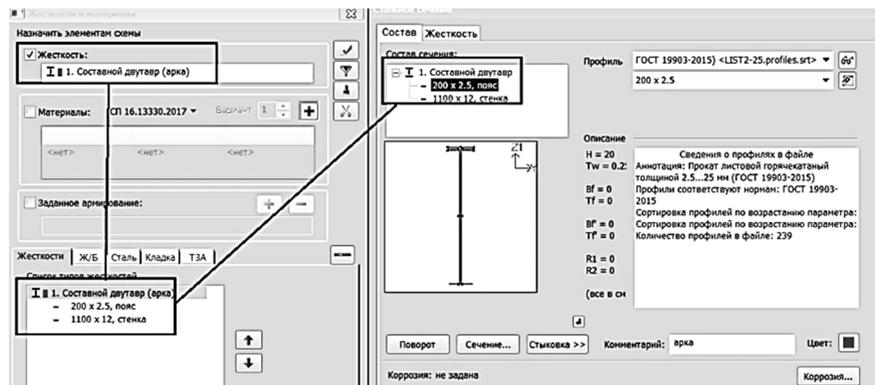


Рис. 2.11. Создание жесткости сечения арки

Для задания геометрии арки используем стандартный прием формирования криволинейных (по факту кусочно-линейных) линий в ПК «Ли́ра-САПР».

Откроем окно задания узлов с помощью функции одной переменной, щелкнув левой кнопкой мыши на закладке «Создание» по пиктограмме «Формульный ввод» (рис. 2.12, а).

В открывшемся окне «Задание узлов» (рис. 2.12, б) последовательно зададим:

- рабочую плоскость  $xOz$ ;
- координаты по оси  $Ox$  начального и конечного узлов (0 и 24 м);
- число создаваемых узлов – 13;
- функцию очертания оси арки:  $((13^2 - (x - 0.5 \cdot 24)^2)^{0.5} + 8) - 13$ .

Небольшое пояснение по записи вводимой функции. В программе MathCAD она выглядит более привычно:  $\sqrt{R^2 - (x - 0.5 \cdot L)^2} + f - R$ . В ПК «Ли́ра-САПР» вид математических операторов принят, как в программе

Excel. При вводе функции мы, конечно, вводили численные (а не символьные) значения радиуса, пролета и стрелы подъема арки.



Рис. 2.12. Задание узлов с помощью функции одной переменной: а – открытие диалогового окна «Формульный ввод»; б – задание функции очертания арки

После применения команды «Задание узлов» на экране появятся 13 новых узлов, соединенных 12-ю КЭ (рис. 2.13).

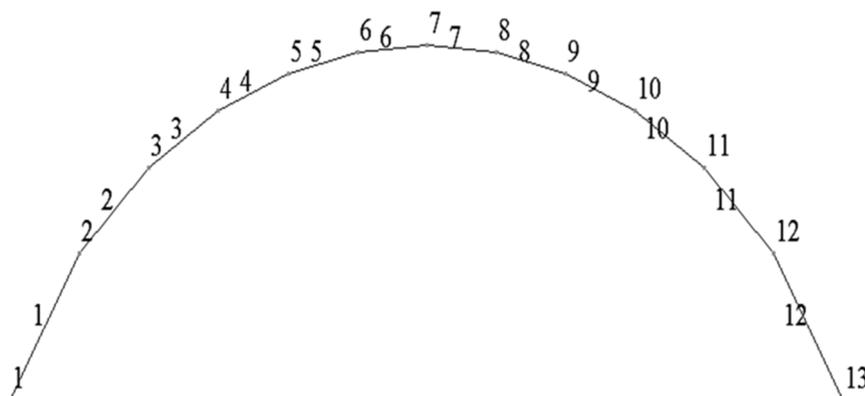


Рис. 2.13. Расчетная схема арки, созданная с помощью инструмента «Формульный ввод»

Чтобы быть уверенными в том, что мы нигде не ошиблись и координаты узлов заданы правильно, выведем на экран таблицу с информацией об узлах расчетной схемы. Для этого щелкнем правой кнопкой мыши в любом месте рабочей области экрана и в открывшемся диалоговом окне щелкнем уже левой кнопкой мыши по команде «Стандартные таблицы».

Для проверки координат созданных узлов (рис. 2.14, б) нам придется опять обратиться к расчетам в программе MathCAD. Задав аналитическое выражение для окружности, вычислим координаты по оси Z для всех тринадцати характерных сечений. Результаты расчетов показаны на рис. 2.15.

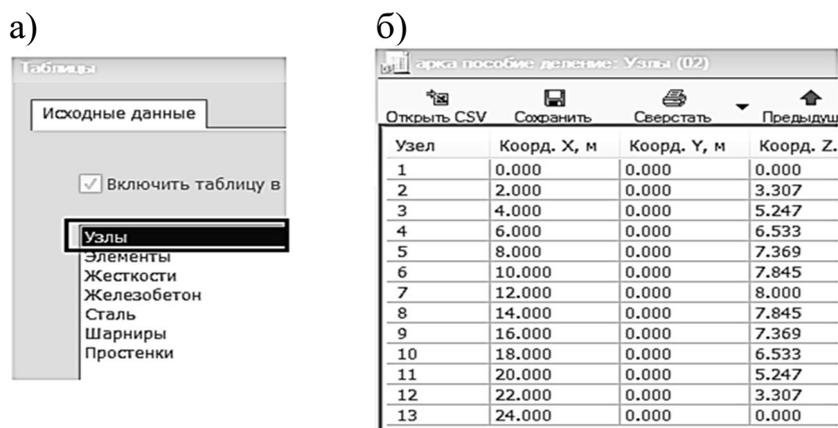


Рис. 2.14. Отображение на экране информации об узлах расчетной схемы: а – открытие диалогового окна «Узлы»; б – таблица с информацией об узлах

$$i := 1..13 \quad z_i := (i - 1) \cdot 2$$

	1
1	0
2	2
3	4
4	6
5	8
6	10
7	12
8	14
9	16
10	18
11	20
12	22
13	24

	1
1	0
2	3.307
3	5.247
4	6.533
5	7.369
6	7.845
7	8
8	7.845
9	7.369
10	6.533
11	5.247
12	3.307
13	0

Рис. 2.15. Вычисление координат узлов арки в программе MathCAD

Советуем пользователям ПК «Лири-САПР» взять на заметку возможный вариант формирования расчетной схемы стержневой конструкции в случае, когда геометрическая ось описывается аналитической функцией (как в рассматриваемом примере с аркой) и когда необходимо получить координаты узлов в произвольных сечениях по длине стержня.

Для задания граничных условий выделим узлы 1 и 13 схемы, закрепим их по двум линейным степеням свободы  $X$  и  $Z$  (шарнирно-неподвижные опоры). Коньковый шарнир можно задать двумя вариантами: шарнир во втором узле для КЭ 6 или шарнир в первом узле для КЭ 7. Выполним это действие по аналогии с тем, как мы ранее создавали шарнир в плоской раме.

Затем последовательно зададим три сосредоточенные нагрузки  $P_2 = 90$  кН,  $P_4 = 135$  кН,  $P_8 = 120$  в узлы 3, 5 и 9.

Чтобы дальше не возникало путаницы, необходимо обратить внимание на тот факт, что нумерация сечений (принятых по заданию) и нумерация узлов КЭ не совпадают! Принять единую нумерацию узлов и сечений не представляется целесообразным. Нумерацию сечений арки в пособии [8] желательно сохранить, потому что так удобнее будет сравнивать результаты аналитического и численного расчетов.

Далее при задании равномерно распределенной нагрузки на КЭ 3-10 необходимо учесть, что эта нагрузка проективная, т.е. 10 кН действуют на 1 м проекции арки, а не на 1 м ее длины.

Перед тем как пояснить понятие проективной нагрузки, еще раз отметим одну из главных особенностей расчета арки – несовпадение глобальной и локальных систем координат. Этот факт влияет не только на процедуру вычисления внутренних усилий в отдельных сечениях арки, но и на задание внешних нагрузок. Когда мы задаем любой тип нагрузки для стержня, продольная ось которого не совпадает с осью  $Ox$  глобальной системы координат, для вычисления составляющих этой нагрузки, действующих по осям  $Ox1$  и  $Oz1$  местной системы координат, нам приходится их домножать на косинус (синус) угла невязки между перечисленными выше системами координат.

Поясним далее понятие проективной нагрузки с помощью встроенной справки ПК «Лири-САПР». Нажмем клавишу F1 и в открывшемся окне справочной системы ПК в закладке «Указатель» найдем ключевое слово «Нагрузка на стержни: Равномерно распределенная нагрузка».

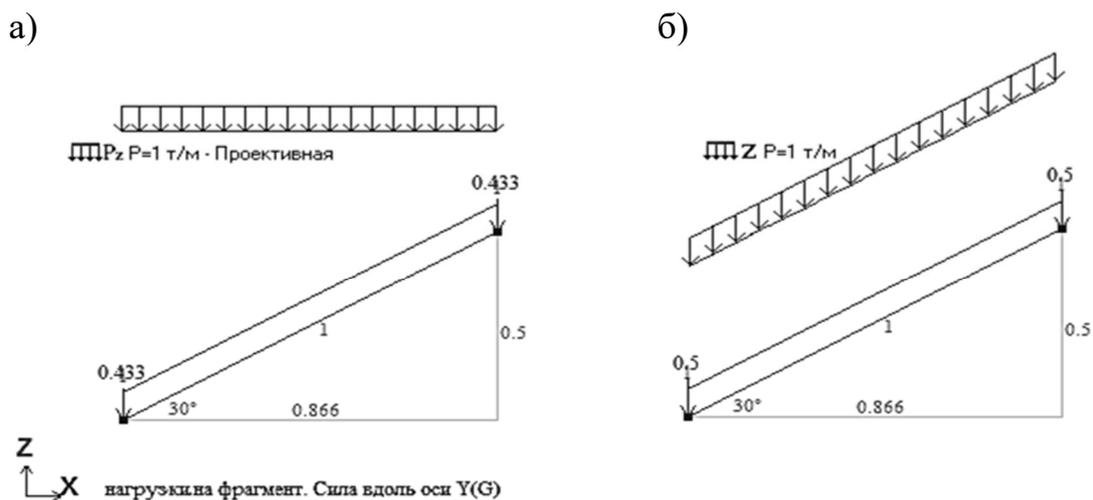


Рис. 2.16. Два варианта задания равномерно распределенной нагрузки на стержни: а – проективная, задаваемая на 1 м проекции КЭ; б – стандартная, задаваемая на 1 м длины КЭ

Двойной щелчок левой кнопкой мыши отобразит диалоговое окно с основными параметрами выбранного типа нагрузки. Выше на рис. 2.16 приведена схема, скопированная из этого диалогового окна, наглядно иллюстрирующая смысл проективной нагрузки.

Сразу отметим, что задание проективной нагрузки возможно только в глобальной системе координат. При отметке флажка «Проективная» нагрузка будет приложена по направлению одной из осей глобальной системы координат на проекцию этого элемента, ортогональную направлению этой нагрузки.

Как задание проективной нагрузки отображается на результатах расчетов, рассмотрим на простом примере расчета консольной балки длиной 6 м с проекциями на оси  $Ox$  и  $Oy$ , равными 4 и 3 м (рис. 2.17). На балку действует внешняя равномерно распределенная нагрузка  $q = 8$  кН/м, приложенная в одной расчетной схеме как проективная, а во второй – как стандартная.

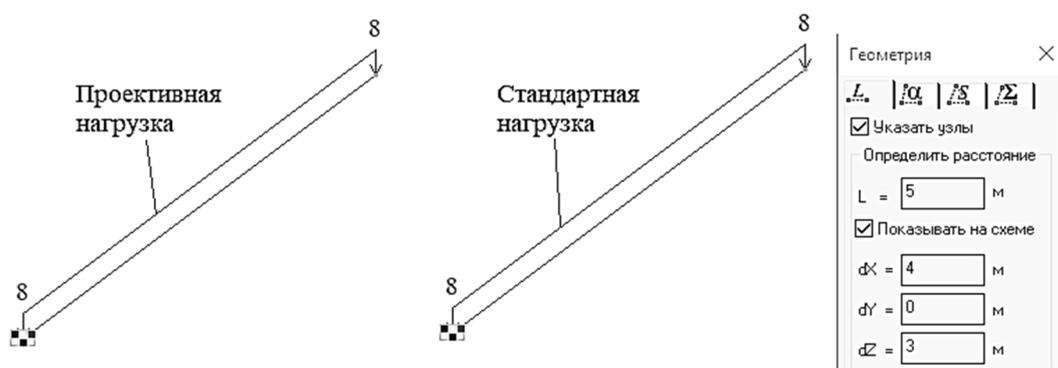


Рис. 2.17. Две расчетные схемы консольной балки

Предлагаем студентам самостоятельно выполнить расчет балки в ПК «Лира-САПР», затем в программе MathCAD сравнить полученные численные результаты с простым сбором нагрузок. Пример такого оформленного документа приведен на рис. 2.18.

Приведенные расчеты достаточно простые, но, по мнению автора, они дают возможность студенту на таком элементарном примере понять разницу между стандартной и проективной нагрузками. В программе MathCAD путем простых арифметических операций были вычислены суммарные полные значения стандартной и проективной нагрузок, а также их составляющие, действующие по направлениям локальных осей  $Ox1$  и  $Oz1$ . Для консольной балки эти суммарные значения должны быть равны значениям продольных и поперечных сил, возникающих в заделке, что мы и видим по результатам расчетов.

## Внутренние усилия, возникающие в стропильной балке от действия двух типов нагрузок

### 1 Исходные геометрические данные

Проекция оси стропильной балки  $dX := 4 \text{ м}$   $dY := 3 \text{ м}$

Длина стропильной балки  $L := \sqrt{dX^2 + dY^2} = 5 \text{ м}$

Косинус угла наклона стропильной балки к оси Oх  $\cos\alpha := \frac{dX}{L} = 0.8$

Синус угла наклона стропильной балки к оси Oх  $\sin\alpha := \frac{dY}{L} = 0.6$

### 2 Значения равномерно распределенных нагрузок

Стандартная равномерно распределенная нагрузка, приложенная к балке

$$q_{\text{станд}} := 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Значение составляющей стандартной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oх1

$$q_{\text{станд\_x}} := q_{\text{станд}} \cdot \sin\alpha = 4.8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Значение составляющей стандартной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oz1

$$q_{\text{станд\_z}} := q_{\text{станд}} \cdot \cos\alpha = 6.4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Проективная равномерно распределенная нагрузка, приложенная к балке

$$q_{\text{проект}} := q_{\text{станд}} \cdot \cos\alpha = 6.4 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Значение составляющей проективной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oх1

$$q_{\text{проект\_x}} := q_{\text{проект}} \cdot \sin\alpha = 3.84 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Значение составляющей проективной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oz1

$$q_{\text{проект\_z}} := q_{\text{проект}} \cdot \cos\alpha = 5.12 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Рис. 2.18. Результаты расчетов суммарных нагрузок в программе MathCAD (начало)

### 3 Суммарные значения внешних равномерно распределенных нагрузок

Суммарное значение стандартной равномерно распределенной нагрузки, приложенной к балке

$$Q_{\text{станд}} := q_{\text{станд}} \cdot L = 40 \quad \text{кН}$$

Суммарное значение составляющей стандартной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oх1

$$Q_{\text{станд\_x}} := q_{\text{станд\_x}} \cdot L = 24 \quad \text{кН}$$

Суммарное значение составляющей стандартной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oz1

$$Q_{\text{станд\_z}} := q_{\text{станд\_z}} \cdot L = 32 \quad \text{кН}$$

Суммарное значение проективной равномерно распределенной нагрузки, приложенной к балке

$$Q_{\text{проект}} := q_{\text{проект}} \cdot L = 32 \quad \text{кН}$$

Суммарное значение составляющей проективной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oх1

$$Q_{\text{проект\_x}} := q_{\text{проект\_x}} \cdot L = 19.2 \quad \text{кН}$$

Суммарное значение составляющей проективной равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль местной оси Oz1

$$Q_{\text{проект\_z}} := q_{\text{проект\_z}} \cdot L = 25.6 \quad \text{кН}$$

Рис. 2.18. Результаты расчетов суммарных нагрузок в программе MathCAD (продолжение)

4 Результаты расчета внутренних усилий в стропильной балке (эпюры продольных и поперечных сил)

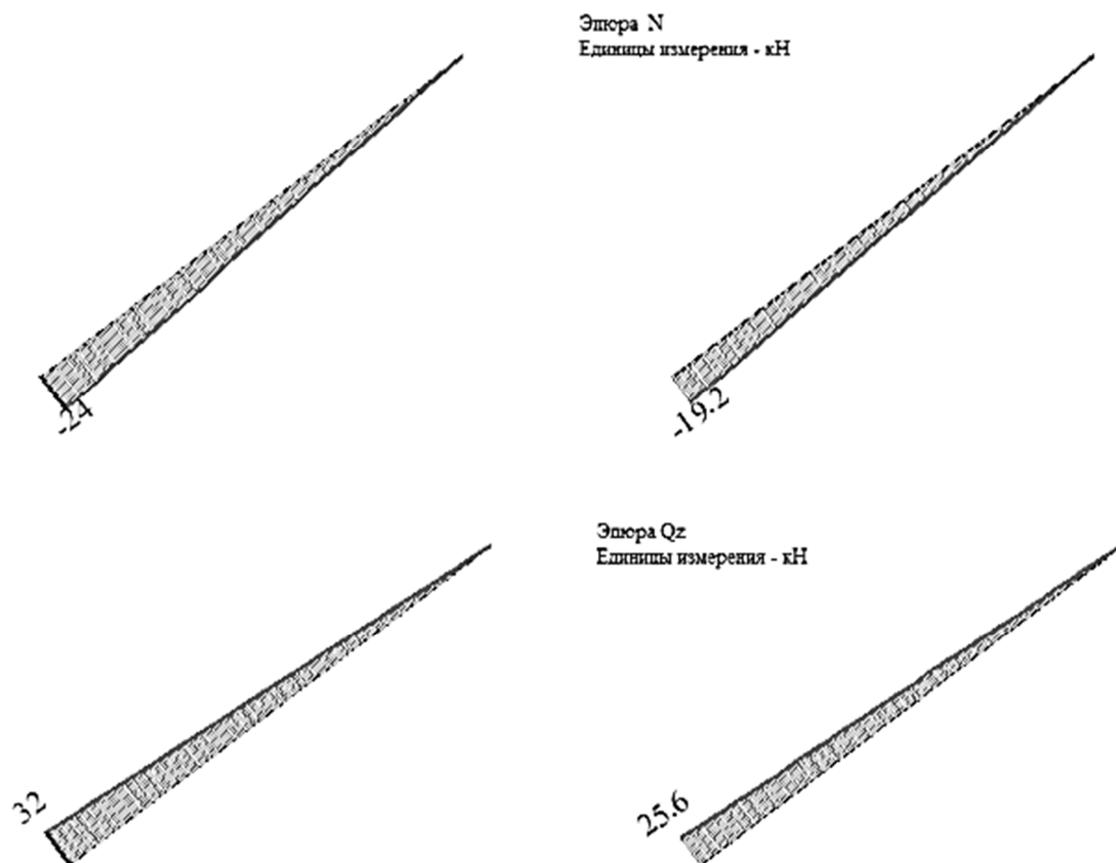


Рис. 2.18. Результаты расчетов суммарных нагрузок в программе MathCAD (окончание)

После того как мы разобрались с понятием проективной нагрузки, зададим ее на рассматриваемую арку (рис. 2.19).

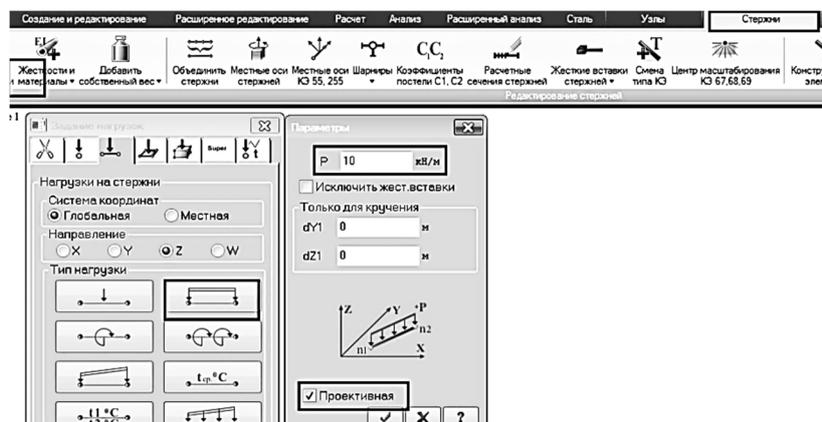


Рис. 2.19. Порядок задания проективной равномерно распределенной нагрузки

Далее сохраним файл и запустим его на статический расчет. Ниже на рис. 2.20 приведены результаты вычисления изгибающих моментов в ПК «Лири-САПР», которые практически совпали с результатами аналитического расчета [8, с. 54, рис. 3.23].

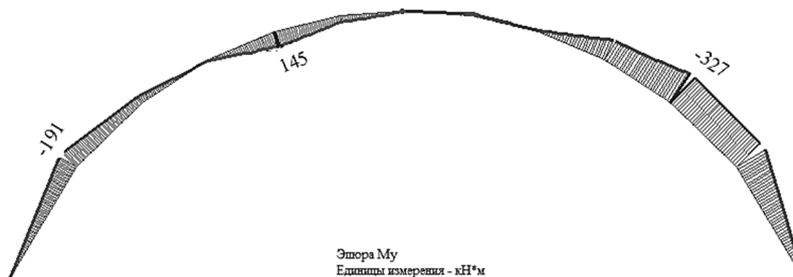


Рис. 2.20. Эпюра изгибающих моментов в арке

Если мы сравним значения поперечных и продольных сил, вычисленных в ПК «Лири-САПР», с аналитическими расчетами, то увидим, что их значения существенно расходятся. Полученная погрешность расчетов объясняется тем простым фактом, что в программе геометрическая схема арки представляет собой набор отдельных линейных отрезков. Тогда как фактически геометрическая схема арки – это часть окружности.

На этом примере расчета арки также можно продемонстрировать очень удобный инструмент «Нагрузка на фрагмент», позволяющий в явном виде вычислить опорные реакции. В задачах проектирования зданий и сооружений этот инструмент очень удобен для сбора нагрузок на фундаменты.

Найдем вертикальную реакцию и распор в узле 1 с помощью инструмента «Нагрузка на фрагмент». Для выполнения этой операции необходимо задать следующую информацию: номера узлов, в которых должна быть вычислена нагрузка; номера элементов, которые передают нагрузку на эти узлы; углы поворота узлов вокруг оси Z общей системы координат.

Выделим узел 1 и КЭ 1, перейдем на закладку «Расширенный анализ» и активируем режим расчета на фрагмент – пиктограмма «Рассчитать нагрузку на фрагмент». В открывшемся окне «Расчет нагрузки на фрагмент» последовательно нажмем кнопку «обновить» сначала для элементов, потом для узлов, тем самым добавив узел 1 и КЭ 1 в списки, для которых будет выполнен расчет. Последним действием щелкнем мышью по кнопке «Выполнить расчет». После закрытия диалогового окна «Расчет нагрузки на фрагмент» последовательно вызовем на экран мозаики вертикальных и горизонтальных усилий (реакций), действующих в узле 1 (рис. 2.21). Результаты полностью совпали с аналитическим решением [8, п. 3.6.2].

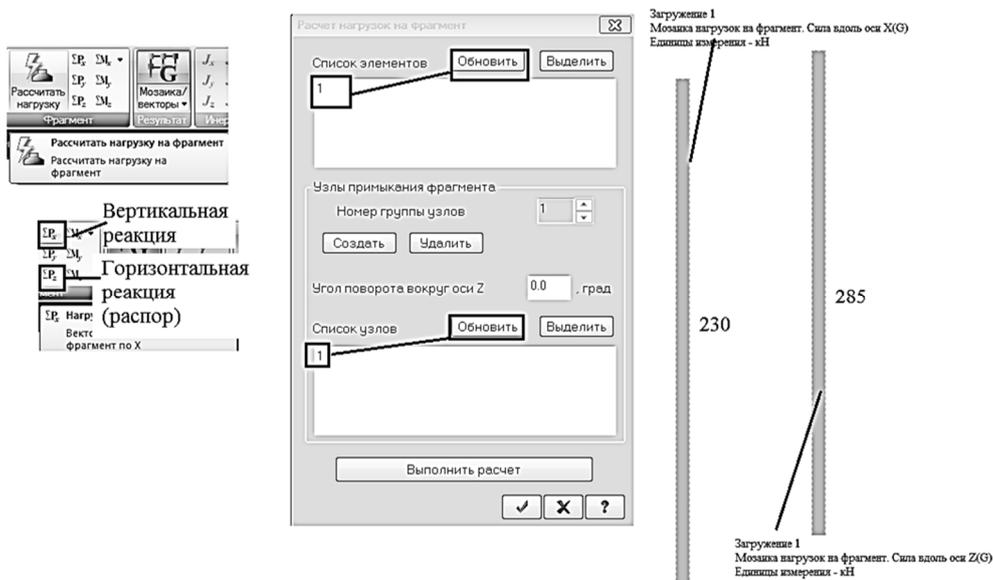


Рис. 2.21. Определение реакций в узле 1 с помощью инструмента «Нагрузка на фрагмент»

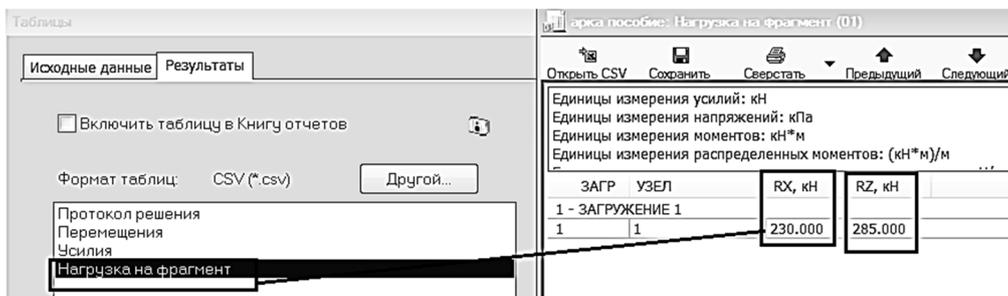


Рис. 2.22. Вывод на экран реакций в узле 1 в табличном виде

Также вычисленные реакции можно посмотреть с помощью стандартных таблиц. Нажмем правой кнопкой мыши в любом свободном поле и в открывшемся интерактивном меню щелчком мыши по команде «Стандартные таблицы» откроем соответствующую таблицу (рис. 2.22).

#### 2.4.2. Расчет трехшарнирной арки в ПК «Лири-САПР» разложением на две составляющих

Рассмотрим математические модели второй и третьей расчетных схем в ПК «Лири-САПР». Модель второй («балочной») схемы проста для понимания – создаем обычную балку (в нашем примере пролетом 24 м). При этом в центре балки (коньке) шарнир убираем и одну опору меняем на шарнирно-подвижную. Внешняя нагрузка остается такой же, как и для арки (рис. 2.23).

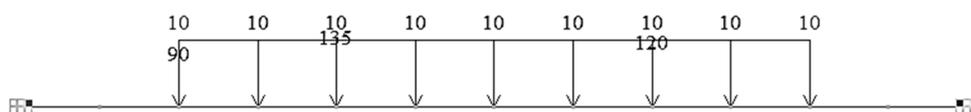


Рис. 2.23. Балочная расчетная схема арки

А вот третья расчетная схема получается отчасти парадоксальной. Мы ведем расчет на действие распора, приложенного в двух опорных узлах. То есть распор, по сути, из реактивной силы превратился в активную нагрузку. Но при этом создаем жесткое закрепление арки в коньковом узле (рис. 2.24).

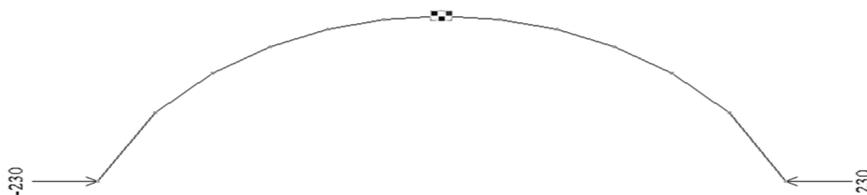


Рис. 2.24. Расчетная схема арки от действия распора

Далее выполним расчеты арки по двум вышеописанным расчетным схемам в файле, где велся расчет арки по заданной схеме.

Геометрическую модель балочной расчетной схемы создадим с помощью шаблона «Создание плоских фрагментов и сетей». Зададим двенадцать горизонтальных КЭ длиной по 2 м (рис. 2.25). Для того чтобы вторая схема не наложилась на первую, координаты первого узла укажем следующие:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 12$  м.

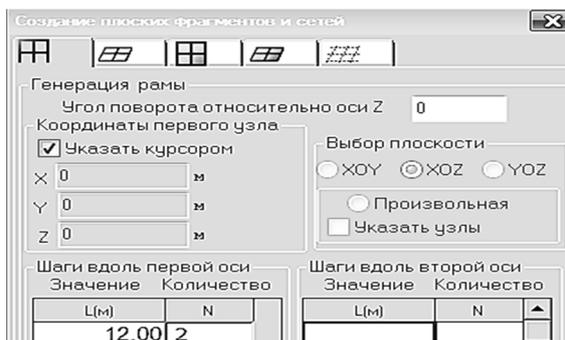


Рис. 2.25. Создание геометрической модели балочной схемы арки

Зададим внешнюю нагрузку на балочную схему по полной аналогии с основным расчетом. Тип нагрузки (проективная) можно не указывать. Жесткость сечениям новой конструкции присвоится автоматически. Как уже указывалось выше, наиболее корректно задать одну опору шарнирно-подвижной, а другую – шарнирно-неподвижной. Итоговый вид балочной расчетной схемы приведен выше на рис. 2.19.

Третью расчетную схему получим на базе основной первой расчетной схемы выполнением последовательных операций:

- 1) копирование первой расчетной схемы инструментом по параметрам на 16 м вверх по оси  $Z$ ;
- 2) удаление двух шарнирно-неподвижных опор в первом и последнем узлах арки;
- 3) создание жесткого закрепления (исключение степеней свободы  $X$ ,  $Z$ ,  $U_y$ ) в коньковом узле;
- 4) удаление всех активных внешних нагрузок, действующих по основной схеме. Порядок выполнения – отметка всех узлов и элементов, переход на закладку «Стержни», «Нагрузка на стержни», «Задание нагрузок», «Корректировка нагрузок», удаление всех нагрузок с узлов и элементов (рис. 2.26);
- 5) задание усилий распора, равного 230 кН, в первый и последний узлы арки. Итоговая (третья) расчетная схема арки приведена на рис. 2.24.

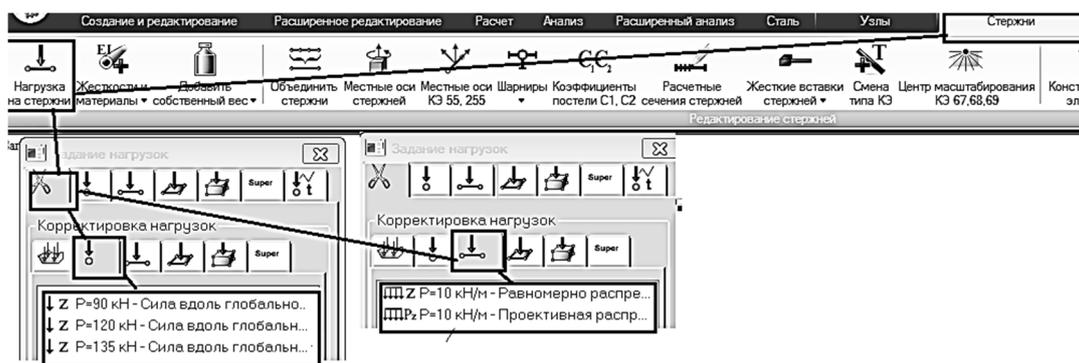


Рис. 2.26. Порядок удаления внешних нагрузок в третьей расчетной схеме

Далее сохраним сделанные изменения в файле и запустим программу на расчет.

### 2.4.3. Анализ результатов расчета арки по второй и третьей расчетным схемам

Выполним три основные контрольные проверки вычисленных изгибающих моментов по второй и третьей расчетным схемам:

- 1) момента в коньковом узле (узел 7 в заданной расчетной схеме);
- 2) максимального момента, растягивающего нижние волокна арки (узел 5 в заданной расчетной схеме);
- 3) максимального момента, растягивающего верхние волокна арки (узел 11 в заданной расчетной схеме).

Моменты в коньковом узле по второй и третьей расчетной схемам получились равными 1840 кН·м, но с разными знаками, в сумме получаем ноль.

Максимальный момент в основной расчетной схеме, растягивающий нижние волокна арки, равный 145 кН·м, действует в пятом расчетном сечении. Во второй балочной расчетной схеме в этом же сечении момент равен 1840 кН·м, в третьей расчетной схеме – 1694,95 кН·м со знаком минус. В итоге сумма усилий по второй и третьей схемам дает полное значение по исходной (первой) расчетной схеме (рис. 2.27, а).

Сделаем также аналогичную проверку для максимального момента в основной расчетной схеме, растягивающего верхние волокна арки, равного -327 кН·м (рис. 2.27, б).

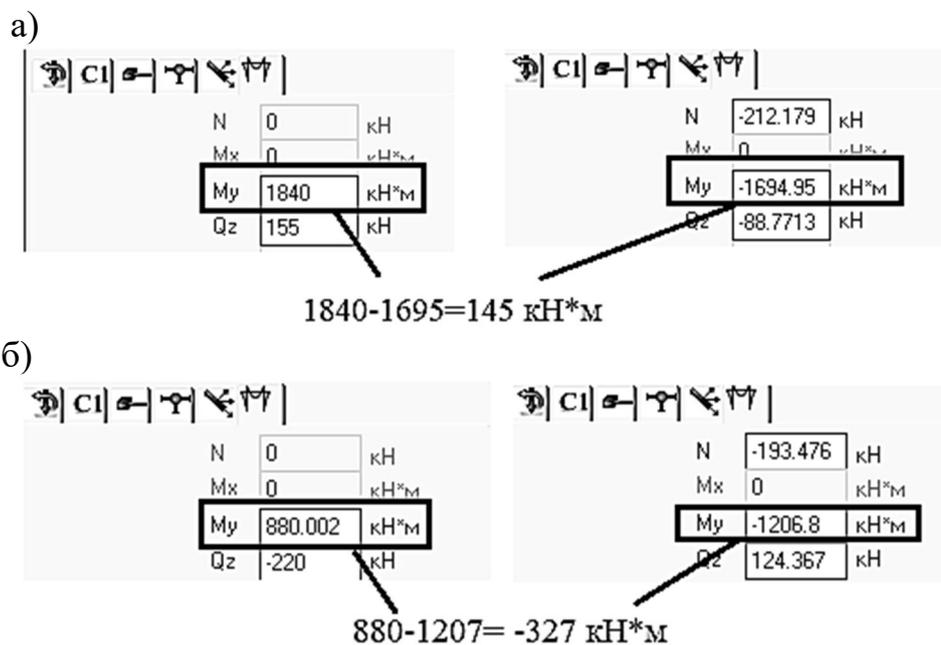


Рис. 2.27. Проверка принципа суперпозиции для максимальных изгибающих моментов, возникающих в основной схеме:  
а – положительного в узле 5; б – отрицательного в узле 11

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ИЗГИБАЕМЫХ БАЛОК

Перемещения элементов по многим причинам являются одним из самых важных параметров НДС любой конструкции. Перечислим наиболее важные практические случаи, когда необходимо определять перемещения:

1. *Расчет по второй группе предельных состояний.* Проверка пригодности конструкций к эксплуатации чаще всего заключается в том, чтобы значение фактического максимального прогиба балки не превышало допустимое значение, определяемое нормами.

2. *Расчет статически неопределимых систем методом сил.* Коэффициенты системы канонических уравнений метода сил представляют собой перемещения узлов системы, в которых связи заменяются неизвестными виртуальными реакциями.

3. *Расчет строительных конструкций МКЭ в форме метода перемещений.* Подавляющее большинство расчетных САПР-систем реализуют процедуру МКЭ именно в форме метода перемещений. То есть первоначально определяются перемещения в узлах системы, а затем по ним уже остальные параметры НДС. Зная функцию распределения перемещений по области КЭ, можно с помощью дифференциальных зависимостей вычислить все необходимые для дальнейшего расчета функции внутренних усилий, возникающих в конструкции. *Знание и понимание процедуры определения перемещений в МКЭ являются неотъемлемым требованием к квалификации пользователя расчетных САПР-систем, использующих МКЭ.*

4. *Определение параметров НДС конструкций при проведении экспериментов.* Если эксперимент позволяет получить перемещения конструкции в различных точках, то далее по значениям этих перемещений можно приближенно вычислить значения внутренних усилий. При этом используются не точные дифференциальные зависимости, а приближенные разностные отношения. Примеры таких приближенных вычислений можно посмотреть в пособии, посвященном расчету железобетонных плит [10, с. 24, п. 1.3.3]. Правда, в этом пособии просто демонстрируется корректность методики приближенных вычислений через разностные отношения, а в реальном эксперименте эта методика является основным численным инструментом для вычисления усилий.

Для изгибаемых балок основной формой перемещения является прогиб – перемещение балки в направлении, перпендикулярном к ее оси. Поэтому именно *задача вычисления прогиба различными методами* будет рассмотрена ниже в этом разделе.

Необходимо отметить тот факт, что для балок кроме прогибов важными параметрами НДС являются также углы поворота и кривизны. Углы поворота сечений являются одними из неизвестных в МКЭ. С помощью

кривизны обычно определяют изгибающие моменты. Например, при физически нелинейном расчете изгибающих железобетонных элементов очень часто определяющими являются как раз зависимости «момент – кривизна», а не «деформации – напряжения».

Рассмотрим простой пример определения перемещений консольной балки четырьмя различными методами с указанием основной цели выполняемого расчета.

Первые два метода позволяют получать полную картину распределения прогибов (углов поворота) по длине балки. Этот материал излагается в перспективе изучения в будущем студентами специальных дисциплин по расчету строительных конструкций.

Метод Мора решает задачу нахождения прогиба (угла поворота) для одного конкретного сечения балки. Знание этого материала является обязательным при решении задач статически неопределимых систем классическими методами строительной механики:

**1. Прямое интегрирование дифференциального уравнения изгиба балки.** В практических расчетах такой метод очень редко применяется. Здесь он приводится с главной целью напомнить студентам о дифференциальных зависимостях между прогибами, углами поворотов и кривизнами сечений балки.

**2. Расчет МКЭ в ПК «Ли́ра-САПР».** Как уже неоднократно объяснялось выше, при изучении аналитических методов расчета конструкций МКЭ – это идеальный инструмент для контроля ручных вычислений. Кроме того, в рассматриваемом примере показывается технология построения линии прогибов балки с помощью аппроксимирующих функций, тем самым вводя студента в основы МКЭ.

**3. Расчет в программе «ЭСПРИ».** Как и ПК «Ли́ра-САПР», программа «ЭСПРИ» может помочь студентам контролировать ход аналитических расчетов отдельных перемещений с помощью интеграла Мора (формулы Симпсона-Корноухова). Это, конечно, актуально в первую очередь для перемножения эпюр изгибающих моментов, которые имеют сложный криволинейный характер, и где зачастую студенты допускают ошибки арифметического характера.

**4. Аналитический расчет в программе MathCAD с помощью интеграла Мора (правила Верещагина).** Цель этого расчета предельно проста – перенос в MathCAD ручных расчетов (приобретение навыков работы в этой программе).

Необходимо отметить, что для расчета перемещений программа «ЭСПРИ» тоже использует (как и при расчете в программе MathCAD) интеграл Мора. Но только в программе MathCAD студент сам выполняет вычисления, а «ЭСПРИ» выдает готовый результат расчетов.

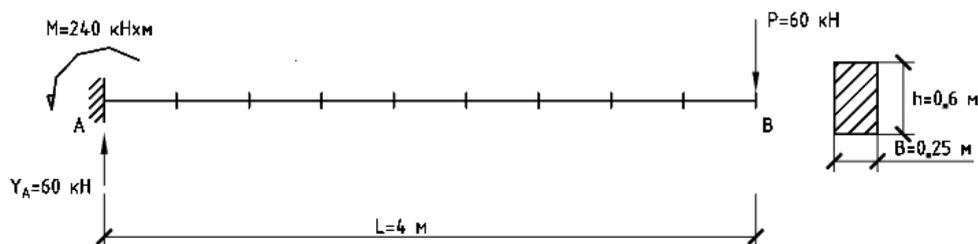


Рис. 3.1. Расчетная схема консольной балки

Расчетная схема балки приведена на рис. 3.1.

Исходные данные рассматриваемой ниже задачи следующие: пролет балки  $L = 4$  м, сечение балки  $0,25 \times 0,6$  м, модуль упругости  $E = 3 \times 10^7$  кПа (бетон класса В25). На балку действует сосредоточенная сила  $P = 60$  кН, приложенная в крайнем сечении балки.

### 3.1. Определение перемещений балки интегрированием дифференциального уравнения

Главное достоинство метода прямого интегрирования уравнения изгиба балки заключается в том, что он позволяет получить гладкую аналитическую функцию прогибов, с помощью которой можно вычислить перемещения любой точки балки.

Но этот метод предполагает аналитические преобразования, которые обычно на практике могут быть реализованы только для простых расчетных схем. Кроме того, для получения решения должна быть изначально известна функция изгибающих моментов по длине балки, т.е. этот метод имеет смысл использовать для вычисления перемещений только статически определимых систем.

Функция прогибов, которая будет получена ниже аналитическим методом, и итоговая аппроксимирующая функция МКЭ для рассматриваемой задачи имеют разную форму записи, но, по сути, являются абсолютно идентичными (ниже это будет доказано решением в программе MathCAD).

И главное, и в аналитическом решении, и в численном решении используются одни и те же дифференциальные зависимости между отдельными параметрами НДС балки:

- функция углов поворота сечений балки является первой производной от функции прогибов  $y(x)$

$$\Theta(x) = \frac{d}{dx} y(x);$$

- функция кривизн сечений балки является первой производной от функции прогибов (и второй производной от функции прогибов)

$$k(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x).$$

В подразд. 3.2 на примере будет показано построение линии прогибов балки отдельного КЭ с помощью полиномов Эрмита.

Порядок решения задачи методом интегрирования уравнения изгиба балки в программе MathCAD будет следующий:

1. Задаем исходные данные. Поясняем все величины, входящие в это уравнение.

2. Записываем функцию изгибающих моментов в балке, полученную по простым правилам строительной механики. Для наглядности строим эпюру изгибающих моментов.

3. Записываем уравнение изгиба балки. Поясняем все величины, входящие в это уравнение.

4. Выполняем интегрирование уравнения изгиба консольной балки. Постоянные интегрирования C1 и C2 находим исходя из граничных условий задачи. Записываем выражения для функций прогибов и углов поворота сечений балки.

5. Строим графики функций прогибов и углов поворота сечений балки. Вычисляем значения прогибов и углов поворота девяти сечений балки, полученных делением ее на восемь равномерных участков (для дальнейшего сравнения аналитических и численных результатов расчета).

Ниже на рис. 3.2 приведен пример вычисления линии прогибов консольной балки в программе MathCAD методом прямого интегрирования, согласно описанному выше алгоритму.

#### Определение перемещений балки интегрированием дифференциального уравнения

##### 1. Исходные данные

Длина балки  $L := 4 \text{ м}$

Внешняя нагрузка  $P := 60 \text{ кН}$

Ширина сечения балки  $b := 0.25 \text{ м}$

Высота сечения балки  $h := 0.6 \text{ м}$

Модуль упругости материала  $E := 3 \cdot 10^7 \text{ кПа}$

Момент инерции сечения балки  $I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ м}^4$

Изгибная жесткость сечения балки  $EI := E \cdot I = 1.35 \times 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$

Рис. 3.2. Пример расчета линии прогибов в программе MathCAD аналитическим методом (начало)

## 2. Построение эпюры изгибающих моментов в балке

Вертикальная реакция в заделке

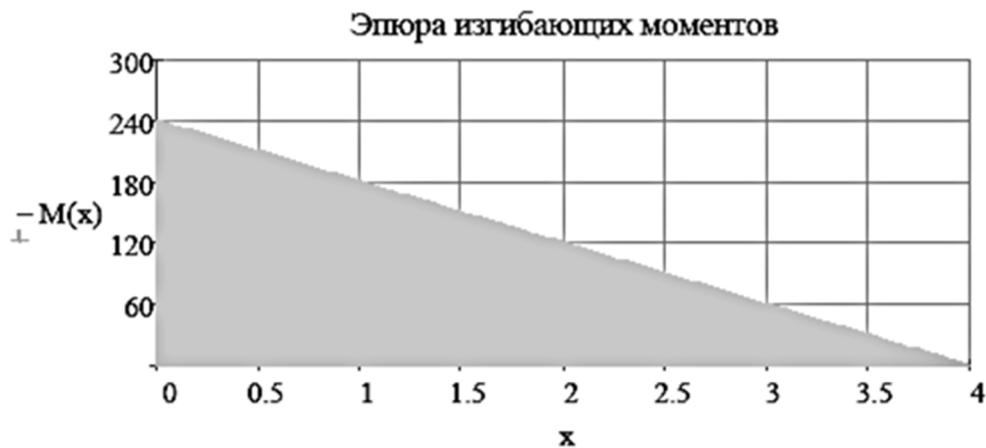
$$Y_A := P = 60 \quad \text{кН}$$

Момент в заделке

$$M_A := -P \cdot L = -240 \quad \text{кН} \cdot \text{м}$$

Функция изгибающих моментов

$$M(x) := M_A + Y_A \cdot x$$



## 3. Общий вид уравнения прямого поперечного изгиба балки

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$y(x)$  - прогиб, м

$$\Theta(x) = \frac{d}{dx} y(x) \quad \text{- угол поворота, радиан}$$

$$k(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x) \quad \text{- кривизна, 1/м}$$

Рис. 3.2. Пример расчета линии прогибов в программе MathCAD аналитическим методом (продолжение)

#### 4. Интегрирование уравнения изгиба консольной балки

Граничные условия в заделке

$$y(0) = 0 \quad \text{прогиб равен нулю}$$

$$\Theta(0) = \frac{d}{dx}y(0) = 0 \quad \text{угол поворота равен нулю}$$

Записываем уравнение изгиба консольной балки  
(изгибную жесткость для удобства выполнения преобразований перенесли в левую часть уравнения)

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \cdot EI = M_A + Y_A \cdot x$$

Выполняем первый раз интегрирование дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}y(x) \cdot EI = M_A \cdot x + Y_A \cdot \frac{x^2}{2} + C1$$

Выполняем второй раз интегрирование дифференциального уравнения

$$y(x) \cdot EI = M_A \cdot \frac{x^2}{2} + Y_A \cdot \frac{x^3}{6} + C1 \cdot x + C2$$

Константы интегрирования дифференциального уравнения C1 и C2 находим из ранее записанных граничных условий

$$y(0) = 0 \quad 0 \cdot EI = M_A \cdot \frac{0^2}{2} + Y_A \cdot \frac{0^3}{6} + C1 \cdot 0 + C2 \quad C2 := 0$$

$$\frac{d}{dx}y(0) = 0 \quad 0 \cdot EI = M_A \cdot 0 + Y_A \cdot 0^2 + C1 \quad C1 := 0$$

С учетом того, что обе константы интегрирования получились равными нулю записываем функцию распределения прогибов по длине балки

$$y(x) \cdot EI = M_A \cdot \frac{x^2}{2} + Y_A \cdot \frac{x^3}{6} \quad y(x) := \frac{M_A \cdot \frac{x^2}{2} + Y_A \cdot \frac{x^3}{6}}{EI}$$

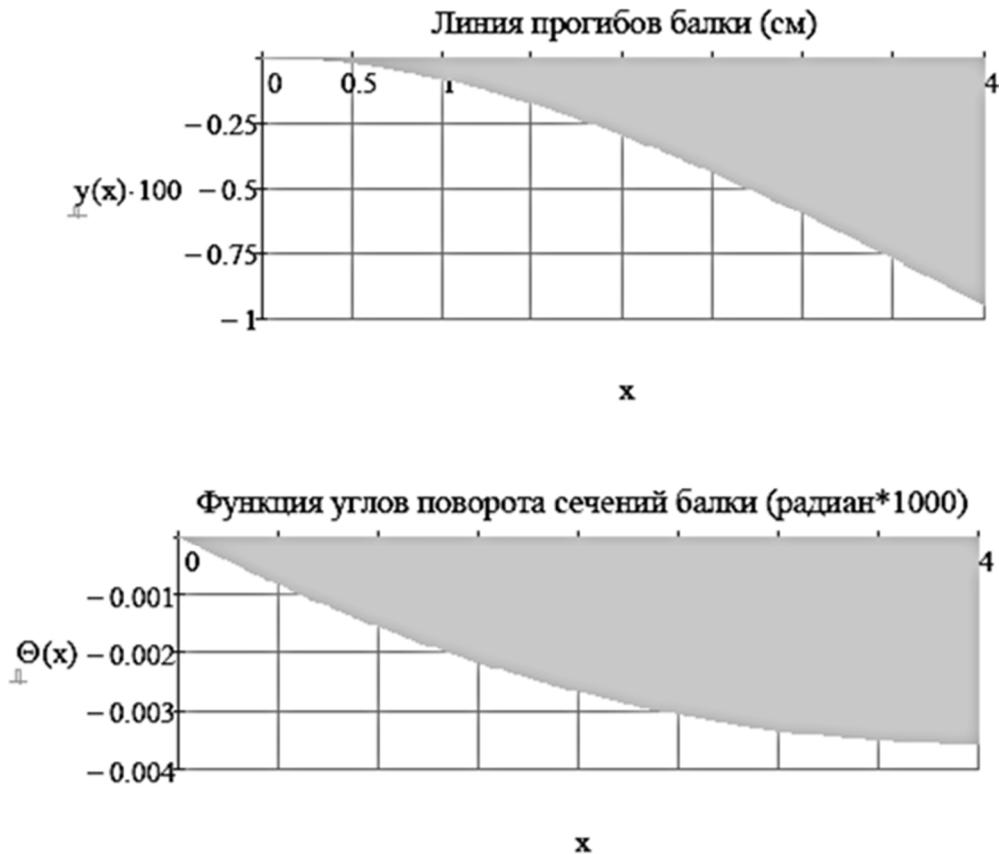
Далее записываем также выражение для функции углов поворота сечений балки

$$\Theta(x) = dy(x) = \frac{M_A \cdot x + Y_A \cdot \frac{x^2}{2}}{EI} \quad \Theta(x) := \frac{M_A \cdot x + Y_A \cdot \frac{x^2}{2}}{EI}$$

Рис. 3.2. Пример расчета линии прогибов в программе MathCAD аналитическим методом (продолжение)

## 5. Графический вывод перемещений и углов поворота сечений балки

Строим графики функций прогибов и углов поворота сечений балки



Вычисляем значения прогибов и углов поворота для девяти сечений балки, полученных делением ее на восемь равномерных участков

$n := 8$  - число равномерных участков балки

$i := 1 .. n + 1$  - число сечений

$L1 := \frac{L}{n} = 0.5$  - длина участка балки, м

$X_i := L1 \cdot (i - 1)$  - координаты сечений балки, м

$X^T = (0 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5 \ 4)$

Рис. 3.2. Пример расчета линии прогибов в программе MathCAD аналитическим методом (продолжение)

Значения прогибов  
для девяти сечений  
балки, см

$$y(X_i) \cdot 100 =$$

0
-0.021
-0.081
-0.175
-0.296
-0.44
-0.6
-0.771
-0.948

Значения углов  
поворота для девяти  
сечений балки,  
радианы\*1000

$$\Theta(X_i) \cdot 1000$$

0
-0.833
-1.556
-2.167
-2.667
-3.056
-3.333
-3.5
-3.556

Рис. 3.2. Пример расчета линии прогибов в программе MathCAD аналитическим методом (окончание)

В приведенном выше примере расчета перемещений и углов поворота сечений вычисления производятся с использованием единиц измерения – метры и радианы. В ПК «Лира-САПР» вывод результатов расчета тех же параметров деформирования конструкции обычно производится в сантиметрах и радианах (увеличенных в 1000 раз). Поэтому для удобства сравнения результатов (см. рис. 3.2, окончание) выполняется перевод результатов расчета в одни и те же единицы.

### 3.2. Определение перемещений консольной балки в ПК «Лира-САПР»

Далее выполним расчет консольной балки с такими же исходными данными в ПК «Лира-САПР». Для сравнения численных результатов расчета балки с аналитическим решением разобьем балку на восемь КЭ длиной по 0,5 м (рис. 3.3). Напомним, что в линейных расчетах стержневых конструкций шаг разбиения на КЭ влияет только на удобство анализа полученных результатов расчета, но не влияет на точность решения.

Зададим жесткость балки и присвоим ее элементам балки (рис. 3.4).

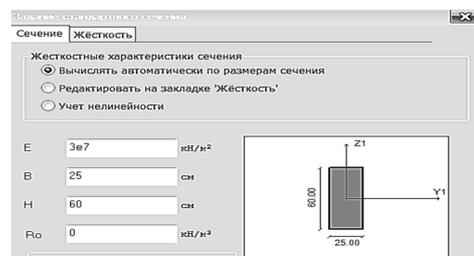


Рис. 3.4. Задание жесткости балки

Далее закрепим первый узел по трем степеням свободы ( $X, Z, Uy$ ) – смоделируем жесткую заделку. В последний узел 9 приложим сосредоточенную силу, равную 60 кН, и сохраним файл. Созданная расчетная схема консольной балки показана на рис. 3.5.

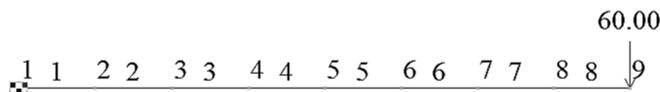


Рис. 3.5. Расчетная схема консольной балки

Выполним статический расчет балки и перейдем к анализу результатов расчета (закладка «Анализ»). Вызовем щелчком правой кнопки мыши контекстное меню, в нем выберем команды «Стандартные таблицы» и далее пункт списка «Перемещения». На рис. 3.6 показаны вертикальные перемещения и углы поворота в девяти узлах балки. Обратим внимание на тот факт, что программа выводит значения углов поворота увеличенными в 1000 раз по той простой причине, что иначе они будут отображаться малыми величинами, работать с которыми не очень удобно. Программа не выводит значения кривизн сечений, но их можно найти приближенно через отношения углов поворота [10, с. 24, п. 1.3.3].

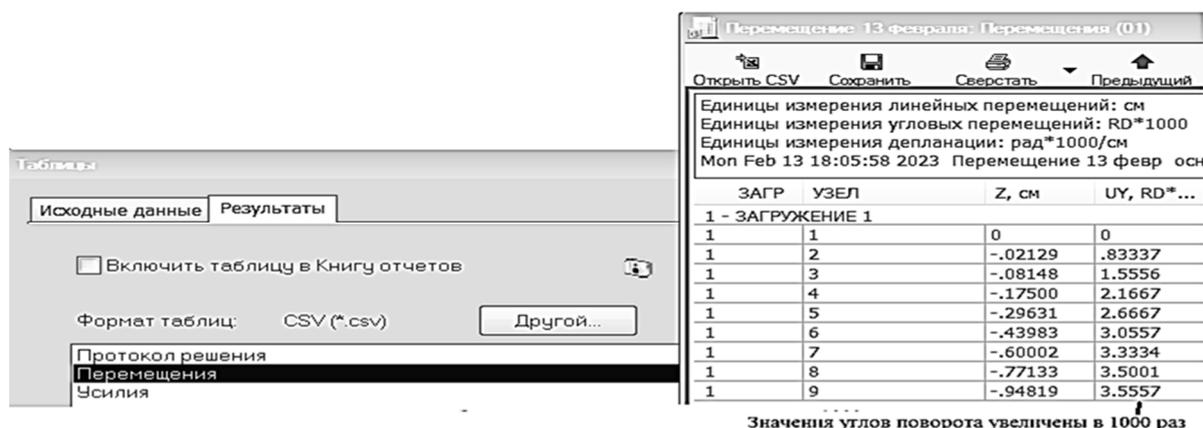


Рис. 3.6. Таблица перемещений и углов поворота узлов балки

Результаты расчета перемещений, полученных в ПК «Лири-САПР», сохраним сначала в формате \*.xls в файл программы Excel, а затем простым копированием перенесем в программу MathCAD. Выведем на одном графике функции прогибов и углов поворота (рис. 3.7).

Как видим из сравнения прогибов для девяти сечений балки, приведенных на рис. 3.2 (окончание) и рис. 3.7, результаты вычислений в ПК «Лири-САПР» полностью совпали с ранее проведенными аналитическими решениями.

Построение кусочно-линейных функций прогибов и углов поворота сечения балки по результатам расчета МКЭ  
 Перенос данных из стандартных таблиц путем простого копирования

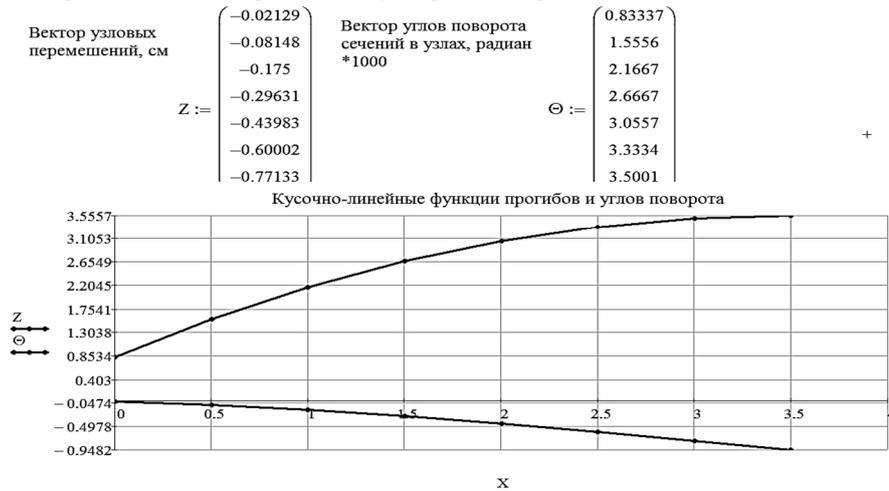


Рис. 3.7. Графики перемещений, полученные по результатам расчетов в ПК «Лира-САПР»

Именно так ПК «Лира-САПР» выводит деформированную картину балки по перемещениям, вычисленным в отдельных узлах (в виде кусочно-линейной функции). Но, на самом деле, для аппроксимации перемещений изгибаемых стержневых элементов МКЭ в задачах статики обычно используют полиномы Эрмита третьей степени. Для признака схемы 2, по которому ПК «Лира-САПР» обычно выполняет расчет балок и плоских рам, в каждом узле КЭ учитываются три перемещения – два линейных и одно угловое. Но в задачах поперечного изгиба балок продольные перемещения равны нулю и общее фактическое число неизвестных МКЭ тогда будет равно четырем (по два в каждом узле). Как следствие, линия прогибов отдельного КЭ получается путем суммирования четырех аппроксимирующих функций, графики которых показаны ниже на рис. 3.8.

Если попытаться построить по результатам расчета МКЭ линию прогибов балки, разделенной на восемь КЭ, то нам придется «сшивать» ее по длине балки из восьми функций для каждого КЭ. Но так как внешняя нагрузка приложена только в консольном сечении балки, то построим в программе MathCAD линию прогибов рассматриваемой консольной балки в предположении, что она представляет собой один КЭ. То есть будем учитывать узловые перемещения только в начальном и конечном сечениях балки.

В рассматриваемой задаче расчета консольной балки все узловые перемещения в заделке равны нулю ( $z_1 = z_2 = 0$ ). Поэтому линию прогибов будут определять только линейное вертикальное перемещение консоли балки ( $z_3 = -0,94819$  см) и угол поворота в этом же сечении ( $z_4 = 3,5557 \times 10^{-3}$  радиан). Построим в программе MathCAD линию прогибов с помощью вычисленных узловых перемещений (рис. 3.9).

## Полиномы Эрмита

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \Theta_i(x) \quad n := 4 \quad +$$

- число аппроксимирующих функций равно общему числу неизвестных узловых перемещений конечного элемента

$$\Theta_1(x) := \left( -1 + 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} \right)$$

- аппроксимирующая функция, определяющая вклад вертикального линейного перемещения первого узла конечного элемента в общую картину деформирования балки (линию прогибов)

$$\Theta_2(x) := \left( x - 2 \cdot \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$$

- аппроксимирующая функция, определяющая вклад углового перемещения (поворота сечения) в первом узле конечного элемента в общую картину деформирования балки (линию прогибов)

$$\Theta_3(x) := \left( 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} \right)$$

- аппроксимирующая функция, определяющая вклад вертикального линейного перемещения второго узла конечного элемента в общую картину деформирования балки (линию прогибов)

$$\Theta_4(x) := \left( \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$$

- аппроксимирующая функция, определяющая вклад углового перемещения (поворота сечения) во втором узле конечного элемента в общую картину деформирования балки (линию прогибов)

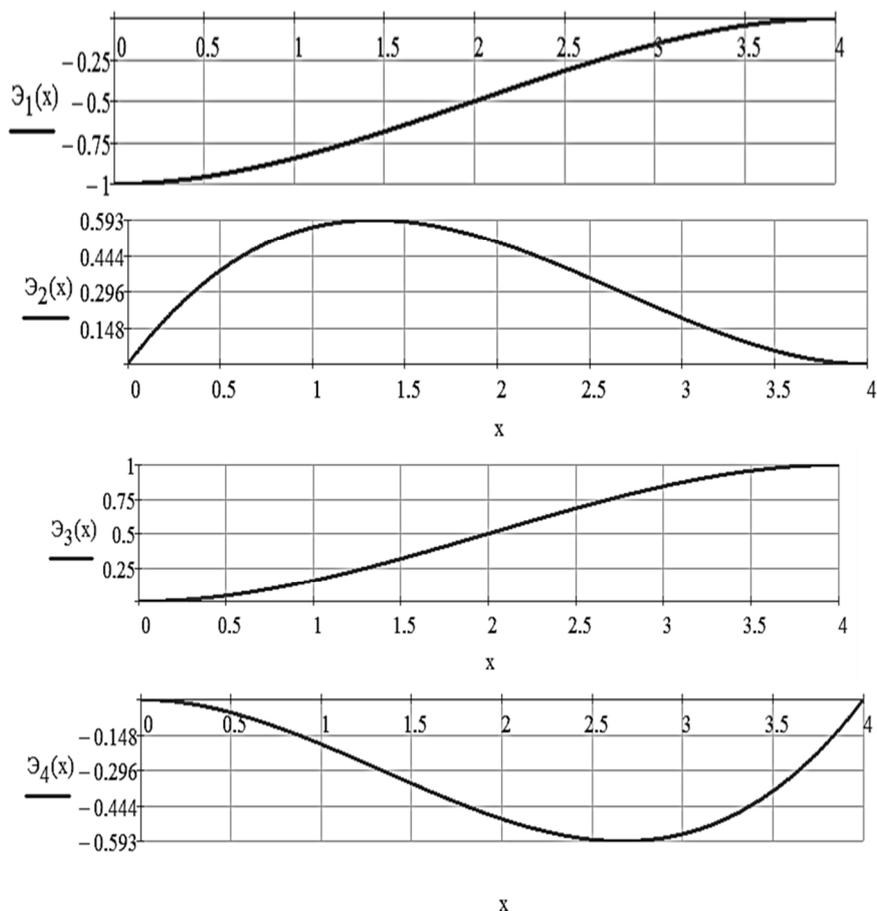
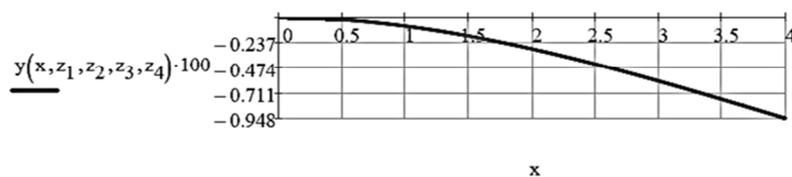


Рис. 3.8. Графики полиномов Эрмита

Построение линии прогибов балки с помощью интерполяционных полиномов Эрмита

$$z_1 := 0 \quad z_2 := 0 \quad z_3 := -0.948194 \cdot 10^{-2} \quad z_4 := -3.55573 \cdot 10^{-3}$$

$$y(x, z_1, z_2, z_3, z_4) := \left(-1 + 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3}\right) \cdot z_1 + \left(x - 2 \cdot \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot z_2 + \left(3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3}\right) \cdot z_3 + \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot z_4$$



Y	U	СИ
Z	-0.948194	СИ
uX	0	
uY	3.55573	
uZ	0	

Значения прогибов для девяти сечений балки, вычисленных по результатам расчета в ПК "Ли́ра-САПР", см

$n := 8$	- число равномерных участков балки	$y(X_i, z_1, z_2, z_3, z_4) \cdot 100 =$
$i := 1 \dots n + 1$	- число сечений	0
$L1 := \frac{L}{n} = 0.5$	- длина участка балки, м	-0.021
$X_i := L1 \cdot (i - 1)$	- координаты сечений балки, м	-0.081
$X^T = (0 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5 \ 4)$		-0.175
		-0.296
		-0.44
		-0.6
		-0.771
		-0.948

Сравнение прогибов для девяти сечений балки, вычисленных аналитически и численно

$\Delta(x) := y_{\text{анал}}(x) - y(x, z_1, z_2, z_3, z_4)$	$\Delta(X_i) =$
	0
	$1.016 \cdot 10^{-8}$
	$3.894 \cdot 10^{-8}$
	$8.375 \cdot 10^{-8}$
	$1.42 \cdot 10^{-7}$
	$2.112 \cdot 10^{-7}$
	$2.887 \cdot 10^{-7}$
	$3.72 \cdot 10^{-7}$
	$4.585 \cdot 10^{-7}$

Рис. 3.9. Построение линии прогибов балки с помощью полиномов Эрмита

На этом же рис. 3.9 в конце вычислены разности полученных аналитических и численных решений. Как видим, погрешность пренебрежимо мала и объясняется только точностью задания неизвестных МКЭ, перенесенных из ПК «Ли́ра-САПР» в программу MathCAD.

#### Выводы:

- 1) на графическом экране ПК «Ли́ра-САПР» строит деформированную картину конструкции по перемещениям отдельных ее узлов;
- 2) для нахождения параметров НДС конструкции ПК «Ли́ра-САПР» использует алгоритм, который оперирует не с отдельными значениями перемещений, а с аналитическими функциями. Для балок такими функциями являются полиномы Эрмита.

Как указывалось выше, приведенный в этом разделе материал способствует подготовке студентов к решению реальных задач проектирования МКЭ. Ниже мы рассмотрим вычисление перемещений отдельных сечений балки методом Мора (Верещагина), который обычно применяется только в ручных аналитических методах расчета и в первую очередь в методе сил.

### 3.3. Определение перемещений балки в программе «ЭСПРИ»

Программа «ЭСПРИ» (Электронный СПравочник Инженера) состоит из целого ряда модулей. Выделим основные модули из общего списка:

1. «Математика для инженера». Позволяет определять площади и объемы, перемножать эпюры, решать задачи линейной алгебры, находить корни полиномов, интерполировать функции.

2. «Сечения». Позволяет вычислять геометрические характеристики параметрических и составных сечений, находить крутящие моменты инерции.

3. «СтаДиУс» (Статика-Динамика-Устойчивость). Выполняет статический расчет балок, ферм, рам, построение линий влияния в балках.

4. «Стальные конструкции». Включает сортамент металлопроката, расчет сечений элементов, главных и эквивалентных напряжений в стальных конструкциях, определение расчетных длин элементов.

5. «Основания и фундаменты». Позволяет выполнять расчеты свайно-плитного фундамента, определять несущую способность свай по результатам полевых испытаний, вычислять параметры упругого основания  $C_1$ ,  $C_2$ .

6. «Каменные и армокаменные конструкции». Включает расчеты кирпичного простенка, расчеты на смятие и растяжение, определение расчетного сопротивления сжатию кладки из кирпича.

7. «Деревянные конструкции». Позволяет выполнять расчеты цельных, клееных и составных сечений деревянных конструкций.

8. «Железобетонные конструкции». Включает расчеты железобетонных конструкций, справочные таблицы для железобетона.

В учебной версии «Академик СЕТ», предлагаемой разработчиками учебным заведениям, студентам доступны только два модуля: «Математика для инженера» и «Сечения». Для вычисления перемещений мы будем использовать модуль «Математика для инженера».

Вычислим максимальное перемещение консольной балки. Для этого в открывшемся окне «Перемножение эпюр» необходимо задать следующие параметры: вид и значения ординат перемножаемых эпюр, модуль упругости материала, момент инерции сечения, длину балки. Далее нажать на кнопку «Расчет». Как мы видим (рис. 3.10), значение максимального прогиба балки, вычисленного в программе «ЭСПРИ», совпало со значениями ранее выполненных расчетов.

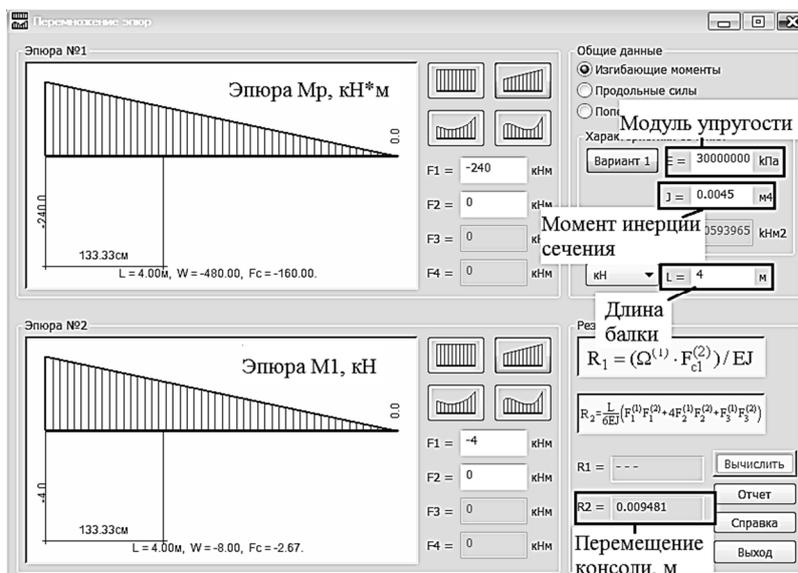


Рис. 3.10. Вычисление перемещения балки в программе «ЭС ПРИ»

Необходимо также отметить, что модуль «Математика для инженера» программы «ЭС ПРИ» позволяет вычислять не только перемещения, возникающие при изгибе балок, но и, например, линейные перемещения стержней от усилий сжатия (растяжения). Соответственно, в этом случае помимо того, что надо будет задавать значения ординат эпюр продольных сил (а не изгибающих моментов), также необходимо задать значение площади сечения элемента (а не момент инерции). Сопротивление стержня продольным деформациям определит продольная жесткость  $EA$ , равная произведению модуля упругости материала на площадь сечения элемента.

### 3.4. Аналитический расчет в программе MathCAD с помощью интеграла Мора (формулы Верещагина)

В общем случае определение перемещений и углов поворота сечений в балках при поперечном изгибе можно выполнить с помощью интеграла Мора

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \frac{I}{EI_j} \int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz,$$

где  $\Delta_{ip}$  – перемещение от заданной нагрузки в  $i$ -м направлении;  $n$  – число участков;  $j$  – номер участка стержневой системы;  $l_j$  – длина  $j$ -го участка;  $EI_j$  – изгибная жесткость;  $M_p = M_p(z)$  – изгибающий момент на  $j$ -м участке от заданной нагрузки;  $\bar{M}_i = \bar{M}_i(z)$  – изгибающий момент на  $j$ -м участке от  $\bar{P}_i = 1$  (при вычислении линейного перемещения) или  $\bar{m}_i = 1$  (при вычислении угла поворота), прикладываемых по направлению перемещения.

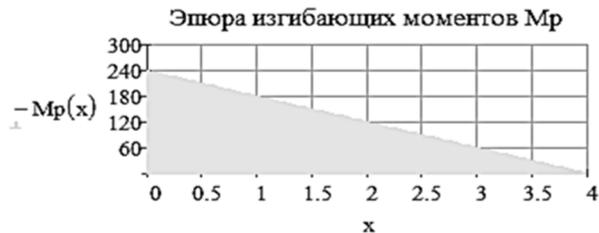
Но с практической точки зрения вычисление интеграла Мора прямым интегрированием является громоздким и в ряде случаев его можно заменить простым «перемножением» эпюр. Общие сведения о процедуре «перемножения» приведены в [8, с. 73, п. 3.6.1]. Мы же для удобства пользования в приложениях 1 – 2 приведем справочные таблицы для выполнения этой процедуры.

Для эпюр изгибающих моментов простой формы логично использовать приложение 1 (когда для одной эпюры вычисляется ее площадь, а на другой эпюре вычисляется ордината, находящаяся под центром тяжести первой эпюры моментов).

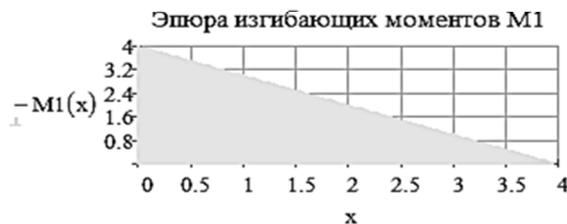
Для перемножения эпюр изгибающих моментов сложных форм необходимо использовать приложение 2 (приводится формула перемножения для соответствующих эпюр).

**Вычисление максимального прогиба балки по правилу Верещагина**

$$M_p(x) := M_A + Y_A \cdot x$$



$$M_1(x) := -L + x$$



Геометрическая фигура	Площадь
	$\omega = \frac{Lh}{2}$

Площадь эпюры от внешней нагрузки  $\omega_p := \frac{P \cdot L \cdot L}{2} = 480 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$

Ордината эпюры  $M_1$  от действия единичной нагрузки по  $y_c := \frac{2}{3} \cdot L = 2.667 \text{ м}$   
центром тяжести площади  $\omega_p$

Изгибная жесткость  $EI = 1.35 \times 10^7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$

$$y_{\max} := \frac{\omega_p \cdot y_c}{EI} \cdot 100 = 0.948 \text{ см}$$

Рис. 3.11. Вычисление перемещения балки в программе MathCAD по правилу Верещагина

На рис. 3.11 приведен пример вычисления максимального прогиба консольной балки в программе MathCAD методом перемножения эпюр по правилу Верещагина.

Цель приведенных выше расчетов перемещений балки – демонстрация применения различных методов вычислений прогибов, выбор конкретного из которых зависит от вида решаемой задачи.

Для студентов, изучающих дисциплину «Строительная механика», знание методики определения перемещений с помощью формулы Верещагина или формулы Симпсона обязательно при решении задач статически неопределимых систем. Умения и навыки вычисления перемещений в ПК «Лири-САПР» (или программе «ЭСПРИ») позволят студентам контролировать свои ручные аналитические расчеты тех же вышеупомянутых задач.

Для студентов (специалистов), решающих задачи проектирования строительных конструкций с применением расчетных САПР-систем (ПК «Лири-САПР» и т.д.), контроль значений перемещений конструкций является обязательным требованием при анализе полученных численных результатов расчета.

### **3.5. Построение линии прогибов и углов поворота в программе MathCAD с помощью справочных формул и численного решения в ПК «Лири-САПР»**

Можно отметить еще один важный ресурс для контроля вычисленных перемещений – это справочные таблицы. Рассмотрим пример построения в программе MathCAD линий прогибов и углов поворота сечений для шарнирно опертой балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q = 80$  кН/м. Расчетная схема балки приведена на рис. 3.12.

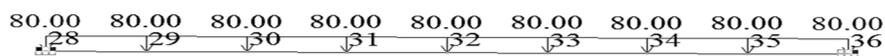


Рис. 3.12. Расчетная схема балки

Линии прогибов и углов поворота сечений будут построены по результатам расчета той же балки в ПК «Лири-САПР» и справочной формуле (рис. 3.13). Но автор пособия настоятельно рекомендует студентам, и особенно проектировщикам, очень внимательно относиться к использованию справочного материала (таблиц).

**Построение линии прогибов и углов поворота шарнирно опертой балки по результатам расчета в МКЭ и по справочным данным**

**1. Исходные данные**

Длина балки  $L := 4$  м

Внешняя равномерно распределенная нагрузка  $q := 80 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$

Ширина сечения балки  $b := 0.25$  м

Высота сечения балки  $h := 0.6$  м

Модуль упругости материала  $E := 3 \cdot 10^7$  кПа

Момент инерции сечения балки  $I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 0.0045$  м<sup>4</sup>

Изгибная жесткость сечения балки  $EI := E \cdot I = 1.35 \times 10^5$  кН·м<sup>2</sup>

**2. Вычисляем значения прогибов и углов поворота для девяти сечений балки, полученных делением ее на восемь равномерных участков, по результатам расчета в МКЭ**

$n := 8$  - число равномерных участков балки

$i := 1 .. n + 1$  - число сечений

$L1 := \frac{L}{n} = 0.5$  - длина участка балки, м

$X_i := L1 \cdot (i - 1)$  - координаты сечений балки, м

$X^T = (0 \ 0.5 \ 1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5 \ 4)$

Рис. 3.13. Линии прогибов и углов поворота сечений балки, построенные с помощью справочных формул и численного решения в ПК «Лира-САПР» (начало)

Перенос данных из стандартных таблиц ПК "Ли́ра-САПР" в программу MathCAD выполняем путем простого копирования

Вектор узловых перемещений, см	$Z := \begin{pmatrix} 0 \\ -0.794455 \\ -1.457834 \\ -1.894225 \\ -2.046082 \\ -1.894225 \\ -1.457834 \\ -0.794455 \\ 0 \end{pmatrix}$	Вектор углов поворота сечений в узлах, радиан *1000	$\Theta := \begin{pmatrix} 16.36866 \\ 14.961977 \\ 11.253453 \\ 6.010366 \\ 0 \\ -6.010366 \\ -11.253453 \\ -14.961977 \\ -16.36866 \end{pmatrix}$
-----------------------------------	--	---	---

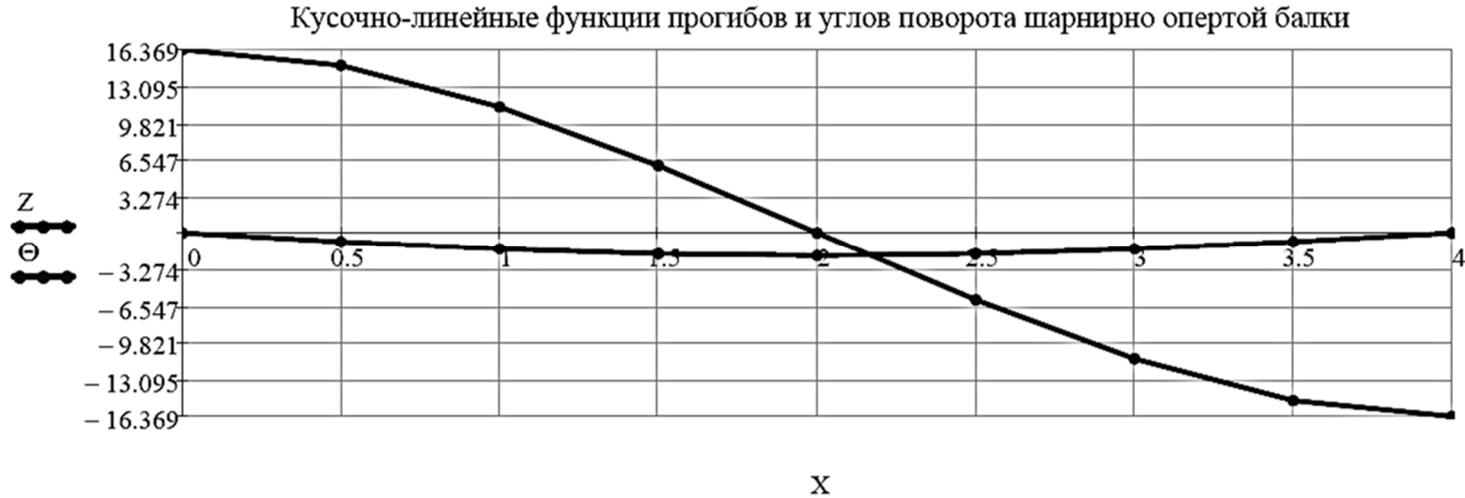


Рис. 3.13. Линии прогибов и углов поворота сечений балки, построенные с помощью справочных формул и численного решения в ПК «Ли́ра-САПР» (продолжение)