

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

В. С. Симонов, Г. С. Лейзерович

ПРАКТИКУМ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Утверждено в качестве учебного пособия
Учёным советом Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2011

УДК 624.04(07)

ББК 38.112я7

С375

Рецензенты:

Кафедра «Механика» ГОУВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия», зав. кафедрой
д-р техн. наук, профессор И. Н. Серпик;
В. М. Козин, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотр.
Института машиноведения и металлургии ДВО РАН

Симонов, В. С.

С375 Практикум по строительной механике : учеб. пособие / В. С. Симонов, Г. С. Лейзерович. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2011. – 125 с.

ISBN 978-5-7765-0871-4

Учебное пособие представляет собой систематизированную подборку заданий к расчётно-графическим и расчётно-проектировочным работам по строительной механике для студентов очной и заочной форм обучения. Предлагаемые задания, охватывающие основные разделы дисциплины, сопровождаются примерами решения типовых задач с необходимыми комментариями. Пособие включает в себя вопросы для самоконтроля и библиографический список.

Предназначено для студентов строительных и машиностроительных специальностей, изучающих строительную механику, а также для студентов других специальностей, интересующихся проблемами расчёта стержневых систем на прочность и жёсткость.

УДК 624.04(07)

ББК 38.112я7

ISBN 978-5-7765-0871-4

© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ЗАДАЧИ К РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИМ ЗАДАНИЯМ И РАСЧЁТНО-ПРЕКТИРОВОЧНЫМ РАБОТАМ	5
1.1. Правила выбора исходных данных и требования к оформлению расчётов.....	5
1.2. Статически определимые стержневые системы.....	6
1.3. Статически неопределимые стержневые системы.....	14
2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.....	16
2.1. Общие принципы расчёта статически определимых стержневых систем.....	16
2.2. Определение усилий от подвижной и временной нагрузок.....	17
2.3. Расчёт многопролётных статически определимых балок.....	18
2.4. Расчёт трёхшарнирных арок.....	18
2.5. Расчёт плоских ферм.....	19
2.6. Определение перемещений в стержневых системах.....	20
2.7. Расчёт статически неопределимых стержневых систем методом сил.....	21
2.8. Расчёт статически неопределимых стержневых систем методом перемещений.....	21
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	22
3.1. Общие методические указания к расчёту статически определимых стержневых систем	22
3.2. Расчёт многопролётных статически определимых балок	25
3.3. Расчёт составных статически определимых рам.....	39
3.4. Расчёт трёхшарнирных арок	44
3.5. Расчёт статически определимых ферм	61
3.6. Определение перемещений в балках и рамах.....	73
4. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ РАМ.....	87
4.1. Расчёт статически неопределимых рам методом сил	87
4.2. Определение перемещений в статически неопределимых стержневых системах.....	101
4.3. Расчёт статически неопределимых рам методом перемещений	110
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	124
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РЕАКЦИИ И ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ЕДИНИЧНЫХ И ГРУЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК.....	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Все должно быть изложено так просто,
как только возможно, но не проще*
Альберт Эйнштейн

Настоящее пособие включает в себя задачи и варианты по основным разделам традиционного курса строительной механики, вопросы для самоконтроля, примеры решения этих задач с необходимыми комментариями, а также библиографический список.

При подборке заданий к самостоятельной работе студентов авторы приняли решение не увлекаться их повышенной трудностью, полагая, что подобные действия могут привести студентов к утрате веры в свои силы и, как следствие, интереса к изучаемой, довольно сложной, дисциплине.

Вопросы для самоконтроля, по мнению авторов, должны помочь студентам лучше усвоить теоретический материал (особенно это касается студентов заочной формы обучения), самостоятельно решать практические задачи, предусмотренные программой дисциплины, а также подготовиться к экзамену по курсу.

Решение задач преследует следующие основные цели:

- развить у студентов самостоятельное техническое мышление, умения и навыки применения теоретических знаний при решении практических вопросов, освоить технику инженерных вычислений, способность работы с учебной, справочной и технической литературой;
- закрепить и углубить знания по строительной механике;
- приобрести навыки оформления технически расчётов;
- развить смелость в подходе к техническим вопросам и настойчивость в их решении.

Авторы выражают свою глубокую признательность редактору Ю. Н. Осинцевой и рецензентам пособия за ту помощь, которую они оказали при проверке и корректировке окончательного варианта текста рукописи. Они также благодарят преподавателей кафедры механики и анализа конструкций и процессов ГОУВПО «КнАГТУ» доцента М. Р. Петрова и ст. преподавателя С. В. Макаренко, принимавших участие в решении и компьютерной вёрстке отдельных задач.

1. ЗАДАЧИ К РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИМ ЗАДАНИЯМ И РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫМ РАБОТАМ

1.1. Правила выбора исходных данных и требования к оформлению расчётов

В состав расчётно-графических заданий (РГЗ) и расчётно-проектировочных работ (РПР) могут быть включены следующие задачи по основным разделам курса строительной механики:

а) расчёт статически определимых стержневых систем на статическую нагрузку (задачи 1 – 6);

б) расчёт статически неопределимых стержневых систем на статическую нагрузку (задачи 7 – 9).

Задачи из приведенного перечня, включаемые в РГЗ для студентов заочной формы обучения и в РПР для студентов очной формы обучения, определяются рабочими программами дисциплины. Их состав и содержание доводятся до студентов-заочников на установочных лекциях, а до студентов очной формы обучения – на первых занятиях.

Исходные данные для решения задач, включённых в задания, выбираются студентом самостоятельно из таблиц в соответствии с его личным учебным шифром. Шифром считаются три последние цифры номера зачётной книжки.

Для выбора исходных данных необходимо под шифром расположить три первые буквы русского алфавита, например,

шифр:	3	7	5
буквы:	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>

Из каждой графы таблицы исходных данных, обозначенной определённой буквой (например, см. подраздел 1.1 задачу 1), надо взять только одно значение из десяти, стоящее в той строке, номер которой соответствует номеру буквы. Например, для указанного выше шифра необходимо взять следующие исходные данные к задачам 1 и 2: из граф «*a*» – строка 3, т.е. $a = 4$ м; $q_1 = -40$ кН/м; из граф «*б*» – строка 7, т.е. $b = 3$ м; $l = 3$ м; $q_2 = 20$ кН/м; $P_2 = -60$ кН; из граф «*в*» – строка 5, т.е. $c = 3$ м; $h = 3$ м; $P_1 = 40$ кН; $M = 120$ кН·м.

Номер расчётной схемы к каждой задаче (кроме задачи 3) определяется последней цифрой шифра. Знак минус в исходных данных указывает на то, что на расчётных схемах необходимо изменить направления нагрузок q_1 и P_2 на противоположные (знак минус при этом опускается).

Так, например, расчётная схема к задаче 1 в соответствии с исходными данными примет вид (рис. 1.1).

РГЗ и РПР выполняются на отдельных листах формата А4. Первая страница – титульный лист установленной формы, последующие страницы

– формулировка задач и краткое описание их решения с необходимыми расчётными схемами, эпюрами, линиями влияния и т.п. Расчётные схемы должны быть *вычерчены в определённом масштабе* с указанием на них всех размеров и нагрузок в буквенном обозначении и их значений. На эпюрах и линиях влияния необходимо привести значения в характерных точках и указать единицы измерения физических величин.

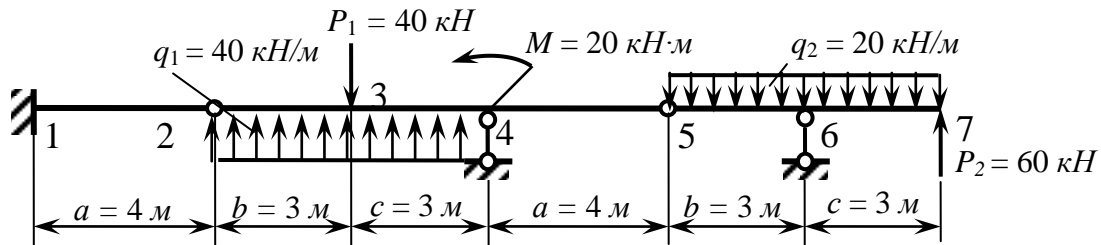


Рис. 1.1. Расчётная схема балки

РГЗ студентов-заочников допускается выполнять в обычных школьных тетрадах с соблюдением всех вышеупомянутых требований к оформлению, кроме первой страницы. На обложке тетради необходимо указать название дисциплины, номер расчётно-графического задания, шифр учебной группы, фамилию, инициалы студента и полный номер зачётной книжки.

1.2. Статически определимые стержневые системы

Задача 1. Расчёт составной статически определимой балки. Для балки (рис. 1.2), размеры и нагрузка для которой выбираются из табл. 1.1, требуется:

- построить и проверить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- построить *статическим* (аналитическим) методом линии влияния опорных реакций;
- построить *кинематическим* методом линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в пронумерованных сечениях.

Задача 2. Расчёт плоской составной статически определимой рамы. Для рамы (рис. 1.3), размеры и нагрузка для которой выбираются из табл. 1.1, требуется:

- определить опорные реакции и составляющие реакции в шарнире, соединяющем обе части рамы;
- построить и проверить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов.

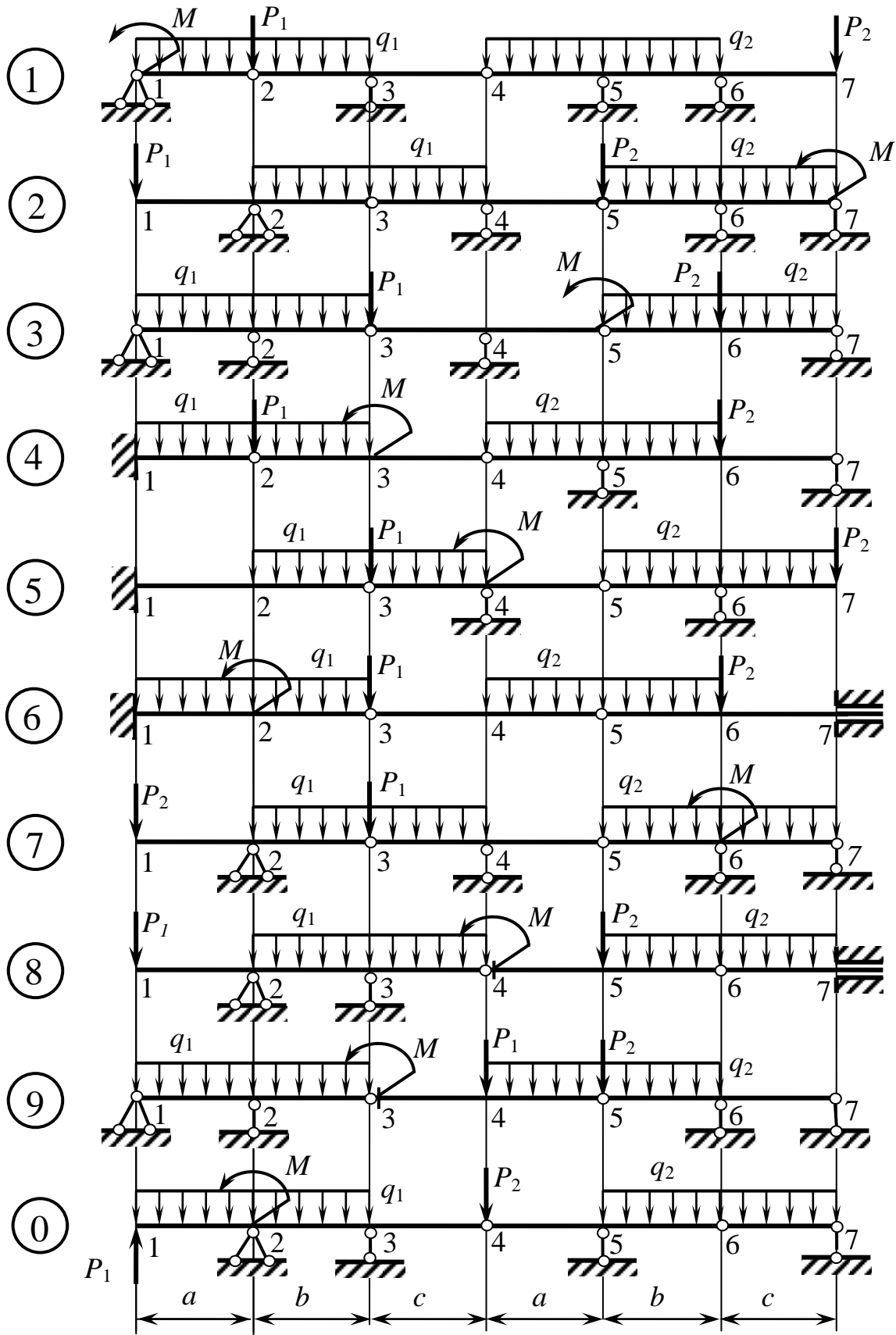


Рис. 1.2. Расчётные схемы балок к задачам 1 и 5

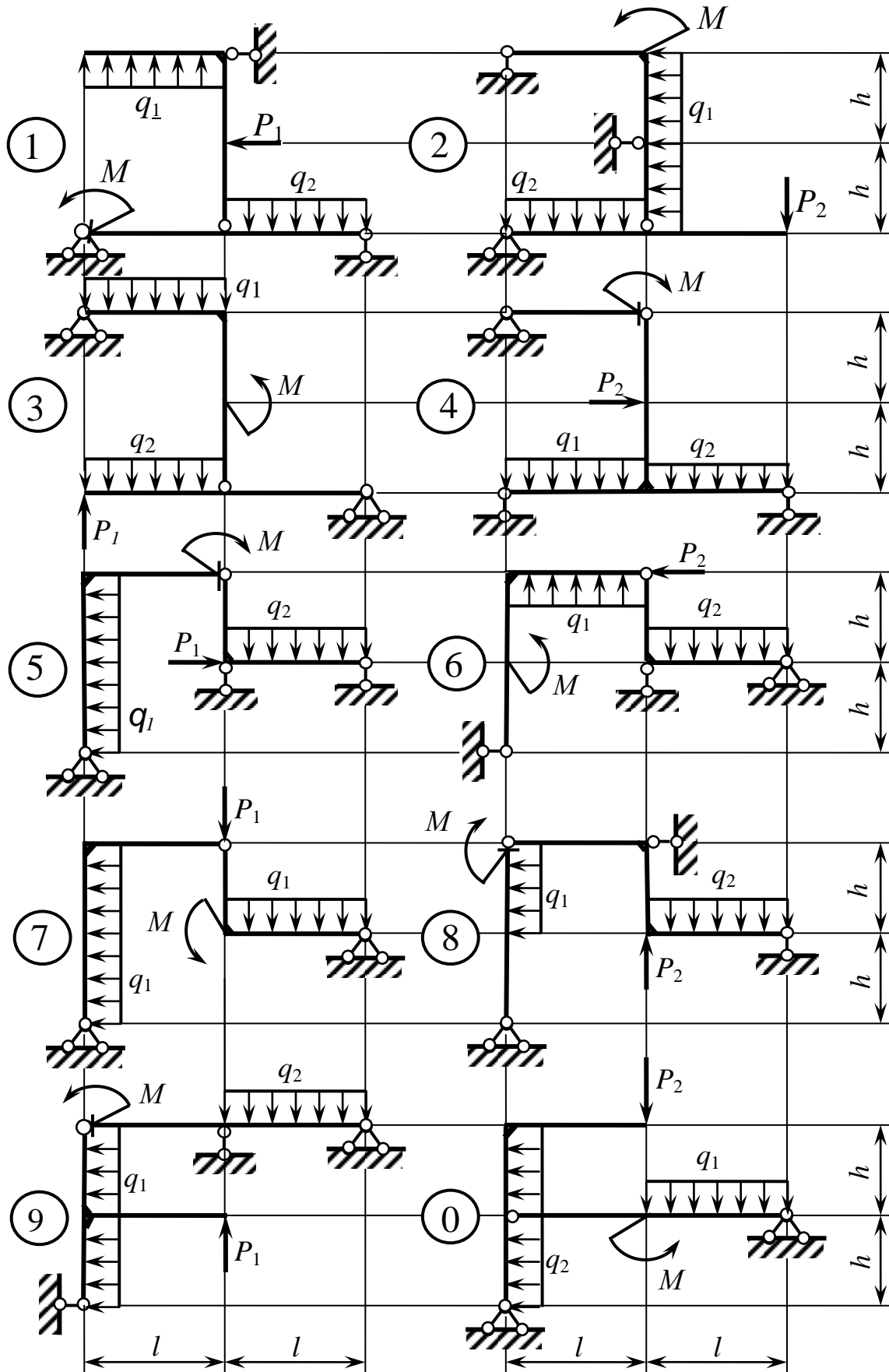


Рис. 1.3. Расчётные схемы рам к задачам 2 и 6

Таблица 1.1

Исходные данные к задачам 1 и 2

Номер строки	a , м	b , м	c , м	l , м	h , м	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м
1	2	4	4	3	3	20	40	40	60	-80
2	3	2	3	4	4	30	-50	-60	80	-60
3	4	3	2	5	5	-40	60	-80	100	-90
4	2	4	4	6	6	50	-20	100	-60	100
5	3	4	3	4	3	-60	30	40	-40	120
6	4	2	2	5	4	50	-40	-80	80	70
7	2	3	4	3	5	40	20	-40	-60	40
8	3	4	3	4	6	-30	-30	60	40	-50
9	4	2	2	5	3	20	50	100	-80	90
0	2	3	4	6	4	-30	-60	-60	100	80
	a	b	c	b	c	a	b	c	b	c

Задача 3. Расчёт плоской трёхшарнирной арки. Для арки (рис. 1.4), очертание и нагрузка которой выбираются из табл. 1.2, требуется:

а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в заменяющей балке;

б) определить продольную, поперечную силы и изгибающий момент в заданном сечении арки;

в) построить линии влияния продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в заданном сечении и «загрузить» их.

Таблица 1.2

Исходные данные к задаче 3

Номер строки	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	P_6 , кН	P_7 , кН	q , кН/м
1	80	0	0	0	80	80	0	16
2	0	120	0	0	0	120	0	24
3	0	0	160	160	160	160	0	32
4	0	80	0	0	0	0	80	16
5	0	0	120	120	0	0	120	24
6	160	0	0	0	0	0	160	32
7	0	0	80	80	80	160	0	16
8	0	120	0	0	120	120	0	24
9	0	0	160	160	160	80	0	32
0	80	0	0	0	0	0	160	16
	a	b	c	a	b	c	a	c

Номер строки	f/l	$l, м$	m	n	Номер сечения	Очертание оси арки
1	0,30	20	0	5	1	Парабола
2	0,35	24	1	6	2	Эллипс
3	0,40	28	2	7	3	Окружность
4	0,30	32	3	8	5	Парабола
5	0,35	36	0	6	6	Эллипс
6	0,40	20	1	7	7	Окружность
7	0,30	24	2	8	2	Парабола
8	0,35	28	3	5	3	Эллипс
9	0,40	32	0	6	5	Окружность
0	0,30	36	1	7	6	Парабола
	\bar{b}	\bar{b}	\bar{b}	\bar{v}	\bar{v}	\bar{v}

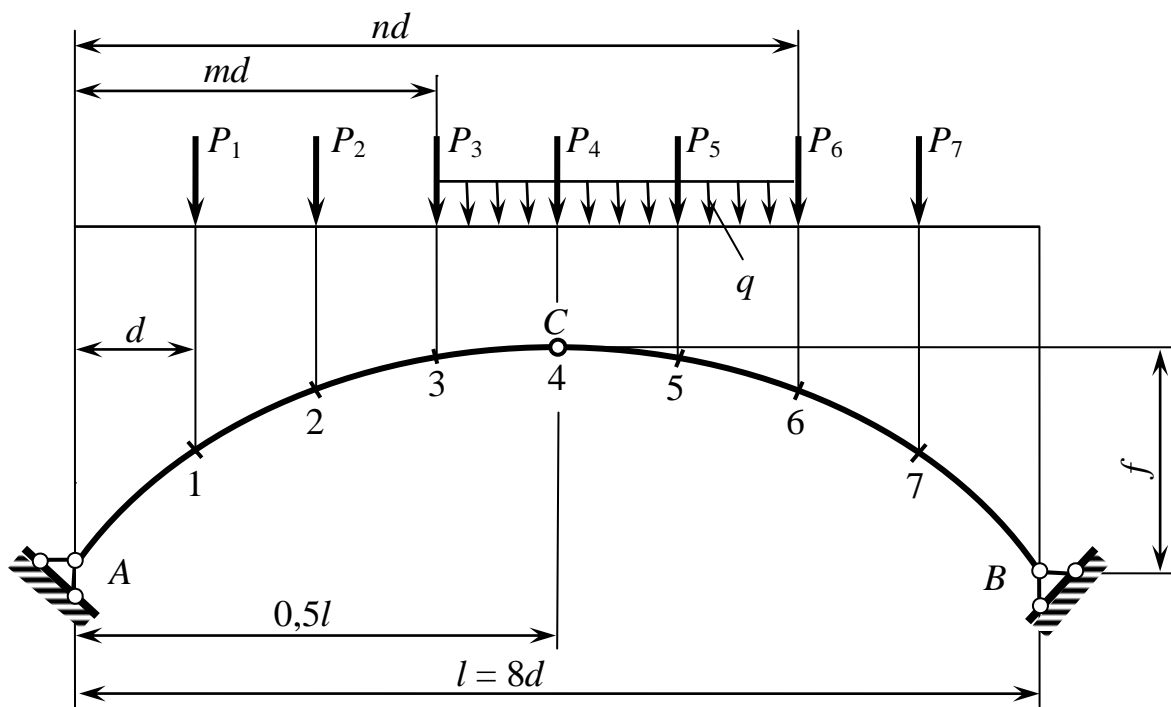


Рис. 1.4. Расчётная схема арки

Ординаты точек оси арки и геометрические функции углов наклона касательных определяются по следующим формулам:

а) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - (0,5l - x)^2} + f - R; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R},$$

б) при очертании оси по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x),$$

в) при очертании оси по эллипсу

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{l} \frac{l-x}{\sqrt{x(l-x)}}.$$

Для двух последних случаев

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Задача 4. Расчёт плоской статически определимой фермы. Для фермы (рис. 1.5), размеры и нагрузка которой выбираются из табл. 1.3, требуется:

- а) аналитически определить усилия во всех стержнях заданной панели от постоянной нагрузки;
- б) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- в) «загрузить» линии влияния постоянной нагрузкой, результаты сравнить с аналитическим расчётом усилий в соответствующих стержнях;
- г) для каждого стержня заданной панели установить наиболее опасные положения временной нагрузки и найти максимальные и минимальные расчётные усилия от постоянной и временной нагрузок.

Таблица 1.3

Исходные данные к задаче 4

Номер строки	$d, м$	$h, м$	Номер панели, считая слева	Грузовой пояс	Нагрузка $q, кН/м$	
					постоянная	временная
1	3,5	3,0	3	Верхний	10	20
2	4,0	3,0	3	Нижний	15	10
3	4,5	3,0	4	Верхний	20	15
4	5,0	3,5	4	Нижний	10	20
5	4,0	3,5	3	Верхний	15	15
6	5,0	3,5	3	Нижний	20	20
7	3,5	4,0	4	Верхний	10	10
8	4,0	4,0	3	Нижний	15	20
9	4,5	4,0	4	Верхний	20	15
0	5,0	3,5	3	Нижний	15	20
	$б$	$в$	$в$	$а$	$б$	$в$

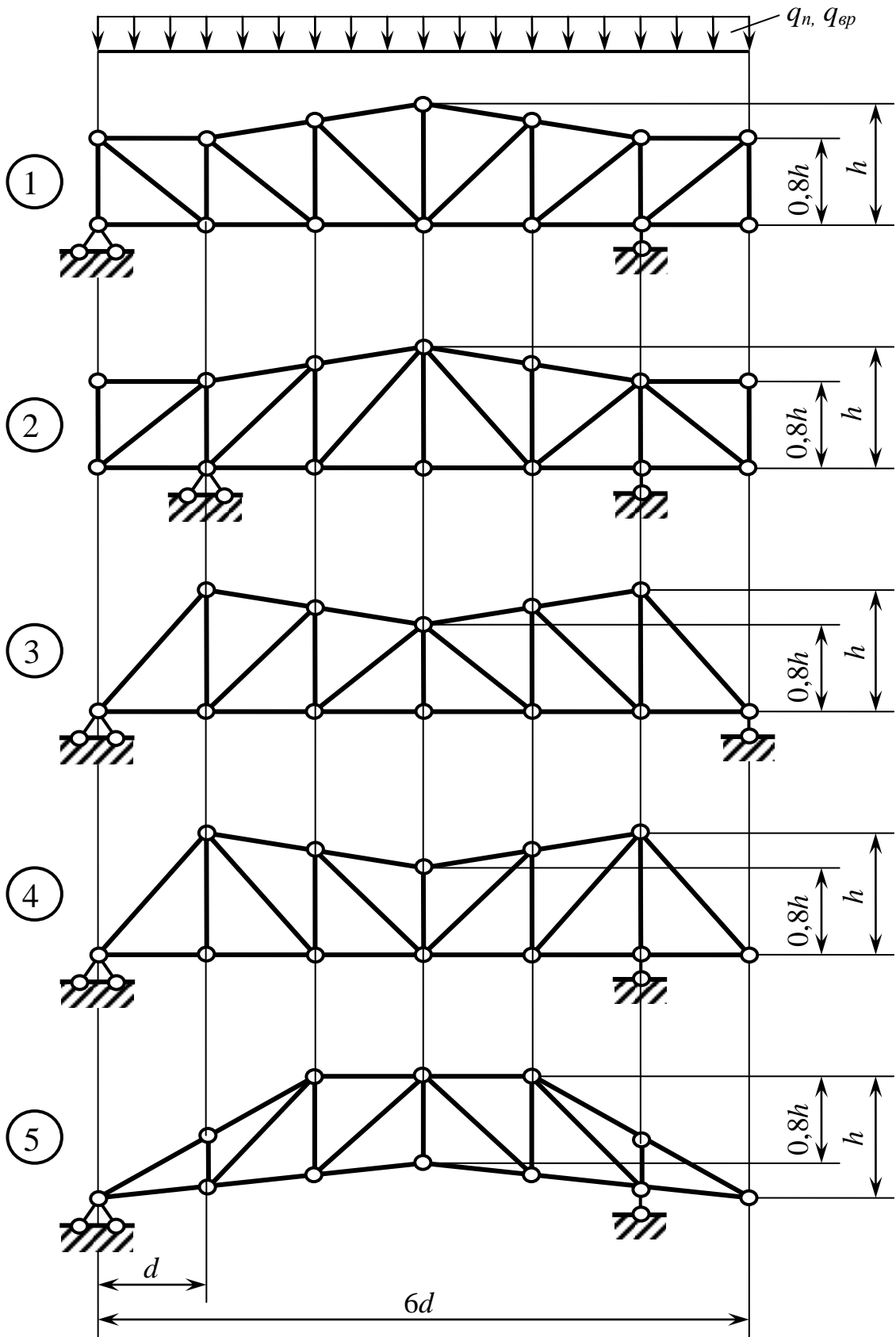


Рис. 1.5. Расчётные схемы ферм к задаче 4 (начало)

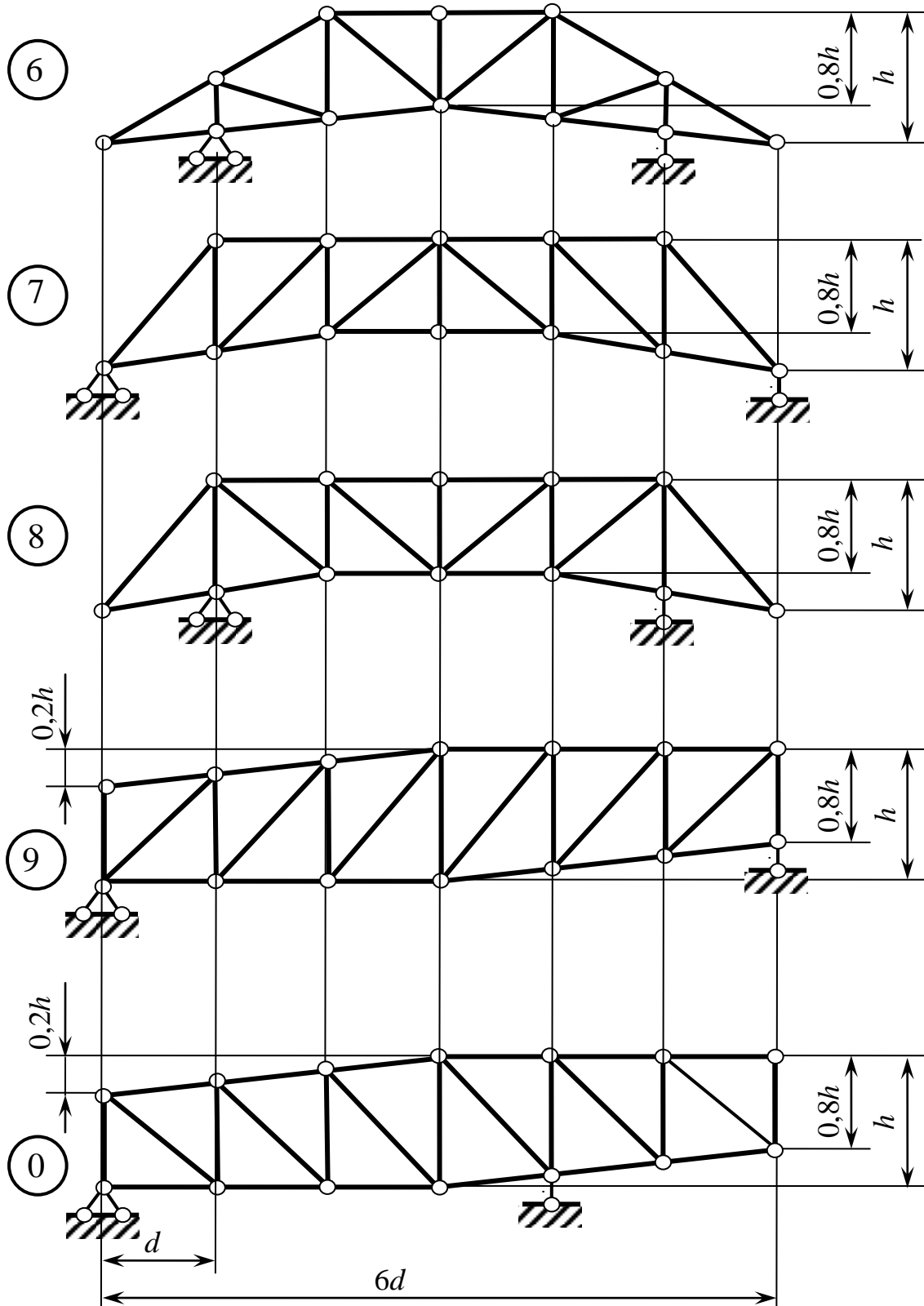


Рис. 1.5. Расчётные схемы ферм к задаче 4 (окончание)

Задача 5. Определение перемещений многопролётной статически определимой балки. Для балки (см. рис. 1.2), рассмотренной в задаче 1, требуется:

- а) определить вертикальные перемещения всех незакреплённых сечений (из семи пронумерованных на схеме), полагая жёсткость всех участков основных и вспомогательных балок $EI = const$;
- б) изобразить изогнутую ось балки, согласуя ее с эпюрой изгибающих моментов и используя найденные значения прогибов.

Задача 6. Определение перемещений статически определимой рамы. Для рамы (см. рис. 1.3), рассмотренной в задаче 2, требуется:

- а) определить одно из возможных линейных перемещений любого незакреплённого узла (узел выбрать самостоятельно);
- б) определить угол поворота всего узла (если узел жёсткий) или угол поворота жёсткой части комбинированного узла. Принять следующее соотношение жёсткостей ригелей и стоек: $EI_{риг} = 2EI_{ст}$.

1.3. Статически неопределимые стержневые системы

Задача 7. Расчёт плоской статически неопределимой рамы методом сил. Для рамы (рис. 1.6), размеры, соотношение изгибных жёсткостей ригелей и стоек и нагрузка которой выбирается из табл. 1.4, требуется:

- а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, раскрыв статическую неопределимость;
- б) проверить правильность раскрытия статической неопределимости.

Задача 8. Определение перемещений статически неопределимой рамы. Определить возможные линейные и угловые перемещения жёстких и комбинированных узлов рамы (рис. 1.6), рассмотренной в задаче 7.

Задача 9. Расчёт плоской статически неопределимой рамы методом перемещений. Для той же рамы, что и в задаче 7 (см. рис. 1.6), требуется:

- а) построить эпюру изгибающих моментов, раскрыв кинематическую неопределимость;
- б) проверить правильность раскрытия кинематической (и, соответственно, статической) неопределимости.

Примечание. Силы P_1 и P_2 приложены посередине соответствующих участков рамы.

Исходные данные к задачам 7, 8, 9

Номер строки	l , м	h , м	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	$EI_{cm}:EI_{пуз}$
1	4	3	20	20	-16	32	1,0:1,5
2	5	4	30	-40	24	32	1,0:2,0
3	6	5	40	60	-32	32	1,0:2,5
4	4	6	50	-80	40	32	1,5:1,0
5	5	3	60	100	-40	32	2,0:1,0
6	6	4	20	-80	16	40	2,5:1,0
7	4	5	30	40	-24	40	1,0:1,5
8	5	6	40	-60	32	40	1,0:2,0
9	6	3	50	80	-40	40	1,0:2,5
0	4	4	60	100	40	40	2,0:1,0
	a	b	c	a	b	c	c

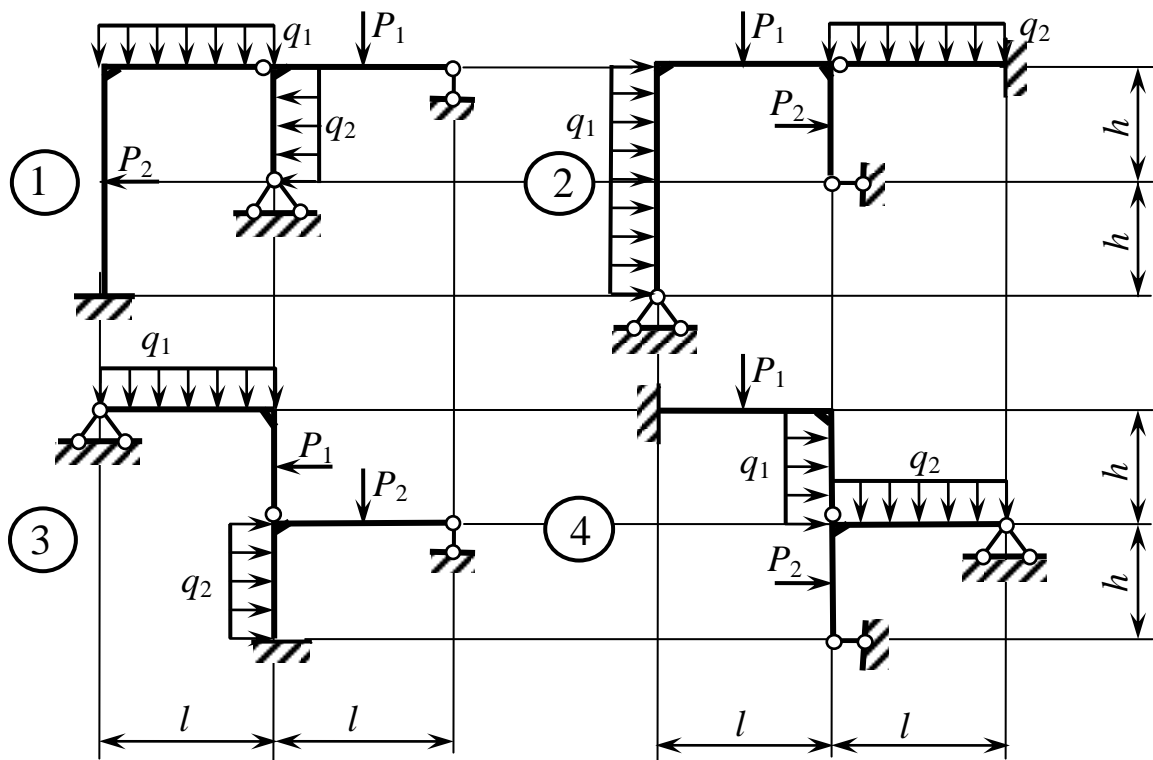


Рис. 1.6. Расчётные схемы рам к задачам 7, 8 и 9 (начало)

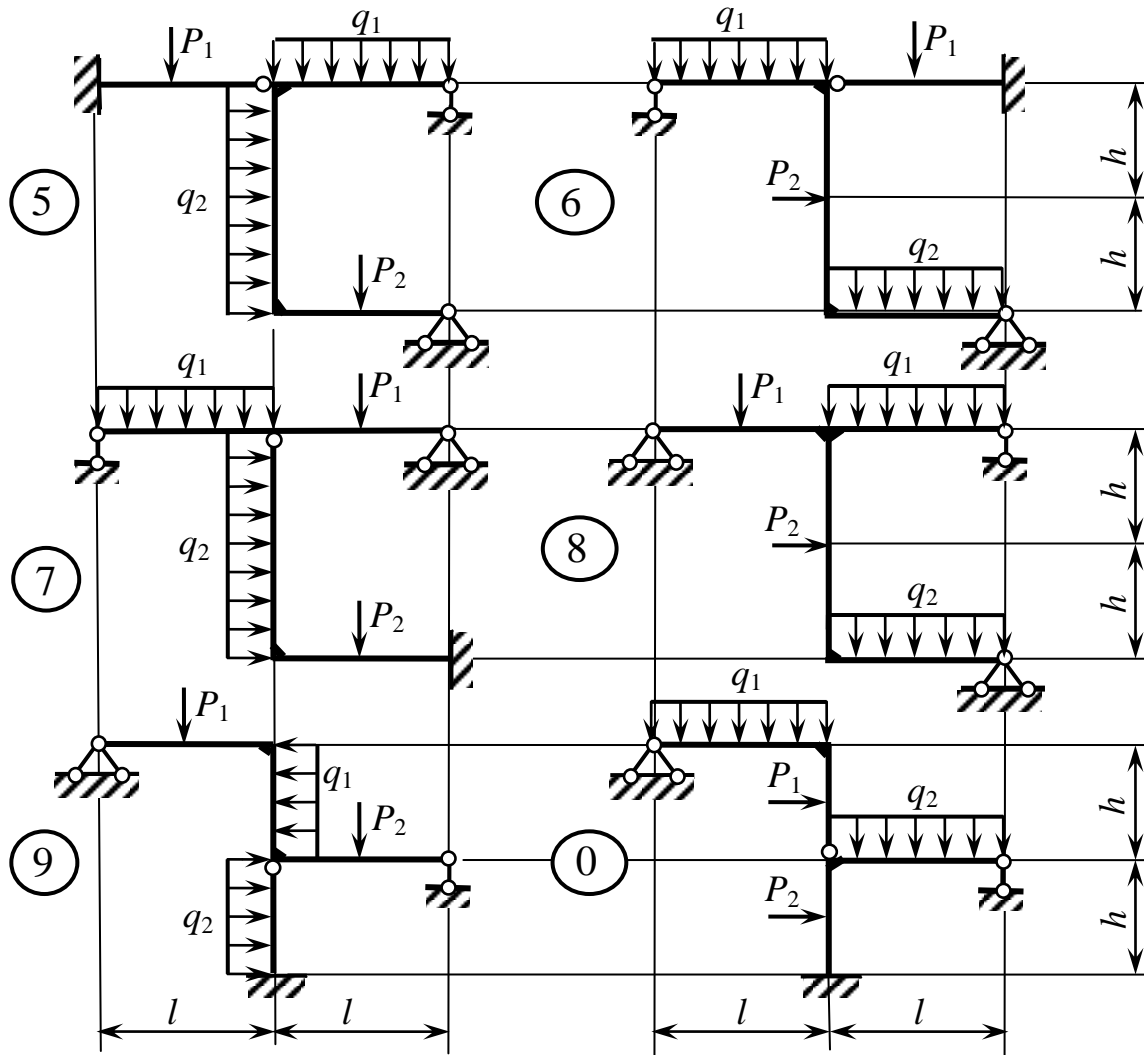


Рис. 1.6. Расчётные схемы рам к задачам 7, 8 и 9 (окончание)

2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

2.1. Общие принципы расчёта статически определимых стержневых систем

1. Необходимый и достаточный признаки статической определимости плоских стержневых систем.
2. Общий принцип определения реакций опорных связей и в шарнирах сложных (составных) статически определимых стержневых систем.
3. Рациональные формы записи уравнений равновесия при определении реакций опорных связей в простых и составных плоских стержневых системах.
4. В чём состоит суть метода сечений?
5. Правила знаков для продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.

6. Как используются дифференциальные зависимости $q = dQ/dz$ и $Q = dM/dz$ при построении и контроле эпюр внутренних усилий в поперечных сечениях балок и рам?

7. Как можно построить эпюру поперечных сил на участке прямолинейного стержня, если известны изгибающие моменты на его концах и внешняя нагрузка?

8. Как используются интегральные зависимости $Q = \int qdz + Q_0$ и $M = \int Qdz + M_0$ при построении и контроле эпюр внутренних усилий в прямолинейных стержнях?

2.2. Определение усилий от подвижной и временной нагрузок

1. Какая нагрузка называется подвижной?
2. Что называется грузовой линией?
3. Как формулируется задача при расчёте на подвижную нагрузку?
4. Что называется линией влияния (ЛВ)?
5. Что такое единичный груз (единичная сила $\bar{P} = 1$)?
6. Какие методы применяют для построения ЛВ?
7. В чём отличие ЛВ от эпюр внутренних усилий?
8. В чём сущность статического метода построения ЛВ?
9. Приведите аналитические зависимости опорных реакций шарнирно опёртой балки от положения условного единичного груза.
10. Что такое левая и правая ветви ЛВ внутренних усилий?
11. Каковы особенности ЛВ опорных реакций, позволяющие упростить их построение?
12. Каковы особенности относительного положения левой и правой ветвей ЛВ изгибающего момента и поперечной силы?
13. Каковы размерности ординат ЛВ поперечной силы и изгибающего момента?
14. В чём заключается сущность кинематического метода построения ЛВ усилий?
15. Приведите последовательность построения ЛВ (модели ЛВ) кинематическим методом.
16. Как по ЛВ определяются невыгодные положения подвижной сосредоточенной силы (одиночного груза)?
17. Что понимается под «загружением» ЛВ?
18. Как вычисляются усилия по ЛВ от сосредоточенных неподвижных сил?
19. Как вычисляются усилия по ЛВ от неподвижной равномерно распределённой нагрузки?

20. Как вычисляются усилия по ЛВ от неподвижной сосредоточенной пары сил (сосредоточенного момента)?

21. Как по ЛВ определяются невыгодные положения временных неподвижных нагрузок?

2.3. Расчёт многопролётных статически определимых балок

1. Что представляет собой многопролётная статически определимая балка?

2. Как определить необходимое количество шарниров в многопролётной балке из условия, чтобы она была статически определимой?

3. Как следует располагать шарниры, чтобы обеспечить кинематическую (геометрическую) неизменяемость?

4. Какие типы элементов различают в многопролётных статически определимых балках?

5. Что такое поэтажная схема балки и для чего её используют?

6. Каков порядок расчёта многопролётной статически определимой балки на постоянную нагрузку?

7. Как проверяется правильность построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по дифференциально-интегральным зависимостям между q , Q и M ?

8. Какую эпюру изгибающих моментов многопролётной статически определимой балки принято считать рациональной?

9. Как, используя так называемую балочную эпюру изгибающих моментов, установить рациональное расположение шарниров в многопролётной статически определимой балке?

10. Какими методами можно строить ЛВ в многопролётной статически определимой балке?

11. Какой метод построения ЛВ в многопролётной статически определимой балке менее трудоёмок?

2.4. Расчёт трёхшарнирных арок

1. Какие стержневые системы называют арками?

2. Назовите основные элементы и геометрические параметры трёхшарнирной арки.

3. Какие уравнения равновесия используются для определения опорных реакций трёхшарнирной арки?

4. Что такое заменяющая балка и как она используется при расчёте трёхшарнирной арки?

5. Как определяется распор при действии вертикальной нагрузки и как он зависит от стрелы подъёма арки с пятами на одном уровне?

6. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях арки и как они определяются через балочные внутренние усилия?
7. Чем и как отличаются внутренние усилия в арке от внутренних усилий в балке того же пролёта?
8. Чем отличается очертание эпюр внутренних усилий в арке от балочных эпюр?
9. Какое очертание оси арки принято считать рациональным (оптимальным)?
10. Отличаются ли ЛВ вертикальных составляющих опорных реакций в трёхшарнирной арке от ЛВ балочных реакций?
11. Как построить ЛВ распора трёхшарнирной арки?
12. Как построить ЛВ внутренних усилий в трёхшарнирной арке способом наложения «исправленных» («скорректированных») балочных ЛВ?
13. Как построить (или проверить) ЛВ внутренних усилий трёхшарнирной арки с помощью нулевых точек?
14. Какая теорема теоретической механики лежит в основе графического определения положений нулевых точек ЛВ?
15. Как графически найти положения нулевых точек ЛВ внутренних усилий трёхшарнирной арки?
16. Сколько линейных участков содержат ЛВ внутренних усилий трёхшарнирной арки?
17. Может ли ЛВ продольной силы трёхшарнирной арки быть двузначной?

2.5. Расчёт плоских ферм

1. Какие стержневые системы называют фермами?
2. Как называются основные элементы ферм?
3. Покажите, что при узловой нагрузке и шарнирном соединении стержней в стержнях фермы возникают только лишь продольные силы.
4. Почему ферма более экономична (по весу) по сравнению с балкой того же пролёта?
5. Какие стержни фермы называют нулевыми?
6. Какой метод положен в основу способов определения усилий в стержнях ферм?
7. В чём достоинства и недостатки способа вырезания узлов?
8. В чём достоинства и недостатки способа простых (сквозных) сечений?
9. При каком способе определения усилий в стержнях ферм и когда используются моментные точки и уравнения равновесия – сумма моментов относительно этих точек?
10. При каком способе определения усилий в стержнях ферм и когда используются уравнения равновесия – сумма проекций (на какие оси)?

11. Как зависят усилия в раскосах от угла их наклона?
12. Как зависят усилия в стержнях верхнего и нижнего поясов от высоты фермы?
13. Какие элементы простых ферм различным образом работают при загрузении узлов верхнего или нижнего поясов?
14. Различаются ли ЛВ опорных реакций балочной фермы и опорных реакций балки того же пролёта?
15. Какие три части выделяют на ЛВ усилий в стержнях простых ферм?
16. Как направлены по отношению друг к другу левая и правая ветви (прямые) ЛВ усилий, определяемых способом простых сечений?
17. Чем отличаются ЛВ усилий в стержнях ферм, различным образом работающих при загрузении узлов верхнего или нижнего поясов (при «езде по верху» и «езде по низу»)?
18. Какие фермы называют шпренгельными? Что такое шпренгель?
19. Какие типы стержней выделяют в шпренгельных фермах?
20. В чём суть методики определения усилий в стержнях шпренгельных ферм, основанной на выделении основной фермы и шпренгелей?

2.6. Определение перемещений в стержневых системах

1. Какие составляющие перемещений определяют положение поперечного сечения плоской стержневой системы в деформированном состоянии?
2. Как принято в строительной механике обозначать перемещения от внешней нагрузки и от условных единичных сил или моментов?
3. Сформулируйте общее правило определения линейного или углового перемещения с помощью интеграла Мора.
4. Почему при определении перемещений в балках и рамах в интегралах Мора учитывают, как правило, только лишь изгибающие моменты?
5. В чём суть правила Верещагина?
6. Для каких стержневых систем (по очертанию элементов) применимо правило Верещагина при определении перемещений?
7. Что понимается под «перемножением» эпюр?
8. Как «подготовить» эпюры для их «перемножения» по правилу Верещагина?
9. В каких случаях при «перемножении» эпюр можно менять местами грузовую и единичную эпюры?
10. Как «перемножаются» эпюры по готовым формулам?
11. Как найти линейное перемещение?
12. Как найти угловое перемещение?

2.7. Расчёт статически неопределимых стержневых систем методом сил

1. По какому признаку определяется статическая неопределимость и степень статической неопределимости?
2. Что принято считать неизвестными в методе сил?
3. Что представляет собой основная система (ОС) метода сил?
4. Какие требования предъявляются к ОС метода сил?
5. Какие связи могут быть приняты в качестве «лишних»?
6. Приведите возможные способы устранения «лишних» связей.
7. Какой физический смысл имеют канонические уравнения метода сил?
8. Что представляют собой коэффициенты и свободные (грузовые) члены канонических уравнений метода сил?
9. Каковы свойства главных и побочных коэффициентов канонических уравнений метода сил?
10. Какой метод положен в основу определения (вычисления) коэффициентов и свободных членов канонических уравнений?
11. Как проверить правильность вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений?
12. Как находят усилия (строят эпюры внутренних усилий) после определения «лишних» неизвестных?
13. Как определяются перемещения в статически неопределимых стержневых системах?
14. Как проверяется правильность раскрытия статической неопределимости методом сил?
14. Что даёт учёт симметрии при выборе симметричной основной системы?

2.8. Расчёт статически неопределимых стержневых систем методом перемещений

1. Какие допущения применяются при расчёте стержневых систем методом перемещений?
2. Что принимается за неизвестные в методе перемещений?
3. Как определяется степень кинематической неопределимости?
4. Как образуется ОС метода перемещений?
5. В чём особенность «плавающей» заделки, вводимой в основную систему метода перемещений?
6. На какие элементы расчленяется стержневая система (рама, балка) в основной системе метода перемещений?

7. Какой физический смысл имеют канонические уравнения метода перемещений?

8. Что представляют собой коэффициенты и свободные (грузовые) члены канонических уравнений метода перемещений?

9. Каковы свойства главных и побочных коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?

10. В чём суть статического способа определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений?

11. Как учитываются сосредоточенные силы и моменты, приложенные в узлах стержневой системы?

12. Как проверить правильность вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений?

13. Как строят грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов в ОС метода перемещений (для рам и балок)?

14. Как строят эпюры внутренних усилий в статически неопределимой стержневой системе после раскрытия её кинематической неопределимости (после определения неизвестных перемещений)?

15. Как проверяется правильность раскрытия статической неопределимости методом перемещений?

3. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

3.1. Общие методические указания к расчёту статически определимых стержневых систем

Расчёт упомянутых стержневых систем включает в себя: определение внутренних усилий с построением их эпюр, построение линий влияния (для балок, арок и ферм), а также определение перемещений от заданной нагрузки (в балках и рамах).

Начиная расчёт, следует убедиться в том, что рассматриваемая стержневая система является статически определимой. С этой целью определяется число степеней свободы W стержневой системы, прикрепленной к неподвижному основанию (к «земле») опорными связями. Для плоских стержневых систем, составленных из простых дисков (под диском понимается плоский геометрически неизменяемый элемент стержневой системы), не содержащих замкнутых контуров и соединённых между собой шарнирами, число степеней свободы определяется по формуле

$$W = 3D - 2\mathcal{I} - C_0, \quad (3.1)$$

где D – число простых дисков; \mathcal{I} – число простых шарниров; \tilde{N}_0 – число опорных связей.

Условие $W = 0$ является необходимым (но недостаточным) признаком статической определимости.

Как известно из курса «Соппротивление материалов», внутренние усилия, возникающие в поперечном сечении стержня, определяются с помощью метода сечений. Этот метод предполагает, что нам известны все внешние силы (как *активные*, так и *реактивные*), приложенные к стержню по одну сторону от исследуемого сечения. Поэтому расчёт статически определимых стержневых систем необходимо, как правило, начинать именно с определения опорных реакций. Для составных балок и рам желательно определить и реакции во всех шарнирах, соединяющих отдельные части, что позволяет несколько упростить определение внутренних усилий в поперечных сечениях участков, примыкающих к шарнирам.

Определение опорных реакций и реакций в шарнирах в статически определимых многопролетных составных балках рекомендуется производить, рассматривая так называемую *поэтажную* схему. В поэтажной схеме выделяют *основные* и *вспомогательные* балки. Основные балки – это те, которые после расчленения всей балки по соединяющим промежуточным шарнирам оказываются способными самостоятельно нести вертикальную нагрузку, т.е. имеющие две «наземные» опоры или защемление. Вспомогательные балки имеют одну опору или остаются без опор. На первом этаже в поэтажной схеме располагаются основные балки, а на последующих этажах – вспомогательные.

Для расчёта нижележащих балок необходимо знать силы взаимодействия (реакции) в шарнирах, которые для вышележащих балок считаются опорными реакциями, а для нижележащих – известной «нагрузкой». Таким образом, определение реакций и усилий в шарнирах начинают с рассмотрения *самой верхней* вспомогательной балки, а в последнюю очередь определяют реакции для основных балок.

Определение опорных реакций в простых (несоставных) статически определимых рамах не вызывает особых затруднений, так как для трёх неизвестных реакций всегда можно составить три независимых уравнений равновесия, в каждое из которых входит только одна неизвестная реакция. Форма записи уравнений равновесия при этом зависит от того, как установлены опоры (опорные связи).

В составных статически определимых рамах, отдельные части которых соединены шарнирами, число внешних опорных связей больше трёх на число шарниров, поэтому к трём независимым уравнениям равновесия рамы в целом необходимо составлять дополнительные уравнения равновесия отдельных частей рамы (число дополнительных уравнений равно числу шарниров).

Эпюры внутренних усилий в составных балках и рамах рекомендуется строить, рассматривая отдельные их части с заданной нагрузкой, из-

вестными реакциями внешних связей и усилиями, возникающими в сопрягающих шарнирах.

Правильность построения эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M в балках и рамах должна быть проверена *дифференциальными* зависимостями между интенсивностью распределённой поперечной нагрузки $q(z)$, поперечной силой $Q(z)$ и изгибающим моментом $M(z)$:

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}. \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) можно интерпретировать как тангенсы углов наклона касательных к эпюрам Q и M , соответственно.

Из (3.2) следует, что в произвольном поперечном сечении стержня $Q(z)$ и $M(z)$ определяются следующими *интегральными* соотношениями:

$$Q(z) = \int_0^z q(z)dz + Q_0; \quad M(z) = \int_0^z Q(z)dz + M_0, \quad (3.3)$$

где Q_0 – значение поперечной силы, а M_0 – значение изгибающего момента в начале рассматриваемого участка стержня.

Известно, что определённый интеграл численно равен площади ω графика подынтегральной функции, т.е. $Q(z)$ и $M(z)$ могут быть вычислены через площади эпюр ω_q и ω_Q . Эпюру q не строят, так как она повторяет схему заданной внешней распределённой нагрузки. Следует лишь учитывать, что в (3.2) и (3.3) погонная нагрузка $q > 0$ направлена вверх.

Таким образом, выражения (3.3) можно представить в виде

$$Q(z) = Q_0 + \omega_q; \quad M(z) = M_0 + \omega_Q \quad (3.4)$$

и использовать их как для контроля, так и для построения эпюр Q и M .

Расчёт стержневых систем на постоянную, временную и подвижную нагрузки (последний вид расчёта в настоящем пособии не рассматривается) эффективно выполняется с использованием ЛВ. Это – новое и важное в курсе «Строительная механика» понятие, и его изучению следует уделить особое внимание.

Линия влияния – это график, изображающий закон изменения какого-либо фактора (реакции, внутреннего усилия, перемещения) в фиксированном сечении, возникающего от действия статически подвижной безразмерной единичной силы $\bar{P} = 1$, занимающей различные положения на сооружении. *Значение исследуемого фактора на этом графике откладывается под соответствующим положением единичной силы.*

ЛВ реакций и внутренних усилий, которые определены заданием, могут быть построены с использованием *статического* (аналитического) или *кинематического* методов. При расчёте балок наиболее эффективным является кинематический метод, однако суть теории ЛВ может быть уяснена, если надёжно усвоена идея статического метода.

Статический метод основан на использовании аналитических выражений исследуемых усилий в зависимости от положения единичной силы, полученных из уравнений статики, и метода сечений.

Кинематический метод построения ЛВ основан на принципе возможных перемещений.

В [1] показано, что если в статически определимой системе удалить какую-либо связь, превратив тем самым неизменяемую систему в механизм с одной степенью свободы, и сообщать возможное (малое) единичное перемещение в направлении устраненной связи, то эпюра перемещений точек грузовой линии в направлении $\bar{P}=1$ (для балок – схема перемещений механизма) будет моделью (копией) ЛВ усилия, соответствующего устранённой связи.

Более подробно оба метода рассматриваются ниже на примере расчёта многопролётной статически определимой балки.

3.2. Расчёт многопролётных статически определимых балок

Для балки (рис. 3.1, *а*) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M , ЛВ реакции \bar{R}_C , поперечных сил $\bar{Q}_A, \bar{Q}_B, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$ и изгибающих моментов $\bar{M}_A, \bar{M}_C, \bar{M}_3$ (сечения 1 и 2 взяты бесконечно близко к опоре C слева и справа от неё). Используя ЛВ, вычислить соответствующие реакции и внутренние усилия.

Решение. 1. Убеждаемся, что балка является статически определимой. По формуле (3.1) число степеней свободы равно:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0,$$

т.е., согласно условиям образования и прикрепления к основанию, балка является статически определимой (и кинематически неизменяемой).

2. Изображаем поэтажную схему балки (рис. 3.1, *б*), выделяя основную балку AB , вспомогательную балку $B CD$ – второго этажа и вспомогательную балку DEF – третьего этажа.

Чтобы случайно не учесть дважды силу P , приложенную в шарнире, рекомендуется на поэтажной схеме приложить её к нижележащей балке. В нашем случае – к основной балке AB .

3. Определяем реакции опор и строим эпюры Q и M в отдельных балках. В первую очередь рассмотрим самую верхнюю вспомогательную балку DEF (см. рис. 3.1, *б*).

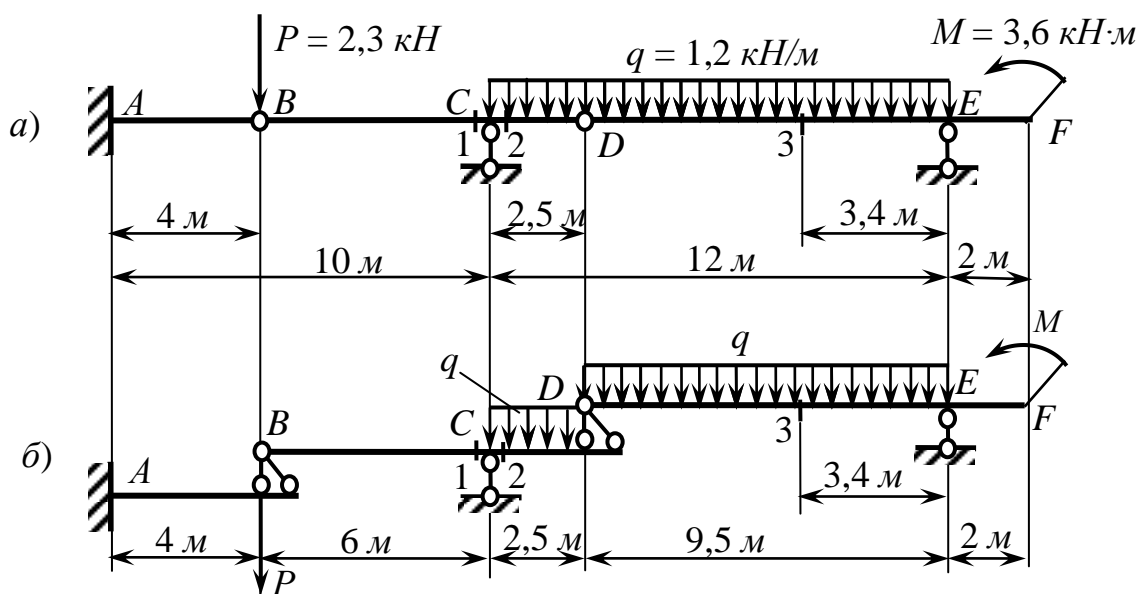


Рис. 3.1. Расчётная и поэтажная схемы балки

Значения опорных реакций находим из уравнений равновесия:

$$\sum M_D = 0; \quad R_E \cdot 9,5 - q \cdot 9,5 \cdot 4,75 + M = 0;$$

$$R_E = \frac{4,75 \cdot 9,5q - M}{9,5} = \frac{4,75 \cdot 9,5 \cdot 1,2 - 3,6}{9,5} = 5,321 \text{ кН},$$

$$\sum M_E = 0; \quad -R_{\text{шд}} \cdot 9,5 + q \cdot 9,5 \cdot 4,75 + M = 0;$$

$$R_{\text{шд}} = \frac{4,75 \cdot 9,5 \cdot q + M}{9,5} = \frac{4,75 \cdot 9,5 \cdot 1,2 + 3,6}{9,5} = 6,079 \text{ кН}.$$

Делаем проверку:

$$\sum Y = 0; \quad R_{\text{шд}} - q \cdot 9,5 + R_E = 6,075 - 1,2 \cdot 9,5 + 5,321 = 0,$$

т.е. реакции $R_{\text{шд}}$, R_E найдены правильно.

Эпюры Q и M для верхней вспомогательной балки DEF строим по участкам (рис. 3.2).

Участок DE ($0 \leq z_1 \leq 9,5 \text{ м}$):

$$Q_1(z_1) = R_{\text{шд}} - q \cdot z_1; \quad M_1(z_1) = R_{\text{шд}} \cdot z_1 - \frac{q \cdot z_1^2}{2};$$

$$\text{при } z_1 = 0: \quad Q_{DE} = 6,079 \text{ кН}; \quad M_{DE} = 0,$$

$$\text{при } z_1 = 6,1 \text{ м}: \quad Q_3 = -1,241 \text{ кН}; \quad M_3 = 14,756 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } z_1 = z_0 = \frac{R_{\text{шд}}}{q} = \frac{6,079}{1,2} = 5,066 \text{ м}: \quad M_{10} = 15,398 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } z_1 = 9,5 \text{ м}: \quad Q_{ED} = -5,321 \text{ кН}; \quad M_{ED} = 3,60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок EF ($0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_2 = 0 \text{ (const)}; \quad M_2 = M = 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м (const)}.$$

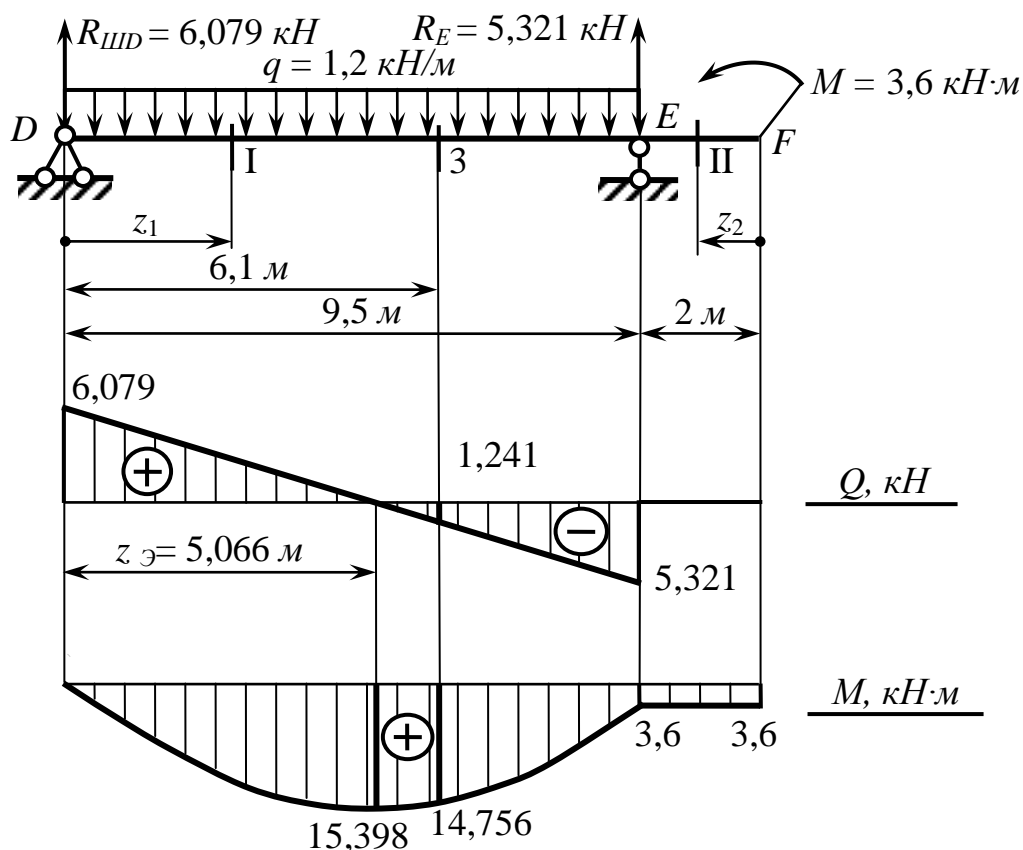


Рис. 3.2. Расчётная схема и эпюры Q и M для балки DEF

Далее рассмотрим балку BCD , расположенную этажом ниже. Кроме заданной нагрузки эта балка нагружена и реакцией $R'_{шд} = R_{шд} = 6,079 \text{ кН}$, найденной для вышерасположенной балки DEF . Но для балки BCD мы ее направляем в противоположную сторону, т.е. вниз (рис. 3.3, а).

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = 0; \quad R_C \cdot 6 - R'_{шд} \cdot 8,5 - q \cdot 2,5 \cdot 7,25 = 0;$$

$$R_C = \frac{8,5R'_{шд} + 2,5 \cdot 7,25q}{6} = \frac{8,5 \cdot 6,079 + 2,5 \cdot 7,25 \cdot 1,2}{6} = 12,237 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \quad (R_{шд} + P) \cdot 6 - R'_{шд} \cdot 2,5 - q \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 0;$$

$$R_{шд} = \frac{2,5R'_{шд} - 6P + 1,25 \cdot 2,5q}{6} = \frac{2,5 \cdot 6,079 - 6 \cdot 2,3 + 1,25 \cdot 2,5 \cdot 1,2}{6} = 0,858 \text{ кН}.$$

Делаем проверку:

$$\sum Y = -P - R_{шд} + R_C - 2,5q - R'_{шд} = -2,30 - 0,858 + 12,237 - 2,5 \cdot 1,2 - 6,079 = 0,$$

т.е. реакции найдены правильно.

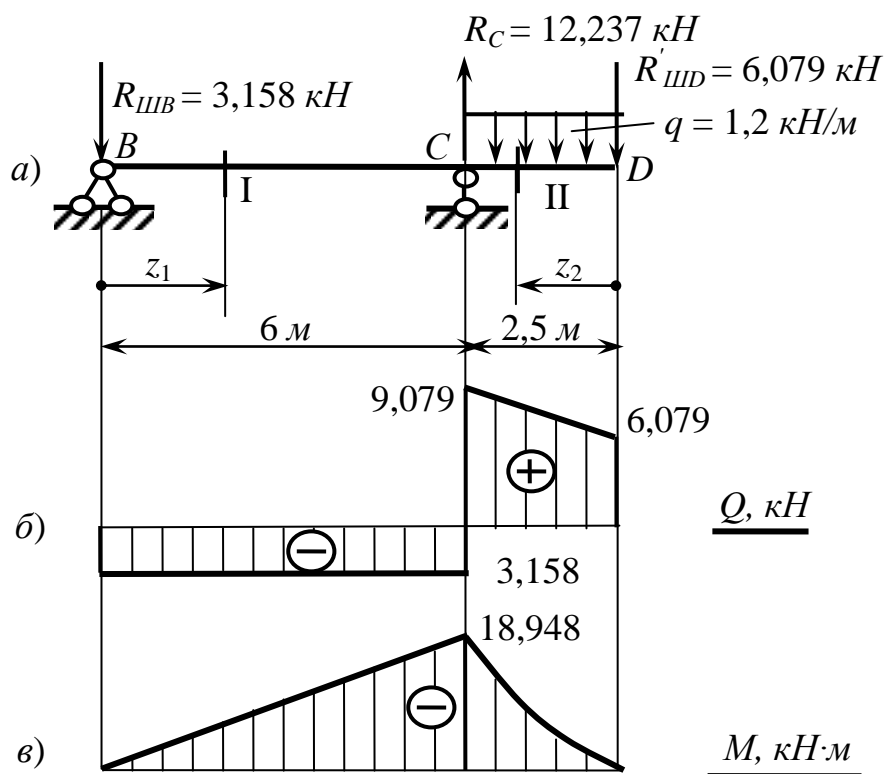


Рис. 3.3. Расчётная схема и эпюры Q и M для балки BCD

Строим эпюры Q и M (рис. 3.3, б, в).

Участок BC ($0 \leq z_1 \leq 6$) м:

$$Q_1(z_1) = -P - R_{шв} = -2,3 - 0,858 = -3,158 \text{ кН} (\text{const}); \quad M_1(z_1) = -(P + R_{шв}) \cdot z_1,$$

при $z_1 = 0$; $M_{BC} = 0$;

при $z_1 = 6$ м: $M_{CB} = -18,948 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Участок CD ($0 \leq z_2 \leq 2,5$ м):

$$Q_2(z_2) = R'_{шд} + q \cdot z_2; \quad M_2(z_2) = -R'_{шд} \cdot z_2 - \frac{q \cdot z_2^2}{2},$$

при $z_2 = 0$: $Q_{DC} = 6,079 \text{ кН}$; $M_{CD} = 0$,

при $z_2 = 2,5$ м: $Q_{CD} = 9,079 \text{ кН}$; $M_{CD} = -18,948 \text{ кН}$.

Наконец, рассмотрим основную балку AB (рис. 3.4, а).

Строим эпюры Q и M (рис. 3.4, б, в):

$$Q_1(z_1) = -R'_{шд} = -0,858 \text{ кН} (\text{const}); \quad M_1(z_1) = R'_{шд} \cdot z_1 \quad (0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}),$$

при $z_1 = 0$; $M_{BA} = 0$,

при $z_1 = 4$ м; $M_{AB} = 3,432 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

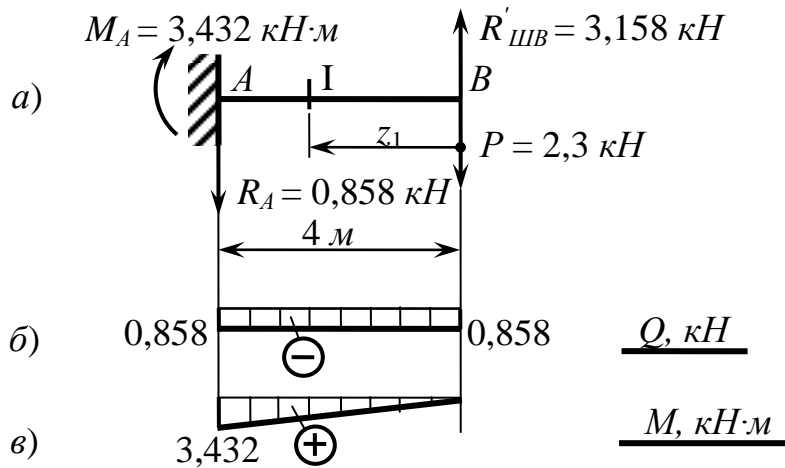


Рис. 3.4. Расчётная схема и эпюры Q и M для балки AB

Заметим, что эпюры Q и M для этой балки можно построить, не определяя опорные реакции в заделке. Реакции в заделке равны значениям поперечной силы и изгибающего момента в сечении A и направлены в соответствии с правилами знаков для Q и M .

4. Изображаем полученные отдельные эпюры Q и M на общей базе под заданной расчётной схемой балки (рис. 3.5).

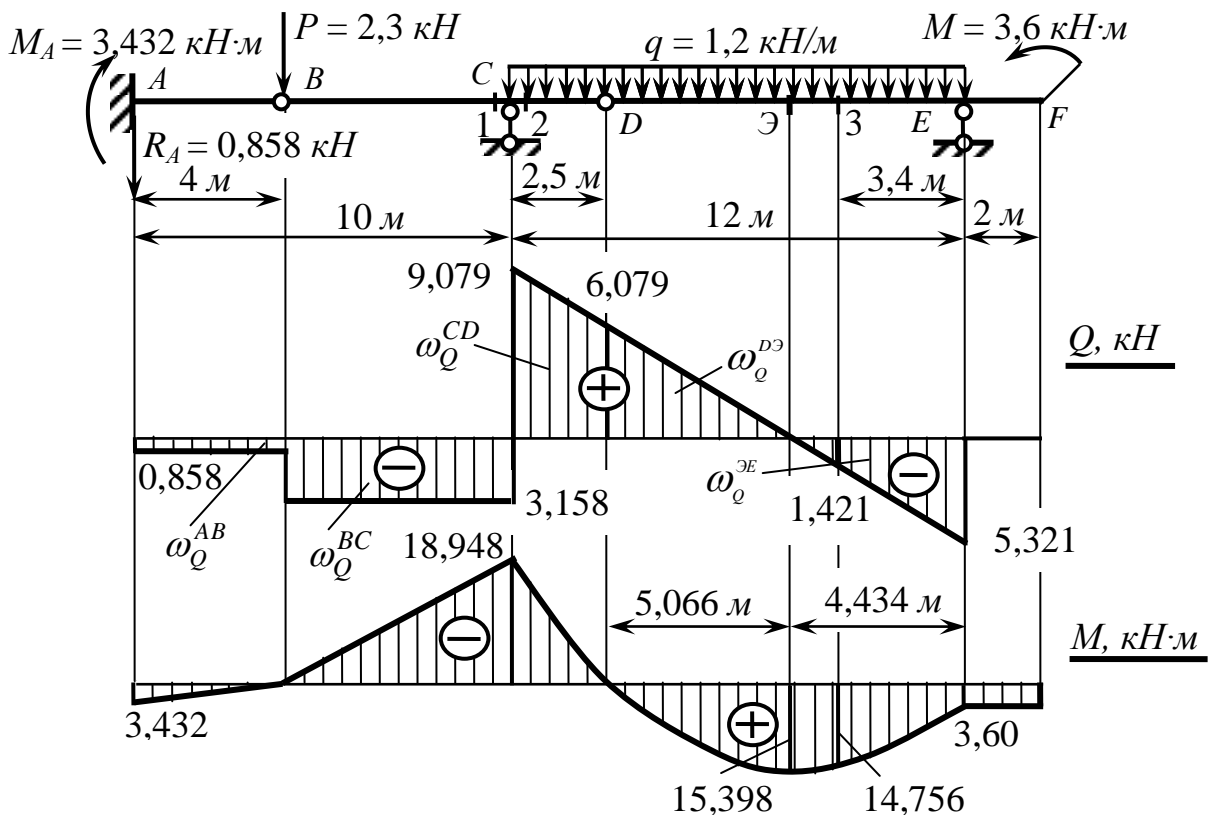


Рис. 3.5. Расчётная схема и эпюры Q и M для заданной балки

5. Проверяем правильность построения эпюры Q , используя соотношения (3.3) и (3.4) между Q и q .

Участок AB :

$$Q_0^{AB} = Q_{AB} = -R_A = -0,858 \text{ кН}; \omega_q = 0;$$

$$Q_{BA} = Q_0^{AB} + \omega_q = -0,858 + 0 = -0,858 \text{ кН}.$$

Участок BC :

$$Q_0^{BC} = Q_{BC} = Q_{BA} - P = -0,858 - 2,3 = -3,158 \text{ кН}; \omega_q = 0;$$

$$Q_{CB} = Q_0^{BC} + \omega_q = -3,158 + 0 = -3,158 \text{ кН}.$$

Участок CD :

$$Q_0^{CD} = Q_{CD} = Q_{CB} + R_C = -3,158 + 12,237 = 9,079 \text{ кН}; \omega_q = -1,2 \cdot 2,5 = -3,0 \text{ кН};$$

$$Q_{DC} = Q_0^{CD} + \omega_q = 9,079 - 3,0 = 6,079 \text{ кН}.$$

Участок DE :

$$Q_0^{DE} = Q_{DE} = Q_{DC} = 6,079 \text{ кН}; \omega_q = -1,2 \cdot 9,5 = -11,4 \text{ кН};$$

$$Q_{ED} = Q_0^{DE} + \omega_q = 6,079 - 11,4 = -5,321 \text{ кН}.$$

Участок EF :

$$Q_0^{EF} = Q_{EF} = Q_{ED} + R_E = -5,321 + 5,321 = 0; \omega_q = 0;$$

$$Q_{FE} = Q_0^{EF} + \omega_q = 0 + 0 = 0.$$

Заметим, что, определяя Q_0 для каждого последующего участка, мы «делаем скачок» на значение и по направлению сил, приложенных на границах смежных участков.

Выполним теперь проверку правильности построения эпюры M по эпюре Q , используя соотношения (3.3) и (3.4) между M и Q .

Участок AB :

$$M_0^{AB} = M_{AB} = M_A = 3,432 \text{ кН}\cdot\text{м}; \omega_Q^{AB} = -0,858 \cdot 4 = -3,432 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BA} = M_0 + \omega_Q^{AB} = 3,432 - 3,432 = 0.$$

Участок BC :

$$M_0^{BC} = M_{BC} = M_{BA} = 0; \omega_Q^{BC} = -3,158 \cdot 6 = -18,948 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок CD :

$$M_0^{CD} = M_{CD} = M_{CB} = -18,948 \text{ кН}\cdot\text{м}; \omega_Q^{CD} = \frac{9,079 + 6,079}{2} \cdot 2,5 = 18,048 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{DC} = M_0 + \omega_Q^{CD} = -18,948 + 18,948 = 0.$$

Участок DE :

$$M_0^{DE} = M_{DE} = M_{DC} = 0; \omega_Q^{DE} = \frac{6,079 - 5,321}{2} \cdot 9,5 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{ED} = M_0 + \omega_Q^{DE} = 0 + 3,6 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\omega_Q^{DQ} = \frac{6,079 \cdot 5,066}{2} = 15,398 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\varepsilon D} = M_0 + \omega_Q^{DE} = 0 + 15,398 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок EF :

$$M_0 = M_{EF} = M_{ED} = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \omega_Q^{EF} = 0; \quad M_{EF} = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Нулевые значения изгибающих моментов в шарнирах B и D и значение изгибающего момента на правом конце балки, равное сосредоточенному внешнему моменту $M = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, соответствуют расчётной схеме.

Обратим внимание, что ω_Q^{DE} вычислена как площадь «перекрученной» трапеции по формуле площади обычной трапеции с той лишь разницей, что учтены знаки сторон. Эта площадь может быть представлена и как сумма площадей треугольников, т.е.

$$\omega_Q^{DE} = \omega_Q^{DQ} + \omega_Q^{QE} = \frac{6,079 \cdot 5,066}{2} + \frac{-5,321 \cdot 4,434}{2} = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6. Строим ЛВ, используя статический и кинематический методы.

Для построения некоторых ЛВ, например, \bar{M}_A , \bar{Q}_1 , \bar{M}_1 , воспользуемся статическим методом.

Аналитические выражения \bar{M}_A , \bar{Q}_1 , \bar{M}_1 получим при различных положениях единичной силы $\bar{P} = 1$ на поэтажной схеме балки (рис. 3.6).

Пусть $\bar{P} = 1$ находится на основной балке AB ($0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$). В этом случае вспомогательные балки BCD и DEF будут без «нагрузки», поэтому усилия в шарнирах $\bar{R}_{UD} = \bar{R}_{UE} = 0$.

Исследуемые усилия будут равны: $\bar{M}_A = -\bar{P} \cdot z_1 = -z_1$; $\bar{Q}_1 = 0$; $\bar{M}_1 = 0$, т.е. ЛВ \bar{Q}_1 и \bar{M}_1 на участке AB нулевые, а ЛВ \bar{M}_A – прямая, которую мы построим по двум значениям, соответствующим положению $\bar{P} = 1$ на границах участка:

$$\text{при } z_1 = 0; \quad \bar{M}_{AA} = 0, \quad \text{при } z_1 = 4 \text{ м}; \quad \bar{M}_{AB} = -4 \text{ м}.$$

Поместим $\bar{P} = 1$ на балку BD ($0 \leq z_2 \leq 8,5 \text{ м}$). При этом $\bar{R}_{UD} = 0$, так как балка DF будет без «нагрузки». Реакцию \bar{R}_C и усилие в шарнире $\bar{R}'_{UB} = \bar{R}_{UB}$, необходимые для выражения \bar{M}_A , \bar{Q}_1 , \bar{M}_1 , найдём из условия равновесия вспомогательной балки BCD :

$$\sum M_B = 0; \quad -\bar{P} \cdot z_2 + \bar{R}_C \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_C = \frac{\bar{P} \cdot z_2}{6} = \frac{z_2}{6};$$

$$\sum M_C = 0; \quad \bar{P} \cdot (6 - z_2) - \bar{R}_{UB} \cdot 6 = 0; \quad \bar{R}_{UB} = \frac{\bar{P} \cdot (6 - z_2)}{6} = 1 - \frac{z_2}{6}.$$

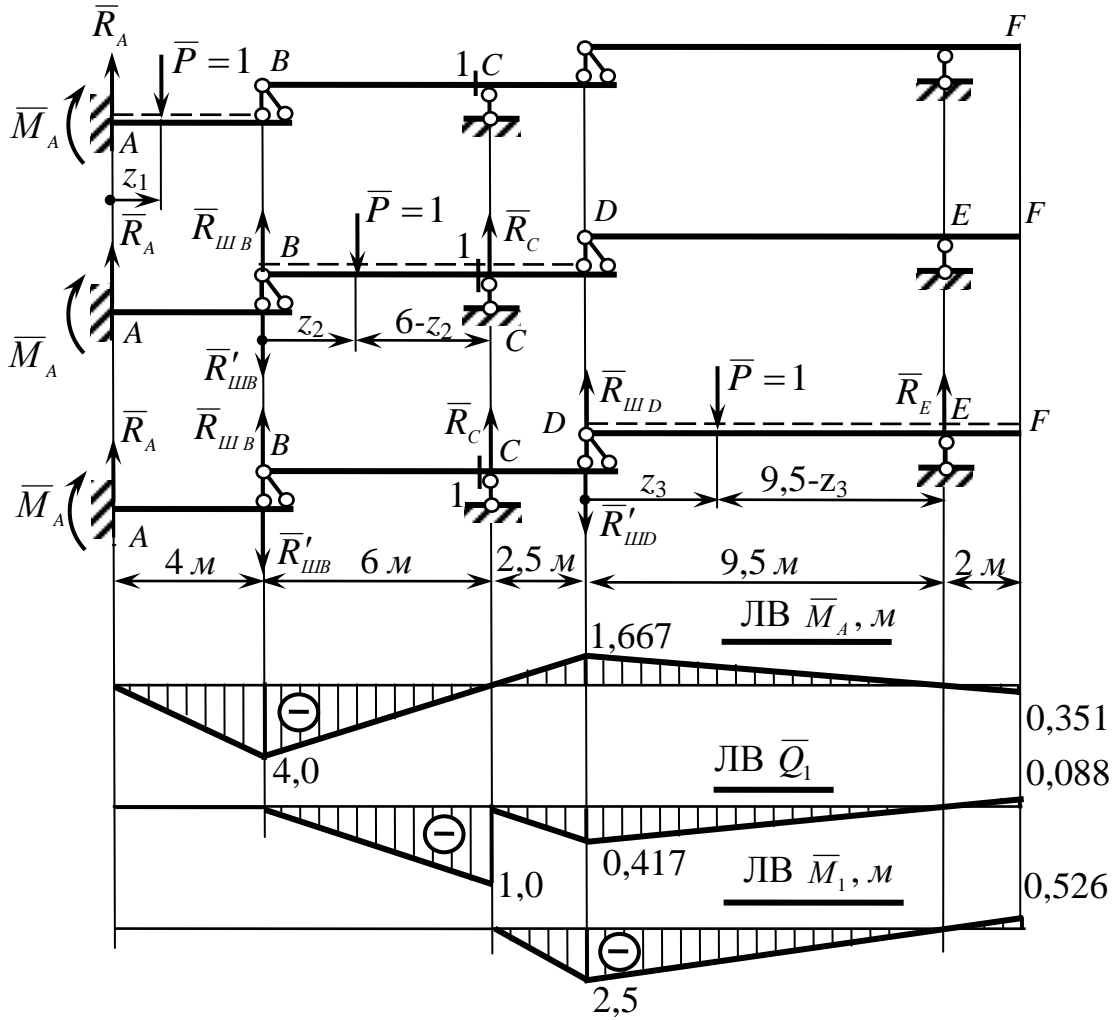


Рис. 3.6. Построение линий влияния статическим методом

Момент в заделке \bar{M}_A найдём из условия равновесия балки AB :

$$\sum M_A = 0; \quad -\bar{M}_A - \bar{R}'_{шB} \cdot 4 = 0; \quad \bar{M}_A = -4\bar{R}'_{шB} = \frac{2}{3}z_2 - 4.$$

Линию влияния \bar{M}_A построим по двум значениям:

$$z_2 = 0; \quad \bar{M}_{AB} = -4 \text{ м}; \quad z_2 = 8,5 \text{ м}; \quad \bar{M}_{AD} = 1,667 \text{ м}.$$

Внутренние усилия \bar{Q}_1 и \bar{M}_1 зависят от положения $\bar{P} = 1$ относительно сечения 1. При $\bar{P} = 1$ слева от сечения 1, т.е. при $0 \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$:

$$\bar{Q}_1^{лев}(z_2) = -\bar{R}_C = -\frac{z_2}{6}; \quad \bar{M}_1^{лев}(z_2) = 0.$$

Для двух характерных положений $\bar{P} = 1$ получим:

$$z_2 = 0; \quad \bar{Q}_{1B}^{лев} = 0; \quad z_2 = 6 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{11}^{лев} = -1.$$

При $\bar{P} = 1$ справа от сечения 1, т.е. при $6 \text{ м} \leq z_2 \leq 8,5 \text{ м}$:

$$\bar{Q}_1^{np}(z_2) = \bar{R}_{\text{шВ}} = 1 - \frac{z_2}{6}; \quad \bar{M}_1^{np}(z_2) = \bar{R}_{\text{шВ}} \cdot 6 = \left(1 - \frac{z_2}{6}\right) \cdot 6 = 6 - z_2.$$

Для двух характерных положений $\bar{P} = 1$ получим:

$$z_2 = 6 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{11}^{np} = 0; \quad \bar{M}_{11}^{np} = 0,$$

$$z_2 = 8,5 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{1D}^{np} = -0,417; \quad \bar{M}_{1D}^{np} = -2,5 \text{ м}.$$

Переместим $\bar{P} = 1$ на балку DEF , т.е. $0 \leq z_3 \leq 11,5 \text{ м}$.

В этом случае из условия равновесия балки DEF найдём

$$\bar{R}_{\text{шД}} = 1 - \frac{z_3}{9,5}.$$

Зная $\bar{R}'_{\text{шД}} = \bar{R}_{\text{шД}}$, найдём усилие в шарнире $\bar{R}_{\text{шВ}}$ из условия равновесия вспомогательной балки $B CD$:

$$\sum M_C = 0; \quad -\bar{R}_{\text{шВ}} \cdot 6 - \bar{R}'_{\text{шД}} \cdot 2,5 = 0; \quad \bar{R}_{\text{шВ}} = -\bar{R}'_{\text{шД}} \frac{2,5}{6} = \left(\frac{z_3}{9,5} - 1\right) \frac{2,5}{6}.$$

Выражение \bar{M}_A получим из условия равновесия балки AB :

$$\bar{M}_A = -4\bar{R}'_{\text{шВ}} = -4 \cdot \left(\frac{z_3}{9,5} - 1\right) \cdot \frac{2,5}{6} = \left(1 - \frac{z_3}{6}\right) \cdot \frac{5}{3}.$$

Внутренние усилия \bar{Q}_1 и \bar{M}_1 выразим через $\bar{R}_{\text{шВ}}$:

$$\bar{Q}_1 = \bar{R}_{\text{шВ}} = \left(\frac{z_3}{9,5} - 1\right) \cdot \frac{2,5}{6}; \quad \bar{M}_1 = \bar{R}_{\text{шВ}} \cdot 6 = 2,5 \cdot \left(\frac{z_3}{9,5} - 1\right).$$

Вычислим значения ЛВ при характерных положениях $\bar{P} = 1$:

$$z_3 = 0; \quad \bar{M}_{AD} = 1,667 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{1D} = -0,417; \quad \bar{M}_{1D} = -2,5 \text{ м},$$

$$z_3 = 9,5 \text{ м}; \quad \bar{M}_{AE} = 0; \quad \bar{Q}_{1E} = 0; \quad \bar{M}_{1E} = 0,$$

$$z_3 = 11,5 \text{ м}; \quad \bar{M}_{AF} = -0,351 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{1F} = 0,088; \quad \bar{M}_{1F} = 0,525 \text{ м}.$$

Построенные таким образом ЛВ \bar{M}_A , \bar{Q}_1 и \bar{M}_1 показаны на рис. 3.6.

Остальные ЛВ построим кинематическим методом. Для построения, например, ЛВ реакции \bar{R}_C преобразуем балку в механизм с одной степенью свободы, устранив опорный стержень C (рис. 3.7, а). В положительном направлении реакции \bar{R}_C (вверх) сообщим сечению C единичное линейное перемещение $\bar{\Delta} = 1$. В этом случае стержень AB останется неподвижным, так как он связан с «землёй» жёстким защемлением. Стержень $B CD$ повернётся при этом относительно шарнира B так, что шарнир D переместится вверх, а стержень DEF повернётся относительно шарнирно-подвижной опоры E . Перемещения сечений C , D , F , которые легко вычислить из геометрических соотношений, и дадут нам значения ЛВ \bar{R}_C в характерных точках. Схема перемещений (рис 3.7, б) и будет моделью ЛВ опорной реакции \bar{R}_C (рис. 3.7, в).

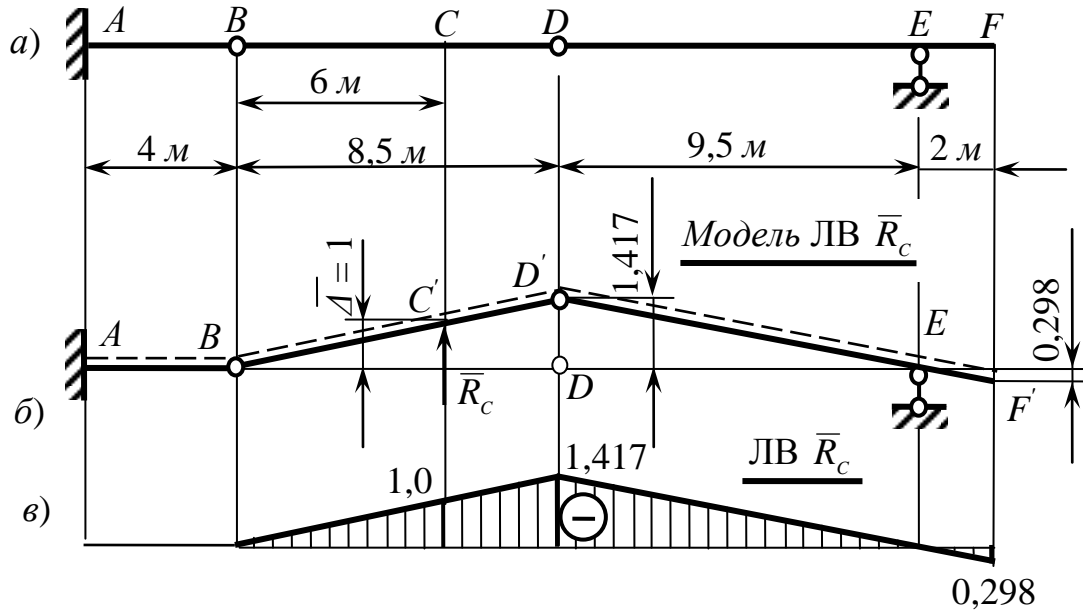


Рис. 3.7. Построение линии влияния \bar{R}_C кинематическим методом

Для построения ЛВ внутренних усилий кинематическим методом систему необходимо преобразовать в механизм, устранив соответствующую внутреннюю связь. Внутренние связи «обеспечивают» полную неподвижность относительно друг друга двух частей стержня, условно рассечённого в исследуемом сечении. Эти три связи можно представить наложенными следующим образом (рис. 3.8, а). Шарнирное соединение стержней представляется наложением двух линейных связей (рис. 3.8, б).

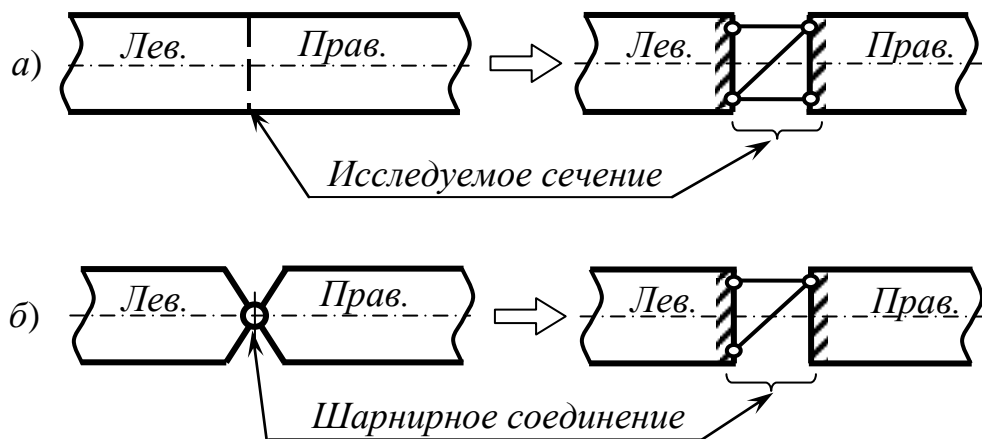


Рис. 3.8. Схемы представления внутренних связей

Устранение одной из горизонтальных связей в сплошном сечении обеспечивает возможность взаимного поворота левой и правой частей стержня на угол $\bar{\theta}$, а устранение наклонной связи – взаимного линейного смещения на $\bar{\Delta}$ без взаимного поворота левой и правой частей.

Преобразование стержневой системы устранением угловой связи представляется на расчётной схеме врезанием шарнира в исследуемое сечение (рис. 3.9, а), а устранением линейной поперечной связи – введением ползуна (рис. 3.9, б).

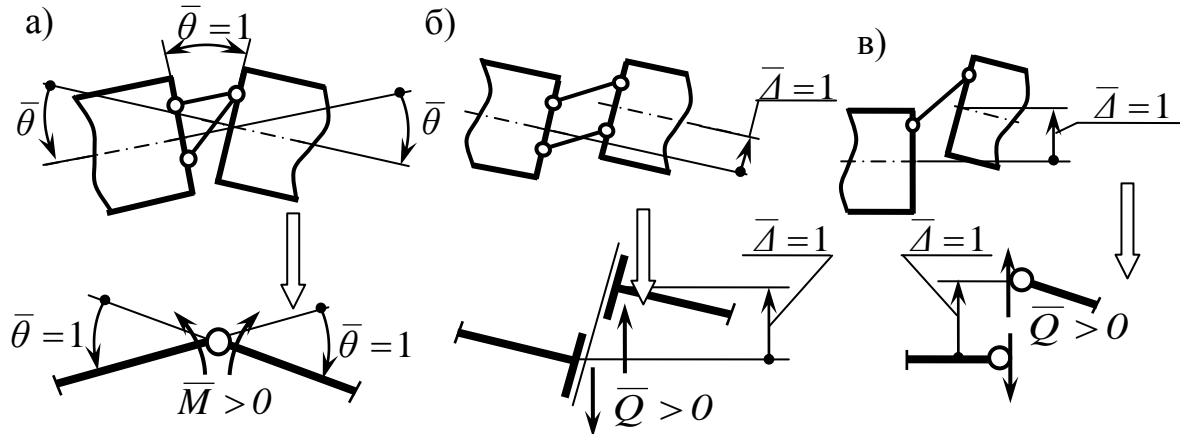


Рис. 3.9. Способы устранения связей в исследуемом сечении при построении линий влияния кинематическим методом

Устранение одной из горизонтальных связей в сплошном сечении обеспечивает возможность взаимного поворота левой и правой частей стержня на угол $\bar{\theta}$, а устранение наклонной связи – взаимного линейного смещения на $\bar{\Delta}$ без взаимного поворота левой и правой частей.

Преобразование стержневой системы устранением угловой связи представляется на расчётной схеме врезанием шарнира в исследуемое сечение (см. рис. 3.9, а), а устранением линейной поперечной связи – введением ползуна (см. рис. 3.9, б).

Устранение наклонной связи в шарнирном соединении разрешает взаимное линейное перемещение на $\bar{\Delta}$, но не накладывает ограничений на взаимный поворот (рис. 3.9, в), и на преобразованной стержневой системе представляется «размыканием» (разъединением) шарнира.

Для построения ЛВ изгибающего момента стержневой системе задаётся во врезанном шарнире относительный угол поворота $\bar{\theta} = 1$ в направлении положительного \bar{M} (рис. 3.10), а для ЛВ поперечной силы – относительное поперечное смещение $\bar{\Delta} = 1$ в направлении положительной \bar{Q} .

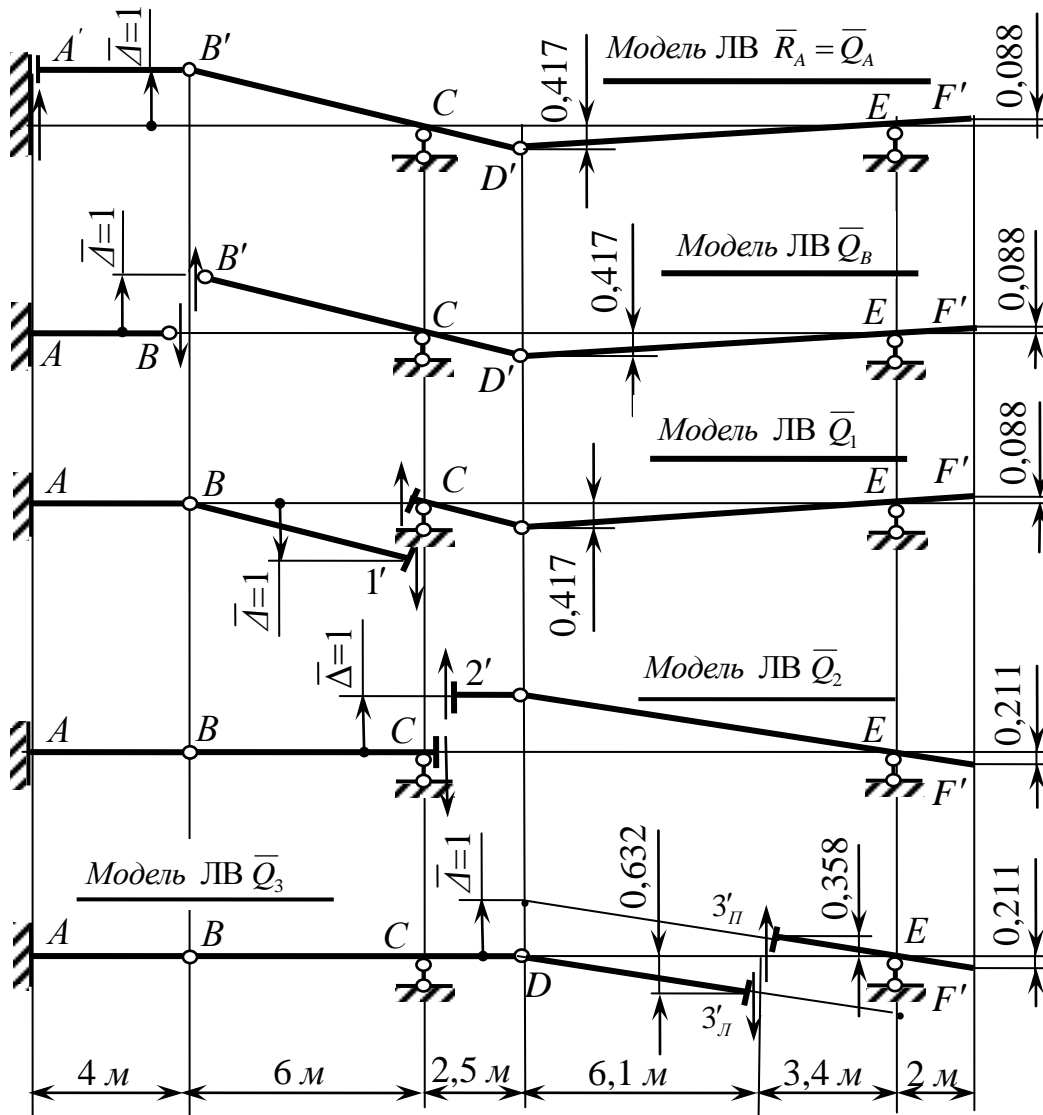


Рис. 3.10. Построение моделей линий влияния поперечных сил

Построение моделей ЛВ кинематическим методом поперечных сил $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_d$ показано на рис. 3.10, а изгибающих моментов $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \bar{M}_c, \bar{M}_3$ – на рис. 3.11.

Заметим, что, определяя значения перемещений в преобразованной стержневой системе, следует исходить из того, что $\bar{\theta} = 1$ и $\bar{\Delta} = 1$ – малые (возможные) перемещения. Поэтому горизонтальными перемещениями мы пренебрегаем, а вертикальные перемещения на моделях ЛВ вычисляем как дуги окружности соответствующих радиусов. Следует обратить внимание и на то, что на модели ЛВ поперечных сил оси стержней справа и слева от введённого ползуна остаются параллельными между собой. В то же время оси стержней слева и справа в «разомкнутом» шарнире не параллельны.

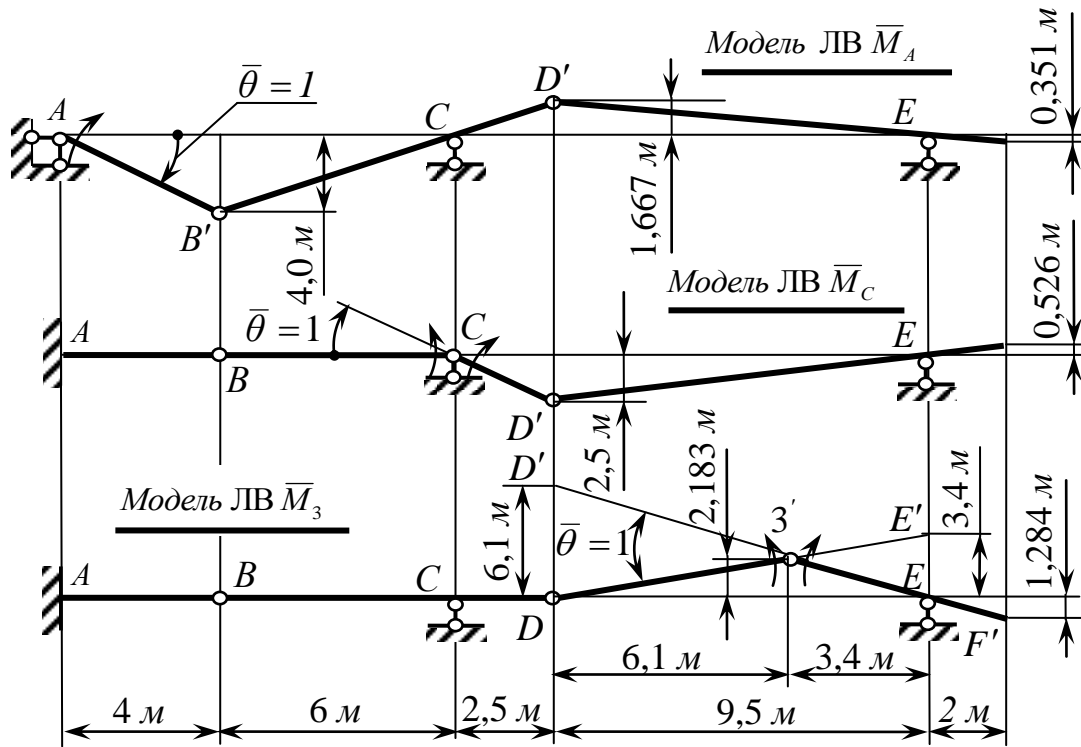


Рис. 3.11. Построение моделей линий влияния изгибающих моментов

7. Загружаем построенные ЛВ. Для удобства поместим все построенные выше ЛВ под расчётной схемой балки (рис. 3.12).

Загружение ЛВ какого-либо усилия \bar{S} выполняется по формуле

$$S = \sum_{i=1}^m P_i \bar{y}_i + \sum_{j=1}^n q_j \bar{\omega}_j \pm \sum_{k=1}^p M_k \operatorname{tg} \bar{\alpha}_k,$$

где P_i – сосредоточенная сила, κH ; \bar{y}_i – значение ЛВ \bar{S} под сосредоточенной силой; q_j – интенсивность равномерно распределённой нагрузки, $\kappa\text{H}/\text{м}$; $\bar{\omega}_j$ – значение площади ЛВ \bar{S} под равномерно распределённой нагрузкой q_j ; M_k – сосредоточенный момент, $\kappa\text{H}\cdot\text{м}$; $\operatorname{tg} \bar{\alpha}_k$ – значение тангенса угла наклона ЛВ \bar{S} под сосредоточенным моментом M_k ; m, n, p – число сосредоточенных сил, участков распределённых нагрузок, сосредоточенных моментов, соответственно. Единицы измерения \bar{y}_i , $\bar{\omega}_j$, $\operatorname{tg} \bar{\alpha}_k$ определяются видом усилия S (силы или момента).

Произведение $M_k \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_k$ принимается со знаком «+», если направления момента M_k и отсчёта угла $\bar{\alpha}_k$ противоположны, и со знаком «-», если эти направления совпадают. Нагрузки P_i и q_j , направленные вниз, считаются положительными.

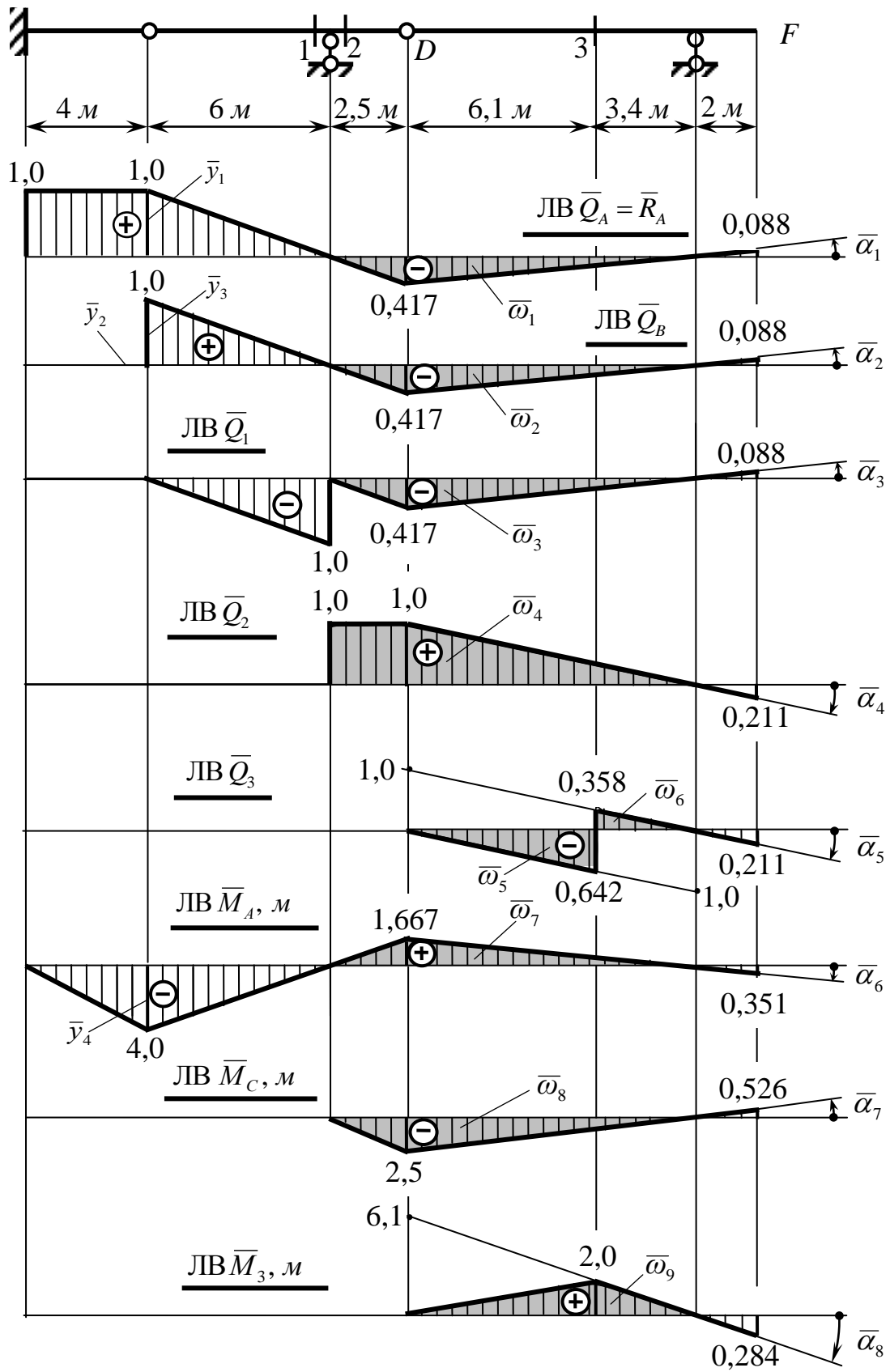


Рис. 3.12. Загрузка линий влияния

Вычисляем поперечные силы:

$$Q_A = R_A = P \cdot \bar{y}_1 + q \cdot \bar{\omega}_1 - M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_1 = \\ = 2,3 \cdot 1 + 1,2 \cdot \left(-\frac{0,417 \cdot 12}{2} \right) - 3,6 \cdot \frac{0,417}{9,5} = -0,860 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{лев}} = P \cdot \bar{y}_3 + q \cdot \bar{\omega}_2 - M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 = \\ = 2,3 \cdot 1 + 1,2 \cdot \left(-\frac{0,417 \cdot 12}{2} \right) - 3,6 \cdot \frac{0,417}{9,5} = -0,860 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{пра}} = P \cdot \bar{y}_2 + q \cdot \bar{\omega}_2 - M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 = \\ = 2,3 \cdot 0 + 1,2 \cdot \left(-\frac{0,417 \cdot 12}{2} \right) - 3,6 \cdot \frac{0,417}{9,5} = -0,860 \text{ кН};$$

$$Q_1 = Q_C^{\text{лев}} = q \cdot \bar{\omega}_3 - M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_3 = 1,2 \cdot \left(-\frac{0,417 \cdot 12}{2} \right) - 3,6 \cdot \frac{0,417}{9,5} = 3,160 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_C^{\text{пра}} = q \cdot \bar{\omega}_4 + M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_4 = 1,2 \cdot \left(1,0 \cdot 2,5 + \frac{1,0 \cdot 9,5}{2} \right) + 3,6 \cdot \frac{1}{9,5} = 9,079 \text{ кН};$$

$$Q_3 = q(\bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6) + M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_5 = 1,2 \cdot \left(-\frac{0,642 \cdot 6,1}{2} + \frac{0,358 \cdot 3,4}{2} \right) + 3,6 \cdot \frac{1}{9,5} = -1,241 \text{ кН}.$$

Вычисляем изгибающие моменты:

$$M_A = P \cdot \bar{y}_1 + q \cdot \bar{\omega}_1 + M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_6 = 2,3 \cdot (-4,0) + 1,2 \cdot \frac{1,667 \cdot 12}{2} + 3,6 \cdot \frac{1,667}{9,5} = 3,434 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = q \cdot \bar{\omega}_8 - M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_7 = 1,2 \cdot \left(-\frac{2,5 \cdot 12}{2} \right) - 3,6 \cdot \frac{2,5}{9,5} = -18,947 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = q \cdot \bar{\omega}_9 + M \cdot \operatorname{tg} \bar{\alpha}_8 = 1,2 \cdot \frac{2,183 \cdot 9,5}{2} + 3,6 \cdot \frac{6,1}{9,5} = 14,756 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, нами получены практически такие же значения внутренних усилий, как и ранее при построении эпюр Q , M (с точностью до третьего знака после запятой).

3.3. Расчёт составных статически определимых рам

Пример. Для рамы (рис. 3.13) построить и проверить эпюры продольных N , поперечных Q сил и изгибающих моментов M .

Решение. 1. Убедимся, что рама является статически определимой:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

2. Определяем четыре реакции опор R_{AX}^* , R_{AY}^* , R_{BX}^* , R_{BY}^* , задав их предполагаемые направления. Для рамы в целом мы можем составить только три независимых уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_{BX}^* \cdot h + R_{BY}^* \cdot 2l - M - q \cdot 2l \cdot l + P_1 \cdot h = 0; \\ -R_{BX}^* \cdot 2 + R_{BY}^* \cdot 6 - 120 - 20 \cdot 6 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 0;$$

$$\begin{aligned} & \underline{-2R_{BX}^* + 6R_{BY}^* - 360 = 0,} \\ \sum M_B = 0; & \quad -R_{AX}^* \cdot h - R_{AY}^* \cdot 2l - M + q \cdot 2l \cdot l - P_2 \cdot h = 0; \\ & \quad -R_{AX}^* \cdot 2 - R_{AY}^* \cdot 6 - 120 + 20 \cdot 6 \cdot 3 - 45 \cdot 2 = 0; \\ & \quad \underline{-2R_{AX}^* - 6R_{AY}^* + 150 = 0,} \\ \sum X = 0; & \quad -R_{AX}^* + R_{BX}^* - P_1 - P_2 = 0; \quad -R_{AX}^* + R_{BX}^* - 60 - 45 = 0; \\ & \quad \underline{-R_{AX}^* + R_{BX}^* - 105 = 0.} \end{aligned}$$

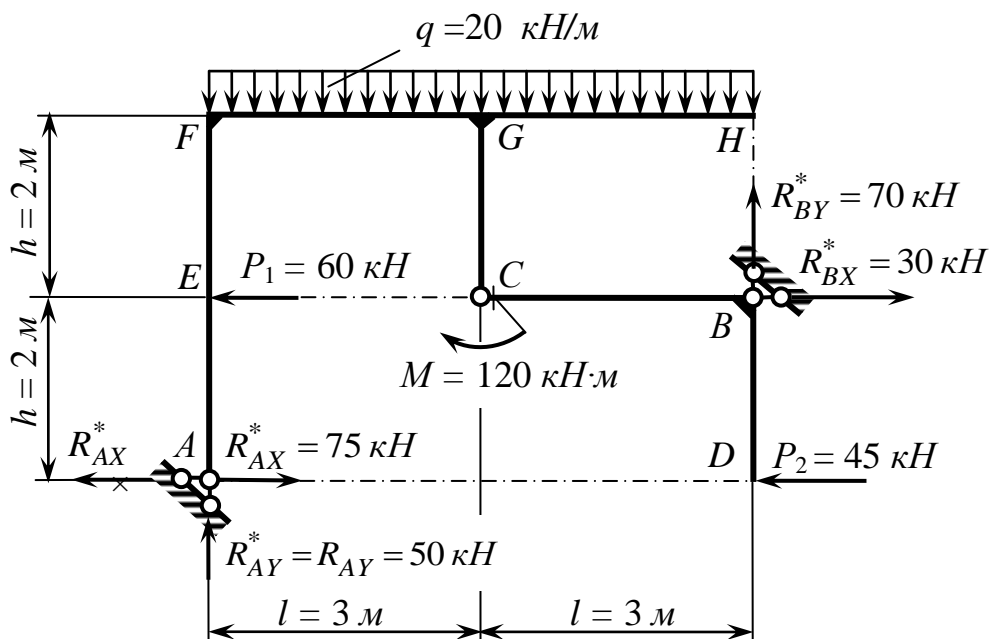


Рис. 3.13. Расчётная схема рамы

Дополнительное четвертое уравнение запишем, рассматривая, например, равновесие правой части рамы CBD :

$$\sum M_C^{np} = 0; \quad R_{BY}^* \cdot l - M - P_2 \cdot h = 0; \quad R_{BY}^* \cdot 3 - 120 - 45 \cdot 2 = 0; \quad 3R_{BY}^* - 210 = 0.$$

Отсюда получим, что

$$R_{BY}^* = \frac{210}{3} = 70 \text{ кН.}$$

Подставив R_{BY}^* в первое подчеркнутое уравнение, найдём

$$R_{BX}^* = \frac{6R_{BY}^* - 360}{2} = \frac{6 \cdot 70 - 360}{2} = 30 \text{ кН.}$$

Из третьего подчеркнутого уравнения

$$R_{AX}^* = R_{BX}^* - 105 = 30 - 105 = -75 \text{ кН.}$$

Подставив R_{AX}^* во второе подчеркнутое уравнение, получим:

$$R_{AY}^* = \frac{150 - 2R_{AX}^*}{6} = \frac{150 - 2(-75)}{6} = 50 \text{ кН.}$$

Для проверки найденных реакций составим уравнение равновесия рамы в целом, в которое войдут все реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_C &= -R_{AX}^* \cdot 2h - R_{AY}^* \cdot l - P_1 h - M + R_{BX}^* \cdot h + R_{BY}^* \cdot l - P_2 \cdot 2h = \\ &= -(-75) \cdot 4 - 50 \cdot 3 - 60 \cdot 2 - 120 + 30 \cdot 2 + 70 \cdot 3 - 45 \cdot 4 = 0, \end{aligned}$$

т.е. реакции найдены правильно.

Все реакции, кроме R_{AX}^* , получились положительными, следовательно, их истинные направления соответствуют предполагаемым направлениям. Истинное направление реакции $R_{AX} = -R_{AX}^* = 50 \text{ кН}$ – вправо (предполагаемое направление R_{AX}^* на расчётной схеме рамы (см. рис. 3.13) перечёркнуто и показано истинное). В дальнейшем в расчётах мы будем использовать истинные направления реакций R_{AX} , R_{AY} , R_{BX} , R_{BY} .

Для упрощения построения эпюр на участках CG и CB найдём реакции в шарнире C (рис. 3.14).

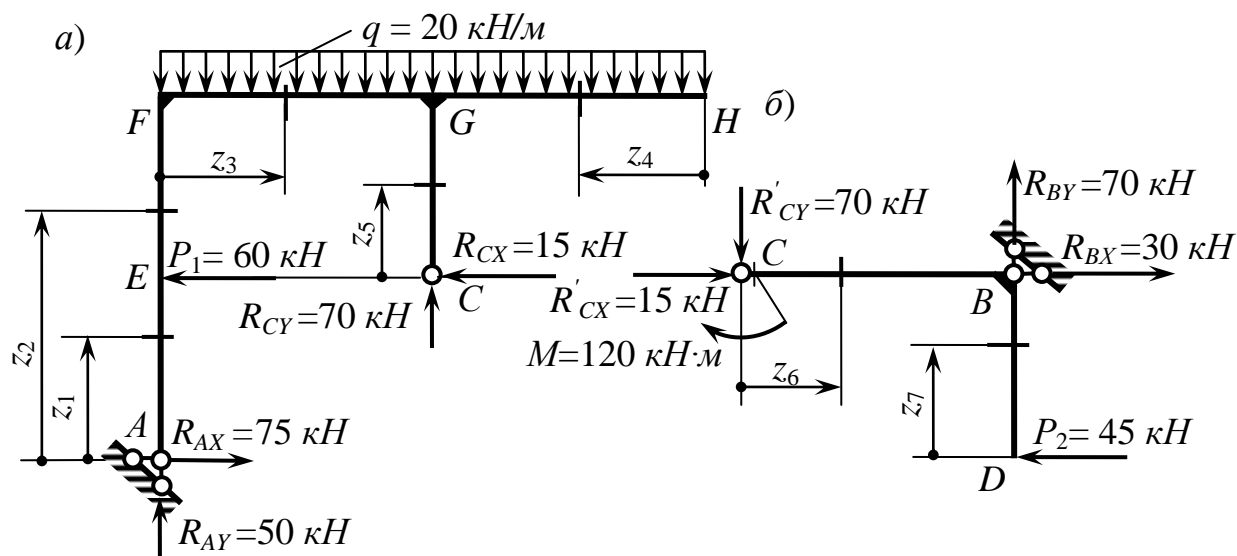


Рис. 3.14. Рама, разъединённая (расчленённая) по шарниру C

Для левой части рамы (рис. 3.14, а) имеем:

$$\begin{aligned} \sum X^{лег} &= 0; R_{AX} - P_1 - R_{CX}^* = 0; R_{CX}^* = R_{AX} - P_1 = 75 - 60 = 15 \text{ кН}; \\ \sum Y^{лег} &= 0; R_{AY} - q \cdot 2l + R_{CY}^* = 0; R_{CY}^* = 2ql - R_{AY} = 2 \cdot 20 \cdot 3 - 50 = 70 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Аналогично, для правой части (рис. 3.14, б)

$$\begin{aligned} \sum X^{np} &= 0; R_{CX}^* + R_{BX} - P_2 = 0; R_{CX}^* = P_2 - R_{BX} = 45 - 30 = 15 \text{ кН}; \\ \sum Y^{np} &= 0; -R_{CY}^* + R_{BY} = 0; R_{CY}^* = R_{BY} = 70 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Дополнительным подтверждением правильности определения реакций служит соблюдение условий $R_{CX}^* = R'_{CX}^*$, $R_{CY}^* = R'_{CY}^*$ как внутренних усилий в шарнире C .

3. Строим эпюры N , Q , M (рис. 3.15), записывая законы их изменения на отдельных участках рамы (см. рис. 3.14).

Участок AE ($0 \leq z_1 \leq 2$ м):

$$N_I = -R_{AY} = -50 \text{ кН (const)}; \quad Q_I = -R_{AX} = -75 \text{ кН (const)};$$

$$M_I(z_1) = -R_{AX} \cdot z_1,$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_{AE} = 0; \quad \text{при } z_1 = 2 \text{ м} \quad M_{EA} = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок EF ($2 \text{ м} \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$):

$$N_{II} = -R_{AY} = -50 \text{ кН (const)};$$

$$Q_{II} = -R_{AX} + P_1 = -75 + 60 = -15 \text{ кН (const)};$$

$$M_{II}(z_2) = -R_{AX} \cdot z_2 + P_1(z_2 - 2),$$

$$\text{при } z_2 = 2 \text{ м} \quad M_{EF} = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \text{при } z_2 = 4 \text{ м} \quad M_{FE} = -180 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок FG ($0 \leq z_2 \leq 3$ м):

$$N_{III} = -R_{AX} + P_1 = -75 + 60 = -15 \text{ кН (const)}; \quad Q_{III}(z_3) = R_{AY} - q \cdot z_3;$$

$$M_{III}(z_3) = R_{AY} \cdot z_3 - R_{AX} \cdot 4 + P_1 \cdot 2 - \frac{q \cdot z_3^2}{2},$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_{FG} = 50 \text{ кН}; \quad M_{FG} = -180 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_3 = 3 \text{ м} \quad Q_{GF} = -10 \text{ кН}; \quad M_{GF} = -120 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$\text{при } z_3 = z_{\text{экстр}} = \frac{R_{AY}}{q} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ м} \quad M_{\text{экстр}} = -117,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок GH ($0 \leq z_4 \leq 3$ м):

$$N_{IV} = 0 \text{ (const)}; \quad Q_{IV}(z_4) = q \cdot z_4; \quad M_{IV}(z_4) = -\frac{q \cdot z_4^2}{2},$$

$$\text{при } z_4 = 0 \quad Q_{HG} = 0; \quad M_{HG} = 0;$$

$$\text{при } z_4 = 3 \text{ м} \quad Q_{GH} = -60 \text{ кН}; \quad M_{HG} = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CG ($0 \leq z_5 \leq 2$ м):

$$N_V = -R_{Cf}^* = -70 \text{ кН (const)}; \quad Q_V = R_{CX}^* = 15 \text{ кН (const)};$$

$$M_V(z_5) = R_{Cx}^* \cdot z_5;$$

$$\text{при } z_5 = 0 \quad M_{CG} = 0; \quad \text{при } z_5 = 2 \text{ м} \quad M_{CG} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CB ($0 \leq z_6 \leq 3$ м):

$$N_{VI} = -R'_{CX}^* = -15 \text{ кН (const)}; \quad Q_{VI} = -R'_{CY}^* = -70 \text{ кН (const)};$$

$$M_{VI}(z_6) = M - R'_{CY}^* \cdot z_6,$$

$$\text{при } z_6 = 0 \quad M_{CB} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \text{при } z_6 = 3 \text{ м} \quad M_{BC} = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DB ($7 \leq z_7 \leq 2 м$):

$N_{VII} = 0$ (*const*); $Q_{VII} = P_2 = 45 кН$ (*const*); $M_{VII}(z_7) = P_2 \cdot z_7$,
при $z_7 = 0$ $M_{DB} = 0$; при $z_7 = 2 м$ $M_{BD} = 90 кН \cdot м$.

Примечание. При определении знака изгибающего момента и при изображении эпюр N , Q и M на вертикальных участках рамы (стойках) расчётную схему рассматриваем, располагаясь от неё справа, как это принято делать в техническом черчении.

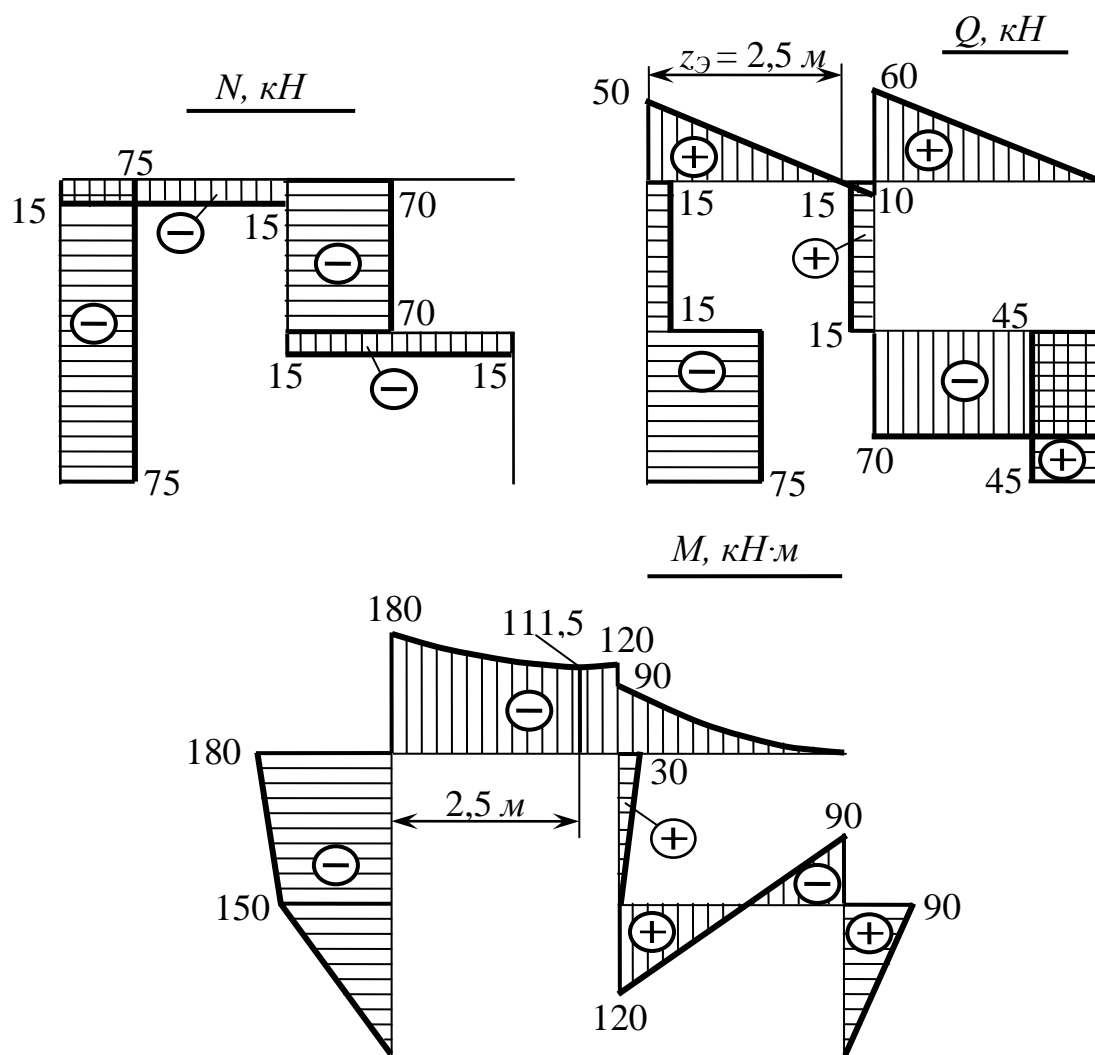
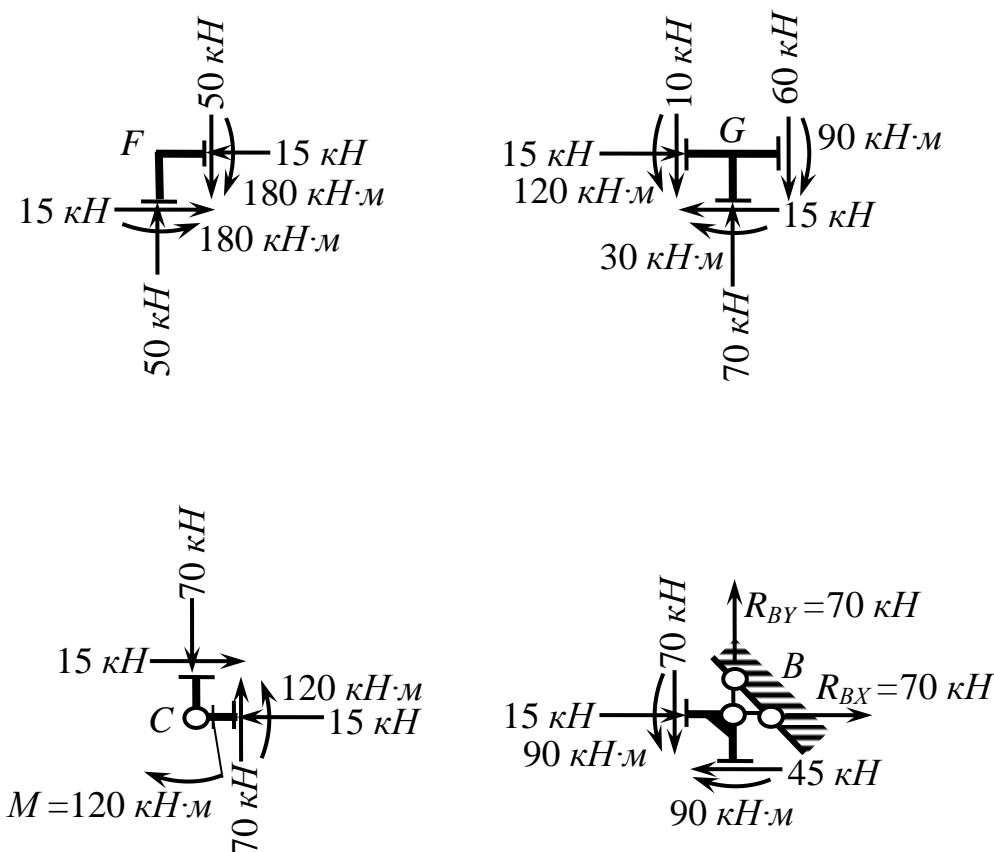


Рис. 3.15. Эпюры внутренних усилий в раме

Построенные эпюры N , Q и M проверим, выделяя отдельные узлы рамы и загружая их всеми (внешними и внутренними) усилиями (рис. 3.16). Направления и значения внутренних усилий в узлах взяты с эпюр N , Q и M (см. рис. 3.15) с учётом принятых правил знаков.



Из рис. 3.16 видно, что для каждого из узлов удовлетворяются три условия равновесия $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$. Это подтверждает правильность построения эпюр.

Студенту предлагается самостоятельно убедиться и в том, что на всех участках рамы удовлетворяются дифференциальные и интегральные зависимости (3.2) – (3.4).

Рис. 3.16. Проверка равновесия узлов рамы

3.4. Расчёт трёхшарнирных арок

3.4.1. Общие методические указания. Арочными называются стержневые системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от *вертикальной* нагрузки возникают *горизонтальные* составляющие реакций, называемые *распором*.

Статически *определимые* трехшарнирные арочные системы (арки) состоят из двух стержней различного очертания, соединённых между собой шарниром *C* и прикрепённых к основанию («земле») двумя шарнирно неподвижными опорами (или шарнирами) *A* и *B*. Шарнир *C* (*замок*, или *ключевой шарнир*) обычно расположен в наивысшей точке подъёма арки. Опоры *A* и *B* (*пяты*) могут располагаться как на одном, так и на разных

уровнях. В дальнейшем рассматривается расчёт арок с опорами на одном уровне (рис. 3.17, а).

Опорные реакции и внутренние усилия в названных арках определяются через реакции и внутренние усилия так называемой *заменяющей балки*. Заменяющая балка – это двухопорная балка AB того же пролёта, несущая ту же нагрузку, что и рассчитываемая арка (рис. 3.17, б).

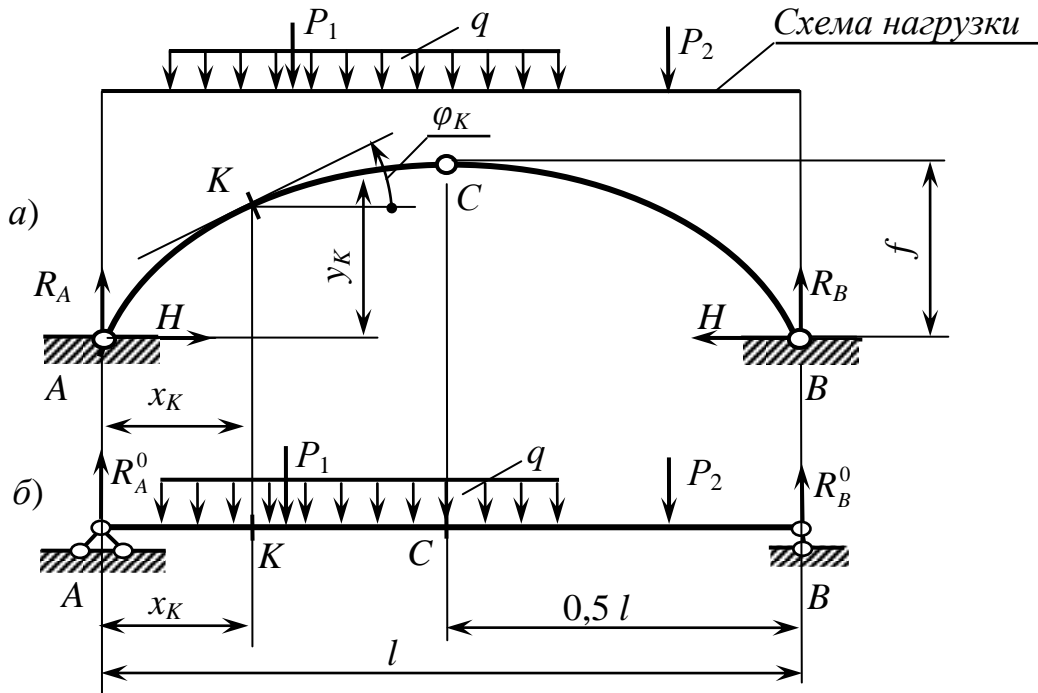


Рис. 3.17. Расчётные схемы трёхшарнирной арки и заменяющей балки

Вертикальные составляющие реакций арки R_A и R_B равны реакциям заменяющей балки, т.е. $R_A = R_A^0$, $R_B = R_B^0$.

Распор H определяется через изгибающий момент M_C^0 заменяющей балки в сечении C : $H = M_C^0 / f$, где f – стрела подъема арки.

Внутренние усилия Q_K , N_K , M_K в произвольном сечении арки K определяются через внутренние усилия заменяющей балки Q_K^0 , M_K^0 , M_C^0 .

$$\begin{aligned} Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - M_C^0 \sin \varphi_K / f; \\ N_K &= -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - M_C^0 \cos \varphi_K / f; \\ M_K &= M_K^0 - H \cdot y_K = M_K^0 - M_C^0 / f. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ЛВ внутренних усилий \bar{Q}_K , \bar{N}_K , \bar{M}_K в арке наиболее просто строятся *статическим* методом, который может быть реализован различными способами. Рассмотрим кратко некоторые из этих способов:

1. Сложение откорректированных балочных ЛВ. Согласно (3.5):

$$\begin{aligned} \text{ЛВ } \bar{Q}_K &= (\text{ЛВ } \bar{Q}_K^0) \cos \varphi_K + (\text{ЛВ } \bar{M}_C^0) (-\sin \varphi_K / f); \\ \text{ЛВ } \bar{N}_K &= (\text{ЛВ } \bar{Q}_K^0) (-\sin \varphi_K) + (\text{ЛВ } \bar{M}_C^0) (-\cos \varphi_K / f); \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{ЛВ } \bar{M}_K = \text{ЛВ } \bar{M}_K^0 + (\text{ЛВ } \bar{M}_C^0)(-y_K/f).$$

Для корректировки балочных ЛВ их значения умножаются на соответствующие числа. Например, при построении ЛВ \bar{Q}_K все значения ЛВ \bar{Q}_K^0 умножаются на $\cos \varphi_K$, а значения ЛВ \bar{M}_C^0 – на $(-\sin \varphi_K/f)$.

Балочные ЛВ реакций \bar{R}_A^0 , \bar{R}_B^0 и внутренних усилий в сечениях K_1 , K_2 , расположенных по разные стороны от середины балки, и в сечении C представлены в общем виде на рис. 3.18.

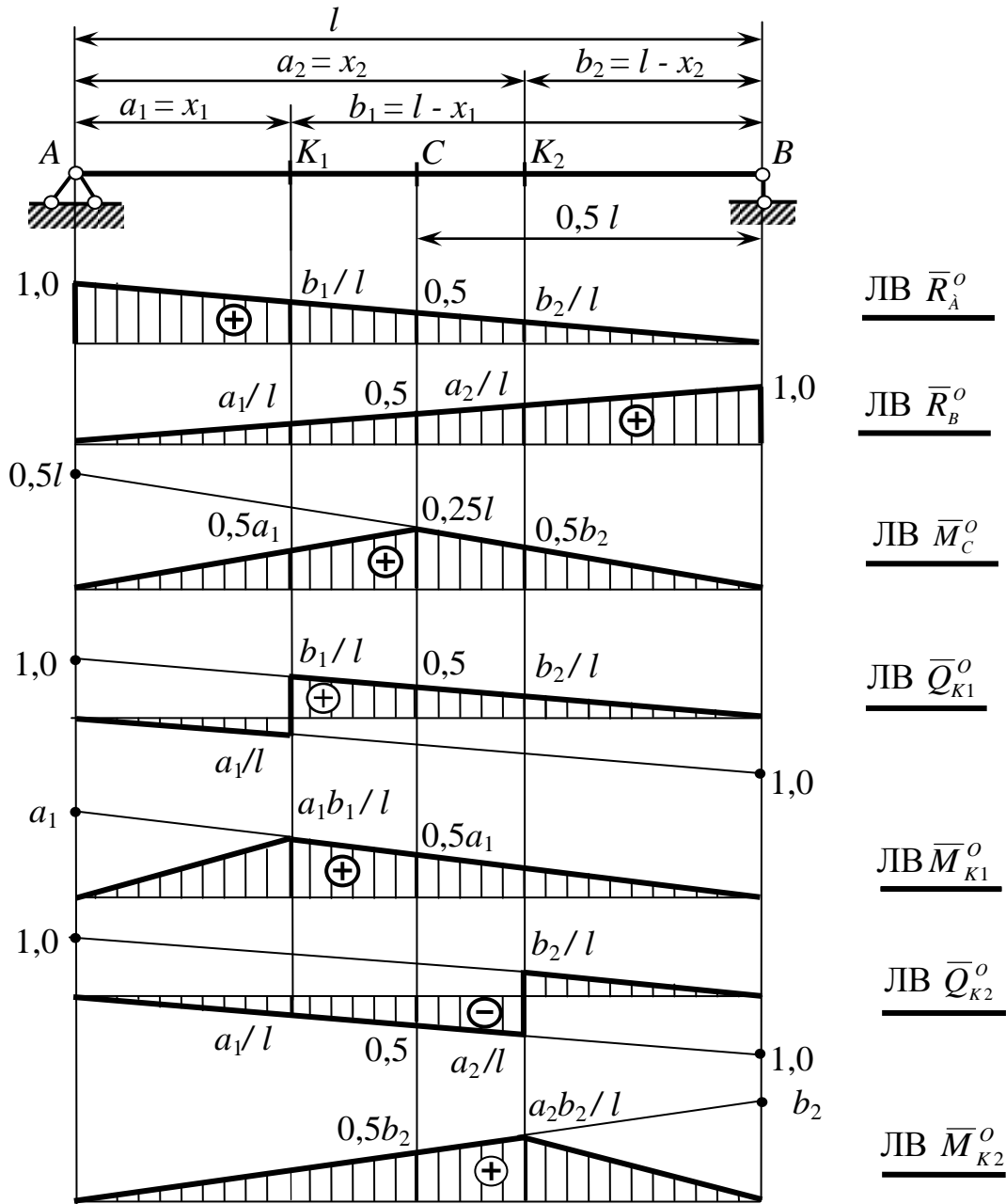


Рис. 3.18. Балочные линии влияния

2. Построение ЛВ с использованием ЛВ реакций $\bar{R}_A = \bar{R}_A^0$ и $\bar{R}_B = \bar{R}_B^0$.

Выражения \bar{Q}_K , \bar{N}_K , \bar{M}_K через реакции $\bar{R}_A = \bar{R}_A^0$ и $\bar{R}_B = \bar{R}_B^0$ для различных случаев положения силы $\bar{P} = 1$ на арке (рис. 3.19) имеют следующий вид:

а) $\bar{P} = 1$ находится на участке $A-K$ (рис. 3.19, а):

$$\bar{Q}_K = \bar{Q}_K^0 \cos \varphi_K - \frac{\bar{M}_C^0}{f} \sin \varphi_K = -\bar{R}_B^0 \left(\cos \varphi_K + \frac{l}{2f} \sin \varphi_K \right);$$

$$\bar{N}_K = -\bar{Q}_K^0 \sin \varphi_K - \frac{\bar{M}_C^0}{f} \cos \varphi_K = \bar{R}_B^0 \left(\sin \varphi_K - \frac{l}{2f} \cos \varphi_K \right);$$

$$\bar{M}_K = \bar{M}_K^0 - \frac{\bar{M}_C^0}{f} y_K = \bar{R}_B^0 \left[(l - x_K) - \frac{l}{2f} y_K \right];$$

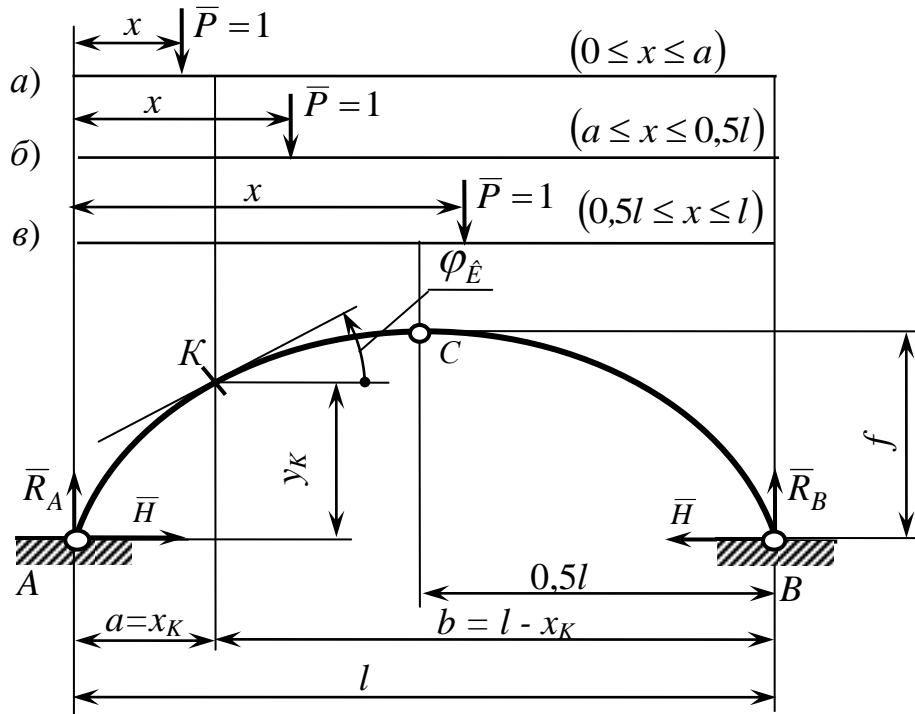


Рис. 3.19. Расчётная схема к построению линий влияния с использованием линий влияния реакций $\bar{R}_A = \bar{R}_A^0$ и $\bar{R}_B = \bar{R}_B^0$

б) $\bar{P} = 1$ находится на участке $K-C$ (рис. 3.19, б):

$$\bar{Q}_K = \bar{R}_A^0 \cos \varphi_K - \bar{R}_B^0 \frac{l}{2f} \sin \varphi_K;$$

$$\bar{N}_K = -\bar{R}_A^0 \sin \varphi_K - \bar{R}_B^0 \frac{l}{2f} \cos \varphi_K;$$

$$\bar{M}_K = \bar{R}_A^0 \cdot x_K - \bar{R}_B^0 \frac{l}{2f} y_K;$$

в) $\bar{P} = 1$ находится на участке $C-B$ (рис. 3.19, в):

$$\begin{aligned}\bar{Q}_K &= \bar{R}_A^0 \left(\cos \varphi_K - \frac{l}{2f} \sin \varphi_K \right); \\ \bar{N}_K &= -\bar{R}_A^0 \left(\sin \varphi_K + \frac{l}{2f} \cos \varphi_K \right); \\ \bar{M}_K &= \bar{R}_A^0 \left(x_K - \frac{l}{2f} y_K \right).\end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют построить отдельные ветви ЛВ, условно продлив их до опор и выделяя из них только те части, которые соответствуют расположению единичной силы.

Значения ЛВ на границах участков можно вычислить либо через соответствующие значения ЛВ \bar{R}_A^0 и ЛВ \bar{R}_B^0 (см. рис. 3.18), либо из геометрических соотношений – по значениям под опорами продлённых ветвей ЛВ. При вычислении значений ЛВ на границах участков следует иметь в виду, что $\bar{R}_A^0 = \bar{R}_A^0(x)$; $\bar{R}_B^0 = \bar{R}_B^0(x)$.

Таким же образом можно получить значения внутренних усилий для сечения K_2 , расположенного справа от шарнира C .

3. Построение ЛВ внутренних усилий по значениям, соответствующим характерным положениям единичной силы.

Поскольку ЛВ на отдельных участках представляют собой прямые линии, сопряжённые между собой определённым образом (в зависимости от вида внутреннего усилия), достаточно вычислить три значения ЛВ \bar{Q}_K , \bar{N}_K и два значения ЛВ \bar{M}_K для характерных положений единичной силы $\bar{P} = 1$ (рис. 3.20):

а) $\bar{P} = 1$ находится чуть левее сечения K (рис. 3.20, а):

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{KK}^{лев} &= -\bar{R}_B \cos \varphi_K - \bar{H} \sin \varphi_K = -\frac{x_K}{l} \cos \varphi_K - \frac{x_K}{2f} \sin \varphi_K; \\ \bar{N}_{KK}^{лев} &= \bar{R}_B \sin \varphi_K - \bar{H} \cos \varphi_K = \frac{x_K}{l} \sin \varphi_K - \frac{x_K}{2f} \cos \varphi_K; \\ \bar{M}_{KK}^{лев} &= \bar{R}_B (l - x_K) - \bar{H} \cdot y_K = \frac{x_K (l - x_K)}{l} - \frac{x_K}{2f} y_K;\end{aligned}$$

б) $\bar{P} = 1$ находится чуть правее сечения K (рис. 3.20, б):

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{KK}^{прав} &= \bar{R}_A \cos \varphi_K - \bar{H} \sin \varphi_K = \frac{(l - x_K)}{l} \cos \varphi_K - \frac{x_K}{2f} \sin \varphi_K; \\ \bar{N}_{KK}^{прав} &= -\bar{R}_B \sin \varphi_K - \bar{H} \cos \varphi_K = -\frac{(l - x_K)}{l} \sin \varphi_K - \frac{a}{2f} \cos \varphi_K; \\ \bar{M}_{KK}^{прав} &= \bar{M}_{KK}^{лев} = \bar{R}_A \cdot x_K - \bar{H} \cdot y_K = \frac{x_K (l - x_K)}{l} - \frac{x_K}{2f} y_K;\end{aligned}$$

в) $\bar{P} = 1$ находится над шарниром C (рис. 3.20, в):

$$\bar{Q}_{KC} = \bar{R}_A \cos \varphi_K - \bar{H} \sin \varphi_K = \frac{1}{2} \cos \varphi_K - \frac{l}{4f} \sin \varphi_K;$$

$$\bar{N}_{KC} = -\bar{R}_A \sin \varphi_K - \bar{H} \cos \varphi_K = -\frac{1}{2} \sin \varphi_K - \frac{l}{4f} \cos \varphi_K;$$

$$\bar{M}_{KC} = \bar{R}_A \cdot x_K - \bar{H} \cdot y_K = \frac{1}{2} x_K - \frac{l}{4f} y_K.$$

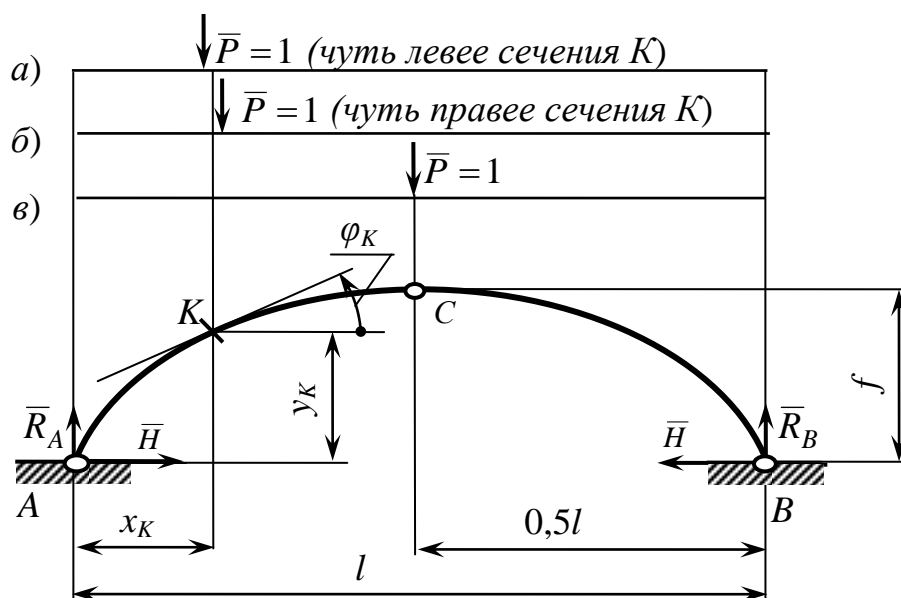


Рис. 3.20. Расчётная схема к построению линий влияния по значениям, соответствующим характерным положениям единичной силы

Значения реакций $\bar{R}_A = \bar{R}_A^0$, $\bar{R}_B = \bar{R}_B^0$ и $\bar{H} = \bar{M}_C^0 / f$, входящие в вышеприведенные выражения, взяты с балочных ЛВ (см. рис 3.18) под соответствующими положениями единичной силы.

Аналогично можно вычислить характерные значения ЛВ внутренних усилий в сечении K_2 , расположенном справа от шарнира C , учитывая при этом, что $\sin \varphi_K < 0$; $\cos \varphi_K > 0$.

В заключение отметим, что существует ещё один (более формализованный) способ вычисления характерных значений ЛВ, изложенный в [1]. Он основан на определении положения так называемых нулевых точек ЛВ. В настоящем пособии этот способ не рассматривается.

3.6.2. Пример расчёта трёхшарнирной арки. Для трёхшарнирной арки, очерченной по дуге окружности (рис. 3.21), требуется:

- построить эпюры внутренних усилий;
- построить ЛВ внутренних усилий в сечениях 2 и 9, используя различные способы;

в) загрузить ЛВ в сечения 9 заданной нагрузкой, результаты загрузки сравнить со значениями на эпюрах внутренних усилий.

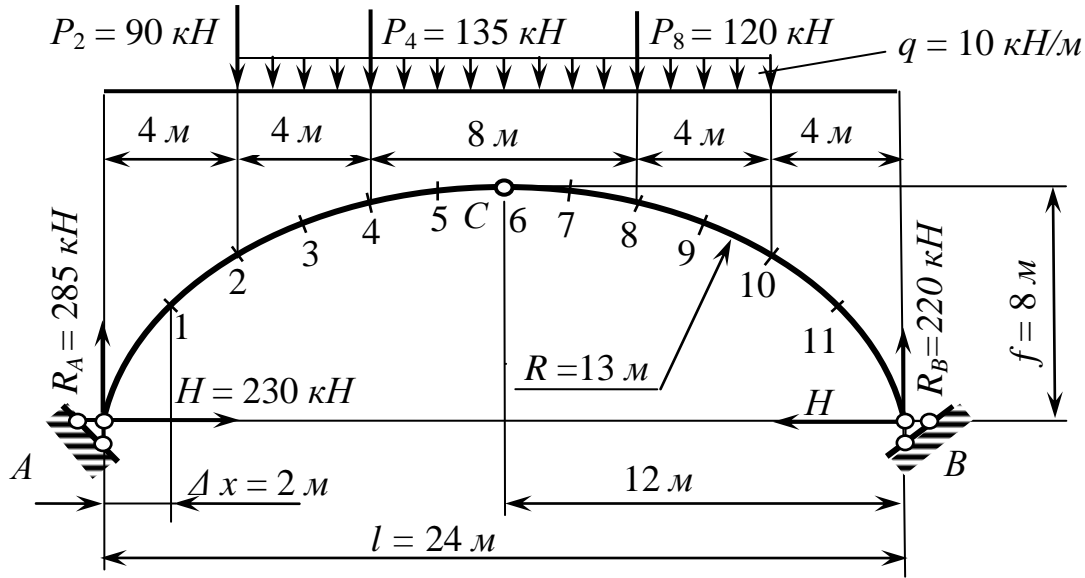


Рис. 3.21. Расчётная схема арки

Решение. 1. Определяем реакции опор и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в заменяющей балке (рис. 3.22):

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^0 \cdot 24 - P_2 \cdot 4 - P_4 \cdot 8 - P_8 \cdot 16 - q \cdot 16 \cdot 12 = 0;$$

$$R_B^0 = \frac{4P_2 + 8P_4 + 16P_8 + 192q}{24} = \frac{4 \cdot 90 + 8 \cdot 135 + 16 \cdot 120 + 192 \cdot 10}{24} = 220 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A^0 \cdot 24 + P_2 \cdot 4 + P_4 \cdot 16 + P_8 \cdot 8 + q \cdot 16 \cdot 12 = 0;$$

$$R_A^0 = \frac{20P_2 + 16P_4 + 8P_8 + 192q}{24} = \frac{20 \cdot 90 + 16 \cdot 135 + 8 \cdot 120 + 192 \cdot 10}{24} = 285 \text{ кН}.$$

Эпюру поперечных сил Q^0 построим по скачкам под сосредоточенными силами в направлении этих сил, начиная с R_A^0 , и «спускаем» на участках длиной $\Delta x = 2 \text{ м}$ под равномерно распределённой нагрузкой q на величину ее равнодействующей $2q = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН}$.

Эпюру изгибающих моментов M^0 построим, используя интегральную зависимость

$$M^0 = M_0^0 + \int_0^d Q^0 dx = M_0^0 + \omega_Q,$$

где M^0 – изгибающий момент в конце рассматриваемого участка; M_0^0 – изгибающий момент в начале участка; $d = \Delta x = 2 \text{ м}$ – длина участка; ω_Q – площадь эпюры поперечных сил на участке.

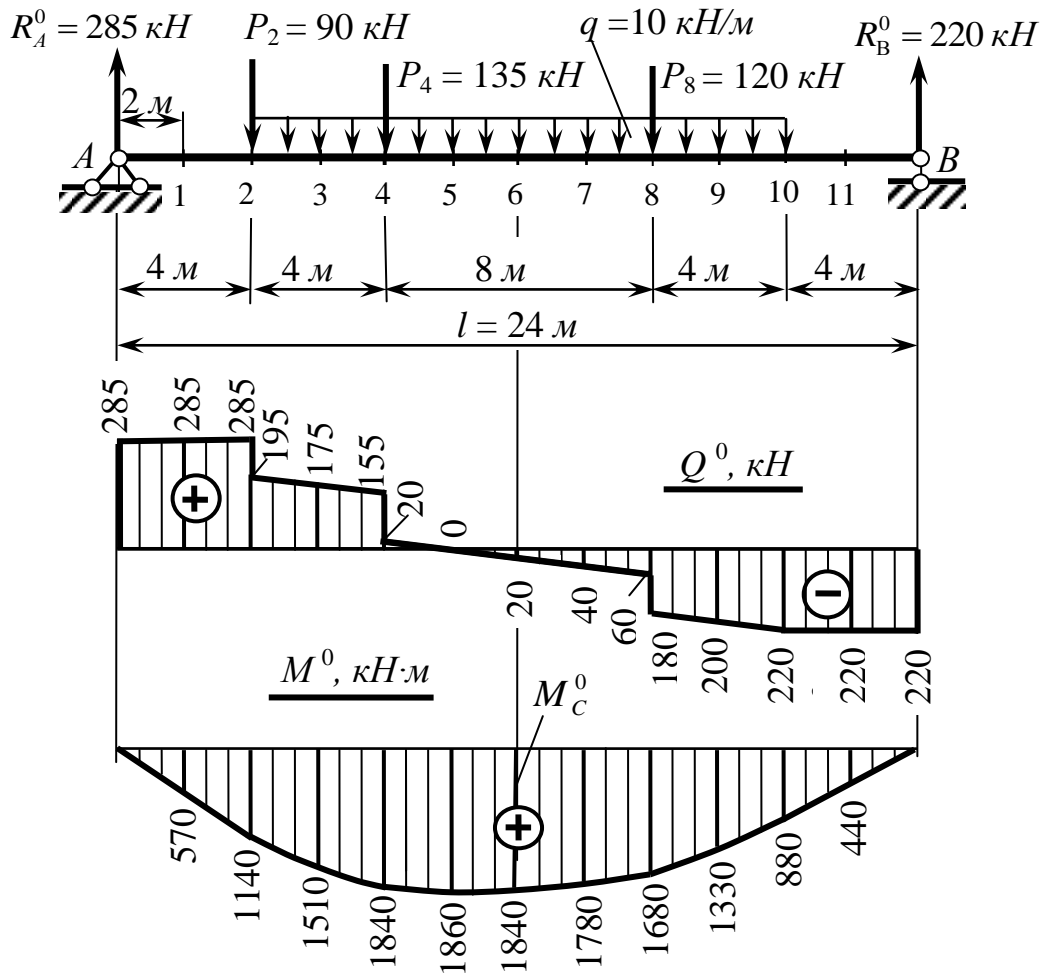


Рис. 3.22. Расчётная схема заменяющей балки и балочные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Эпюры Q^0 и M^0 можно построить по значениям внутренних усилий в обозначенных сечениях балки, используя непосредственно метод сечений. Так, например, для сечения 6 (под шарниром C) получим:

$$Q_6^0 = Q_C^0 = R_A^0 - P_2 - P_4 - q \cdot 8 = 285 - 90 - 135 - 10 \cdot 8 = -20 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_6^0 = M_C^0 &= R_A^0 \cdot 12 - P_2 \cdot 8 - P_4 \cdot 4 - q \cdot 8 \cdot 4 = \\ &= 285 \cdot 12 - 90 \cdot 8 - 135 \cdot 4 - 10 \cdot 8 \cdot 4 = 1840 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

2. Определяем реакции опор арки.

Вертикальные составляющие

$$R_A = R_A^0 = 285 \text{ кН}; \quad R_B = R_B^0 = 220 \text{ кН}.$$

Распор

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{1840}{8} = 230 \text{ кН}.$$

3. Вычисляем геометрические параметры круговой арки, входящие в выражения внутренних усилий:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{8}{2} + \frac{24^2}{8 \cdot 8} = 13 \text{ м}; \quad y_K = \sqrt{R^2 - (0,5l - x_K)^2} + f - R;$$

$$\sin \varphi_K = \frac{l - 2x_K}{2R}; \quad \cos \varphi_K = \frac{y_K + R - f}{R}.$$

Значения y_K , $\sin \varphi_K$, $\cos \varphi_K$ вычислим для тринадцати сечений, взятых с интервалом $\Delta x = 2 \text{ м}$. Расчёт сведём в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Геометрические параметры арки

Номер сечения	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
А	0	0	0,9231	0,3846
1	2	3,307	0,7692	0,6390
2	4	5,247	0,6154	0,7882
3	6	6,533	0,4615	0,8871
4	8	7,369	0,3077	0,9515
5	10	7,845	0,1538	0,9881
6	12	8,000	0	1,0000
7	14	7,845	-0,1538	0,9881
8	16	7,369	-0,3077	0,9515
9	18	6,533	-0,4615	0,8871
10	20	5,247	-0,6154	0,7882
11	22	3,307	-0,7692	0,6390
В	24	0	-0,9231	0,3848

4. Строим эпюры внутренних усилий в арке.

Внутренние усилия в каждом из сечений вычисляем по формулам (3.5). Значения балочных внутренних усилий Q^0 и M^0 берём с эпюр (см. рис. 3.22), а геометрические параметры арки – из табл. 3.1.

Расчёт M , Q и N сводим в табл. 3.2.

Заметим, что на эпюрах Q и N под сосредоточенными силами будут скачки, поэтому при $x_2 = 4 \text{ м}$, $x_4 = 8 \text{ м}$, $x_8 = 16 \text{ м}$ необходимо рассматривать по два сечения: чуть левее и чуть правее сечений 2, 4 и 8.

Расчёт внутренних усилий в арке

Номер сечения	$M = M^0 - Hy, \text{кН}\cdot\text{м}$			$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi, \text{кН}$			$N = -Q^0 \sin \varphi - H \cos \varphi, \text{кН}$		
	M^0	$-Hy$	M	$Q^0 \cos \varphi$	$-H \sin \varphi$	Q	$-Q^0 \sin \varphi$	$-H \cos \varphi$	N
А	0	0	0	109,6	-212,3	-102,3	-261	-88,5	-351,6
1	570	-760,6	-190,6	182,1	-176,9	5,2	-219,2	-147,0	-366,2
2л	1140	-1206,8	-66,8	224,6	-141,5	83,1	-175,4	-181,3	-356,7
2п	1140	-1206,8	-66,8	153,7	-141,5	12,2	-120,0	-181,3	-301,3
3	1510	-1502,6	7,4	155,3	-106,1	49,2	-80,8	-204,1	-284,9
4л	1840	-1694,9	145,1	147,5	-70,8	76,7	-47,7	-218,8	-266,5
4п	1840	-1694,9	145,1	19,0	-70,8	-51,8	-6,2	-218,8	-225,0
5	1860	-1804,4	55,6	0	-35,4	-35,4	0	-227,3	-227,3
6	1840	-1840,0	0	-20,0	0	-20,0	0	-230,0	-230,0
7	1780	-1804,4	-24,4	-39,5	35,4	-4,1	-6,2	-227,3	-233,5
8л	1680	-1694,9	-14,9	-57,1	70,8	13,7	-18,5	-218,8	-237,3
8п	1680	-1694,9	-14,9	-171,3	70,8	-100,5	-55,4	-218,8	-274,2
9	1300	-1502,6	-202,6	-177,4	106,1	-71,3	-92,3	-204,1	-296,4
10	880	-1206,8	-326,8	-173,4	141,5	-31,9	-135,4	-181,3	-316,7
11	440	-760,6	-320,6	-140,6	176,9	36,3	-169,2	-147,0	-316,2
В	0	0	0	-84,6	212,3	127,7	-203,1	-88,5	-291,6

Эпюры M , Q и N изображены на рис. 3.23.

Эпюры внутренних усилий для криволинейных стержней обычно строят на их геометрических осях, однако с целью упрощения построений эпюры для арок их принято строить на горизонтальной базовой линии, тем более что и внешняя нагрузка q отнесена к горизонтальному уровню.

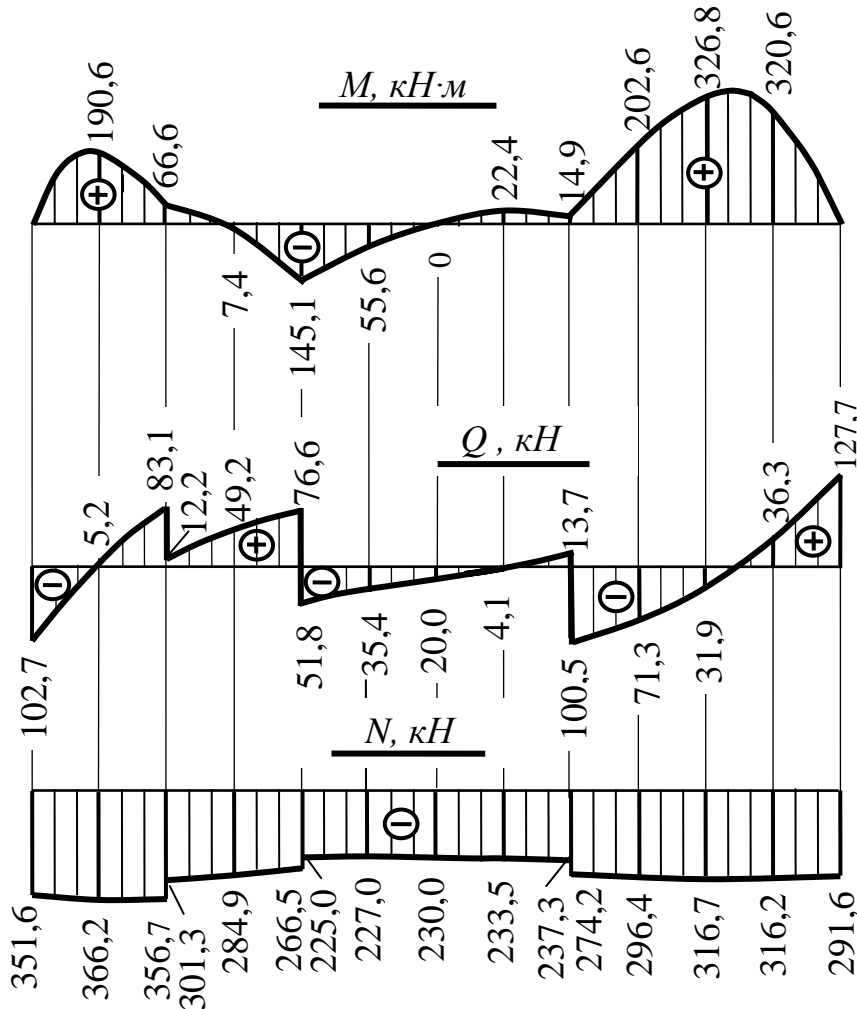


Рис. 3.23. Эпюры внутренних усилий в арке

Эпюра изгибающих моментов должна отвечать зависимости $Q = dM/ds$ (s – дуга оси арки), т.е. так же, как и для балки. Под сосредоточенными силами она «проламывается» в направлении силы, а в сечениях, где $Q = 0$, изгибающий момент имеет экстремальные значения.

Положение сечений, в которых изгибающий момент экстремален, мы не определяем. В случае необходимости их можно найти по эпюре Q , а затем вычислить экстремальные значения изгибающих моментов.

5. Строим ЛВ внутренних усилий в сечении 2, используя ЛВ реакций. Пусть $\bar{P} = 1$ находится на участке $A-2$ ($0 \leq x \leq 4$ м). Условно продлив

ветви ЛВ I за пределы участка A–2 до опоры B, из выражений (3.6) получим значения ЛВ под опорой B:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{BA}^0 &= 0; \quad \bar{R}_{BB}^0 = 1; \quad \bar{Q}_{2A} = \bar{N}_{2A} = \bar{M}_{2A} = 0; \\ \bar{Q}_{2B} &= -\cos \varphi_2 - \frac{l}{2f} \sin \varphi_2 = -0,7882 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,6154 = -1,7113; \\ \bar{N}_{2B} &= \sin \varphi_2 - \frac{l}{2f} \cos \varphi_2 = 0,6154 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,7882 = -0,5669; \\ \bar{M}_{2B} &= (l - x_2) - \frac{l}{2f} y_2 = (24 - 4) - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 5,247 = 12,1295 \text{ м}.\end{aligned}$$

Из выражений (3.6), при расположении силы $\bar{P} = 1$ чуть левее сечения 2 (на расстоянии $x_2 = 4$ м), находим:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{B2}^0 &= \frac{4}{24} = 0,1667; \quad \bar{Q}_2^{\text{лев}} = -0,1667 \cdot (0,7882 + \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,6154) = -0,2853; \\ \bar{N}_{22}^{\text{лев}} &= 0,1667 \cdot (0,6154 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,7882) = -0,0945; \\ \bar{M}_{22} &= 0,1667 \cdot [(24 - 4) - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 5,247] = 2,022 \text{ м}.\end{aligned}$$

$\bar{Q}_{22}^{\text{лев}}$, $\bar{N}_{22}^{\text{лев}}$, $\bar{M}_{22}^{\text{лев}}$ можно найти и из геометрических соотношений.

Пусть теперь сила $\bar{P} = 1$ находится на участке 2–C; ($4 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м}$).

Из выражений (3.6) получим значения ЛВ под опорами A и B, условно продлив ветви ЛВ II до опор:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{AA}^0 &= 1; \quad \bar{R}_{BA}^0 = 0; \quad \bar{R}_{AB}^0 = 0; \quad \bar{R}_{BB}^0 = 1; \\ \bar{Q}_{2A} &= \cos \varphi_2 = 0,7882; \quad \bar{Q}_{2B} = -\frac{l}{2f} \sin \varphi_2 = -\frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,6154 = -0,9231; \\ \bar{N}_{2A} &= -\sin \varphi_2 = -0,6154; \quad \bar{N}_{2B} = -\frac{l}{2f} \cos \varphi_2 = -\frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,7882 = -1,1823; \\ \bar{M}_{2A} &= x_2 = 4 \text{ м}; \quad \bar{M}_{2B} = -\frac{l}{2f} y_2 = -\frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 5,247 = -7,8705 \text{ м}.\end{aligned}$$

Из геометрических соотношений находим

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{2C} &= \frac{0,7882 - 0,9231}{2} = -0,0675; \quad \bar{N}_{2C} = \frac{-0,6154 - 1,1823}{2} = -0,8989; \\ \bar{M}_{2C} &= \frac{4,0 - 7,8705}{2} = -1,9353 \text{ м}; \quad \bar{Q}_{22}^{\text{прав}} = 0,7882 - \frac{0,7882 + 0,9231}{24} \cdot 4 = 0,5030; \\ \bar{N}_{22}^{\text{прав}} &= -0,6154 - \frac{1,1823 - 0,6154}{24} \cdot 4 = -0,7099; \quad \bar{M}_{22} = 4,0 - \frac{4,0 + 7,8705}{24} \cdot 4 = 2,022 \text{ м}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда сила $\bar{P} = 1$ находится на участке C–B ($12 \text{ м} \leq x \leq 24 \text{ м}$). Значения ЛВ III над опорами A и B получим из выражений (3.6), условно продлив ветви за пределы участка C–B – до опоры A:

$$\bar{R}_{AA} = 1; \quad \bar{R}_{AB} = 0; \quad \bar{Q}_{2B} = \bar{N}_{2B} = \bar{M}_{2B} = 0;$$

$$\bar{Q}_{2A} = \cos \varphi_2 - \frac{l}{2f} \sin \varphi_2 = 0,7882 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,6154 = -0,1349;$$

$$\bar{N}_{2A} = -\sin \varphi_2 - \frac{l}{2f} \cos \varphi_2 = -0,6154 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 0,7882 = -1,7977;$$

$$\bar{M}_{2A} = x_2 - \frac{l}{2f} y_2 = 4 - \frac{24}{2 \cdot 8} \cdot 5,247 = -3,8705 \text{ м.}$$

Значения \bar{Q}_{2C} , \bar{N}_{2C} , \bar{M}_{2C} получим из геометрических соотношений:

$$\bar{Q}_{2C} = -\frac{0,1349}{2} = -0,0675; \quad \bar{N}_{2C} = -\frac{1,7977}{2} = -0,8989; \quad \bar{M}_{2C} = -\frac{3,8705}{2} = -1,9353 \text{ м.}$$

ЛВ внутренних усилий арки в сечении 2 представлены на рис. 3.24.

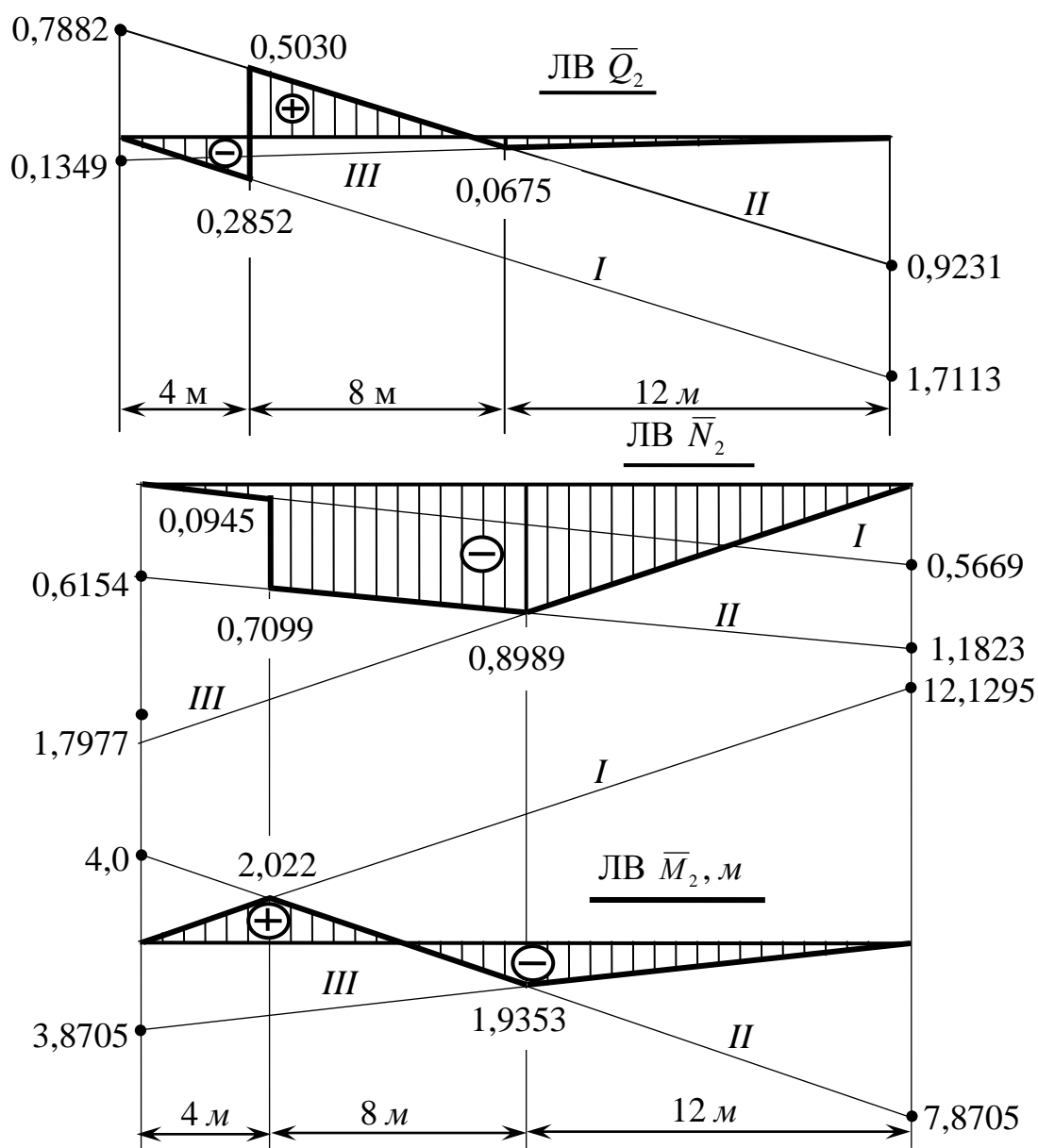
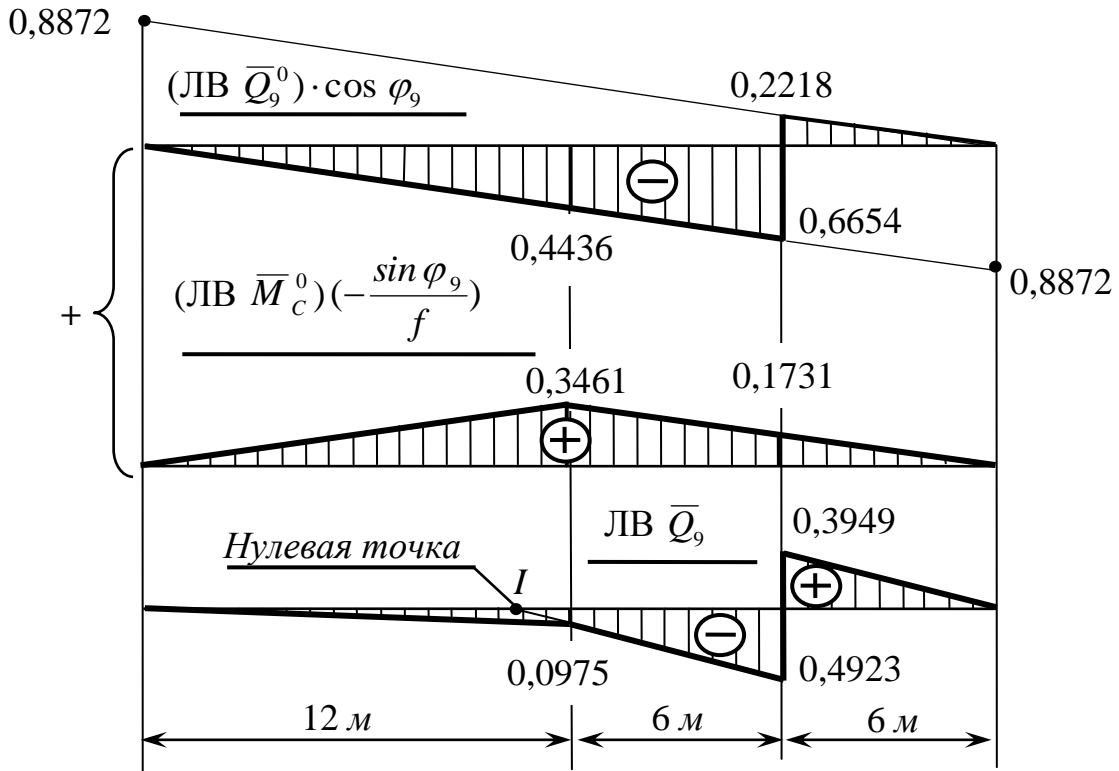
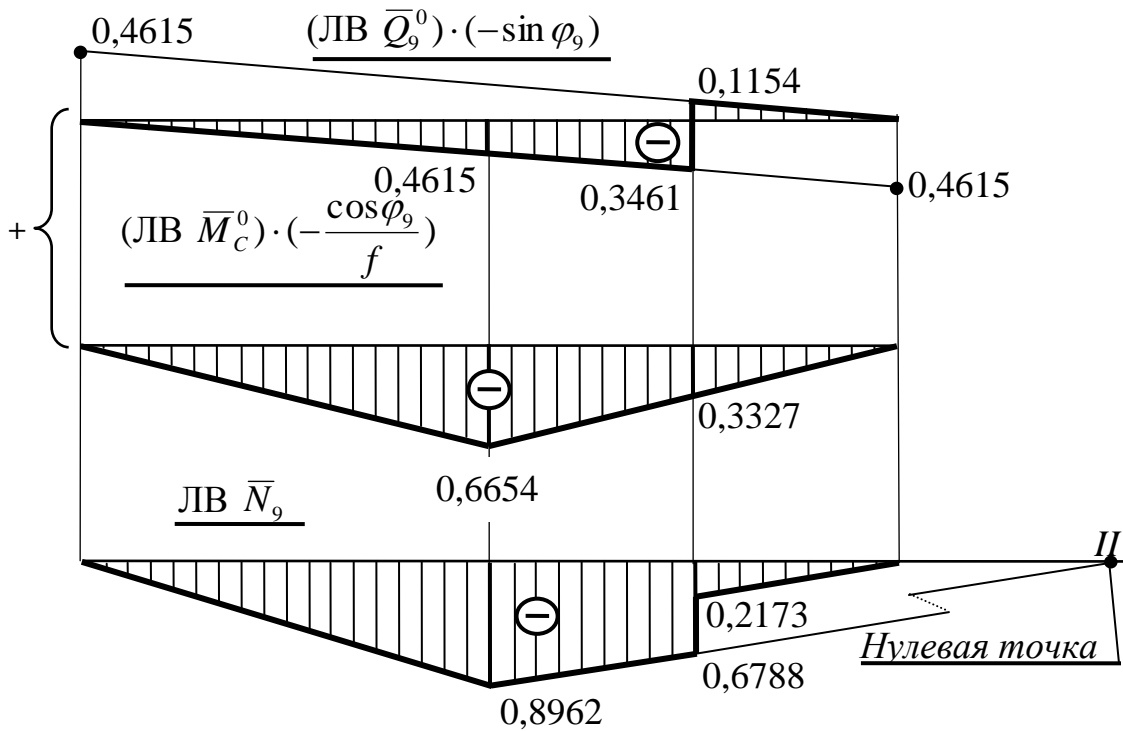
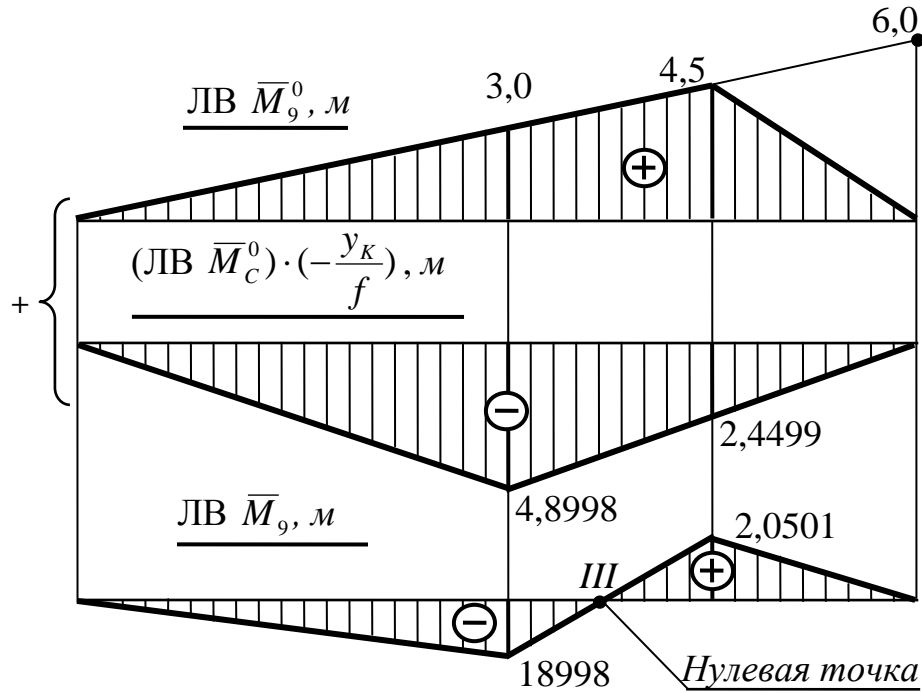


Рис. 3.24. Линии влияния внутренних усилий во втором сечении арки

Рис. 3.25. Построение линии влияния \bar{Q}_9

6. Строим ЛВ в сечении 9, суммируя «скорректированные» балочные ЛВ (рис. 3.25, 3.26, 3.27).

Рис. 3.26. Построение линии влияния \bar{N}_9

Рис. 3.27. Построение линии влияния \bar{M}_9

7. Покажем, что те же значения ЛВ \bar{Q}_9 , \bar{N}_9 , \bar{M}_9 на границах участков $A-C$, $C-9$, $9-B$ можно получить, рассматривая загрузку арки единичной силой над шарниром C и над сечением 9 (рис. 3.28).

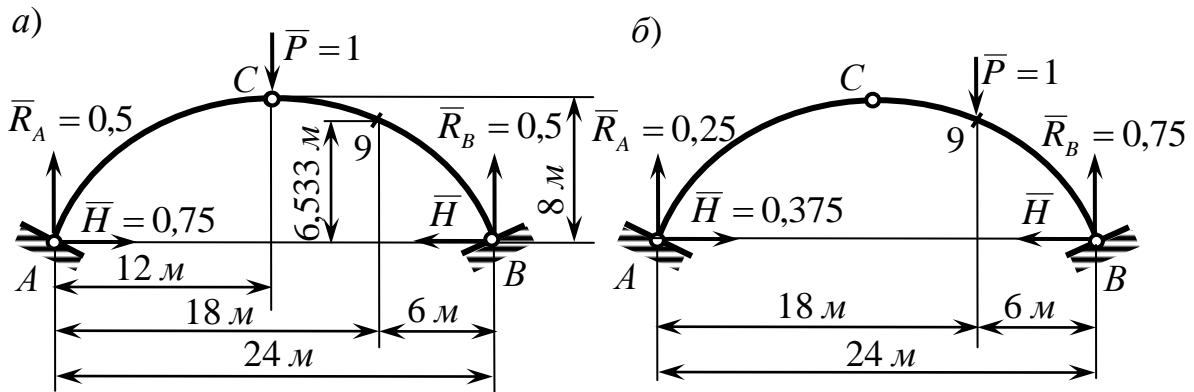


Рис. 3.28. Схемы загрузки арки единичной силой

Значения реакций $\bar{R}_A = \bar{R}_A^0$, $\bar{R}_B = \bar{R}_B^0$ и распора $\bar{H} = \bar{M}_C^0 / f$ взяты с балочных ЛВ (см. рис. 3.18) при $l = 24$ м; $f = 8$ м; $a_9 = 18$ м; $b_9 = 6$ м.

Из рис. 3.28, а следует, что

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{9C} &= \bar{Q}_9^0 \cos \varphi_9 - \bar{H} \sin \varphi_9 = -\bar{R}_B \cos \varphi_9 - \bar{H} \sin \varphi_9 = \\ &= -0,5 \cdot 0,8872 - 0,75 \cdot (-0,4615) = -0,0975; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{9C} &= \bar{R}_B \cdot 6 - \bar{H} \cdot 6,533 = 0,5 \cdot 6 - 0,75 \cdot 6,533 = -1,8998 \text{ м}; \\ \bar{N}_{9C} &= -\bar{Q}_9^0 \sin \varphi_9 - \bar{H} \cos \varphi_9 = \bar{R}_B \sin \varphi_9 - \bar{H} \cos \varphi_9 = \\ &= 0,5(-0,4615) - 0,75 \cdot 0,8872 = -0,8962.\end{aligned}$$

Из рис. 3.28, б, по аналогии, получим:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{99}^{лев} &= -\bar{R}_B \cos \varphi_9 - \bar{H} \sin \varphi_9 = -0,75 \cdot 0,8872 - 0,375 \cdot (-0,4615) = -0,4923; \\ \bar{N}_{99}^{лев} &= \bar{R}_B \sin \varphi_9 - \bar{H} \cos \varphi_9 = 0,75 \cdot (-0,4615) - 0,375 \cdot 0,8872 = -0,6788; \\ \bar{Q}_{99}^{np} &= \bar{R}_A \cos \varphi_9 - \bar{H} \sin \varphi_9 = 0,25 \cdot 0,8872 - 0,375 \cdot (-0,4615) = 0,3949; \\ \bar{N}_{99}^{np} &= -\bar{R}_A \sin \varphi_9 - \bar{H} \cos \varphi_9 = -0,25 \cdot (-0,4615) - 0,375 \cdot 0,8872 = -0,2173; \\ \bar{M}_{99} &= \bar{R}_B \cdot 6 - \bar{H} \cdot 6,533 = 0,75 \cdot 6 - 0,375 \cdot 6,533 = 2,0501 \text{ м}.\end{aligned}$$

Построение ЛВ рекомендуется проверить, графически определив положение на них нулевых точек. Нулевые точки соответствуют положению единичной силы на арке, при котором исследуемые усилия равны нулю.

В основе графического решения задачи лежит известная из курса теоретической механики теорема о равновесии трёх сил, согласно которой их линии действия пересекаются в одной точке. Вполне естественно, что графическое решение даст правильный результат только в случае строгого соблюдения масштаба при изображении расчётной схемы арки и тщательном исполнении всех построений. Графическое определение нулевых точек ЛВ $\bar{Q}_9, \bar{M}_9, \bar{N}_9$ показано на рис. 3.29.

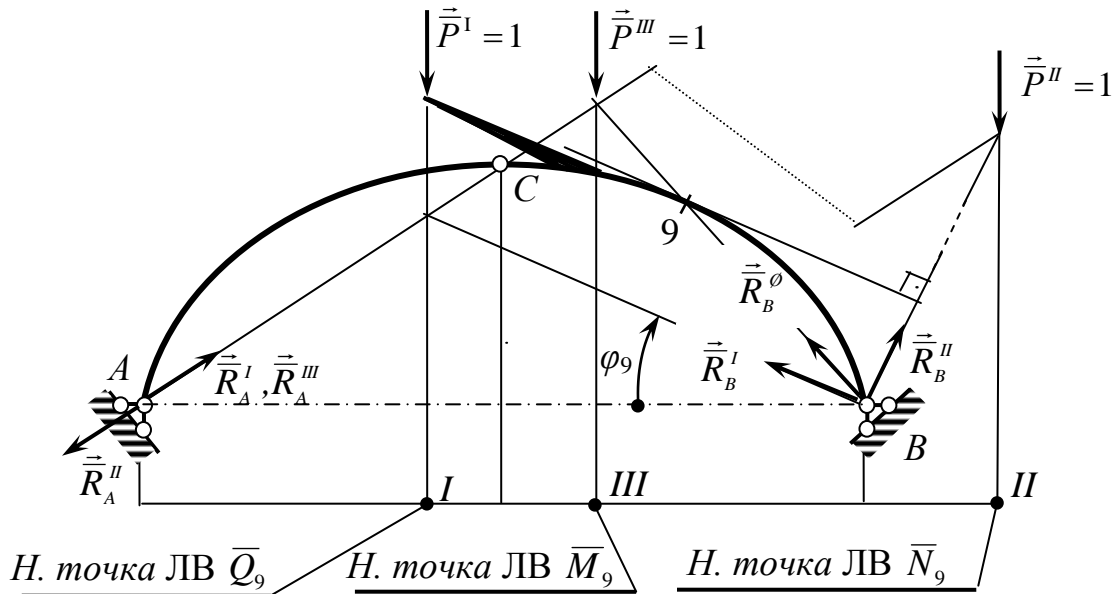


Рис. 3.29. Графическое определение нулевых точек линий влияния внутренних усилий в сечении 9

Следует заметить, что при указанных направлениях векторов реакций \vec{R}_A и \vec{R}_B единичная сила $\vec{P} = 1$ должна быть приложена к арке на участке С-9. Для случаев $\vec{P}^I = 1$ и $\vec{P}^{II} = 1$ это можно сделать, если воспользоваться консолью, жёстко соединённой с аркой на участке С-9, т.е. на ветвях ЛВ \bar{Q}_9 и \bar{N}_9 «реальных» нулевых точек нет, они находятся на продолжении ветвей участка С-9.

7. Загружаем ЛВ внутренних усилий в сечении 9. Расположим линии влияния \bar{Q}_9, \bar{N}_9 и \bar{M}_9 под схемой нагрузки (рис. 3.30). Площади ЛВ под равномерно распределённой нагрузкой, входящие в формулу загрузки, отмечены затемнением.

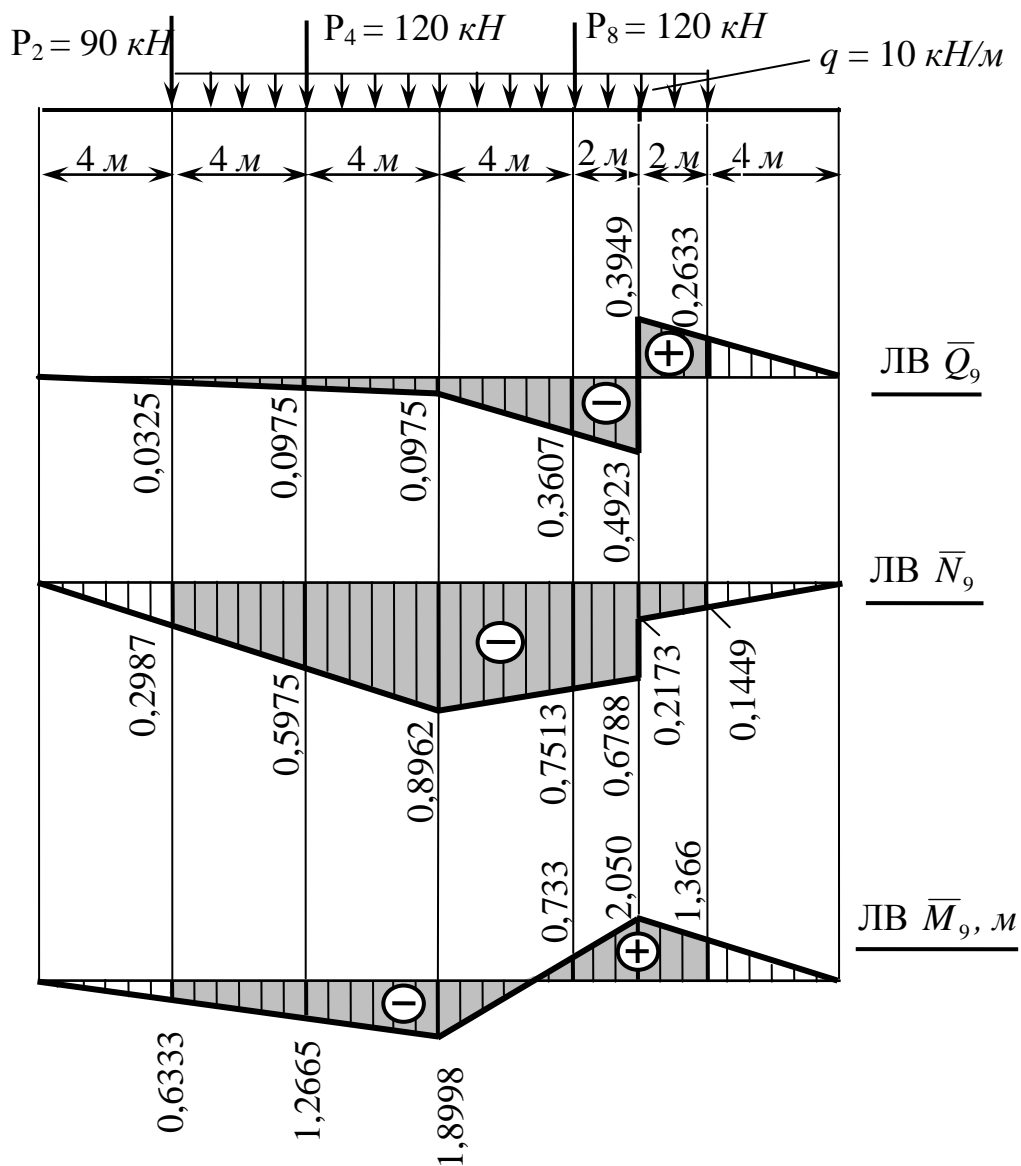


Рис. 3.30. Загрузка линий влияния внутренних усилий в сечении 9

В соответствии с правилом загрузки получим:

$$Q_9 = 90 \cdot (-0,0325) + 135 \cdot (-0,065) + 120 \cdot (-0,3607) + \\ + 10 \cdot \left(\frac{-0,0325 - 0,0975}{2} \cdot 8 + \frac{-0,0975 - 0,4923}{2} \cdot 6 + \right. \\ \left. + \frac{0,3949 + 0,2633}{2} \cdot 2 \right) = -71,3 \text{ кН};$$

$$N_9 = 90 \cdot (-0,2987) + 135 \cdot (-0,5975) + 120 \cdot (-0,7513) + \\ + 10 \cdot \left(\frac{-0,2987 - 0,8962}{2} \cdot 8 + \frac{-0,8962 - 0,6788}{2} \cdot 6 + \right. \\ \left. + \frac{-0,2173 - 0,1449}{2} \cdot 2 \right) = -296,4 \text{ кН};$$

$$M_9 = 90 \cdot (-0,6333) + 135 \cdot (-1,2665) + 120 \cdot 0,7335 + \\ + 10 \cdot \left(\frac{-0,6333 - 1,8998}{2} \cdot 8 + \frac{-1,8998 + 2,0501}{2} \cdot 6 + \right. \\ \left. + \frac{2,0501 + 1,3667}{2} \cdot 2 \right) = -202,6 \text{ кН}.$$

Здесь $\frac{-1,8998 + 2,0501}{2} \cdot 6$ – суммарная площадь «перекрученной» трапеции ЛВ \bar{M}_9 на участке С–9.

Те же значения Q_9 , N_9 и M_9 получены при построении эпюр внутренних усилий в арке (см. табл. 3.2).

3.5. Расчёт статически определимых ферм

3.5.1. Общие методические указания. Расчёт плоских статически определимых ферм в рамках задачи 4 включает в себя следующее: а) аналитическое определение внутренних усилий от постоянной нагрузки в стержнях только *одной* панели; б) построение ЛВ внутренних усилий в тех же стержнях и определение с их помощью максимальных и минимальных значений расчётных усилий при невыгодном сочетании постоянной и временной нагрузок.

В строительных сооружениях внешняя нагрузка передаётся в узлы фермы через различные конструктивные элементы, например, плиты покрытий, настилы, поперечные балки и т.п. Это позволяет практически полностью исключить деформацию изгиба стержней фермы даже при жёстком их соединении в узлах. Поэтому при расчёте фермы используют расчётную схему с *шарнирным* соединением стержней в узлах, несмотря на то, что в реальных фермах стержни соединены жёстко.

Аналитическое определение внутренних усилий в стержнях простых ферм и построение ЛВ основано на использовании уравнений статического

равновесия для условно отсечённой части фермы (метод сечений). В зависимости от того, как проведено сечение и какая часть фермы рассматривается, различают способ *вырезания узлов* и способ *простых сечений*.

В способе *вырезания узлов* сечение проводят так, чтобы отсекались все стержни, сходящиеся в одном узле. Условно вырезанный узел с внешней силой (если она имеется) и внутренними усилиями в рассечённых стержнях (продольными силами) представляет плоскую систему сил, сходящихся в одной точке, для которой можно составить только два уравнения равновесия $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$. При этом оси координат x и y могут быть любыми (не обязательно *взаимно перпендикулярными* осями).

Следовательно, на момент рассмотрения данного узла число неизвестных усилий в нём не должно быть больше *двух*. Поэтому требуется устанавливать определённый порядок вырезания узлов и последовательно определять усилия в стержнях всех предыдущих узлов.

Простое сечение – это сечение, условно рассекающее ферму на две части пересечением не более *трёх* стержней, входящих в *разные* узлы. В этом случае одна из частей фермы содержит *три* неизвестных усилия в рассечённых стержнях и внешние силы в узлах. Для плоской системы сил, не сходящихся в одной точке, можно составить *три* уравнения равновесия, в каждое из которых входит только *одно* неизвестное усилие.

Если из *трёх* рассечённых стержней два *параллельны* между собой, то составляются три уравнения равновесия: $\sum Y = 0$; $\sum M_1 = 0$; $\sum M_2 = 0$, где y – ось координат, *перпендикулярная* двум *параллельным* неизвестным усилиям, а точки 1 и 2 – точки пересечения *двух пар* неизвестных *непараллельных* усилий, так называемые *моментные точки*.

При *произвольной ориентации* *трёх* рассечённых стержней составляют уравнения равновесия вида $\sum M_1 = 0$; $\sum M_2 = 0$; $\sum M_3 = 0$, где точки 1, 2 и 3 – точки пересечения *трёх пар* *непараллельных* неизвестных усилий.

Следует заметить, что каждый из названных способов имеет свои преимущества и свои недостатки и обычно их применяют во взаимном сочетании, что и иллюстрируется в рассматриваемом ниже примере.

3.5.2. Пример расчёта простой фермы. Для фермы, расчётная схема которой представлена на рис. 3.31, требуется:

- а) аналитически определить усилия во всех стержнях четвёртой панели, считая слева, от постоянной погонной нагрузки q_D , приложенной к верхнему поясу;
- б) построить ЛВ усилий в тех же стержнях;
- в) загрузить ЛВ постоянной нагрузкой и сравнить результаты аналитическим определением усилий;
- г) определить максимальные и минимальные значения расчётных усилий в рассматриваемых стержнях при невыгодных сочетаниях посто-

янной и временной нагрузки q_B , приложенной к нижнему поясу, с помощью ЛВ.

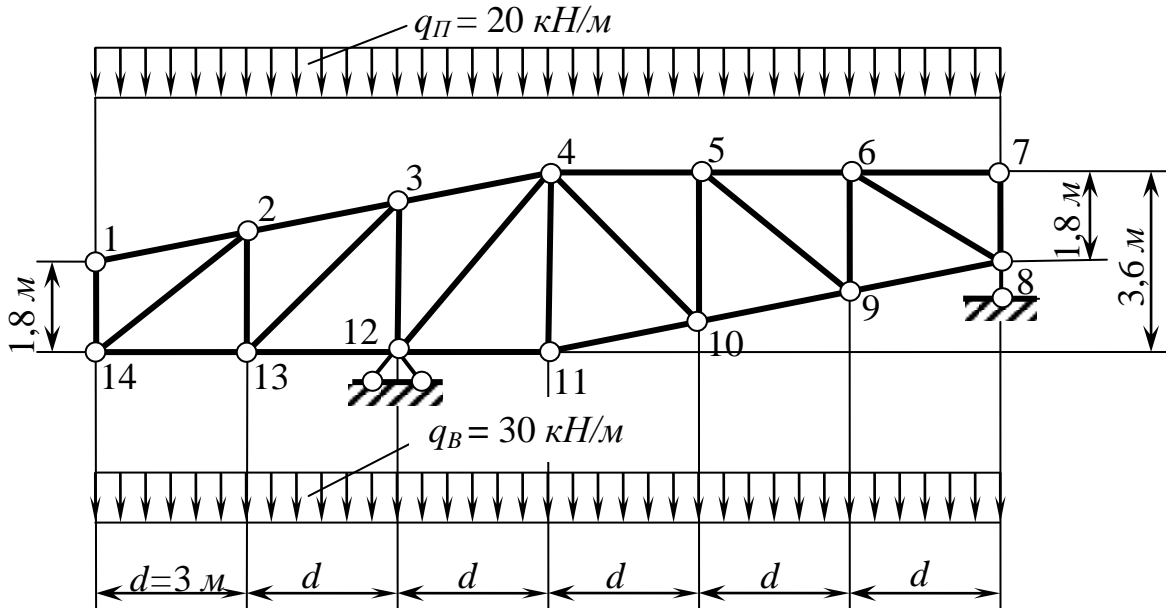


Рис. 3.31. Расчётная схема фермы

Замечание. В отличие от задания, содержащегося в задаче 4, в нашем примере погонная нагрузка q_{Π} приложена к узлам *верхнего* грузового пояса, а временная погонная нагрузка q_B – к узлам *нижнего* пояса. Это позволит показать особенности определения усилий с помощью линий влияния в стержнях четвёртой панели 4–11 и 5–10, неодинаково работающих при загрузении верхнего или нижнего грузовых поясов.

Решение. Аналитический расчёт на постоянную нагрузку.

1. Убедимся в том, что ферма является статически определимой.

Число степеней свободы фермы проще всего определить по следующей формуле: $W = 2Y - C - C_{on}$, где Y – число узлов, C – число стержней, C_{on} – число опорных связей. В нашем примере $W = 2 \cdot 14 - 25 - 3 = 0$.

2. Определяем реакции опор:

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 4d - q_{\Pi} \cdot 6d \cdot 3d = 0; \quad R_A = \frac{18q_{\Pi}d}{4} = \frac{18 \cdot 20 \cdot 3}{4} = 270 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4d - q_{\Pi} \cdot 6d \cdot d = 0; \quad R_B = \frac{6q_{\Pi} \cdot d}{4} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 3}{4} = 90 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_A + R_B - q_{\Pi} \cdot 6d = 270 + 90 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 360 - 360 = 0.$$

3. Приводим постоянную нагрузку q_{Π} в узлы верхнего пояса:

$$P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = q_{\Pi}d = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кН}; \quad P_1 = P_7 = 0,5q_{\Pi} \cdot d = 0,5 \cdot 20 \cdot 3 = 30 \text{ кН}.$$

Расчётная схема фермы при этом примет вид (рис. 3.32).

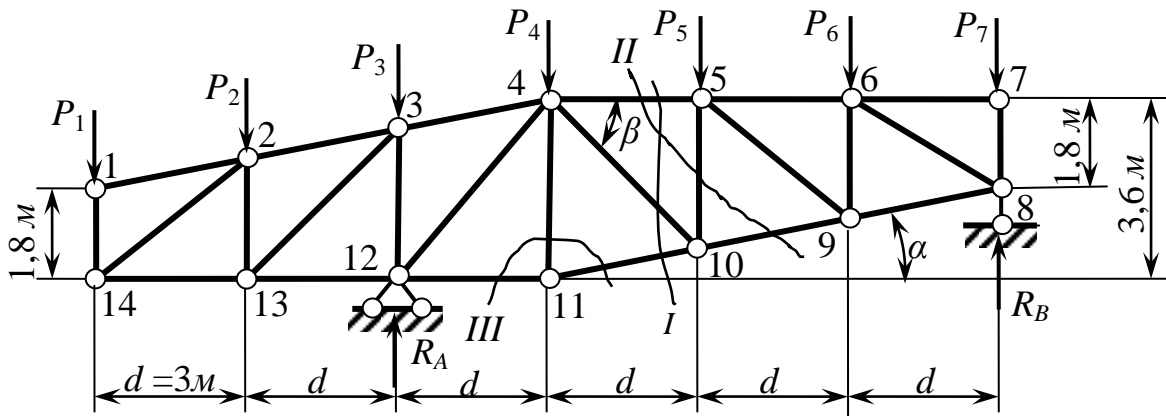


Рис. 3.32. Расчётная схема фермы с узловой постоянной нагрузкой

4. Усилия в стержнях четвертой панели находим с помощью простых сечений I , II и вырезания узла 11 сечением III .

Тригонометрические функции углов наклона стержней:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{9} = 0,2; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,2^2}} = 0,98058;$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 0,2 \cdot 0,98058 = 0,19612.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l_{5-10}}{d} = \frac{(3,6 - 0,6)}{3} = 1; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = 0,70711;$$

$$\sin \beta = \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \beta = 1 \cdot 0,70711 = 0,70711.$$

5. Определяем усилия в стержнях, рассекаемых *простым* сечением I , из условий равновесия правой отсечённой части фермы (рис. 3.33).

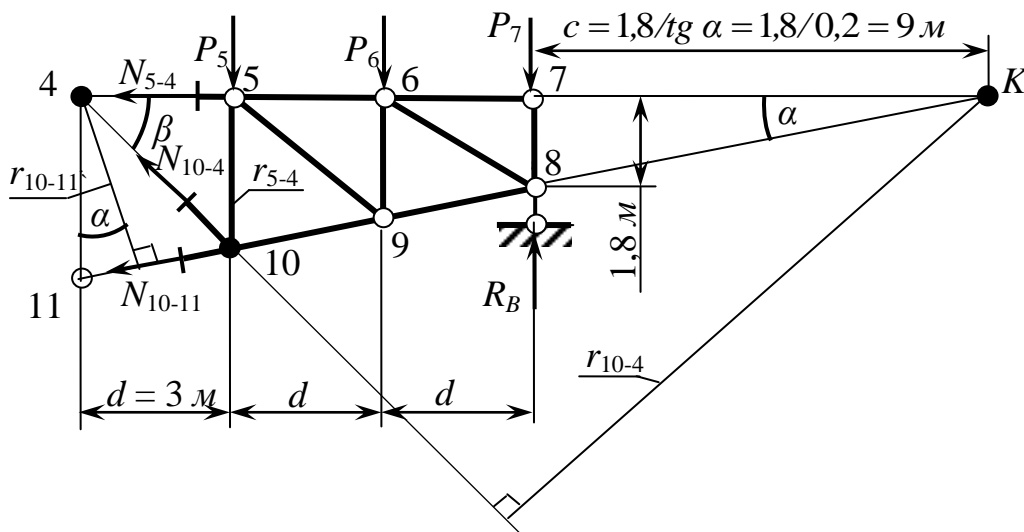


Рис. 3.33. Правая часть фермы, отсечённая сечением I

Две моментные точки находятся в узлах 4 и 10, а третья точка K – на пересечении линий действия усилий N_{5-4} и N_{10-11} на расстоянии c от правой опоры. Плечи усилий N_{10-11} , N_{5-4} и N_{10-4} относительно моментных точек равны, соответственно:

$$\begin{aligned} r_{10-11} = r_{11-10} = l_{4-11} \cdot \cos \alpha &= 3,6 \cdot 0,98058 = 3,53 \text{ м}; & r_{5-4} = r_{4-5} = l_{5-10} = 3,0 \text{ м}; \\ r_{10-4} = r_{4-10} = (c + 3d) \cdot \sin \beta &= (9 + 9) \cdot 0,70711 = 12,73 \text{ м}; \\ r_{5-10} = r_{10-5} = c + 2d &= 9 + 6 = 15 \text{ м}. \end{aligned}$$

Тогда сами усилия равны:

$$\begin{aligned} \sum M_4^{III} &= 0; & N_{10-11} \cdot r_{10-11} + P_5 \cdot d + P_6 \cdot 2d - (R_B - P_7) \cdot 3d &= 0; \\ N_{10-11} &= \frac{(R_B - P_7) \cdot 3d - P_6 \cdot 2d - P_5 \cdot d}{r_{10-11}} = \frac{(90 - 30) \cdot 9 - 60 \cdot 6 - 60 \cdot 3}{3,53} = 0 \text{ кН}, \\ \sum M_{10}^{III} &= 0; & N_{5-4} \cdot r_{5-4} - P_6 \cdot d + (R_B - P_7) \cdot 2d &= 0; \\ N_{5-4} &= \frac{P_6 \cdot d - (R_B - P_7) \cdot 2d}{r_{5-4}} = \frac{60 \cdot 3 - (90 - 30) \cdot 6}{3} = -60 \text{ кН}, \\ \sum M_K^{III} &= 0; & N_{10-4} \cdot r_{10-4} + (R_B - P_7) \cdot c - P_6 \cdot (c + d) - P_5 \cdot (c + 2d) &= 0; \\ N_{10-4} &= \frac{-(R_B - P_7) \cdot c + P_6 \cdot (c + d) + P_5 \cdot (c + 2d)}{r_{10-4}} = \\ &= \frac{-(90 - 30) \cdot 9 + 60 \cdot (9 + 3) + 60 \cdot (9 + 6)}{12,73} = -84,84 \text{ кН}. \end{aligned}$$

6. Из условия равновесия правой отсечённой части фермы (рис. 3.34) определяем усилие в стержне 5–10, рассекаемом *простым сечением II*:

$$\begin{aligned} \sum M_K^{III} &= 0; & N_{5-10} \cdot r_{5-10} - (R_B - P_7) \cdot c + P_6 \cdot (c + d) + P_5 \cdot (c + 2d) &= 0; \\ N_{5-10} &= \frac{(R_B - P_7) \cdot c - P_6 \cdot (c + d) - P_5 \cdot (c + 2d)}{r_{5-10}} = \\ &= \frac{(90 - 30) \cdot 9 - 60 \cdot (9 + 3) - 60 \cdot (9 + 6)}{15} = -72 \text{ кН}. \end{aligned}$$

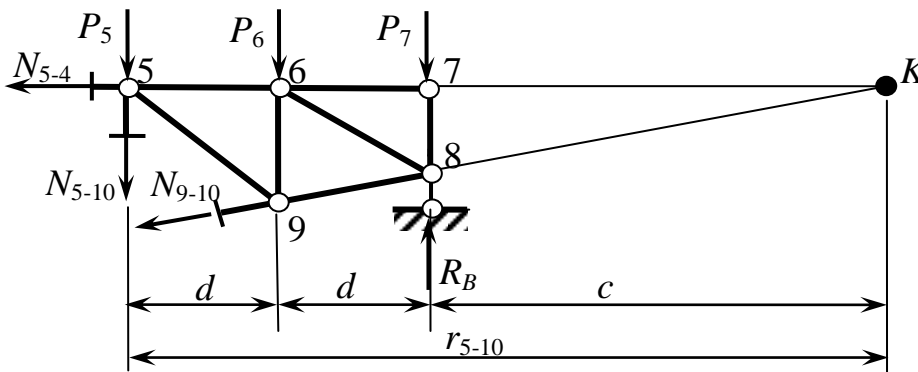


Рис. 3.34. Правая часть фермы, отсечённая сечением II

7. Определяем усилие в стержне 4–11 из условия равновесия узла 11, вырезанного сечением III (рис. 3.35):

$$\sum Y = 0; \quad N_{11-4} + N_{11-10} \sin \alpha = 0; \quad N_{11-4} = -N_{11-10} \sin \alpha = 0 \cdot 0,19612 = 0 \text{ кН}.$$

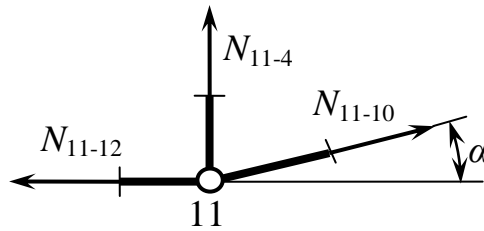


Рис. 3.35. Узел 11, вырезанный сечением III

8. Строим ЛВ усилий в стержнях четвертой панели, рассматривая равновесие левой и правой частей фермы, рассекаемой простыми сечениями I и II, а также равновесие узла 11, вырезанного сечением III (рис. 3.36).

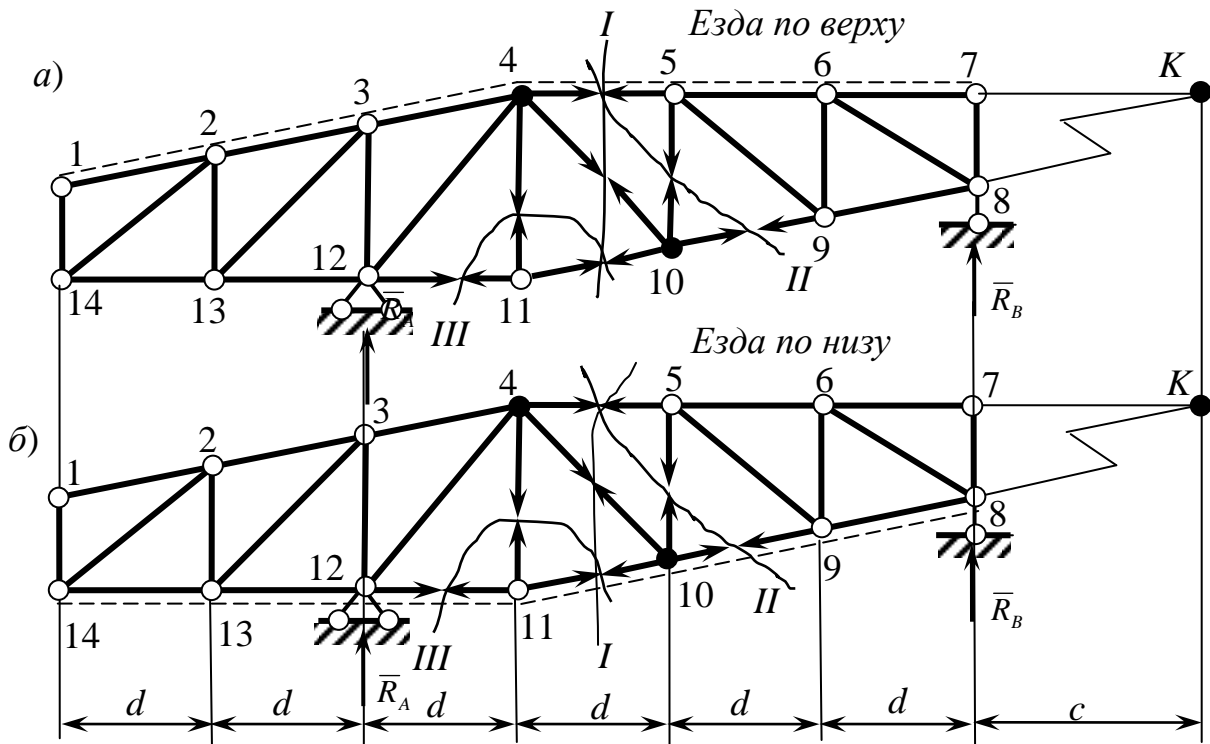


Рис. 3.36. Расчётные схемы к построению линий влияния

Так как постоянная нагрузка приложена к узлам *верхнего* грузового пояса, а временная – к узлам *нижнего* пояса, то необходимо рассмотреть два случая загрузки фермы условной единичной силой: $\bar{P} = 1$ – *езда по верху* (рис. 3.36, а) и *езда по низу* (рис. 3.36, б).

Правые и левые ветви ЛВ (прямые линии) строим, используя ЛВ реакций \bar{R}_A и \bar{R}_B (рис. 3.37).

Сечение I рассекает стержни 4–5, 4–10, 10–11, проходя по грузовым поясам при *езде по верху* и *езде по низу* в пределах одной и той же четвертой панели. В этом случае ЛВ усилия в отмеченных стержнях при *езде по верху* и *езде по низу* одинаковые, а стержни 4–11, 5–11 не одинаково работают при загрузении верхнего или нижнего пояса фермы.

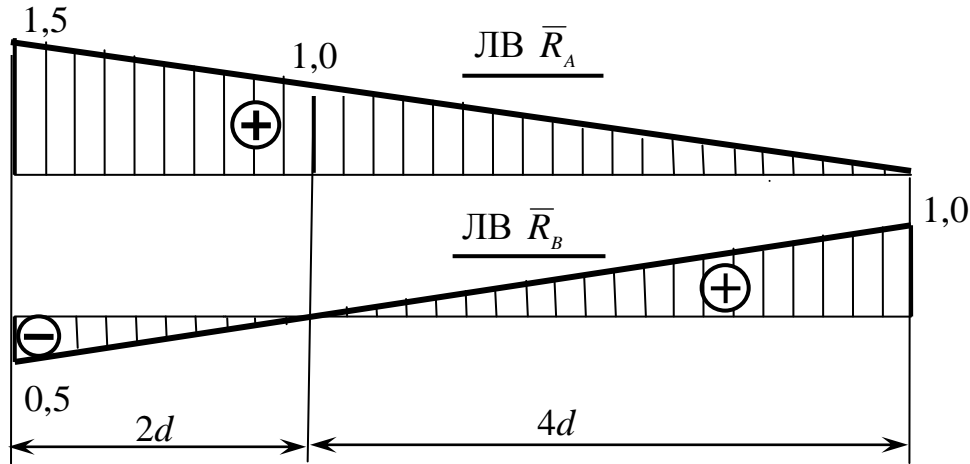


Рис. 3.37. Линии влияния опорных реакций фермы

Сечение II рассекает стержень 5–10, проходя по грузовым поясам четвертой панели (*езда по верху*) и пятой панели (*езда по низу*), поэтому ЛВ усилия в стержне 5–10 при *езде по верху* и *езде по низу* несколько отличаются друг от друга, и стержень неодинаково работает при загрузении верхнего или нижнего пояса.

Сечение III рассекает стержень 4–11, проходя по стержням только нижнего грузового пояса третьей и четвертой панелей, поэтому ЛВ усилия в этом стержне при *езде по верху* и *езде по низу* существенно отличаются друг от друга, и стержень также неодинаково работает при загрузении верхнего или нижнего пояса.

Рассмотрим каждый из перечисленных случаев отдельно.

Сечение I .

а) $\bar{P} = 1$ справа от сечения I , т.е. в узлах 5, 6, 7 – *езда по верху* или в узлах 10, 9, 8 – *езда по низу*.

Рассмотрим равновесие *левой* отсечённой части фермы:

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_4^{Лес} = 0; \quad \bar{N}_{11-10} \cdot r_{11-10} + \bar{R}_A \cdot d = 0; \\ \bar{N}_{11-10} = \bar{N}_{10-11} = \bar{R}_A \cdot d / r_{11-10} = 0,8499 \bar{R}_A, \\ \sum M_{10}^{Лес} = 0; \quad \bar{N}_{4-5} \cdot r_{4-5} + \bar{R}_A \cdot 2d = 0; \quad \bar{N}_{4-5} = \bar{N}_{5-4} = -\bar{R}_A \cdot 2d / r_{4-5} = -2\bar{R}_A, \\ \sum M_K^{Лес} = 0; \quad \bar{N}_{4-10} \cdot r_{4-10} - \bar{R}_A \cdot (4d + c) = 0; \\ \bar{N}_{4-10} = \bar{N}_{10-4} = \bar{R}_A \cdot (4d + c) / r_{4-10} = 1,6496 \bar{R}_A. \end{aligned}$$

Усилия в рассматриваемых стержнях выражены через реакцию \bar{R}_A . Таким образом, *правые ветви* ЛВ строим, используя линию влияния \bar{R}_A .

б) $\bar{P} = 1$ слева от сечения I , т.е. в узлах 1, 2, 3, 4 – езда по верху или в узлах 14, 13, 12, 11 – езда по низу.

Рассмотрим равновесие *правой* отсечённой части фермы:

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_4^{I_p} &= 0; \bar{N}_{10-11} \cdot r_{10-11} - \bar{R}_B \cdot 3d = 0; \\ \bar{N}_{10-11} &= \bar{N}_{11-10} = \bar{R}_B \cdot 3d / r_{10-11} = 2,5496 \bar{R}_B, \\ \sum M_{10}^{I_p} &= 0; \bar{N}_{5-4} \cdot r_{5-4} + \bar{R}_B \cdot 2d = 0; \bar{N}_{5-4} = \bar{N}_{4-5} = -\bar{R}_B \cdot 2d / r_{5-4} = -2\bar{R}_B, \\ \sum M_K^{II} &= 0; \bar{N}_{10-4} \cdot r_{10-4} + \bar{R}_B \cdot c = 0; \\ \bar{N}_{4-10} &= \bar{N}_{10-4} = -\bar{R}_B \cdot c / r_{10-4} = -0,7070 \bar{R}_B. \end{aligned}$$

По этим выражениям строим *левые ветви* ЛВ, используя ЛВ \bar{R}_A .

В пределах рассекаемой по верхнему и нижнему поясу четвертой панели левые и правые ветви соединяем *передаточными* прямыми. Передаточные прямые отмечены пунктирной линией. ЛВ усилий в рассматриваемых стержнях представлены на рис. 3.38.

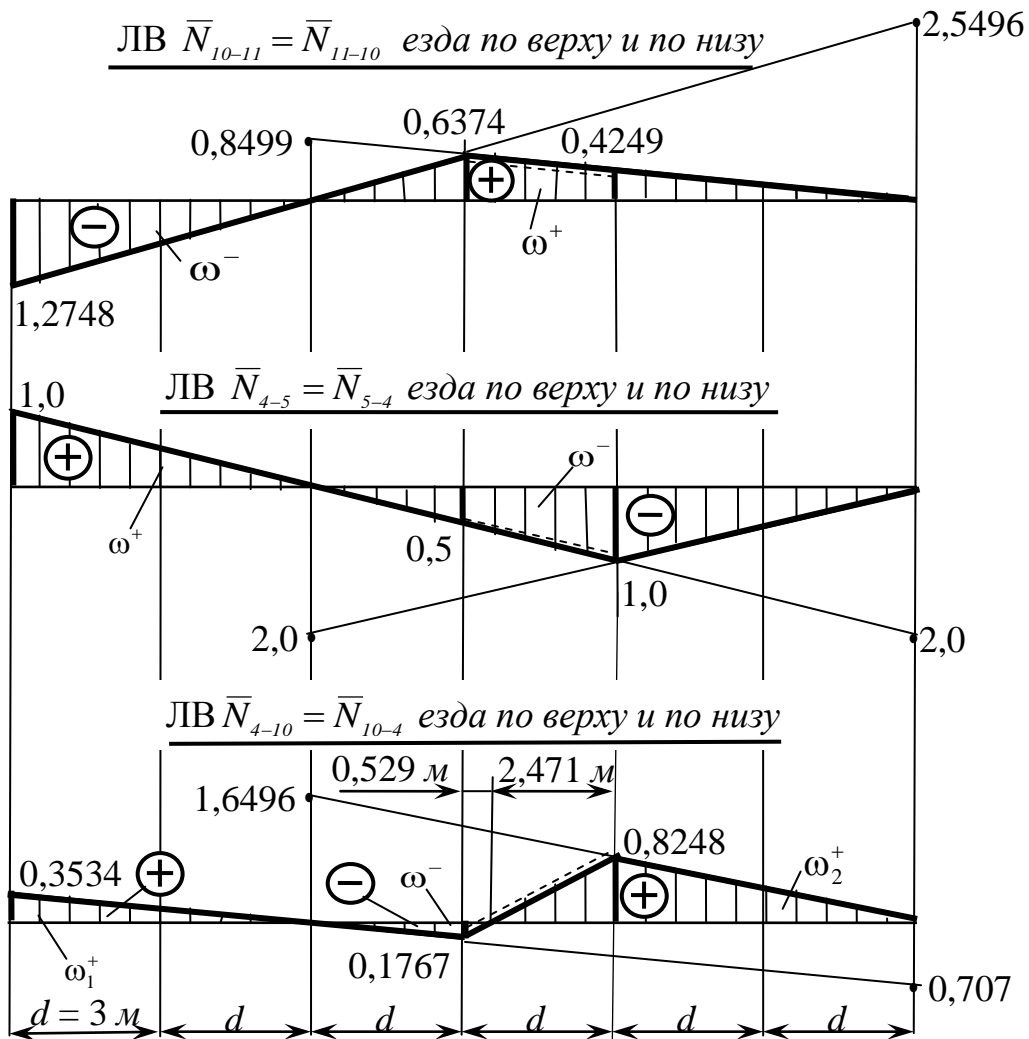


Рис. 3.38. Линии влияния усилий в стержнях, работающих одинаково при загрузении верхнего или нижнего поясов

Сечение II. ЛВ усилий в стержне 5–10, неодинаково работающего при загрузении верхнего или нижнего грузового пояса, строим для двух случаев – *езда по верху и езда по низу*. Выражения усилий $\bar{N}_{5-10} = \bar{N}_{10-5}$ получим из условий равновесия левой и правой частей фермы, рассекаемой простым сечением II:

а) $\bar{P} = 1$ справа от сечения, т.е. в узлах 5, 6, 7 – *при езде по верху* или в узлах 9, 8 – *при езде по низу*.

Рассмотрим равновесие *левой* отсечённой части фермы:

$$\sum M_K^{Лес} = 0; \quad \bar{N}_{10-5} \cdot r_{10-5} + \bar{R}_A \cdot (4d + c) = 0;$$

$$\bar{N}_{10-5} = -\bar{R}_A (4d + c) / r_{10-5} = -1,4\bar{R}_A.$$

б) $\bar{P} = 1$ слева от сечения, т.е. в узлах 1, 2, 3, 4 – *при езде по верху* или в узлах 14, 13, 12, 11, 10 – *при езде по низу*.

$$\sum M_K^{Пр} = 0; \quad \bar{N}_{5-10} \cdot r_{5-10} - \bar{R}_B \cdot c = 0; \quad \bar{N}_{5-10} = \bar{N}_{10-5} = \bar{R}_B c / r_{5-10} = 0,6\bar{R}_B.$$

Левые и правые ветви соединяем передаточной прямой в пределах рассекаемых панелей: четвёртой – *при езде по верху* и пятой – *по низу*.

ЛВ усилий в стержне 5–10 представлены на рис. 3.39.

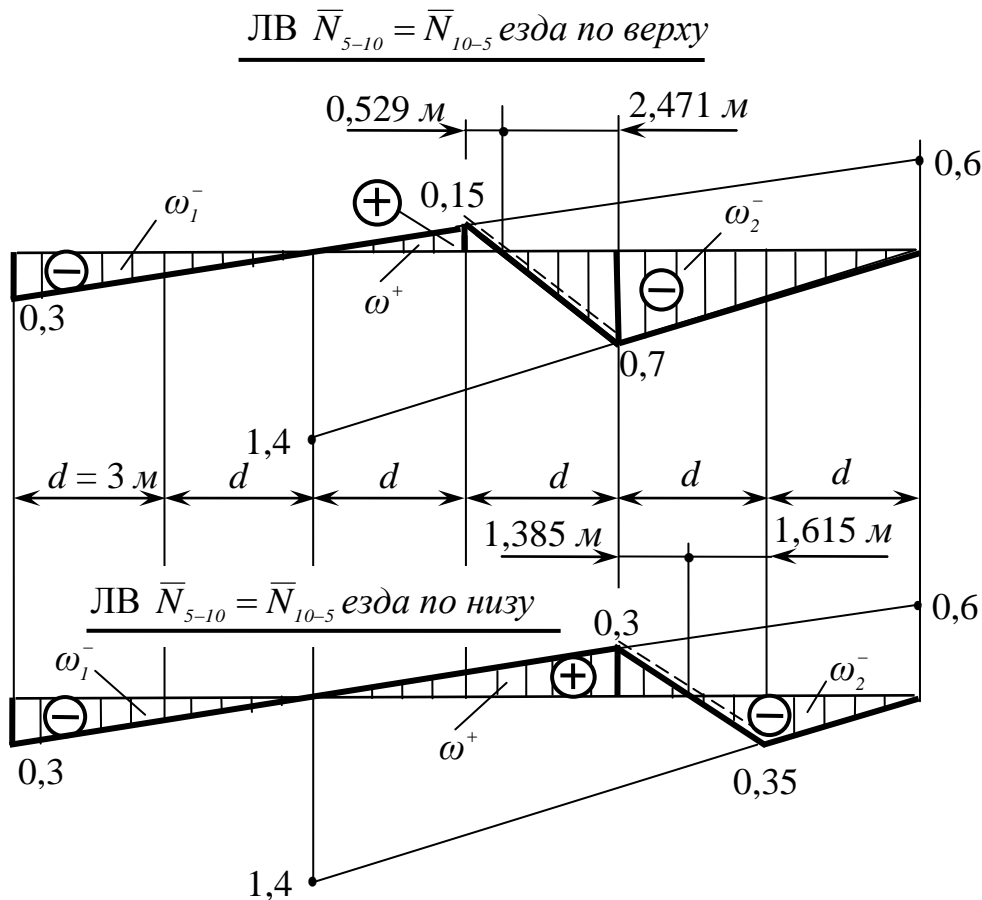


Рис. 3.39. Линии влияния в стержне 5–10, неодинаково работающего при загрузении верхнего или нижнего поясов

Сечение III. ЛВ усилий в стержне 4–11, неодинаково работающего при загрузении верхнего или нижнего грузового пояса, строим для двух случаев – *езда по верху* и *езда по низу*.

Рассмотрим равновесие узла 11 (рис. 3.40):

а) $\bar{P} = 1$ приложена к узлам *верхнего* пояса – *езда по верху*. В этом случае узел 11 всегда без «нагрузки» (рис. 3.40, а):

$\sum Y = 0; \bar{N}_{11-4} + \bar{N}_{11-10} \sin \alpha = 0; \bar{N}_{11-4} = \bar{N}_{4-11} = -\bar{N}_{11-10} \sin \alpha = -0,19612 \bar{N}_{11-10}$, т.е. ЛВ $\bar{N}_{11-4} = \bar{N}_{4-11}$ получается из ЛВ $\bar{N}_{10-11} = \bar{N}_{11-10}$ умножением всех её значений на $(-0,19612)$.

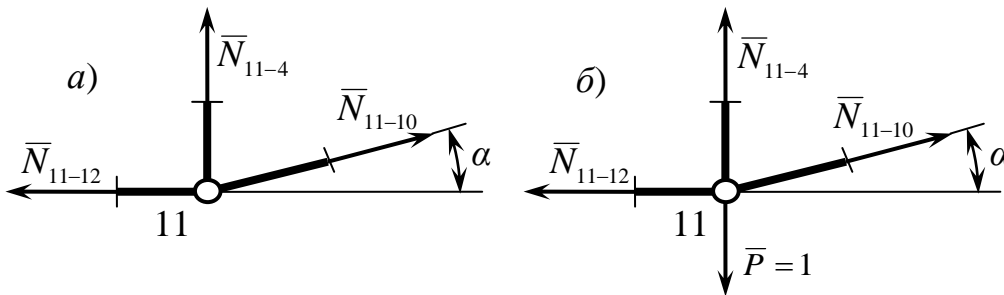


Рис. 3.40. Узел 11, вырезанный сечением III

б) $\bar{P} = 1$ приложена к узлам *нижнего* пояса – *езда по низу*. ЛВ $\bar{N}_{11-4} = \bar{N}_{4-11}$ построим, как и в предыдущем случае, используя линию влияния $\bar{N}_{10-11} = \bar{N}_{11-10}$, но при этом необходимо рассмотреть два варианта приложения силы $\bar{P} = 1$.

в) $\bar{P} = 1$ во всех узлах нижнего пояса, кроме узла 11 (рис. 3.40, а):

$$\sum Y = 0; \bar{N}_{11-4} + \bar{N}_{11-10} \sin \alpha = 0; \bar{N}_{11-4} = \bar{N}_{4-11} = -\bar{N}_{11-10} \sin \alpha = -0,19612 \bar{N}_{11-10}.$$

г) $\bar{P} = 1$ в узле 11 (рис. 3.40):

$$\sum Y = 0; \bar{N}_{11-4(11)} + \bar{N}_{11-10(11)} \sin \alpha - \bar{P} = 0;$$

$$\bar{N}_{11-4(11)} = \bar{N}_{4-11(11)} = -\bar{N}_{11-10(11)} \sin \alpha + \bar{P} = -0,6374 \cdot 0,19612 + 1 = 0,8750.$$

Здесь $\bar{N}_{11-4(11)} = \bar{N}_{4-11(11)}$, $\bar{N}_{10-11(11)} = \bar{N}_{11-10(11)}$ – значения соответствующих усилий при положении единичной силы $\bar{P} = 1$ в узле 11. При этом учтём, что стержень 10–11 работает одинаково при загрузении нижнего или верхнего пояса, т.е. $\bar{N}_{11-10(11)} = \bar{N}_{11-10(4)} = 0,6374$.

В пределах рассекаемых сечением III *третьей* и *четвёртой* панелей *нижнего* пояса проводим *передаточные* прямые.

ЛВ $\bar{N}_{4-11} = \bar{N}_{11-4}$ представлены на рис. 3.41.

9. Загружаем ЛВ постоянной нагрузкой, приложенной к *верхнему* поясу фермы. В соответствии с правилом загрузки ЛВ равномерно распре-

делённой погонной нагрузкой получим значения усилий в стержнях от постоянной нагрузки q_{II} :

$$N_{10-11} = N_{11-10} = q_{II} \sum \omega = q_{II} (\omega^+ + \omega^-) = 20 \cdot \left(\frac{0,6374 \cdot 12}{2} + \frac{-1,2748 \cdot 6}{2} \right) = 0;$$

$$N_{4-5} = N_{5-4} = q_{II} (\omega^+ + \omega^-) = 20 \cdot \left(\frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{-1 \cdot 12}{2} \right) = -60 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_{4-10} = N_{10-4} &= q_{II} (\omega_1^+ + \omega_2^+ + \omega_3^-) = \\ &= 20 \cdot \left(\frac{0,3534 \cdot 6}{2} + \frac{0,8248 \cdot 8,471}{2} - \frac{0,1767 \cdot 3,529}{2} \right) = 84,84 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{5-10} = N_{10-5} &= q_{II} (\omega^+ + \omega_1^- + \omega_2^-) = \\ &= 20 \cdot \left(\frac{0,15 \cdot 3,529}{2} + \frac{-0,3 \cdot 6}{2} + \frac{-0,7 \cdot 8,471}{2} \right) = 72 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$N_{4-11} = N_{11-4} = q_I (\omega^+ + \omega^-) = 20 \left(\frac{0,25 \cdot 6}{2} + \frac{-0,125 \cdot 12}{2} \right) = 0.$$

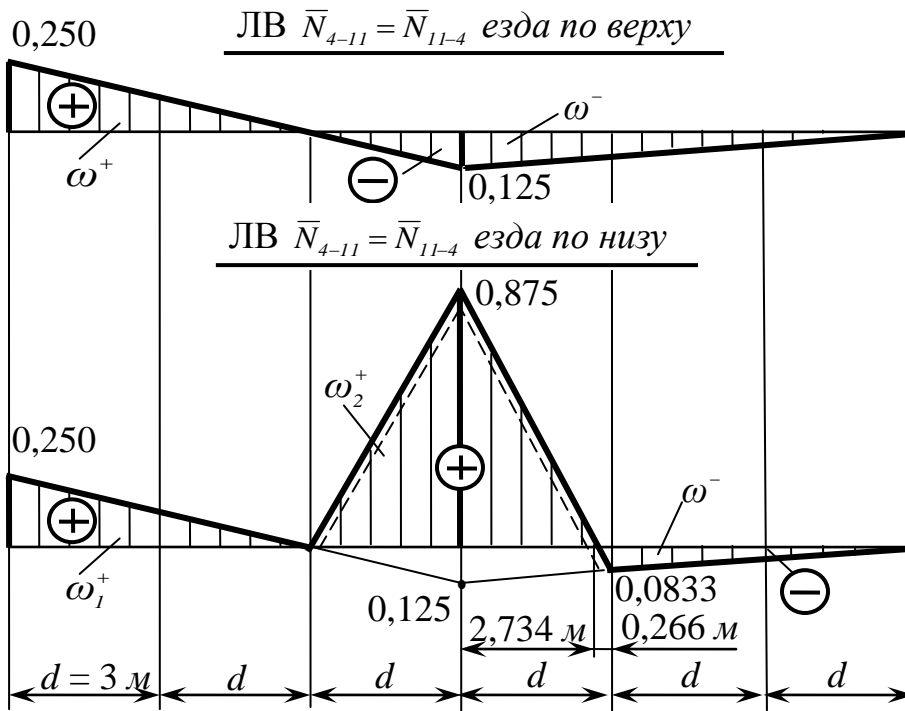


Рис. 3.41. Линии влияния усилия в стержне 4–11

Здесь ω^+ , ω^- – соответственно, положительные и отрицательные площади ЛВ при езде по верху.

Получены те же значения усилий, что и при аналитическом определении непосредственно способом простых сечений I, II и способом вырезания узла сечением III.

10. Загружаем ЛВ временной нагрузкой q_B , приложенной к *нижнему поясу* при её невыгодном для каждого стержня положении.

Невыгодными положениями временной нагрузки следует считать такие, при которых усилие в стержне может принимать максимальное или минимальное (алгебраически) значения, т.е. когда временная нагрузка расположена над положительными или отрицательными значениями ЛВ:

$$\max N_B = q_B \sum \omega^+; \quad \min N_B = q_B \sum \omega^-,$$

где ω^+, ω^- – соответственно, положительные и отрицательные площади ЛВ *при езде по низу*. В нашем примере:

$$\max N_{10-11B} = q_B \cdot \omega^+ = 30 \cdot \frac{0,6374 \cdot 12}{2} = 114,73 \text{ кН};$$

$$\min N_{10-11B} = q_B \cdot \omega^- = 30 \cdot \frac{-1,2748 \cdot 6}{2} = -114,73 \text{ кН},$$

$$\max N_{4-5B} = q_B \cdot \omega^+ = 30 \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} = 90 \text{ кН};$$

$$\min N_{4-5B} = q_B \cdot \omega^- = 30 \cdot \frac{-1 \cdot 12}{2} = -180 \text{ кН},$$

$$\max N_{4-10B} = q_B \cdot (\omega^+ + \omega^-) = 30 \cdot \left(\frac{0,3534 \cdot 6}{2} + \frac{0,8248 \cdot 8,471}{2} \right) = 136,61 \text{ кН};$$

$$\min N_{4-10B} = q_B \cdot \omega^- = 30 \cdot \left(\frac{-0,1767 \cdot 3,529}{2} \right) = -9,35 \text{ кН},$$

$$\max N_{5-10B} = q_B \cdot \omega^+ = 30 \cdot \frac{0,3 \cdot 7,385}{2} = 33,23 \text{ кН};$$

$$\min N_{5-10B} = q_B \cdot (\omega_1^- + \omega_2^-) = 30 \cdot \left(\frac{-0,3 \cdot 6}{2} + \frac{-0,35 \cdot 4,615}{2} \right) = -51,23 \text{ кН},$$

$$\max N_{4-11B} = q_B \cdot (\omega_1^+ + \omega_2^+) = 30 \cdot \left(\frac{0,25 \cdot 6}{2} + \frac{0,875 \cdot 5,734}{2} \right) = 97,76 \text{ кН};$$

$$\min N_{4-11B} = q_B \cdot \omega^- = 30 \cdot \frac{-0,0833 \cdot 6,266}{2} = -10,33 \text{ кН}.$$

11. Определяем расчётные усилия в стержнях четвёртой панели. Расчётные усилия для каждого стержня складываются из усилия от постоянной нагрузки и, соответственно, максимального и минимального усилия от временной нагрузки, т.е. $\max N_p = N + \max N_B$; $\min N_p = N + \min N_B$.

Определение максимальных и минимальных расчётных усилий сводим в табл. 3.3. Расчётные усилия необходимы для определения размеров и формы поперечных сечений стержней:

а) из условия прочности при растяжении (стержни 4–10, 5–10);

б) из условия прочности при растяжении с последующей проверкой на устойчивость (стержень 4–11);

в) из условия устойчивости (стержни 10–11, 4–5).

Таблица 3.3

Определение расчётных усилий

Обозначение стержня	Усилие от постоянной нагрузки N , кН	Усилие от временной нагрузки N_B , кН		Расчётное усилие N_p , кН	
		max	min	max	min
10–11	0	114,73	–114,73	114,73	–114,73
4–5	–60,00	90,00	–180,00	30,00	–240,00
4–10	84,84	136,61	–9,35	221,45	75,49
5–10	60,57	33,23	–51,23	93,80	9,34
4–11	0	97,76	–10,33	97,76	–10,33

3.6. Определение перемещений в балках и рамах

3.6.1. Общие методические указания. Линейные и угловые перемещения, возникающие в любой стержневой системе от внешней нагрузки, могут быть найдены, например, с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_{ip} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{EI_j} \int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz, \quad (3.7)$$

где Δ_{ip} – перемещение от заданной нагрузки в i -м направлении; j – номер участка стержневой системы; n – число участков; l_j – длина j -го участка; EI_j – его изгибная жесткость; $M_p = M_p(z)$ – изгибающий момент на j -м участке от заданной нагрузки; $\bar{M}_i = \bar{M}_i(z)$ – изгибающий момент на j -м участке от $\bar{P}_i = 1$ (при вычислении линейного перемещения) или $\bar{m}_i = 1$ (при вычислении угла поворота), прикладываемых по направлению перемещения.

Вычисление интеграла Мора (3.7) для стержневых систем, составленных из прямолинейных стержней, может быть выполнено по правилу Верещагина или по готовым формулам. Правило Верещагина предполагает построение эпюр изгибающих моментов так называемых грузового состояния M_p и единичного состояния \bar{M}_i . В соответствии с этим правилом

$$\int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz = \omega_p y_c, \quad (3.8)$$

где ω_p – площадь эпюры M_p на j -м участке; y_c – ордината эпюры \bar{M}_i под центром тяжести площади ω_p .

Отметим, что в пределах площади ω_p эпюра \bar{M}_i должна быть линейной и непрерывной. Требование линейности эпюры \bar{M}_i для балок и рам всегда удовлетворяется, а требование непрерывности достигается соответствующим разбиением стержневой системы на участки.

С целью упрощения расчётов эпюра M_p (или площадь ω_p) расчленяется на простейшие геометрические фигуры, для каждой из которых известны положение центра тяжести и формула для вычисления площади. В этом случае, учитывая (3.8), правило Верещагина представляется в виде:

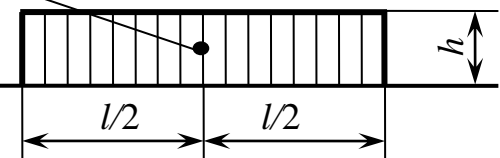
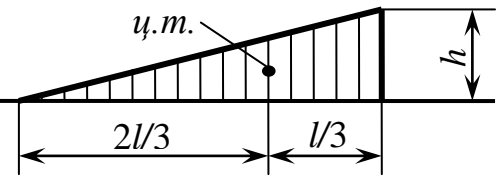
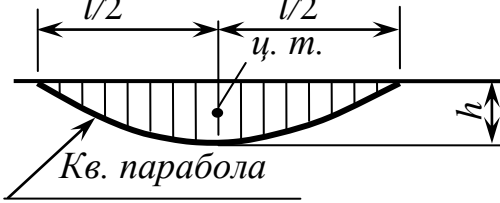
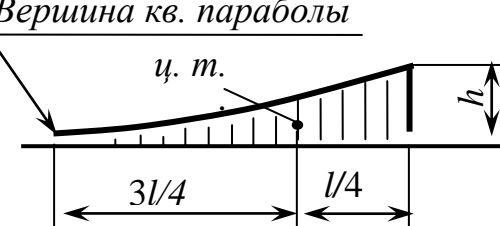
$$\int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz = \sum_{k=1}^n \omega_k y_k, \quad (3.9)$$

где k – номер простой фигуры эпюры M_p ; n – число простых фигур; ω_k – площадь простой фигуры эпюры M_p ; y_k – ордината единичной эпюры \bar{M}_i под центром тяжести площади ω_k . Произведение $\omega_k \cdot y_k$ в (3.9) принимается положительным, если ω_k и y_k имеют один знак.

Грузовая эпюра M_p любого очертания (при $q = const$) может быть расчленена на простые фигуры трёх видов, представленных в табл. 3.4.

Таблица 3.4

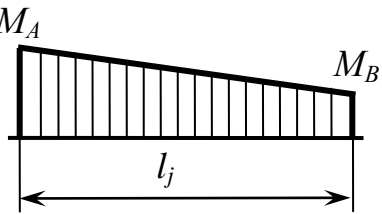
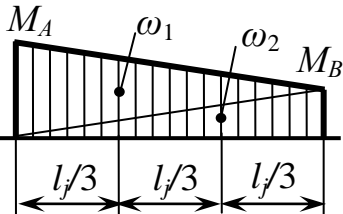
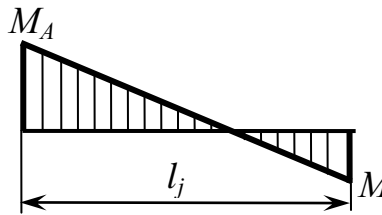
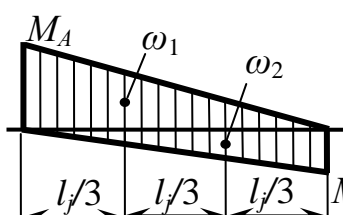
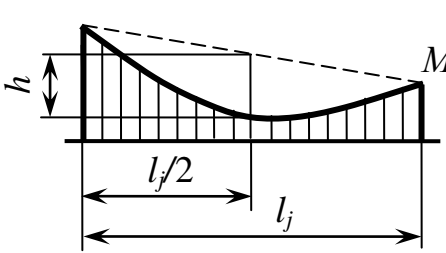
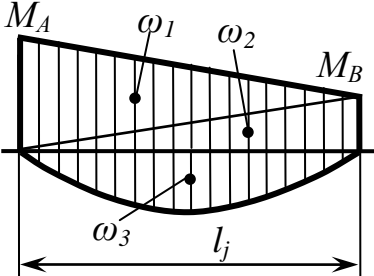
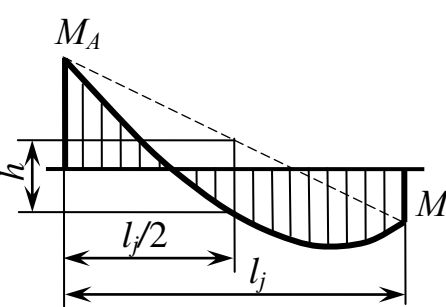
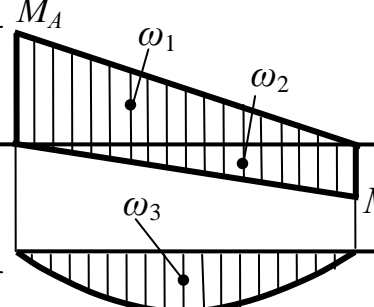
Простые геометрические фигуры

Геометрическая фигура	Площадь
<p>центр тяжести (ц. т.)</p> 	$\omega = lh$
<p>ц. т.</p> 	$\omega = \frac{lh}{2}$
<p>Кв. парабола</p> <p>ц. т.</p> 	$\omega = \frac{2lh}{3} = \frac{ql^3}{12};$ $h = \frac{ql^2}{8}$
<p>Вершина кв. парабола</p> <p>ц. т.</p> 	$\omega = \frac{lh}{3} = \frac{ql^3}{6};$ $h = \frac{ql^2}{2}$

Приёмы расчленения фрагментов эпюр M_p с использованием приведенных выше простых фигур представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

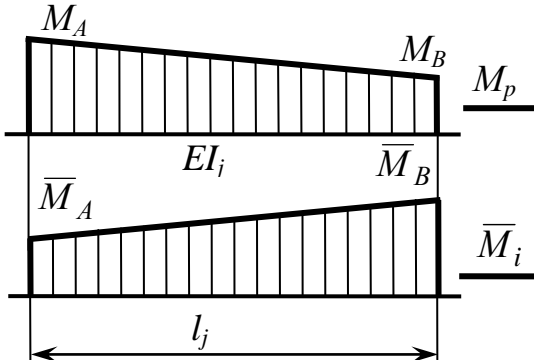
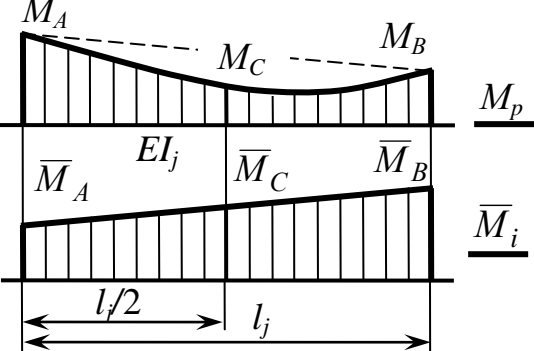
Расчленение эпюры M_p на простые фигуры

Фрагмент эпюры M_p	Рекомендуемое расчленение	
		$\omega_1 = \frac{M_A l_j}{2}$ $\omega_2 = \frac{M_B l_j}{2}$
		$\omega_1 = \frac{M_A l_j}{2}$ $\omega_2 = \frac{M_B l_j}{2}$
		$\omega_1 = \frac{M_A l_j}{2}$ $\omega_2 = \frac{M_B l_j}{2}$ $\omega_3 = \frac{q l_j^3}{12}$
		$\omega_1 = \frac{M_A l_j}{2}$ $\omega_2 = \frac{M_B l_j}{2}$ $\omega_3 = \frac{q l_j^3}{12}$

Интеграл Мора вычисляется и по готовым формулам. Их можно получить из приближенного способа вычисления интеграла Мора при произвольном виде выражений $M_p(z)$ и $\bar{M}_i(z)$ по методу Симпсона, который для рассматриваемых систем в случае $q = const$ даёт точный результат.

Формулы перемножения эпюр M_p и \bar{M}_i приведены в табл. 3.6.

Формулы перемножения эпюр

Фрагменты перемножаемых эпюр	Формула перемножения
	$\frac{1}{EI_j} \int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz = (M_p \times \bar{M}_i) =$ $= \frac{l_j}{6EI_j} (2M_A \bar{M}_A + 2M_B \bar{M}_B +$ $+ M_A \bar{M}_B + M_B \bar{M}_A)$
	$\frac{1}{EI_j} \int_0^{l_j} M_p \bar{M}_i dz = (M_p \times \bar{M}_i) =$ $= \frac{l_j}{6EI_j} (M_A \bar{M}_A + 4M_C \bar{M}_C + M_B \bar{M}_B)$

Изгибающие моменты M_C и \bar{M}_C вычисляются по формулам

$$M_C = \frac{M_A + M_B}{2} \pm \frac{ql_j^2}{8}; \quad \bar{M}_C = \frac{\bar{M}_A + \bar{M}_B}{2}. \quad (3.10)$$

Знак при $\frac{ql_j^2}{8}$ берётся в соответствии с направлением нагрузки q .

Формулы табл. 3.5 используются и в случае перемножения так называемых «перекрученных» эпюр M_p и \bar{M}_i . Необходимо лишь учитывать знаки $M_A, M_B, M_C, \bar{M}_A, \bar{M}_B, \bar{M}_C$, что иллюстрируется в приведенных ниже примерах вычисления некоторых перемещений в балке и раме.

3.5.2. Пример определения перемещений в балке. Определить прогибы незакреплённых сечений 1, 2, 3, 5, 6 и изобразить изогнутую ось балки, расчётная схема которой приведена на рис. 3.42.

Решение.

1. Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки – так называемую грузовую эпюру M_p .

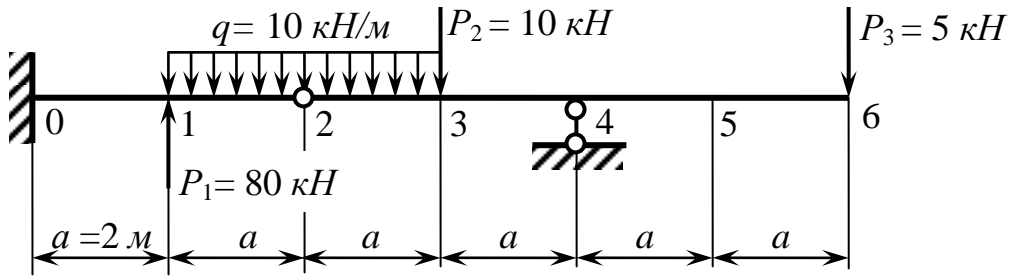


Рис. 3.42. Расчётная схема балки

Будем использовать этажную схему балки (рис. 3.43), в которой выделены основная 0–2 и вспомогательная 2–6 части.

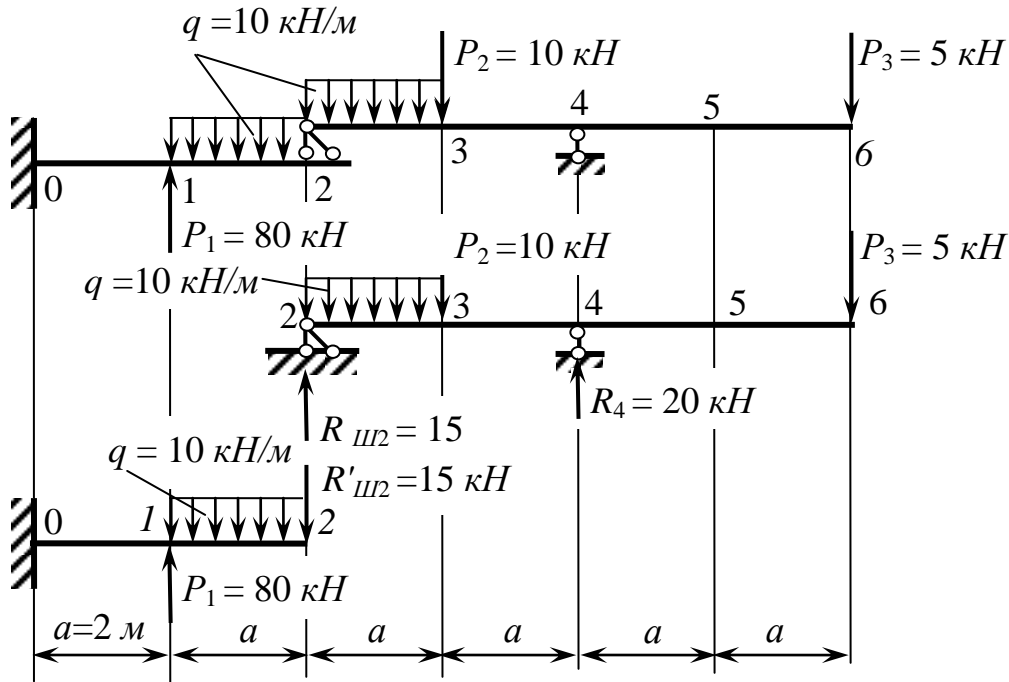


Рис. 3.43. Поэтажная схема грузового состояния балки

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_2^{2-6} = 0; \quad R_4 \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 2 - P_3 \cdot 8 = 0;$$

$$R_4 = \frac{2q + 2P_2 + 8P_3}{4} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 5}{4} = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum M_4^{2-6} = 0; \quad R_{ш2} \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - P_2 \cdot 2 + P_3 \cdot 4 = 0;$$

$$R_{ш2} = \frac{6q + 2P_2 - 4P_3}{4} = \frac{6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 - 4 \cdot 5}{4} = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum M_0^{0-2} = 0; \quad M_0 - P_1 \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 + R'_{ш2} \cdot 4 = 0;$$

$$M_0 = 2P_1 - 6q - 4R'_{ш2} = 2 \cdot 80 - 6 \cdot 10 - 4 \cdot 15 = 40 \text{ кН.}$$

$$\sum Y^{0-2} = 0; \quad -R_0 + P_1 - q \cdot 2 - R'_{ш2} = 0;$$

$$R_0 = P_1 - 2q - R'_{ш2} = 80 - 2 \cdot 10 - 15 = 45 \text{ кН.}$$

Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях (на границах участков):

а) основная балка 0 – 2:

$$M_{0-1} = M_0 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (растянутые волокна внизу);}$$

$M_{1-0} = M_{1-2} = M_0 - R_0 \cdot 2 = 40 - 45 \cdot 2 = -50 \text{ кН}\cdot\text{м (растянутые волокна вверху);}$

$$M_{2-1} = 0 \text{ (сечение 2 – шарнир);}$$

б) вспомогательная балка 2 – 6:

$$M_{2-3} = 0 \text{ (сечение 2 – шарнир);}$$

$M_{3-2} = M_{3-4} = R_{ш2} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 15 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м (растянутые волокна внизу);}$

$$M_{4-3} = M_{4-5} = P_3 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м (растянутые волокна вверху);}$$

$$M_{5-4} = M_{5-6} = P_3 \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м (растянутые волокна вверху).}$$

Значения изгибающих моментов на эпюре M_p откладываем со стороны растянутых волокон балки, при этом знаки изгибающих моментов принято не указывать (рис. 3.44).

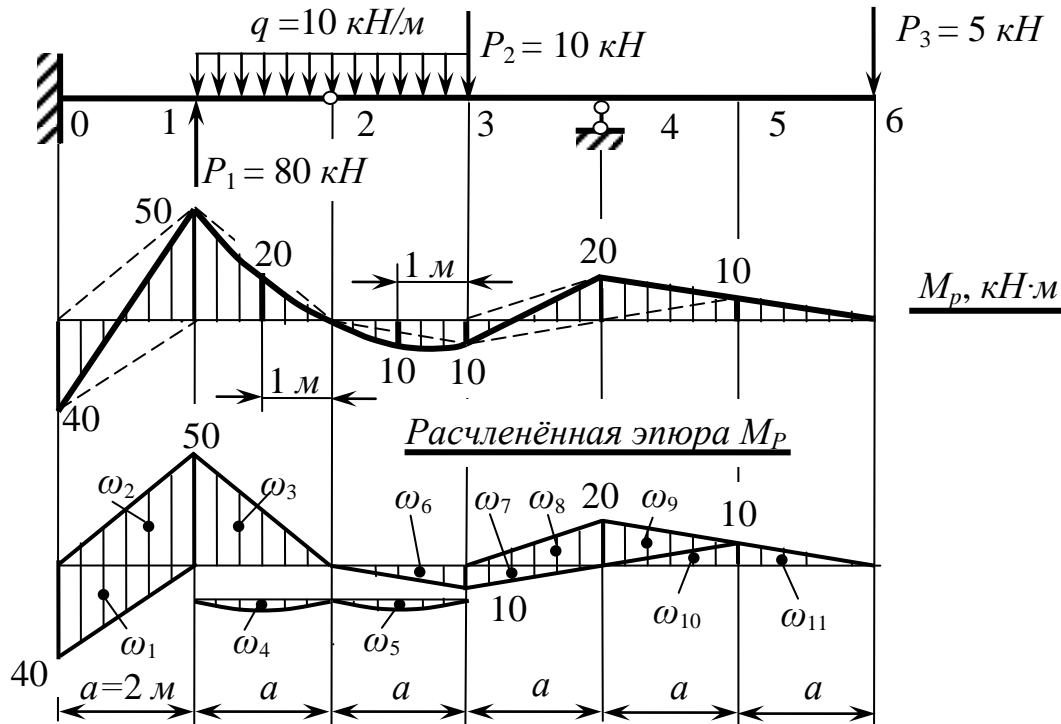


Рис. 3.44. Грузовая эпюра изгибающих моментов M_p

На участках 1–2 и 2–3 вычисляем M_p посередине каждого участка:

$$\frac{qa^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_c^{1-2} = \frac{50}{2} - 5 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_c^{2-3} = \frac{10}{2} + 5 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Для вычисления прогибов в сечениях 1, 2, 3, 5, 6 нагружаем балку поочерёдно единичными силами $\bar{P}_i = 1$, прикладываемыми в соответствующих сечениях, и строим единичные эпюры (рис. 3.45).

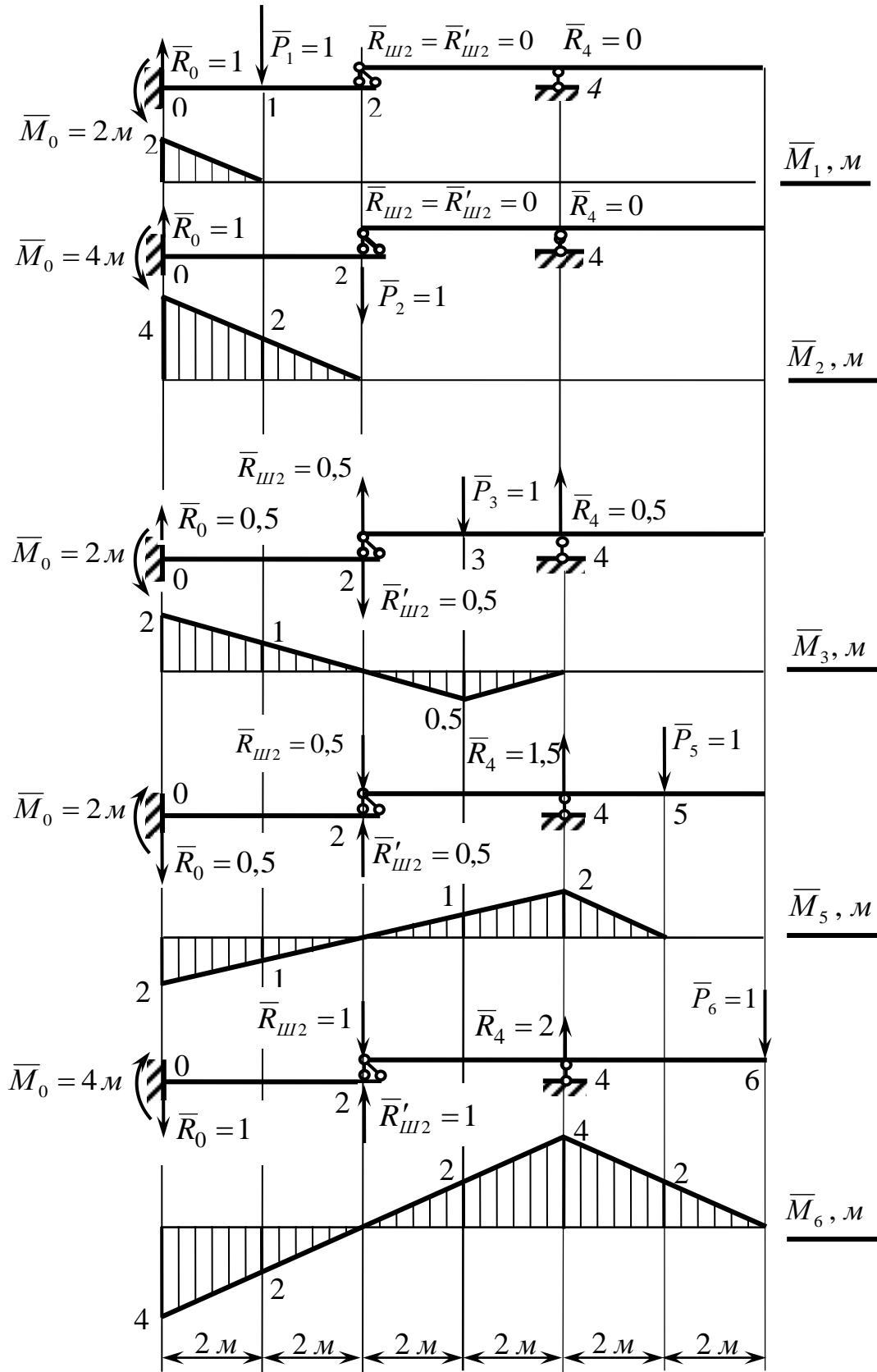


Рис. 3.45. Эпюры изгибающих моментов единичных состояний

3. Определяем прогибы балки в заданных сечениях, «перемножая» эпюру M_p на соответствующие единичные эпюры \bar{M}_i .

Для перемножения эпор по правилу Верещагина представим грузовую эпюру M_p в виде суммы простых площадей. Учтём при этом, что в пределах каждой площади все единичные эпюры должны быть непрерывными, а жёсткость $EI = const$.

Для удобства перемножения расчленённую эпюру M_p и единичные эпюры \bar{M}_i изобразим на одном рисунке (рис. 3.46).

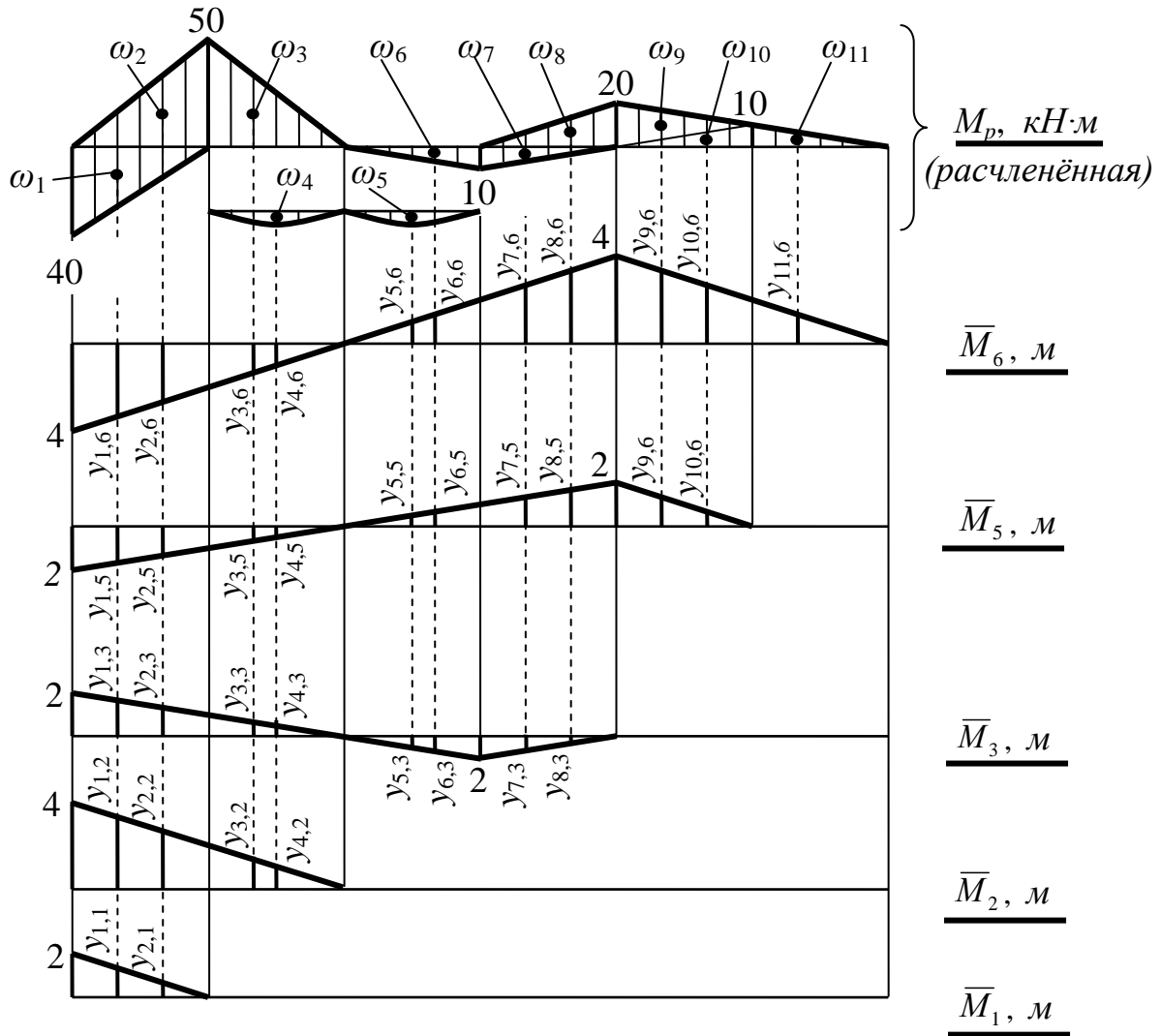


Рис. 3.46. Грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов, подготовленные к перемножению эпор по правилу Верещагина

Значения площадей грузовой эпюры и соответствующие им значения единичных эпор сведём в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Значения площадей эпюры M_p и ординат эпюр \bar{M}_i

Номер площади $-j$	$\omega_j,$ $\kappa H \cdot m^2$	Ординаты единичных эпюр \bar{M}_i под центрами тяжести составляющих площадей $-y_{j,i}, m$				
		Эн. \bar{M}_1	Эн. \bar{M}_2	Эн. \bar{M}_3	Эн. \bar{M}_5	Эн. \bar{M}_6
1	40	4/3	10/3	5/3	5/3	10/3
2	50	2/3	8/3	4/3	4/3	8/3
3	50		4/3	2/3	2/3	4/3
4	20/3		1	1/2	1/2	1
5	20/3			1/2	1/2	1
6	10			2/3	2/3	4/3
7	10			2/3	4/3	8/3
8	20			1/3	5/3	10/3
9	20				4/3	10/3
10	10				2/3	8/3
11	10					4/3

Ординаты единичных эпюр \bar{M}_i под центрами тяжести составляющих площадей $-y_{j,i}$ вычисляем как значения изгибающих моментов, соответствующих единичных состояний.

Так, например,

$$y_{1,6} = \bar{R}'_{ш2} \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 1 \cdot \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \text{ м}; \quad y_{2,6} = \bar{R}'_{ш2} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \text{ м},$$

где $\bar{R}'_{ш2} = 1$ – реакция во 2-м шарнире от $\bar{P}_6 = 1$.

Определяем вертикальные перемещения $\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \Delta_{3p}, \Delta_{5p}$ и Δ_{6p} , перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_{1,1} + \omega_2 \cdot y_{2,1}) = \frac{1}{EI} \left(-40 \cdot \frac{4}{3} + 50 \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{20}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= (M_p \times \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_{1,2} + \omega_2 \cdot y_{2,2} + \omega_3 \cdot y_{3,2} - \omega_4 \cdot y_{4,2}) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(-40 \cdot \frac{10}{3} + 50 \cdot \frac{8}{3} + 50 \cdot \frac{4}{3} - \frac{20}{3} \cdot 1 \right) = \frac{60}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3p} &= (M_p \times \bar{M}_3) = \frac{1}{EI} \left(-40 \cdot \frac{5}{3} + 50 \cdot \frac{4}{3} + 50 \cdot \frac{2}{3} - \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3} - 20 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{40}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{5p} &= (M_p \times \bar{M}_5) = \frac{1}{EI} \left(40 \cdot \frac{5}{3} - 50 \cdot \frac{4}{3} - 50 \cdot \frac{2}{3} + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{2}{3} - 10 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{4}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{40}{3EI} = \frac{13,33}{EI}; \\ \Delta_{6p} &= (M_p \times \bar{M}_6) = \frac{1}{EI} \left(40 \cdot \frac{10}{3} - 50 \cdot \frac{8}{3} - 50 \cdot \frac{4}{3} + \frac{20}{3} \cdot 1 - \frac{20}{3} \cdot 1 - 10 \cdot \frac{4}{3} - \right. \\ &\quad \left. - 10 \cdot \frac{8}{3} + 20 \cdot \frac{10}{3} + 20 \cdot \frac{10}{3} + 10 \cdot \frac{8}{3} + 10 \cdot \frac{4}{3} \right) = \frac{200}{3EI} = \frac{66,67}{EI}. \end{aligned}$$

4. Использование готовых формул перемножения эпюр покажем на примере вычисления Δ_{5p} (см. табл. 3.6):

$$\begin{aligned} \Delta_{5p} &= \frac{2}{6EI} (2 \cdot 40 \cdot 2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 40 \cdot 1 - 50 \cdot 2) + \\ &\quad + \frac{2}{6EI} (-50 \cdot 1 - 4 \cdot 20 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EI} (-4 \cdot 10 \cdot 0,5 - 10 \cdot 1) + \\ &\quad + \frac{2}{6EI} (-2 \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 20 \cdot 1) + \frac{2}{6EI} (2 \cdot 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2) = \frac{40}{3EI} = \frac{13,33}{EI}. \end{aligned}$$

Заметим, что числитель в линейных перемещениях измеряется в $\text{кН} \cdot \text{м}^3$. Это необходимо учитывать при вычислении значений прогибов. Например, для стальной балки ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$) двутаврового поперечного сечения № 24 ($I_x = 3460 \text{ см}^4$) значение прогиба сечения 6 равно:

$$\Delta_{6p} = \frac{66,67(\text{кН} \cdot \text{м}^3)}{EI} = \frac{66,67 \cdot 10^6(\text{кН} \cdot \text{см}^3)}{2 \cdot 10^4 \cdot 3460} = 0,96 \text{ см}.$$

По найденным значениям прогибов отдельных сечений изображаем изогнутую ось балки, согласуя её кривизну с эпюрой изгибающих моментов. Напомним, что положительный момент изгибает балку выпуклостью вниз, а отрицательный – вверх. Для наглядности изображение изогнутой оси балки располагаем под эпюрой изгибающих моментов M_p (рис. 3.47).

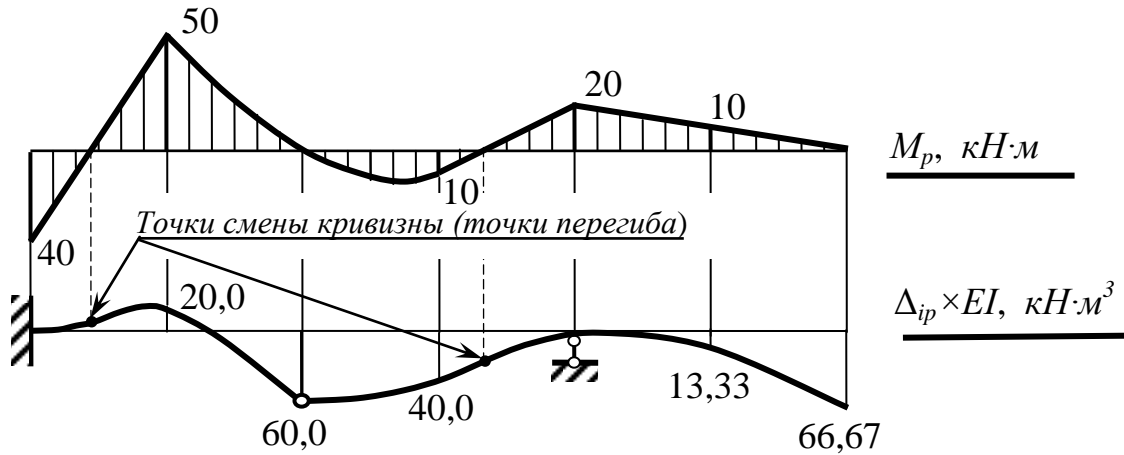


Рис. 3.47. Изогнутая ось балки

3.5.3. Пример определения перемещений в плоской раме. Определить горизонтальное перемещение и угол поворота узла D рамы (рис. 3.48).

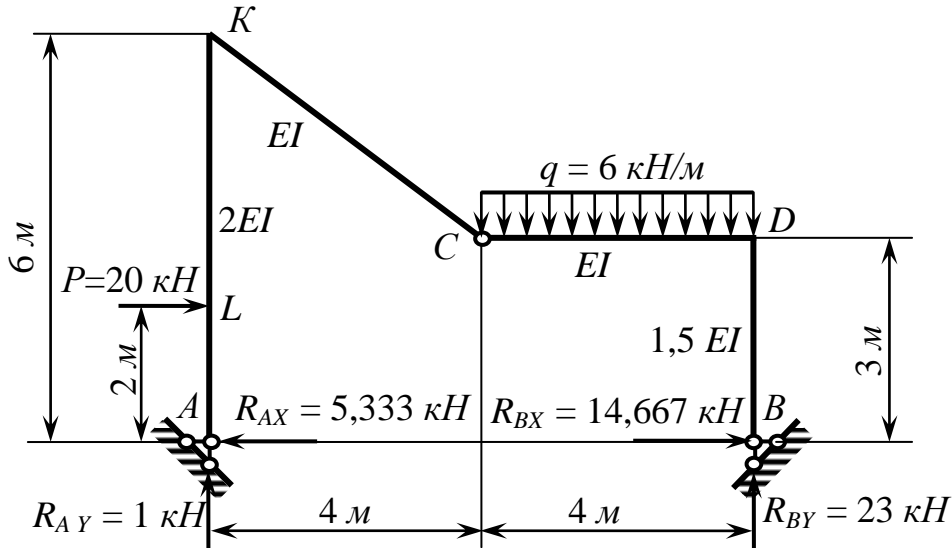


Рис. 3.48. Расчётная схема рамы

Решение.

1. Определяем реакции опорных связей (реакции опор):

$$\sum M_A = 0; P \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 6 + R_{BY} \cdot 8 = 0; R_{BY} = \frac{2P + 24q}{8} = \frac{2 \cdot 20 + 24 \cdot 6}{8} = 23 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; -P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_{AY} \cdot 8 = 0; R_{AY} = \frac{8q - 2P}{8} = \frac{8 \cdot 6 - 2 \cdot 20}{8} = 1 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{прав} = 0; R_{BY} \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_{BX} \cdot 3 = 0; R_{BX} = \frac{4R_{BY} - 8q}{3} = \frac{4 \cdot 23 - 8 \cdot 6}{3} = 14,667 \text{ кН}.$$

Проверка найденных значений реакций:

$$\sum Y = R_{AY} + R_{BY} - 4q = 1 + 23 - 4 \cdot 6 = 0;$$

$$\sum X = P - R_{AX} - R_{BX} = 20 - 5,333 - 14,667 = 0.$$

2. Строим грузовую эпюру. Эпюру изгибающих моментов M_p принято строить по их значениям в характерных сечениях рамы со стороны *растянутых* волокон, при этом знак момента не указывается.

Участок стойки AL : $M_{A-L} = 0$; $M_{L-A} = R_{AX} \cdot 2 = 5,333 \cdot 2 = 10,67 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок стойки LK :

$$M_{L-K} = M_{L-A} = R_{AX} \cdot 2 = 5,333 \cdot 2 = 10,67 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{K-L} = R_{AX} \cdot 6 - P \cdot 4 = 5,333 \cdot 6 - 20 \cdot 4 = -48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Положительные значения $M_{L-K} = M_{L-A}$ откладываем на эпюре M_p *справа* от оси стойки, так как принятая в выражении изгибающего момента положительной сила R_{AX} вызывает при изгибе стойки растяжение волокон *справа*. Отрицательное значение M_{K-L} откладываем в этом случае *слева*.

Наклонный участок KC :

$$M_{C-K} = 0 \text{ (в шарнире } M = 0); \quad M_{K-C} = R_{AX} \cdot 6 - P \cdot 4 = M_{K-L} = -48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Отрицательное значение следует отложить *вверх* (снаружи рамы), так как R_{AX} , принятая положительной, при изгибе ригеля вызывает растяжение *нижних* волокон и *вниз* откладывалось бы положительное значение M_{K-C} .

$$\text{Стойка } BD: M_{B-D} = R_{BX} \cdot 3 = 14,667 \cdot 3 = 44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Значение M_{B-D} откладываем *справа* от оси стойки.

$$\text{Ригель } CD: M_{C-D} = 0; \quad M_{D-C} = R_{BX} \cdot 3 = 14,667 \cdot 3 = 44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Значение M_{D-C} откладываем *вверх* от оси ригеля.

Значение изгибающего момента посередине ригеля CD по формуле

$$\bar{M}_C^{C-D} = \frac{44}{2} - \frac{6 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По значениям изгибающих моментов, вычисленных в характерных сечениях рамы, строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p (рис. 3.49).

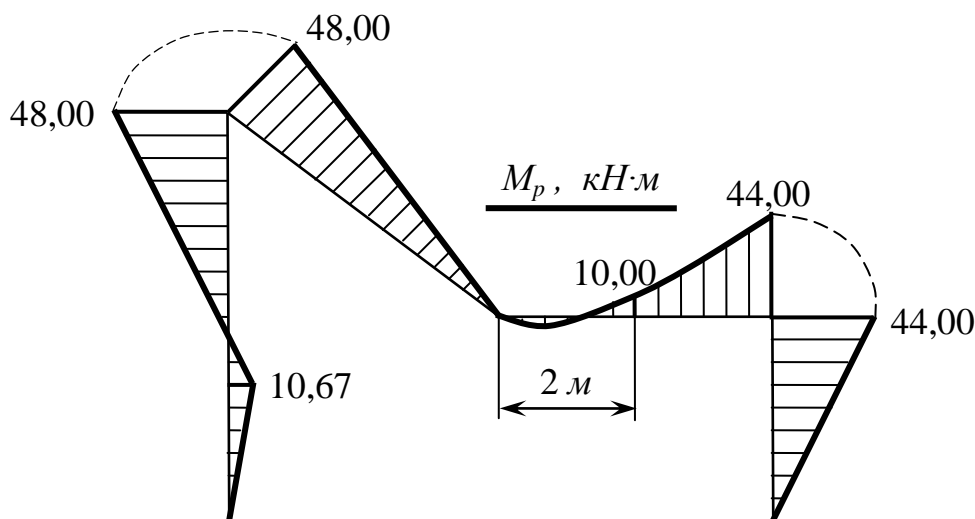


Рис. 3.49. Эпюра изгибающих моментов грузового состояния

Для перемножения эпюр по правилу Верещагина представим эпюру M_p в расчленённом виде (рис. 3.50).

3. Аналогично строим единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , нагружая раму поочередно единичной силой $\bar{P}_1 = 1$ и единичным моментом $\bar{m}_2 = 1$.

Учитывая простоту расчётных схем каждого из единичных состояний, расчёты здесь не приводим, а сами эпюры изобразим на расчётных схемах рамы (рис. 3.51 – 3.52).

Значения единичных эпюр под центрами тяжести площадей грузовой эпюры можно вычислить из подобия треугольников, но надёжнее, особенно для стойки AK , через реакции опорных связей. Например, на эпюре \bar{M}_1 :

$$y_{5,1} = \bar{R}_{Ax} \cdot \frac{14}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{14}{6} = 2,333 \text{ м};$$

$$y_{6,1} = \bar{R}_{Ax} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{10}{6} = 1,667 \text{ м}.$$

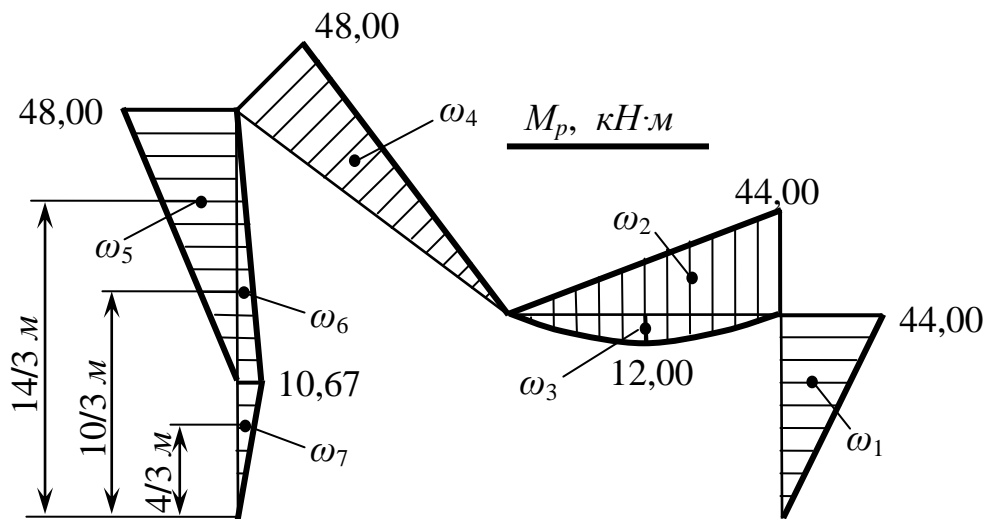


Рис. 3.50. Эпюры изгибающих моментов грузового состояния в расчленённом виде

На эпюре \bar{M}_2 :

$$y_{5,2} = \bar{R}_{Ax} \cdot \frac{14}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{14}{3} = 0,778; \quad y_{6,2} = \bar{R}_{Ax} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{3} = 0,556.$$

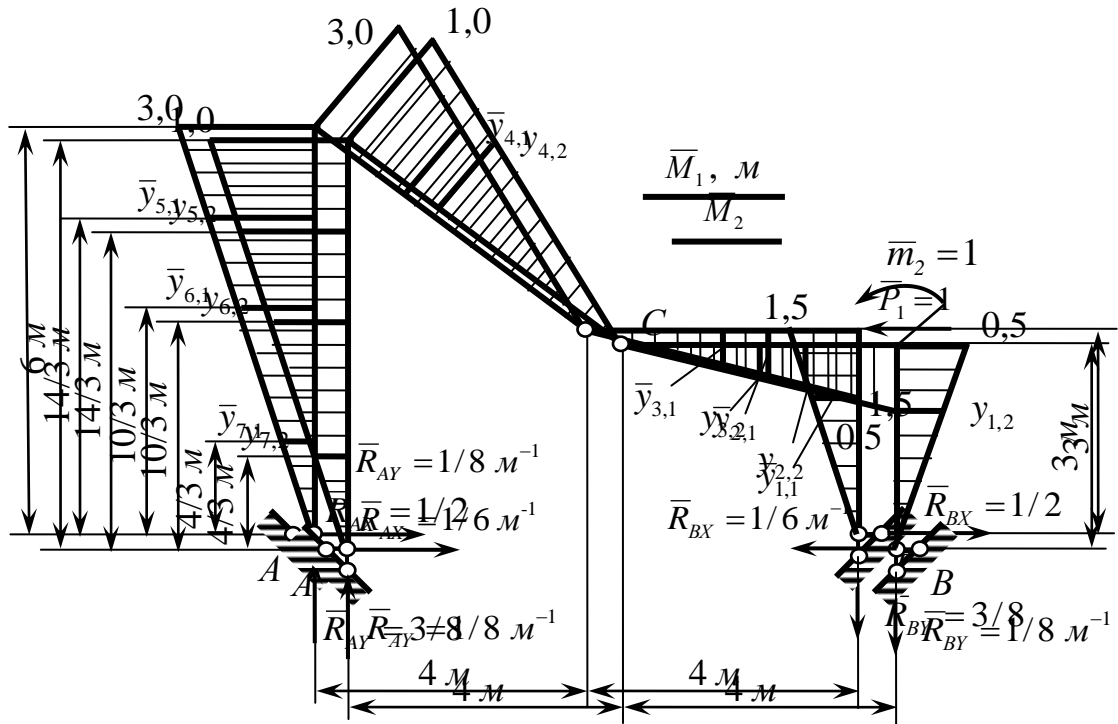


Рис. 3.51. Эпюры изгибающих моментов первого единичного состояния

Рис. 3.52. Эпюры изгибающих моментов второго единичного состояния

4. Вычисляем горизонтальные перемещения Δ_{1p} и угол поворота Δ_{2p} узла D , перемножая эпюры по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= (M_p \times \bar{M}_1) = \frac{1}{1,5EI} (-66 \cdot 1) + \frac{1}{EI} (-88 \cdot 1 + 32 \cdot 0,75 + 120 \cdot 2) + \\ &+ \frac{1}{2EI} (96 \cdot 2,333 - 21,34 \cdot 1,667 - 10,67 \cdot 0,667) = \frac{222,66}{EI}; \\ \Delta_{2p} &= (M_p \times \bar{M}_2) = \frac{1}{1,5EI} (66 \cdot 0,333) + \frac{1}{EI} (-88 \cdot 0,333 + 32 \cdot 0,25 + 120 \cdot 0,667) + \\ &+ \frac{1}{2EI} (96 \cdot 0,778 - 21,34 \cdot 0,556 - 10,67 \cdot 0,222) = \frac{103,56}{EI}. \end{aligned}$$

Значения площадей грузовой эпюры и соответствующие ординаты единичных эпюр сведём в табл. 3.8.

5. Теперь, для проверки, вычислим те же самые перемещения, перемножая эпюры по готовым формулам, приведенным в табл. 3.6:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1) &= \frac{3}{6 \cdot 1,5EI} (-2 \cdot 44 \cdot 1,5) + \frac{4}{6EI} (-4 \cdot 10 \cdot 0,75 - 44 \cdot 1,5) + \\ &+ \frac{5}{6EI} (2 \cdot 48 \cdot 3) + \frac{4}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 48 \cdot 3 - 2 \cdot 10,67 \cdot 1 + 48 \cdot 1 - 10,67 \cdot 3) + \\ &+ \frac{2}{6 \cdot 2EI} (-2 \cdot 10,67 \cdot 1) = \frac{222,66}{EI}; \\ \Delta_{2p} = (M_p \times \bar{M}_2) &= \frac{3}{6 \cdot 1,5EI} (2 \cdot 44 \cdot 0,5) + \frac{4}{6EI} (-4 \cdot 10 \cdot 0,25 - 44 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{5}{6EI} (2 \cdot 48 \cdot 1) + \frac{4}{6 \cdot 2EI} (2 \cdot 48 \cdot 1 - 2 \cdot 10,67 \cdot 0,333 + 48 \cdot 0,333 - \\ &- 10,67 \cdot 1) + \frac{2}{6 \cdot 2EI} (-2 \cdot 10,67 \cdot 0,333) = \frac{103,55}{EI}. \end{aligned}$$

Таблица 3.8

Значения площадей эпюры M_p и ординат эпюр \bar{M}_i

Номер площади, j	ω_j , $\text{кН}\cdot\text{м}^2$	Ординаты эпюр \bar{M}_i под центрами тяжести составляющих площадей эпюры M_p	
		$y_{j,1}$ (на эпюре \bar{M}_1)	$y_{j,2}$ (на эпюре \bar{M}_2)
1	66,00	1,0	0,333
2	88,00	1,0	0,333
3	32,00	0,75	0,25
4	120,00	2,0	0,667
5	96,00	2,333	0,778
6	21,34	1,667	0,556
7	10,67	0,667	0,222

Полученные нами положительные значения перемещений свидетельствуют о том, что узел D смещается по направлению единичной силы $\bar{P}_1 = 1$, т.е. *влево*. Поворот узла D происходит по направлению единичного момента $\bar{m}_2 = 1$, т.е. *против хода часовой стрелки*.

Заметим, как и ранее, что числитель в линейном перемещении Δ_{1p} измеряется в $\text{кН}\cdot\text{м}^3$, а в угловом Δ_{2p} – в $\text{кН}\cdot\text{м}^2$.

4. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

4.1. Расчёт статически неопределимых рам методом сил

4.1.1. Общие сведения и методические указания. *Метод сил* является одним из универсальных методов расчёта статически неопределимых стержневых систем. Его название объясняется тем, что в качестве неизвестных принимаются усилия (силы или моменты), возникающие в так называемых *лишних* связях. Под лишними понимаются такие связи, которые являются сверх кинематически необходимыми. Их число n для плоской стержневой системы определяется по одной из следующих формул:

$$n = 3K - Ш; \quad n = C_0 + 2Ш - 3D, \quad (4.1)$$

где K – число замкнутых контуров, образуемых стержнями рамы, включая основание («землю»); $Ш$ – число простых шарниров в контурах; C_0 – число опорных связей, а D – число дисков, не содержащих замкнутых контуров (при этом основание, как диск, не учитывается).

В методе сил используются два важных понятия: *заданная* система и *основная* система. Под *заданной* системой (ЗС) понимается стержневая система, непосредственно подлежащая расчёту. *Основной* системой (ОС) называется *геометрически неизменяемая статически определимая* система, которая получается из ЗС путем устранения лишних связей и заменой их действия *неизвестными* усилиями X_1, X_2, \dots, X_n . Таким образом, усилия X_1, X_2, \dots, X_n в ОС являются уже не реактивной, а активной (правда, пока неизвестной) *внешней* нагрузкой, дополнительной к заданной.

Приведем приёмы устранения «лишних» связей при выборе ОС:

- а) полное рассечение стержня, которое устраняет три внутренних связи: одну угловую и две линейные связи;
- б) разъединение отдельных частей рамы по соединяющим их шарнирам, что устраняет две линейные связи;
- в) врезание простого шарнира, что устраняет одну угловую связь;
- г) введение ползуна, что устраняет одну линейную связь;
- д) удаление некоторых опорных связей;
- е) сочетание вариантов, изложенных в пунктах а – д.

Выбору варианта ОС следует уделить особое внимание, так как от этого будет зависеть объём дальнейшей вычислений. При этом очевидно, что окончательный результат не должен зависеть от варианта ОС.

Дальнейший расчёт ЗС заменяется расчётом ОС. Этим и объясняется название «основная система», т.е. «*основа*» для дальнейшего расчёта.

Для того чтобы такая замена была *эквивалентной*, необходимо и достаточно, чтобы в ОС перемещения по направлению неизвестных усилий X_1, X_2, \dots, X_n отсутствовали. То есть ЗС и ОС должны деформироваться одинаково (одинаковыми для них будут и эпюры внутренних усилий).

Используя принцип независимости действия сил, это условие для ОС можно представить системой канонических алгебраических уравнений:

Затем по эпюре M_p строим эпюру поперечных сил Q . Значения Q в соответствующих поперечных сечениях рамы определяем по формуле

$$Q_{лев} = Q_{лев}^{\circ} + (M_{np} - M_{лев})/l; \quad Q_{np} = Q_{np}^{\circ} + (M_{np} - M_{лев})/l, \quad (4.4)$$

полученной из условий равновесия ее отдельного участка (стержня длиной l) с известными значениями изгибающих моментов на левом $M_{лев}$ и правом M_{np} концах, и погонной нагрузки q (рис. 4.1).

В (4.4) $Q_{лев}^{\circ}, Q_{np}^{\circ}$ – балочные поперечные силы на левом и правом концах стержня. Если $q = 0$, то $Q_{лев}^{\circ} = Q_{np}^{\circ} = 0$. При $q = const$ $Q_{лев}^{\circ} = \pm 0,5ql$, а $Q_{np}^{\circ} = \mp 0,5ql$ (знак выбираем в зависимости от направления нагрузки q).

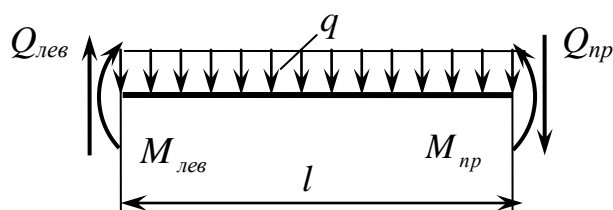


Рис. 4.1. Расчётная схема отдельного участка прямолинейного стержня

Наконец, по эпюре Q строим эпюру продольных сил N .

В заключение делаем статическую проверку всех построенных эпюр.

4.1.2. Пример расчёта статически неопределимой рамы. Для рамы, представленной на рис. 4.2, требуется:

- раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру изгибающих моментов M_p и выполнить деформационную проверку;
- построить эпюры поперечных сил Q и продольных сил N ;
- выполнить статическую проверку построенных эпюр.

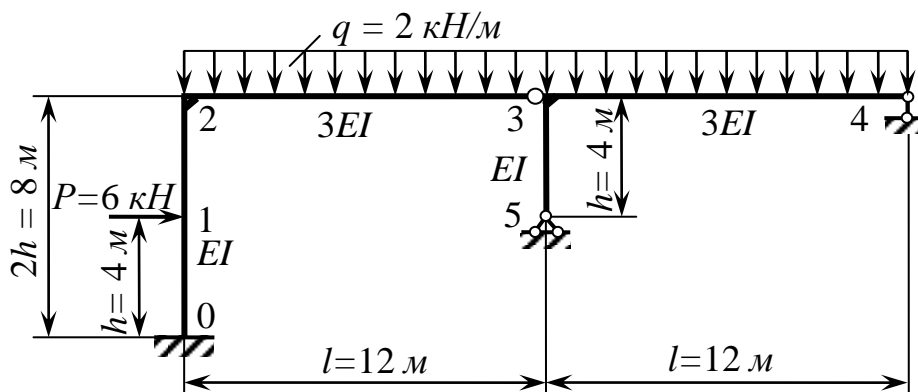
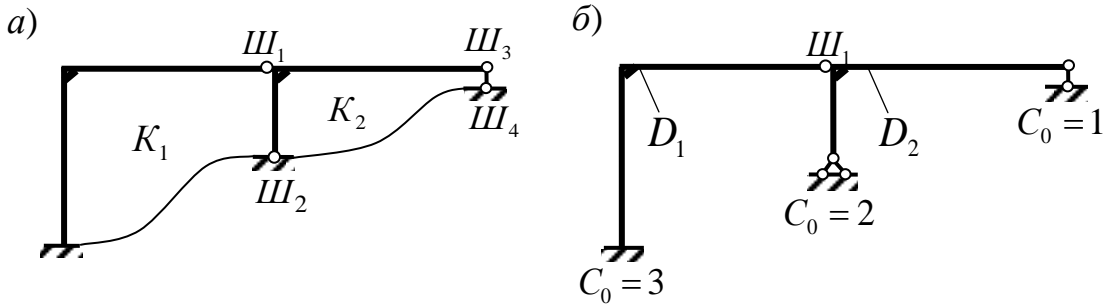


Рис. 4.2. Расчётная схема статически неопределимой рамы (3С)

Решение задачи выполняем по изложенной выше схеме.



1. Определяем степень статической неопределимости рамы.

По формулам (4.1) получим

$$n = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2; \quad n = C_0 + 2Ш - 3D = 6 + 2 \cdot 1 - 3 = 2.$$

Обозначения контуров и шарниров к первой формуле (4.1) приведены на рис. 4.3, а (неподвижная опора в сечении 5 заменена шарниром), а обозначения опорных связей, шарниров и дисков ко второй формуле (4.1) – на рис. 4.3, б.

Рис. 4.3. Определение степени статической неопределимости

2. Выбираем ОС. Для этого устраним две лишние связи, разъединив раму по шарниру в узле 5. В этом случае рама распадается на две статически определимые геометрически неизменяемые рамы (рис. 4.4).

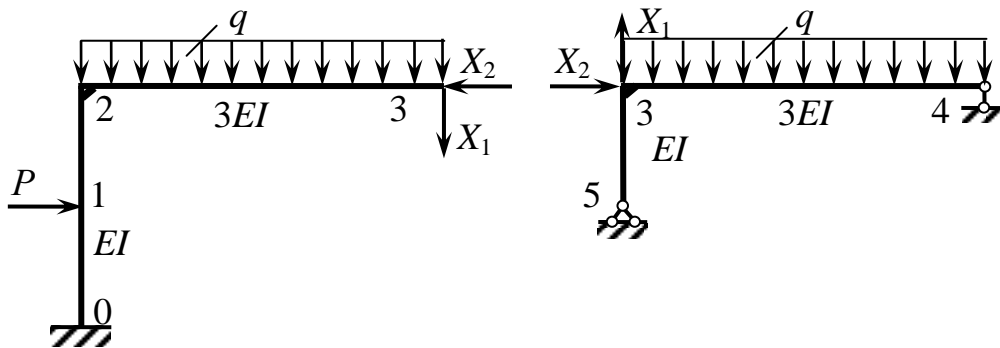


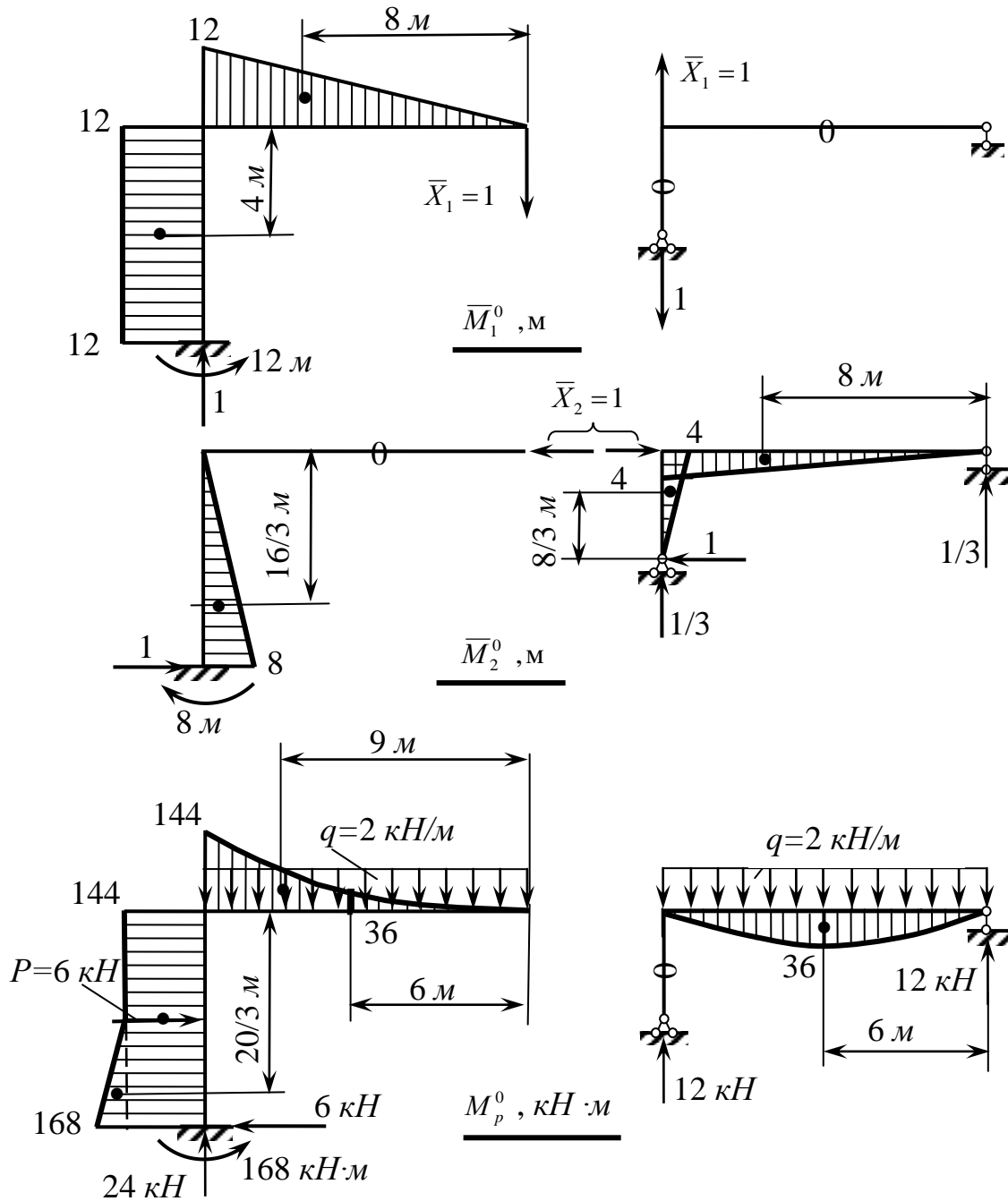
Рис. 4.4. Основная система

В качестве неизвестных усилий примем вертикальную X_1 и горизонтальную X_2 составляющие внутреннего усилия (реакции) в шарнире. Направления сил X_1 и X_2 , которые мы в ОС перевели в разряд внешней активной нагрузки, принимаем произвольно, учитывая при этом, что в левой и правой частях ОС их направления взаимно противоположны.

Заметим, что выбранная ОС не является лучшей в *смысле объёма вычислений*. Это нами будет показано в конце примера.

3. Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}^0 X_1 + \delta_{12}^0 X_2 + \Delta_{1p}^0 = 0; \quad \delta_{21}^0 X_1 + \delta_{22}^0 X_2 + \Delta_{2p}^0 = 0.$$



4. Вычисляем коэффициенты δ_{11}^0 , δ_{22}^0 , $\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0$, Δ_{1p}^0 , Δ_{2p}^0 . Строим в ОС эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1^0 , \bar{M}_2^0 , M_p^0 от $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ и заданной нагрузки, соответственно (рис. 4.5).

Учитывая простоту расчётных схем, построение эпюр не комментируем. Напомним, что ординаты эпюр принято откладывать со стороны растянутых волокон. «0» на стержне рамы обозначает отсутствие в нём изгибающего момента.

Рис. 4.5. Эпюры изгибающих моментов в основной системе

Вычисление перемещений δ_{11}^0 , δ_{22}^0 , $\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0$, Δ_{1p}^0 и Δ_{2p}^0 выполним, перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$\delta_{11}^0 = (\bar{M}_1^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 12 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{1344}{EI};$$

$$\delta_{22}^0 = (\bar{M}_2^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{8 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{4 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{640}{3EI};$$

$$\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0 = (\bar{M}_1^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot (-12 \cdot 8 \cdot 4) = -\frac{384}{EI};$$

$$\Delta_{1p}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(144 \cdot 8 \cdot 12 + \frac{24 \cdot 4}{2} \cdot 12 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{144 \cdot 12}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 12 = \frac{16128}{EI};$$

$$\Delta_{2p}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-144 \cdot 8 \cdot 4 - \frac{24 \cdot 4}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 8 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 12 \cdot 2 = -\frac{4736}{EI}.$$

5. Для проверки правильности предыдущих вычислений строим суммарную единичную эпюру \bar{M}_s^0 (рис. 4.6).

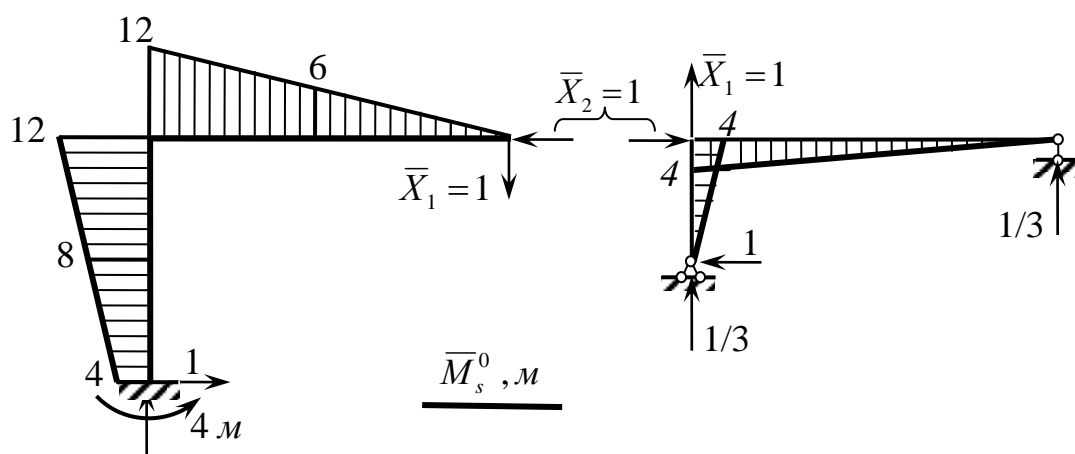


Рис. 4.6. Суммарное единичное состояние и эпюра \bar{M}_s^0

Вычисление δ_{ss}^0 и Δ_{sp}^0 выполним по готовым формулам (см. табл. 3.6):

$$\delta_{ss}^0 = (\bar{M}_s^0 \times \bar{M}_s^0) = \frac{8}{6EI} \cdot (2 \cdot 12 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 12) + \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (2 \cdot 12 \cdot 120 + \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{2368}{3EI};$$

$$\Delta_{sp}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_s^0) = \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 144 \cdot 8 + 2 \cdot 144 \cdot 12 + 144 \cdot 12 + 144 \cdot 8) +$$

$$+ \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 144 \cdot 8 + 2 \cdot 144 \cdot 12 + 144 \cdot 8 + 144 \cdot 12) +$$

$$+ \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (144 \cdot 12 + 4 \cdot 36 \cdot 6) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (4 \cdot 36 \cdot 2) = \frac{11392}{EI}.$$

Проверим выполнение условий (4.3):

$$\delta_{11}^0 + \delta_{22}^0 + 2\delta_{12}^0 = \frac{1344}{EI} + \frac{640}{3EI} + 2 \cdot \left(-\frac{384}{EI} \right) = \frac{2368}{3EI} = \delta_{ss}^0;$$

$$\Delta_{1p}^0 + \Delta_{2p}^0 = \frac{16128}{EI} - \frac{4736}{EI} = \frac{11392}{EI} = \Delta_{sp}^0,$$

т.е. перемещения δ_{11}^0 , δ_{22}^0 , $\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0$, Δ_{1p}^0 и Δ_{2p}^0 вычислены правильно.

6. Подставляем найденные значения перемещений в систему канонических уравнений (4.2) и умножаем всё на EI :

$$1344X_1 - 384X_2 + 16128 = 0; \quad -384X_1 + \frac{640}{3}X_2 - 4736 = 0.$$

Решая эту систему, найдем: $X_1 = -11,647 \text{ кН}$; $X_2 = 1,235 \text{ кН}$.

7. Строим исправленные эпюры $M_1^0 = \bar{M}_1^0 \cdot X_1$ и $M_2^0 = \bar{M}_2^0 \cdot X_2$ (рис. 4.7), а затем, суммируя эти эпюры с грузовой эпюрой M_p^0 (рис. 4.8), получим окончательную эпюру изгибающих моментов M_p (рис. 4.9).

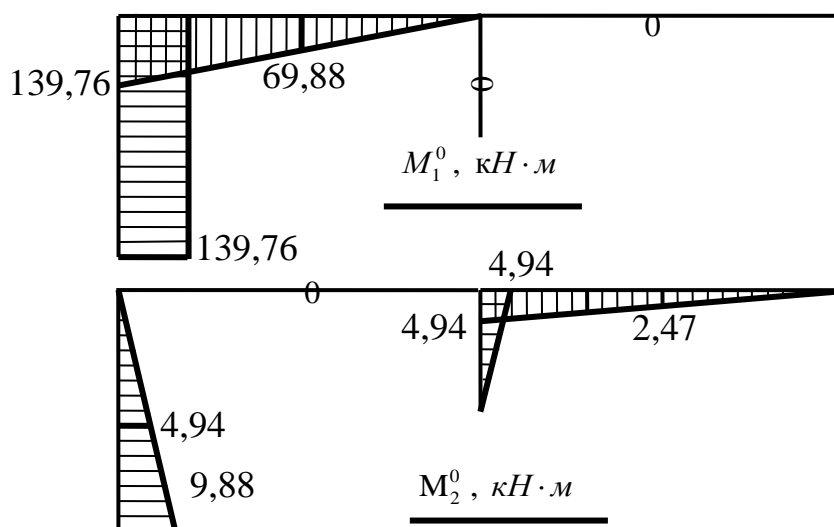


Рис. 4.7. Исправленные» эпюры M_1^0 и M_2^0

8. Выполним деформационную проверку полученного решения. С этой целью выбираем другой вариант ОС (рис 4.10) (можно было бы, конечно, воспользоваться и прежней ОС, но надёжнее использовать «новый» вариант) и строим для нее суммарную единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 4.11).

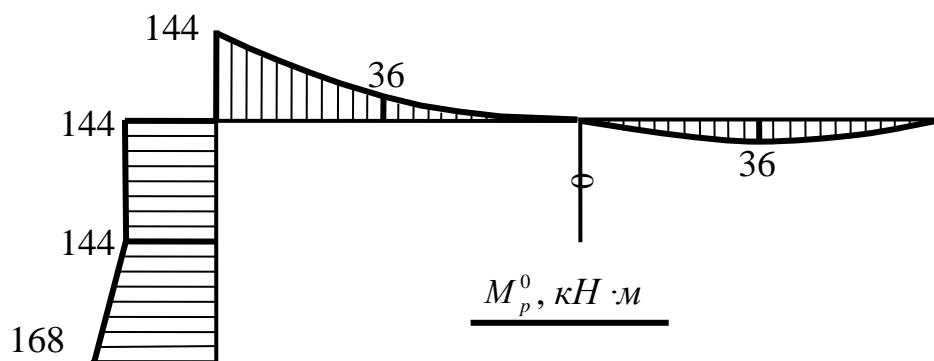


Рис. 4.8. Грузовая эпюра M_p^0

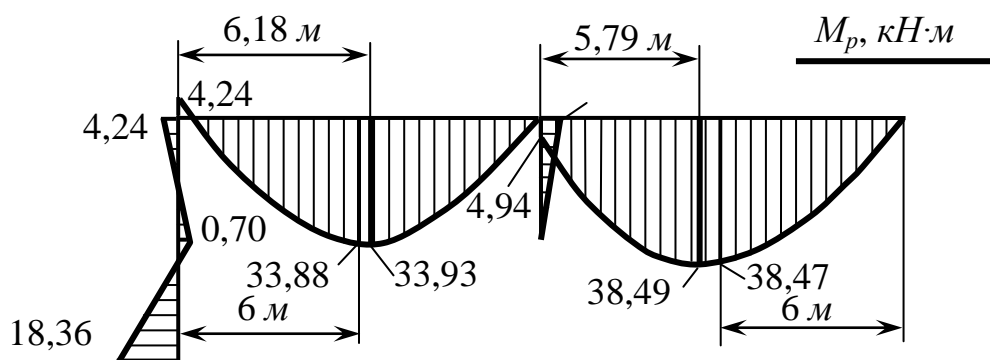


Рис. 4.9. Окончательная эпюра M_p

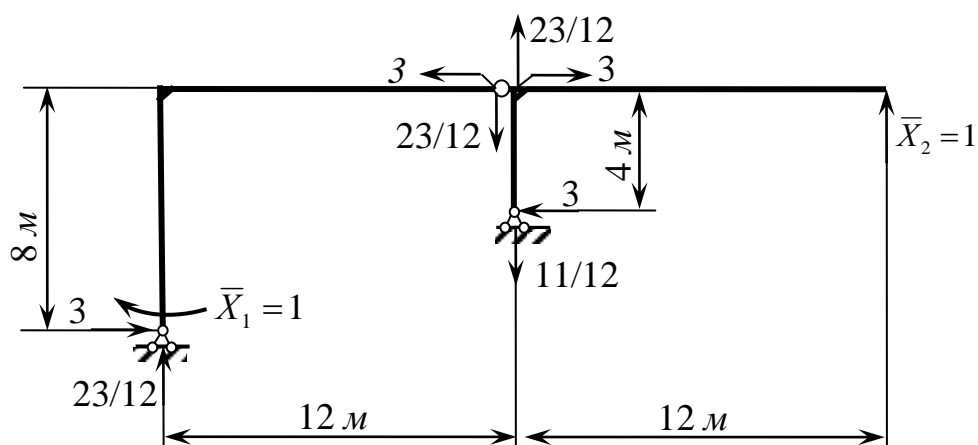


Рис. 4.10. «Новый» вариант основной системы

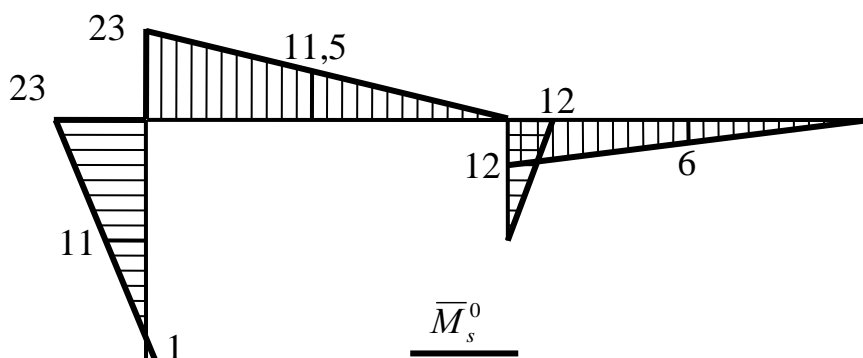


Рис. 4.11. «Новая» суммарная единичная эпюра

Перемножаем окончательную эпюру M_p на «новую» \bar{M}_s^0 , используя для этого готовые формулы перемножения эпюр, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{sp} &= (M_s \times \bar{M}_{sp}^0) = \frac{4}{6EI} \cdot (-2 \cdot 18,36 \cdot 1 - 2 \cdot 0,70 \cdot 11 + 18,36 \cdot 11 + 0,70 \cdot 1) + \\ &+ \frac{4}{6EI} \cdot (-2 \cdot 0,70 \cdot 11 - 2 \cdot 4,24 \cdot 23 - 0,70 \cdot 23 + 4,24 \cdot 11) + \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 4,94 \cdot 12) + \\ &+ \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (4,24 \cdot 23 - 4 \cdot 33,88 \cdot 11,5) + \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (4,94 \cdot 12 + 4 \cdot 32,47 \cdot 6) = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot (1095,32 - 1094,73) = \frac{0,59}{EI} \neq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что для оценки точности полученного решения при вычислении Δ_{sp} отдельно «собраны» и разделены положительные и отрицательные значения.

Относительная погрешность составляет $0,59 \cdot 100 / 1094,32 = 0,05\%$, т.е. есть условие эквивалентности удовлетворяется с высокой точностью.

9. Убедившись в правильности раскрытия статической неопределенности, строим эпюру поперечных сил.

Значения поперечных сил на границах участков вычисляем по (4.4):

а) На участках 0–1, 1–2 и 3–5, где $q = 0$ и, соответственно, $Q^o = 0$:

$$Q_{0-1} = Q_{1-0} = \frac{M_{1-0} - M_{0-1}}{l_{0-1}} = \frac{0,70 - (-18,36)}{4} = 4,765 \text{ кН};$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{M_{2-1} - M_{1-2}}{l_{1-2}} = \frac{-4,24 - 0,70}{4} = -1,235 \text{ кН};$$

$$Q_{3-5} = Q_{5-3} = \frac{M_{5-3} - M_{3-5}}{l_{3-5}} = \frac{4,94 - 0}{4} = 1,235 \text{ кН}.$$

б) На участках 3–4 и 4–5 $q = 2 \text{ кН/м}$. Тогда

$$Q_{3-4}^{\sigma} = Q_{4-5}^{\sigma} = 0,5ql = 0,5 \cdot 2 \cdot 12 = 12 \text{ кН}; \quad Q_{4-3}^{\sigma} = Q_{5-4}^{\sigma} = -0,5ql = -12 \text{ кН};$$

$$M_{2-3} = -4,24 \text{ кН}; \quad M_{3-2} = 0; \quad M_{3-4} = 4,94 \text{ кН}; \quad M_{4-3} = 0;$$

$$Q_{2-3} = Q_{2-3}^{\sigma} + \frac{M_{3-2} - M_{2-3}}{l_{2-3}} = 12 + \frac{0 - (-4,24)}{12} = 12,35 \text{ кН};$$

$$Q_{3-2} = Q_{3-2}^{\sigma} + \frac{M_{3-2} - M_{2-3}}{l_{2-3}} = -12 + \frac{0 - (-4,24)}{12} = -11,65 \text{ кН};$$

$$Q_{3-4} = Q_{3-4}^{\sigma} + \frac{M_{4-3} - M_{3-4}}{l_{2-3}} = 12 + \frac{0 - 4,94}{12} = 11,59 \text{ кН};$$

$$Q_{4-3} = Q_{4-3}^{\sigma} + \frac{M_{3-4} - M_{4-3}}{l_{2-3}} = -12 + \frac{0 - 4,94}{12} = -12,42 \text{ кН};$$

Эпюра поперечных сил Q , построенная по найденным значениям, представлена на рис. 4.12.

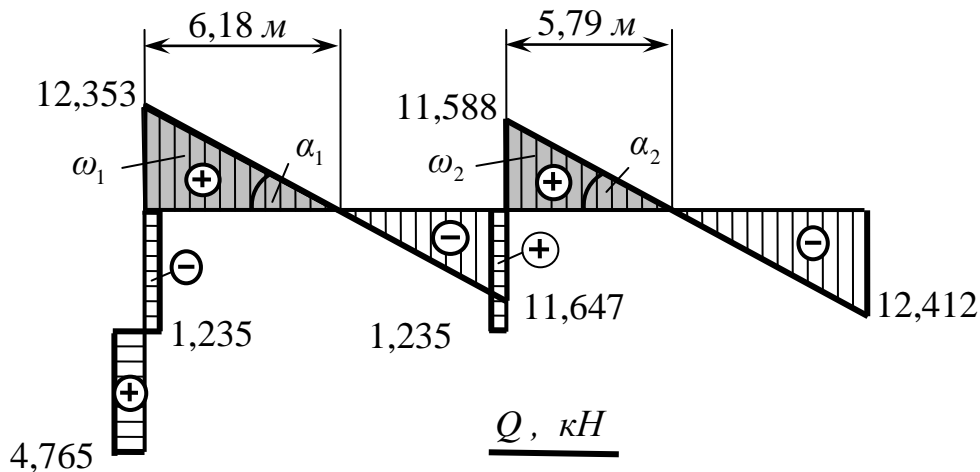


Рис. 4.12. Эпюра поперечных сил Q

На участках рамы 2–3 и 3–4 имеются поперечные сечения, в которых $Q = 0$, поэтому для этих сечений необходимо вычислить экстремальные значения изгибающих моментов. Положение этих сечений найдём, используя дифференциальную зависимость:

$$\frac{dQ}{dz} = q = \operatorname{tg} \alpha_Q,$$

где α_Q – угол наклона эпюры Q . Тогда

$$z_{19} = \frac{12,35}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{12,35}{q} = \frac{12,35}{2} = 6,18 \text{ м}; \quad z_{29} = \frac{11,59}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{11,59}{q} = \frac{11,59}{2} = 5,80 \text{ м}.$$

Экстремальные значения изгибающего момента вычислим с помощью интегрального соотношения между M и Q :

$$M_{\varnothing} = M_0 + \int_0^{z_{\varnothing}} Q dz = M_{\text{лев}} + \omega_Q.$$

Здесь $M_0 = M_{\text{лев}}$ – изгибающий момент в начале (в левом сечении) рассматриваемого участка; ω_Q – «площадь» эпюры поперечных сил от начала участка до сечения, где $Q=0$ (на рис. 4.12 площади ω_Q затемнены).

В нашем примере получим:

$$M_{\varnothing-3} = M_{2-3} + \omega_1 = -4,24 + \frac{12,35 \cdot 6,18}{2} = 33,93 \text{ КН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\varnothing-4} = M_{3-4} + \omega_2 = 4,94 + \frac{11,59 \cdot 5,80}{2} = 38,49 \text{ КН} \cdot \text{м}.$$

10. Строим эпюру продольных сил N . Вырезаем узлы рамы 2, 3 и прикладываем в сечениях известные из эпюры Q поперечные силы и неизвестные продольные силы (изгибающие моменты не показываем). Направления поперечных сил указываем в соответствии с принятым правилом знаков, а неизвестные продольные N^* покажем «растягивающими», как это принято в расчёте ферм (рис. 4.13).

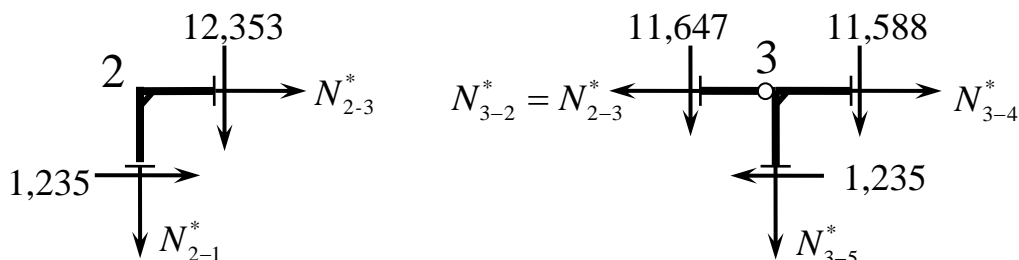


Рис. 4.13. Схемы узлов рамы для определения продольных сил

Из условий равновесия узла 2 получим:

$$\sum X_2 = 0; \quad N_{2-3}^* + 1,235 = 0; \quad N_{2-3}^* = -1,235 \text{ кН};$$

$$\sum Y_2 = 0; \quad -N_{2-1}^* - 12,353 = 0; \quad N_{2-1}^* = -12,353 \text{ кН}.$$

Продольная сила на всех участках стойки 0-1-2 имеет постоянное значение, так как нет внешних нагрузок, направленных вдоль её оси.

Рассматривая равновесие узла 3, учтём, что $N_{3-2}^* = N_{2-3}^*$, поскольку на участке 2-3 нет внешних нагрузок, направленных вдоль оси этого участка:

$$\sum X_3 = 0; \quad -N_{3-2}^* + N_{3-4}^* - 1,235 = 0; \quad N_{3-4}^* = -1,235 - N_{3-2}^* = -1,235 - (-1,235) = 0;$$

$$\sum Y_3 = 0; \quad -N_{3-5}^* - 11,647 - 11,588 = 0; \quad N_{3-5}^* = -11,647 - 11,588 = -23,235 \text{ кН}.$$

Отрицательные значения продольных сил означают, что соответствующие стержни сжаты.

Эпюра N , построенная по найденным значениям, представлена на рис. 4.14.

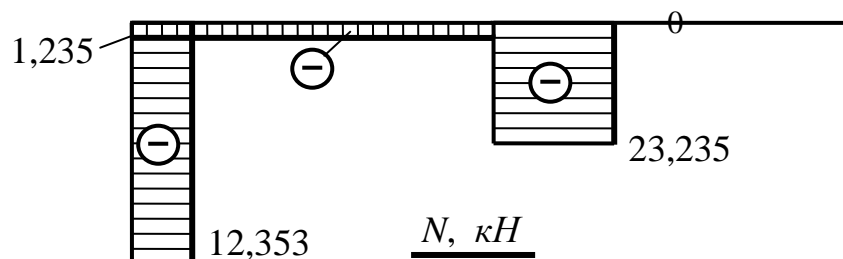


Рис. 4.14. Эпюра продольных сил N

11. Выполняем статическую проверку всех построенных эпюр.

На рис. 4.15 показана расчётная схема рамы с отброшенными внешними связями и приложенными вместо них реакциями, значения и направления которых взяты с эпюр M , Q и N в соответствии с правилами знаков внутренних усилий.

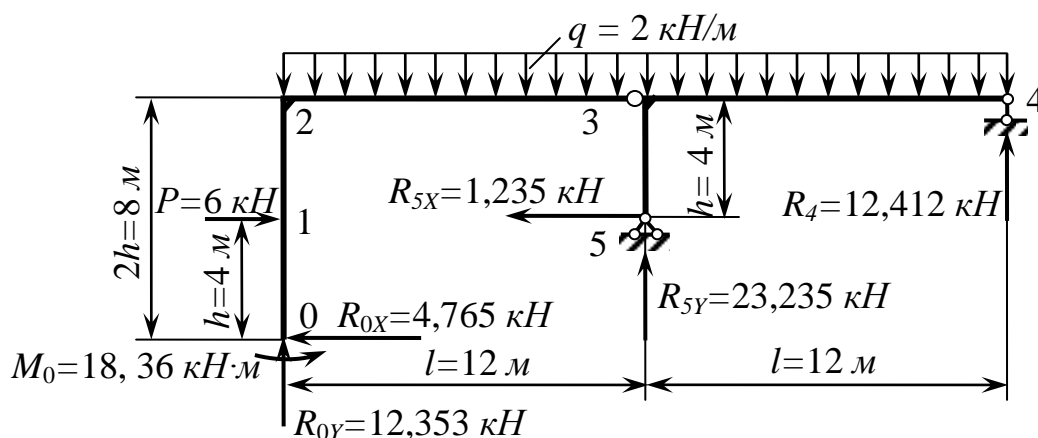


Рис. 4.15. Расчётная схема рамы с отброшенными опорными связями

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= P + R_{0x} - R_{5x} = 6 - 4,765 - 1,235 = 6,0 - 6,0 = 0; \\ \sum Y &= R_{0y} + R_{5y} - 2ql = 12,253 + 23,235 + 12,412 - 2 \cdot 2 \cdot 12 = 48,0 - 48,0 = 0; \\ \sum M_3 &= M_0 + Ph + R_{4y}l - R_{0y}l - R_{0x} \cdot 2h - R_{5x}h = \\ &= 18,36 + 6 \cdot 4 + 12,412 \cdot 12 - 4,765 \cdot 8 - 1,235 \cdot 4 = 191,30 - 192,30 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, все проверки подтверждают правильность раскрытия статической неопределённости.

В последнем уравнении вместо точки 3 может быть взята и любая другая точка. Она выбрана из соображения, чтобы момент внешней нагрузки q относительно этой точки равен нулю.

12. В заключение, без комментариев, покажем, что решение задачи на этапе раскрытия статической неопределённости рассматриваемой рамы можно было бы получить с меньшими вычислительными затратами, если бы мы выбрали более удачный вариант ОС: устранив две внутренние угловые связи в жёстких узлах 2 и 3 врезанием в эти узлы шарниров.

Грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов в этом варианте ОС имеют вид (рис. 4.16).

Система канонических уравнений внешне будет такой же, но по физическому смыслу – абсолютно другой, а именно взаимные углы поворота поперечных сечений, примыкающих к жёстким узлам 2 и 3, равны нулю:

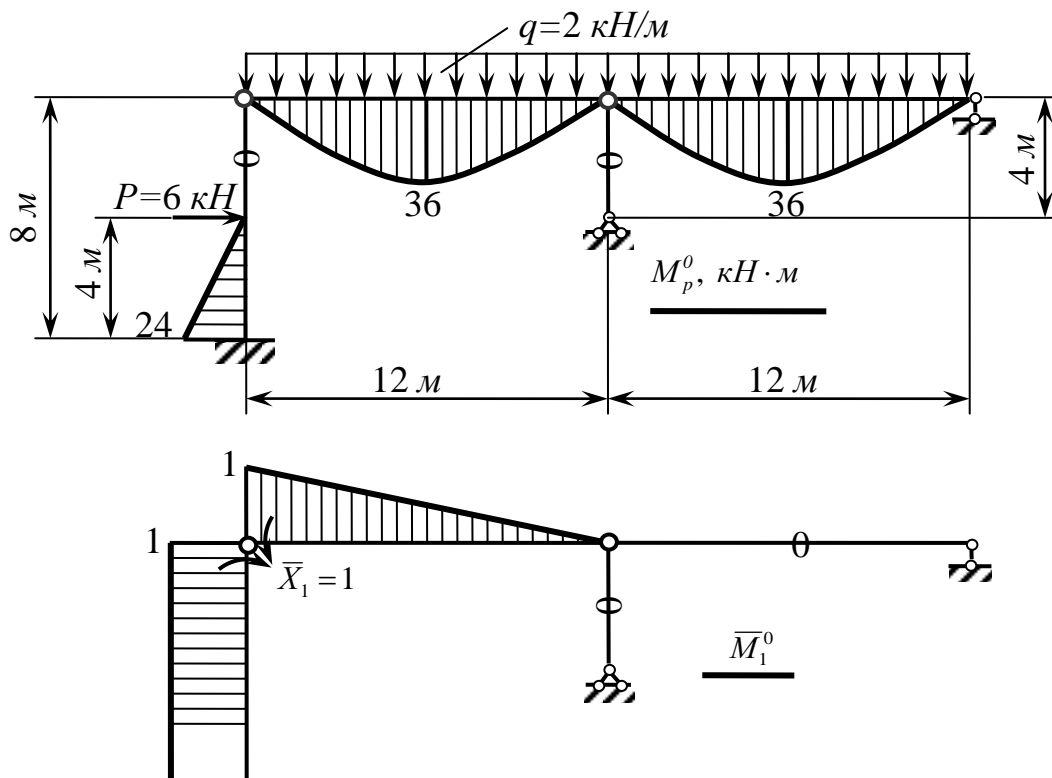
$$\delta_{11}^0 = (\bar{M}_1^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28}{3EI};$$

$$\delta_{22}^0 = (\bar{M}_2^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{40}{3EI};$$

$$\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0 = (\bar{M}_1^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 = \frac{8}{EI};$$

$$\Delta_{1p}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{24 \cdot 4}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\Delta_{2p}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_2^0) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{24 \cdot 4}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 36 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{32}{EI}.$$



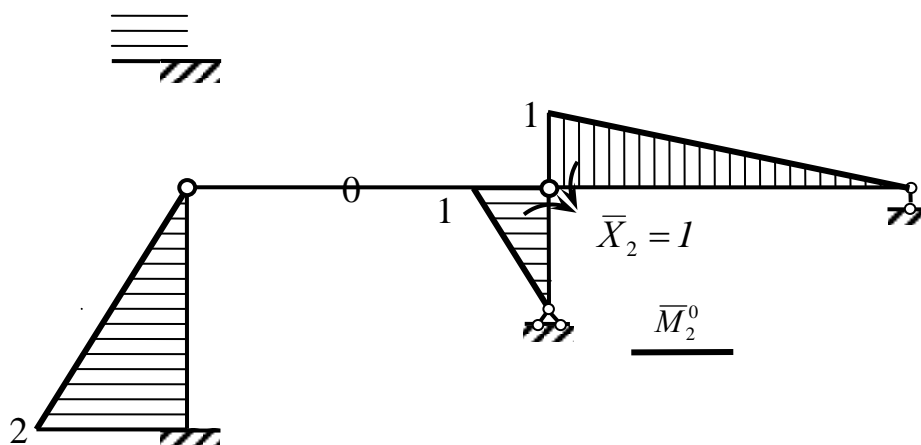


Рис. 4.16. Грузовое и единичные состояния «новой» основной системы

Система канонических уравнений метода сил имеет вид:

$$\frac{28}{3EI} X_1 + \frac{8}{EI} X_2 = 0; \quad \frac{8}{EI} X_1 + \frac{40}{3EI} X_2 + \frac{32}{EI} = 0.$$

Решая её, найдем $X_1 = 4,24 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $X_2 = 4,94 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Окончательную эпюру M_p строим, как и ранее, суммируя «исправленные» единичные $M_1^0 = \bar{M}_1^0 \cdot X_1$, $M_2^0 = \bar{M}_2^0 \cdot X_2$ и грузовую эпюру M_p^0 .

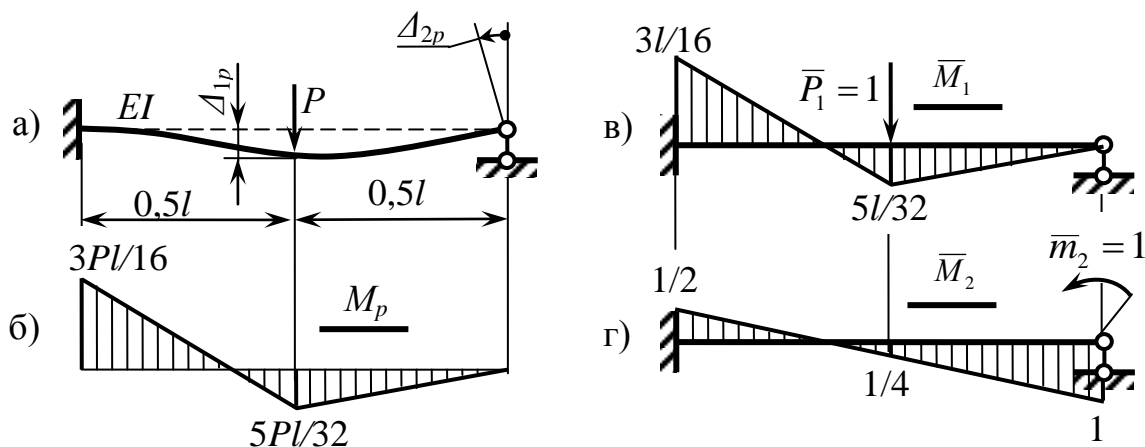
Предлагается эту процедуру выполнить самостоятельно и убедиться в том, что окончательная эпюра M_p будет такой же, как и на рис. 4.9.

Упрощение решения задачи достигнуто нами за счёт более простого вида эпюры M_p^0 , так как в этом случае ОС представлена в виде простых стержней, шарнирно сопряжённых между собой (простых шарнирно опёртых балок).

4.2. Определение перемещений в статически неопределимых стержневых системах

4.2.1. Общие методические указания. Пусть необходимо определить прогиб балки в месте приложения силы P (Δ_{1p}) статически неопределимой балки под силой P и угол поворота поперечного сечения Δ_{2p} , расположенного на правой шарнирно-подвижной опоре (рис. 4.17, а).

Определим их с помощью интегралов Мора, *перемножая* эпюры из-



гибающих моментов M_p (рис. 4.17, б) от заданной нагрузки на *единичные* эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис. 4.17, в, г), построенные, соответственно, от единичных усилий $\bar{P}_1=1$ и $\bar{m}_2=1$, приложенных к той же самой статически неопределимой балке. Все эпюры изгибающих моментов на рис. 4.17 построены на основании справочных данных [1].

Рис. 4.17. Грузовое и единичные состояния статически неопределимой балки

Заметим, что если бы не было бы справочных данных нам бы пришлось *трижды* раскрывать статическую неопределимость: от заданной нагрузки P , от единичной силы $\bar{P}_1=1$ и от единичного момента $\bar{m}_2=1$.

Вычисление интегралов Мора выполним по формулам табл. 3.6:

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{3l}{16} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{5l}{32} - \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{5l}{32} - \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{3l}{16} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{5l}{32} \right) = \frac{7Pl^3}{768EI};$$

$$\Delta_{2p} = (\bar{M}_p \times \bar{M}_2) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{1}{4} - \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5Pl}{32} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{32EI}.$$

Покажем теперь, что решение задачи можно существенно упростить, если учесть, что при правильном раскрытии статической неопределимости любой вариант ОС имеет те же перемещения, что и ЗС метода сил (что должно подтверждаться деформационной проверкой).

Продемонстрируем это на том же самом примере, рассмотрев три различных варианта ОС. Для первого варианта ОС (рис. 4.18) будем иметь:

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{7Pl^3}{768EI};$$

$$\Delta_{2p} = (M_p \times \bar{M}_2^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(-2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot 1 - \frac{3Pl}{16} \cdot 1 + \frac{5Pl}{32} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot 1 + \frac{5Pl}{32} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{32EI}.$$

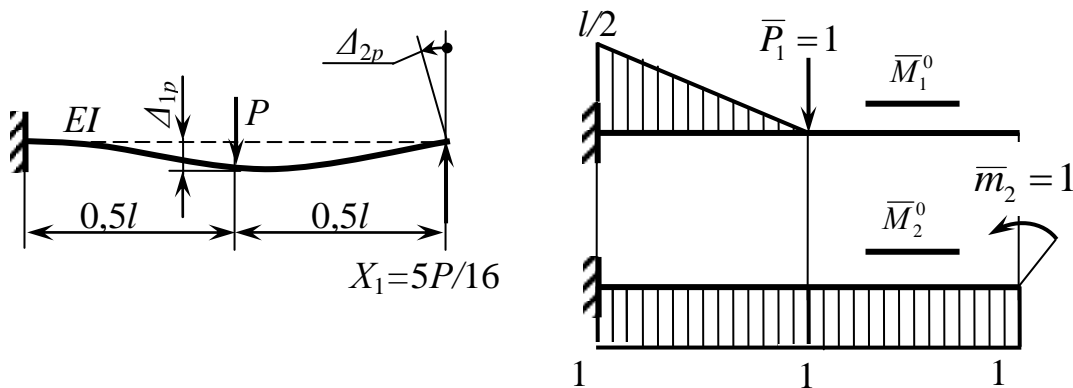


Рис. 4.18. Грузовое и единичные состояния первого варианта основной системы

Для второго варианта ОС (рис. 4.19):

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{l}{4} - \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{l}{4} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{7Pl^3}{768EI};$$

$$\Delta_{2p} = (M_p \times \bar{M}_2^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5Pl}{32} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{32EI}.$$

Для третьего варианта ОС (рис. 4.20):

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{5Pl}{32} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{7Pl^3}{768EI};$$

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_2^0) = \frac{0,5l}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3Pl}{16} \cdot 1 - \frac{5Pl}{32} \cdot 1 + \frac{5Pl}{32} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{32EI}.$$

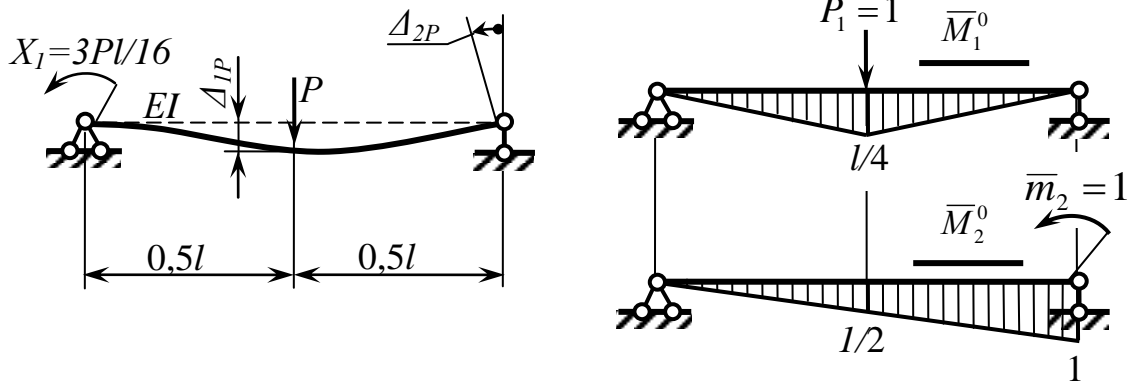


Рис. 4.19. Грузовое и единичные состояния второго варианта основной системы

Таким образом, при использовании любого варианта ОС метода сил мы получаем одни и те же значения перемещений, т.е. расчётчику предоставляется возможность выбрать тот вариант ОС, при котором вычисления будут наиболее простыми, с меньшими затратами времени.

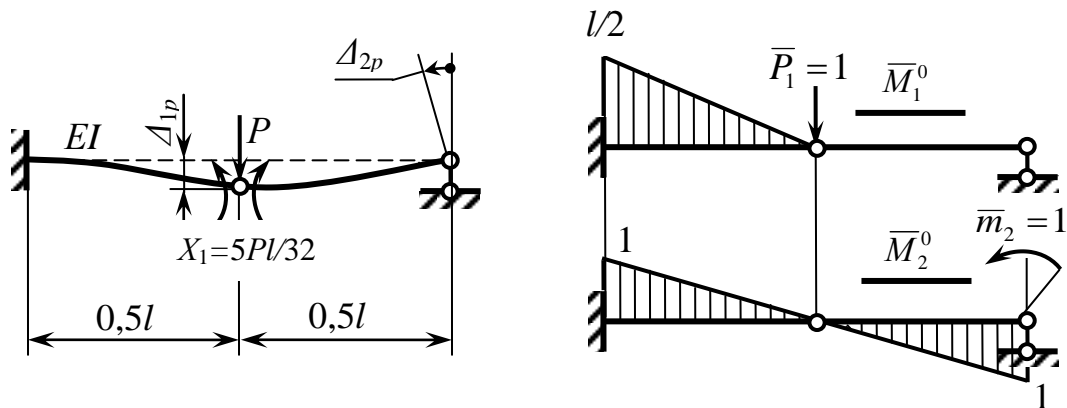


Рис. 4.20. Грузовое и единичные состояния третьего варианта основной системы

4.2.2. Примеры определения перемещений в стержневых системах.

Пример 1. Определить прогибы статически неопределимой балки (рис. 4.21) посередине пролетов AB , BC , а также угол поворота поперечного сечения над опорой B .

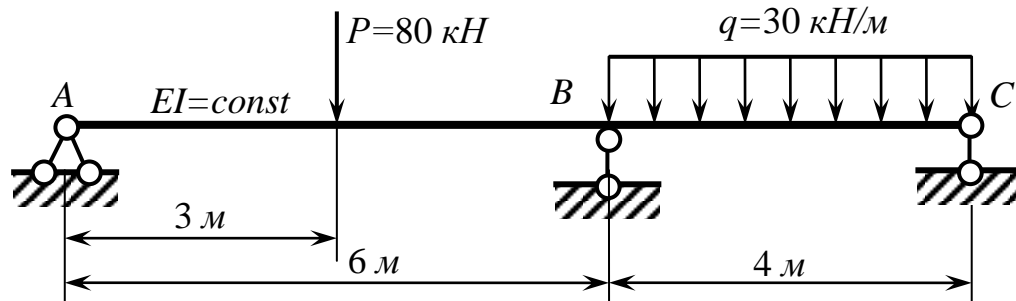


Рис. 4.21. Расчётная схема балки

Решение. 1. Раскроем статическую неопределимость балки методом сил, выбрав ОС с врезанным в сечении B шарниром. Необходимые расчётные схемы и соответствующие эпюры изгибающих моментов представлены на рис. 4.22.

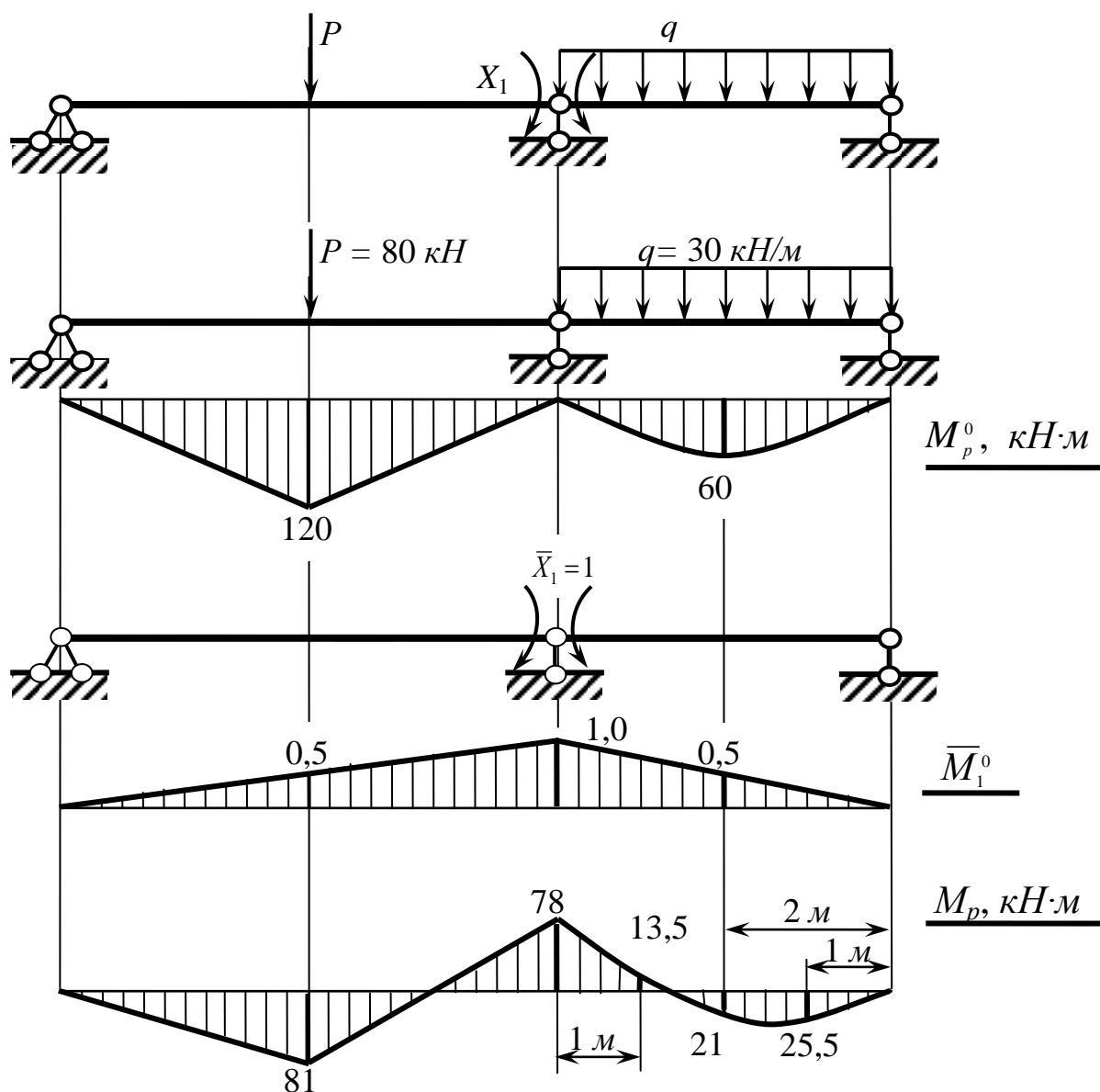


Рис. 4.22. Расчётные схемы и эпюры изгибающих моментов к раскрытию статической неопределимости балки

Уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11}^0 X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0.$$

Перемещения δ_{11}^0 и Δ_{1p}^0 в ОС вычислим, перемножая соответствующие эпюры изгибающих моментов по правилу Верещагина:

$$\delta_{11}^0 = (\bar{M}_1^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{10}{3EI};$$

$$\Delta_{1p}^0 = (M_p^0 \times \bar{M}_1^0) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{120 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot 60 \cdot 4}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{260}{EI}.$$

Тогда неизвестный изгибающий момент X_1 в поперечном сечении балки над опорой B будет равен:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}^0}{\delta_{11}^0} = -\frac{-260/EI}{10/3EI} = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Окончательную эпюру изгибающих моментов M_p для ЗС получим, суммируя эпюру M_p^0 с исправленной единичной эпюрой $M_1^0 = \bar{M}_1^0 \cdot X_1$.

Выполняем деформационную проверку, подтверждающую, что *взаимный* угол поворота поперечных сечений в ОС над опорой B отсутствует, т.е. выполняется условие эквивалентности ЗС и ОС:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) &= \frac{3}{6EI} \cdot (-2 \cdot 81 \cdot 0,5 - 2 \cdot 81 \cdot 0,5 + 2 \cdot 78 \cdot 1 - 81 \cdot 1 + 78 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{4}{6EI} \cdot (78 \cdot 1 - 4 \cdot 21 \cdot 0,5) = \frac{1}{EI} \cdot (149,5 - 149,5) = 0. \end{aligned}$$

Перемножение эпюр выполнено по готовым формулам табл. 3.6.

2. Для определения прогиба $\Delta_{1\delta}$ посередине пролета AB , прогиба Δ_{2p} посередине пролета BC и угла поворота поперечного сечения Δ_{3p} над опорой B строим эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1^0 , \bar{M}_2^0 , \bar{M}_3^0 в этой же ОС метода сил от единичных сил $\bar{P}_1 = 1$, $\bar{P}_2 = 1$ и единичного момента $\bar{m}_3 = 1$, соответственно. При этом для проверки правильности определения Δ_{3p} эпюру \bar{M}_3^0 построим для двух случаев: когда $\bar{m}_3 = 1$ расположен справа и слева от врезанного в сечении B шарнира.

Для удобства перемножения эпюр расположим эпюру M_p и соответствующие единичные эпюры на одном рис. 4.23.

Перемножение эпюр выполняем по готовым формулам:

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) = \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 81 \cdot 1,5 + 2 \cdot 81 \cdot 1,5 - 78 \cdot 1,5) = \frac{184,5}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = (M_p \times \bar{M}_2^0) = \frac{2}{6EI} \cdot (-4 \cdot 13,5 \cdot 0,5 + 21 \cdot 1 + 4 \cdot 25,5 \cdot 0,5) = \frac{15,17}{EI};$$

$$\Delta_{3p}^{справа} = (M_p \times \bar{M}_3^0) = \frac{4}{6EI} \cdot (78 \cdot 1 - 4 \cdot 21 \cdot 0,5) = \frac{24}{EI};$$

$$\Delta_{3p}^{слева} = (M_p \times \bar{M}_3^0) = \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 81 \cdot 0,5 + 2 \cdot 81 \cdot 0,5 - 2 \cdot 78 \cdot 1 + 81 \cdot 1 - 78 \cdot 0,5) = \frac{24}{EI}.$$

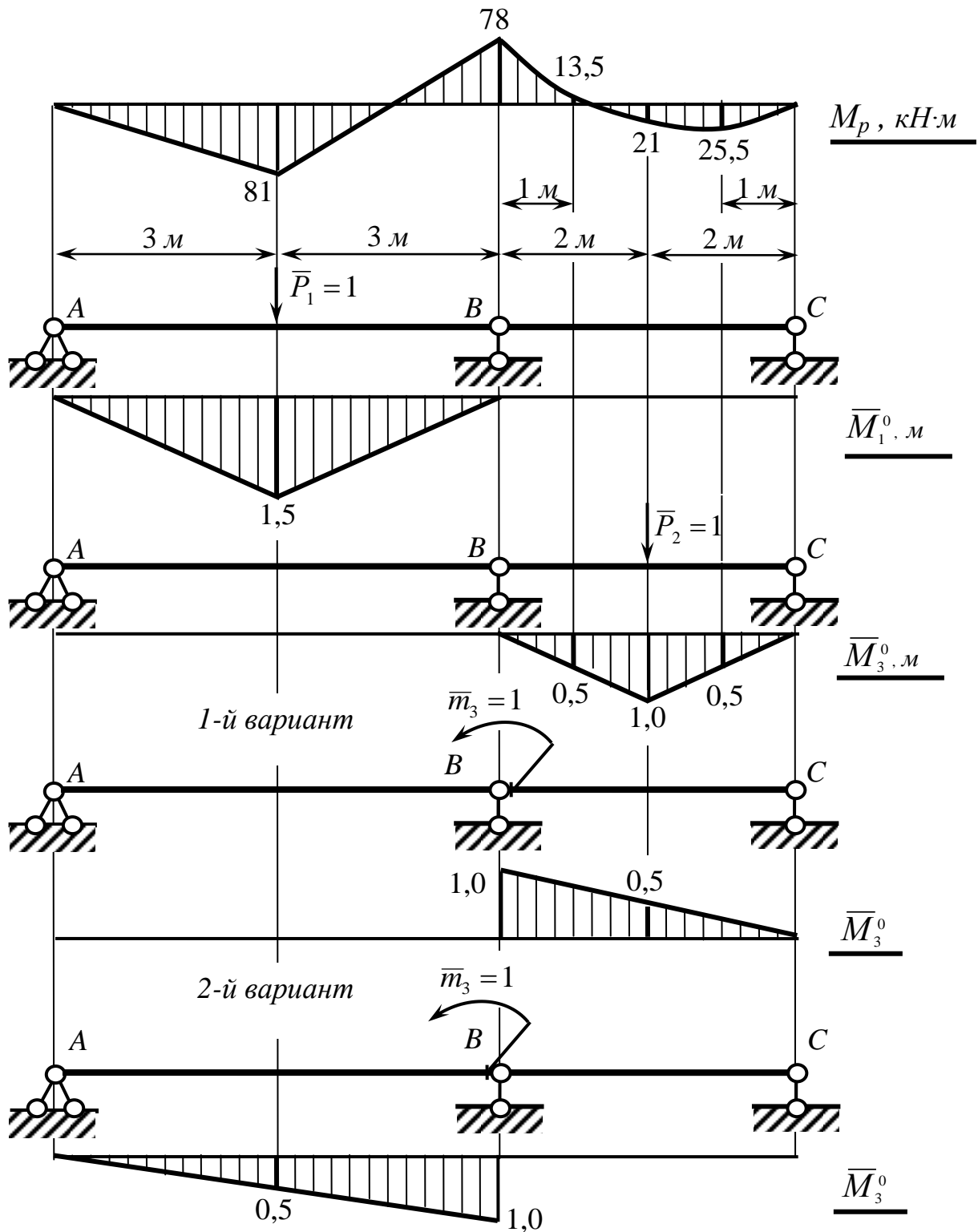


Рис. 4.23. Эпюры изгибающих моментов

Полученное равенство $\Delta_{3p}^{\text{справа}} = \Delta_{3p}^{\text{слева}}$ лишний раз подтверждает правильность раскрытия статической неопределенности.

Полученные положительные значения прогибов Δ_{1p} , Δ_{2p} и угла поворота поперечного сечения балки Δ_{3p} указывают на то, что их направления *совпадают* с соответствующими направлениями действия единичных сил $\bar{P}_1 = 1$, $\bar{P}_2 = 1$ и единичного момента $\bar{m}_3 = 1$.

Пример 2. Определить линейные и угловые перемещения узлов статически неопределимой рамы, изображенной на рис. 4.24.

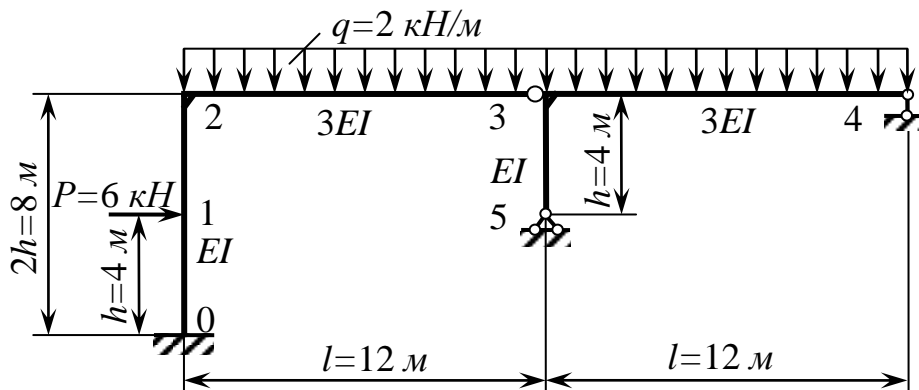


Рис. 4.24. Расчётная схема статически неопределимой рамы

Решение. Анализируя схему рамы, мы видим, что ее жёсткие узлы 2 и 3 могут поворачиваться, причем независимо друг от друга, а горизонтальные перемещения этих узлов равны между собой. Обозначим угол поворота узла 2 – Δ_{1p} , угол поворота узла 3 – Δ_{2p} , а горизонтальные перемещения этих узлов – Δ_{3p} .

В рассмотренном выше примере в результате раскрытия статической неопределимости рамы методом сил нами была получена окончательная эпюра изгибающих моментов M_p (рис. 4.25).

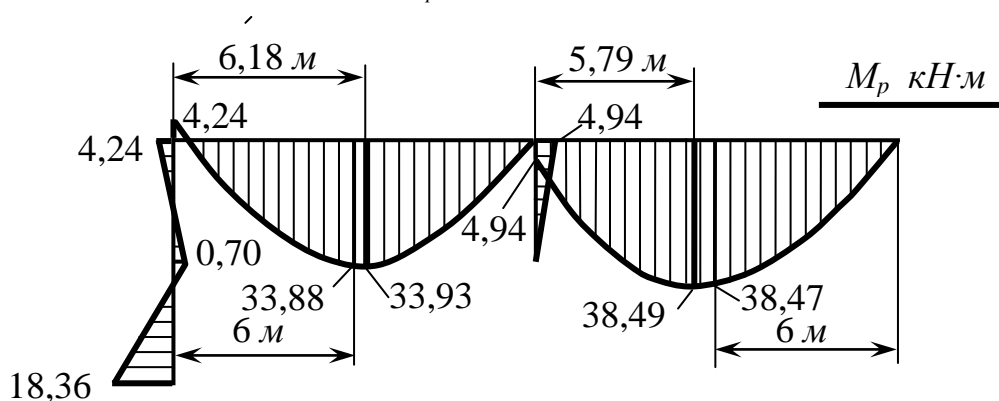


Рис. 4.25. Эпюра изгибающих моментов

Для определения перемещений Δ_{1p} , Δ_{2p} и Δ_{3p} воспользуемся той же ОС, которая была нами выбрана при раскрытии статической неопределенности.

Эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1^0 , построенная в ОС от $\bar{m}_1 = 1$ для определения угла поворота жесткого узла 2, показана на рис. 4.26.

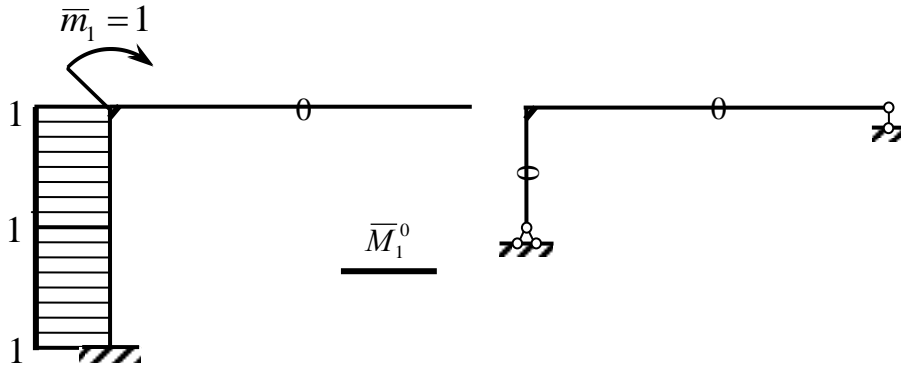


Рис. 4.26. Эпюра \bar{M}_1^0

Тогда угол поворота узла 2 будет равен:

$$\Delta_{1p} = (M_p \times \bar{M}_1^0) = \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 18,36 \cdot 1 - 2 \cdot 0,70 \cdot 1 + 18,36 \cdot 1 - 0,70 \cdot 1 - 2 \cdot 0,70 \cdot 1 + 2 \cdot 4,24 \cdot 1 - 0,70 \cdot 1 + 4,24 \cdot 1) = \frac{42,4}{EI}.$$

Эпюра изгибающих моментов \bar{M}_2^0 , построенная в ОС от $\bar{m}_2 = 1$ для определения угла поворота жесткого узла 3, показана на рис. 4.27.

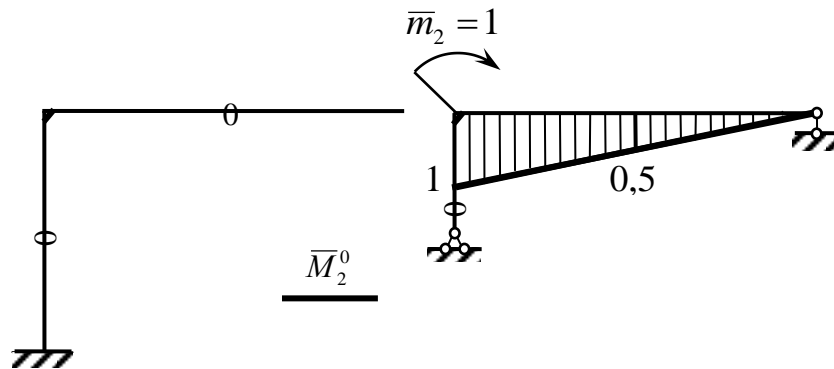


Рис. 4.27. Эпюра \bar{M}_2^0

Угловое перемещение узла 3 равно:

$$\Delta_{2p} = (M_p \times \bar{M}_2^0) = \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (4,94 \cdot 1 + 4 \cdot 38,75 \cdot 0,5) = \frac{54,59}{EI}.$$

Горизонтальное перемещение узлов 2 и 3 Δ_{3p} найдём, рассматривая два варианта: прикладывая единичную силу $\bar{P}_3 = 1$ сначала в узле 2 (рис. 4.28), а затем, для проверки, в узле 3 правой части ОС (рис. 4.29).

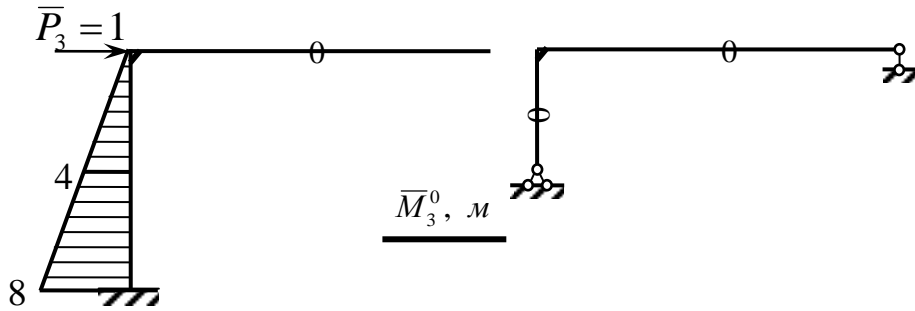


Рис. 4.28. Первый вариант эпюры \bar{M}_3^0

В первом случае получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{3p} = (M_p \times \bar{M}_3^0) &= \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 18,36 \cdot 8 - 2 \cdot 0,70 \cdot 4 + 18,36 \cdot 4 - 0,70 \cdot 8 - \\ &- 2 \cdot 0,70 \cdot 4 + 4,24 \cdot 4) = \frac{244,97}{EI}. \end{aligned}$$

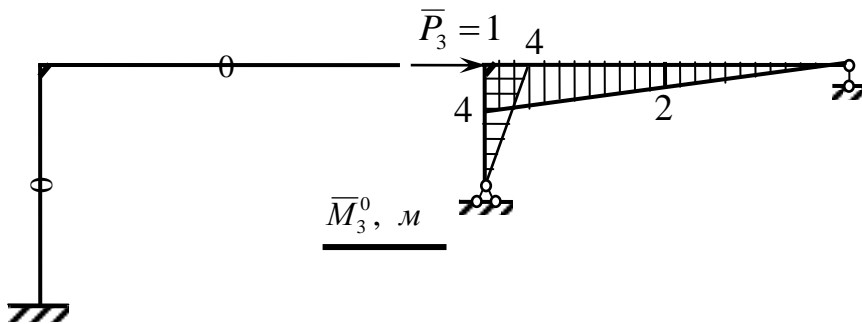


Рис. 4.29. Второй вариант эпюры \bar{M}_3^0

Используя второй вариант, найдем:

$$\Delta_{3p} = (M_p \times \bar{M}_3^0) = \frac{4}{6EI} \cdot 2 \cdot 4,94 \cdot 4 + \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (4,94 \cdot 4 + 4 \cdot 38,47 \cdot 2) = \frac{244,69}{EI}.$$

Относительная погрешность составляет всего

$$\frac{244,97 - 244,69}{244,69} \cdot 100 = 0,1 \%.$$

4.3. Расчёт статически неопределимых рам методом перемещений

4.3.1. Общие сведения и методические указания. Метод перемещений так же, как и метод сил, является универсальным методом расчёта статически неопределимых стержневых систем. В качестве неизвестных в этом методе принимаются перемещения некоторых (характерных) узлов стержневой системы Z_i . Как и в методе сил, в методе перемещений вводится понятие ОС, но принцип ее образования из ЗС принципиально другой. Условие эквивалентности ЗС и ОС также имеет другой физический смысл. Теоретические основы метода перемещений рассмотрены в [1].

Для того чтобы определить внутренние усилия, возникающие во всех стержнях рамы, и перемещения всех ее точек, достаточно знать *угловые* и *линейные* перемещения узлов рамы. *Общее число независимых угловых и линейных смещений узлов рамы часто называют степенью кинематической неопределимости рамы.*

ОС метода перемещений получается из ЗС путём введения *дополнительных связей*, устраняющих возможные перемещения узлов рамы. При этом различают *дополнительные линейные связи (опорные стержни)*, устраняющие линейные перемещения, но не препятствующие угловым перемещениям, и *дополнительные плавающие заделки* в узлах рамы, которые препятствуют возможным поворотам узлов, но не препятствуют их линейным смещениям. В результате введения таких дополнительных связей рама оказывается расчлененной на отдельные балки постоянной жесткости.

Под действием заданной нагрузки в связях, которые мы ввели в ОС, появляются реактивные усилия. Если мы теперь начнем давать введенным связям некоторые перемещения, то начнут изменяться и реактивные усилия, возникающие в них. *Эти реактивные усилия исчезнут только в том случае, когда деформация ОС будет такой же, как и деформация ЗС.* Это условие *отсутствия реактивных усилий в дополнительно введенных связях* и является условием эквивалентности ЗС и ОС в методе перемещений.

4.3.2. Пример расчёта статически неопределимой рамы методом перемещений. Раскрыть статическую (кинематическую) неопределимость рамы (рис. 4.30) и построить эпюру изгибающих моментов.

Решение 1. Определяем число неизвестных метода перемещений. Оно равно сумме *угловых* перемещений n_y , число которых равно общему числу жёстких узлов рамы, и независимых *линейных* перемещений n_d всех узлов. Число последних равно числу степеней свободы W преобразованной шарнирной схемы рамы.

Заданная рама имеет *два жёстких узла* – 2 и 3, поэтому $n_y = 2$.

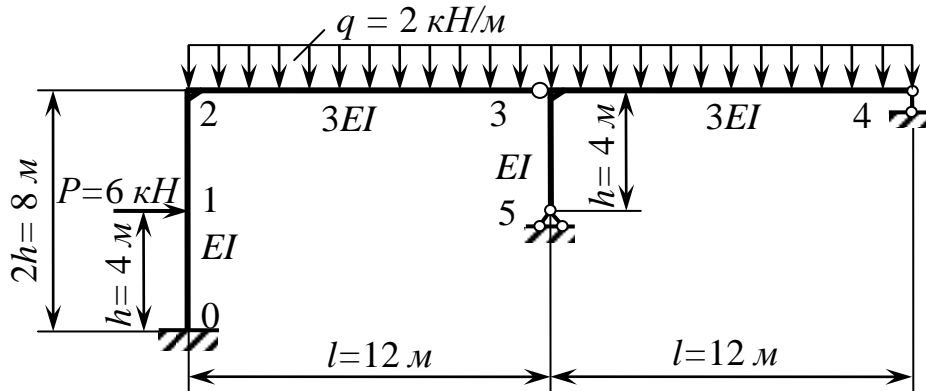


Рис. 4.30. Расчётная схема рамы

Шарнирную схему рамы преобразуем введением шарниров во все жёсткие узлы и заменой жёстко защемлённой опоры шарнирно неподвижной (рис. 4.31).

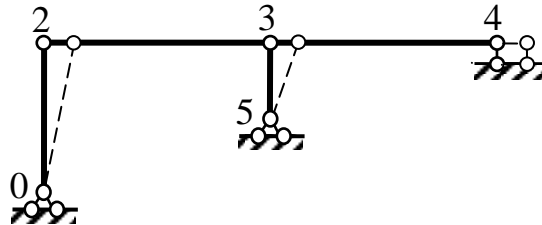


Рис. 4.31. Преобразованная шарнирная схема рамы

Число степеней свободы шарнирной схемы рамы определяется по формуле Чебышева: $W = 3D - 2Ш - C_0$. В нашем случае число дисков D равно числу стержней: $D = 4$. Число простых шарниров $Ш = 3$ (один в узле 2 и два в узле 3 – на единицу меньше числа соединяемых стержней). Число опорных связей $C_0 = 5$. Тогда $n_s = W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Этим неизвестным линейным перемещением является горизонтальное смещение ригеля, одинаковое для узлов 2, 3 и опорного сечения 4.

Таким образом, число неизвестных равно: $n = n_y + n_s = 2 + 1 = 3$. Мы их обозначим Z_1, Z_2 (углы поворота жестких узлов) и Z_3 (горизонтальное смещение ригеля).

2. Образум ОС (рис. 4.32).

Для этого мы вводим следующие *дополнительные* связи, *устраняющие* неизвестные угловые и линейные перемещения узлов рамы: *плавающие* заделки в жёсткие узлы 2 и 3 (они показаны на рисунке квадратиками) и линейную горизонтальную *подвижную* связь в сечении 4 (она обозначена на рисунке *двойной* линией).

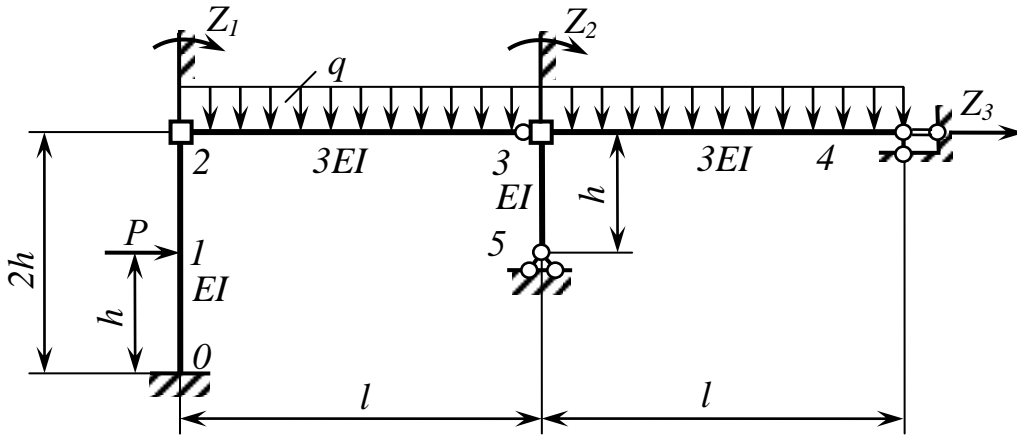


Рис. 4.32. Основная система метода перемещений

3. Записываем канонические уравнения метода перемещений, выражающие условия отсутствия реакций в дополнительно введенных связях:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{31}Z_3 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases}$$

Здесь: r_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) – реактивное усилие в i -й дополнительно введенной связи, вызванное единичным перемещением $\bar{Z}_j = 1$ j -й дополнительно введенной связи; R_{ip} – реактивное усилие в i -й связи, вызванное заданной внешней нагрузкой. Реакции r_{ij} и R_{ip} имеют положительный знак в том случае, когда их направления совпадают с принятым направлением *единичного* перемещения. Реакции $r_{ij} = r_{ji}$ в силу теоремы о взаимности реакций (аналогично $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ в методе сил).

4. Для вычисления реакций r_{ij} и R_{ip} строим единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов в ОС. Поскольку ОС метода перемещений представляет собой совокупность независимых статически неопределимых балок при двух способах наложения опорных связей, построение названных эпюр сводится, по существу, к *копированию* заранее уже известных решений для наиболее часто встречающихся случаев (см. прил. 1).

Для определения реакций r_{11} , r_{21} и r_{31} даём первой введенной связи единичный поворот $\bar{Z}_1 = 1$ ($\bar{Z}_2 = 0, \bar{Z}_3 = 0$) и показываем деформированное состояние ОС (рис. 4.33).

Эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1^0 (рис. 4.34) строим, используя прил. 1, с учётом характера изгиба отдельных стержней ОС.

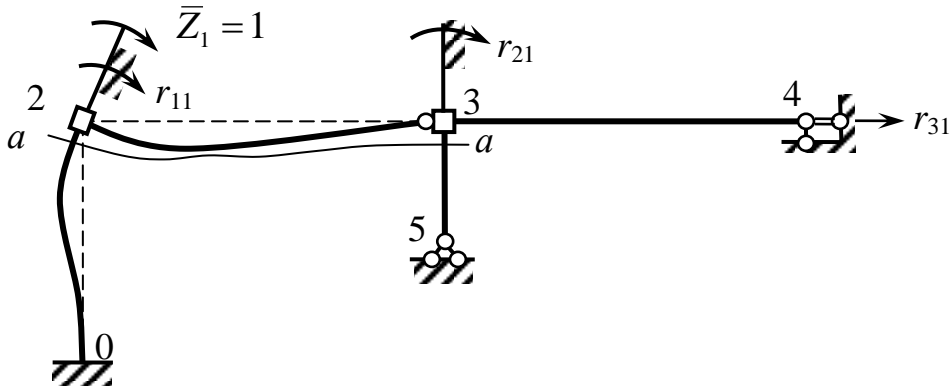


Рис. 4.33. Деформированное состояние основной системы и реакции r_{i1} от единичного поворота $\bar{Z}_1 = 1$ первой введенной связи

Коэффициент r_{11} (реактивный момент в первой введенной связи от единичного поворота этой же связи) определяем из условия равновесия вырезанного узла 2 (рис. 4.35, а). В сечениях стержней, примыкающих к узлу 2, продольные и поперечные силы не показываем, так как они не входят в уравнение равновесия узла, а значения изгибающих моментов берём с эпюры \bar{M}_1^0 .

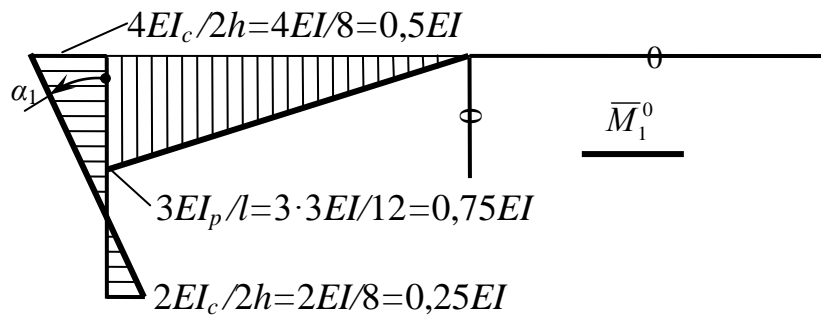


Рис. 4.34. Эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1^0 от $\bar{Z}_1 = 1$

Аналогично определяем значение r_{21} , вырезая узел 3 (рис. 4.35, б).

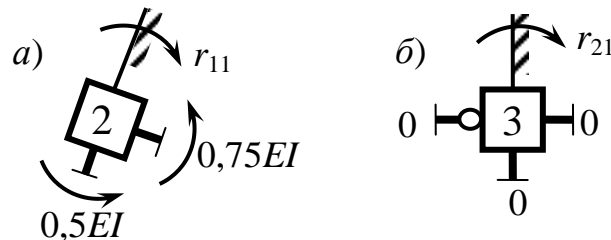


Рис. 4.35. Узлы 2 и 3 основной системы первого единичного состояния

Итак, имеем: $\sum M_2 = 0$; $-r_{11} + 0,75EI + 0,5 EI = 0$; $\sum M_3 = 0$; $r_{21} = 0$.
Или $r_{11} = 1,25EI$; $r_{21} = 0$.

Значение реакции r_{31} найдём из условия равновесия части ОС отсечённой сечением «а – а» (рис. 4.36). Изгибающие моменты и реакции в введённых заделках не показываем, так как они не входят в уравнение равновесия отсечённой части $\sum X_{2-3-4} = 0$. В сечении стойки 2–1 прикладываем поперечную силу. Её значение равно тангенсу угла наклона эпюры \bar{M}_1^0 к базовой линии, а направление соответствует направлению отсчёта угла α_1 . В нашем случае поперечная сила «стремится» повернуть узел 2 против хода часовой стрелки. Можно, конечно, воспользоваться и прил. 1, определяя поперечную силу через реакцию в повернутом защемлении, но в этом случае возможна ошибка в определении её направления.

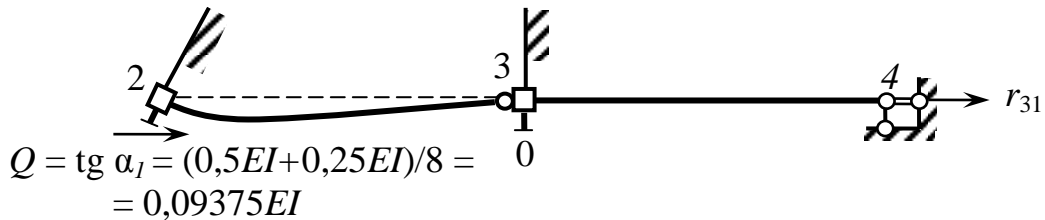


Рис. 4.36. Отсечённая часть основной системы первого единичного состояния

Из уравнения равновесия $\sum X_{3-5-6} = r_{31} + 0,09375EI = 0$ находим, что $r_{31} = -0,09375EI$.

Для определения коэффициентов r_{12} , r_{22} и r_{32} даём второй введённой связи единичный поворот $\bar{Z}_2 = 1$ ($\bar{Z}_1 = 0$, $\bar{Z}_3 = 0$) (рис. 4.37) и, пользуясь прил. 1, строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2^0 (рис. 4.38).

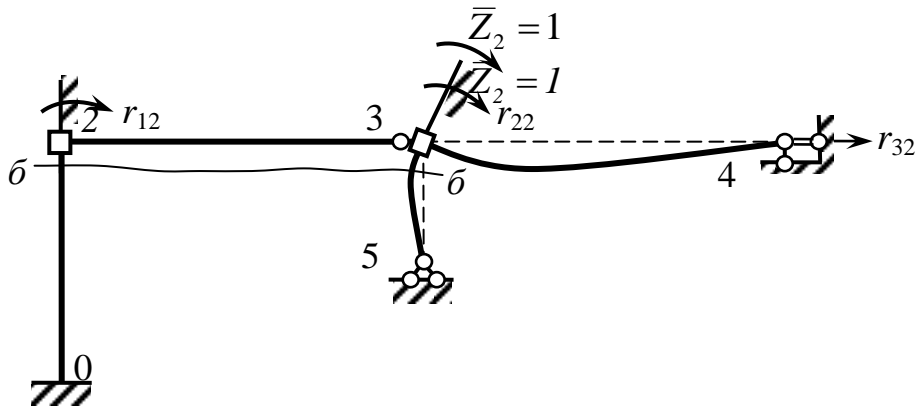


Рис. 4.37. Деформированное состояние основной системы и реакции r_{i2} от единичного поворота $\bar{Z}_2 = 1$ второй введённой связи

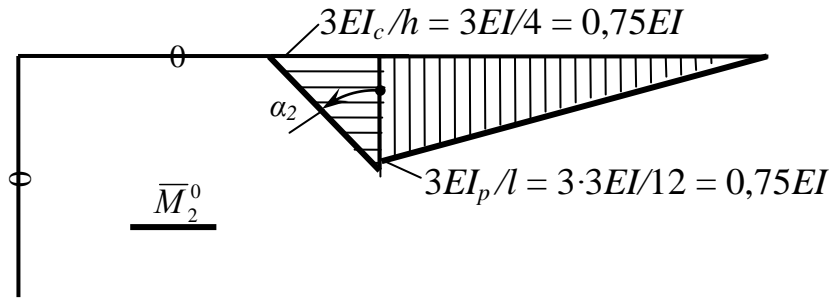


Рис. 4.38. Эпюра изгибающих моментов \bar{M}_2^0 от $\bar{Z}_2 = 1$

Значения r_{12} , r_{22} определяем из условий равновесия узла 2 (рис. 4.39, а) и узла 3 (рис. 4.39, б).

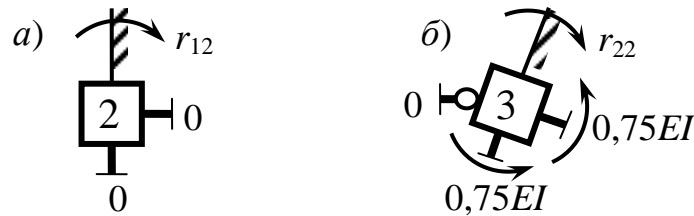


Рис. 4.39. Узлы 2 и 3 основной системы второго единичного состояния

Уравнения равновесия узлов 2 и 3 имеют вид:

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{12} = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad -r_{22} + 0,75EI + 0,75EI = 0.$$

Отсюда находим, что $r_{12} = 0$; $r_{22} = 1,5EI$.

Для определения r_{32} отделим сечением «б-б» часть ОС (рис. 4.40).

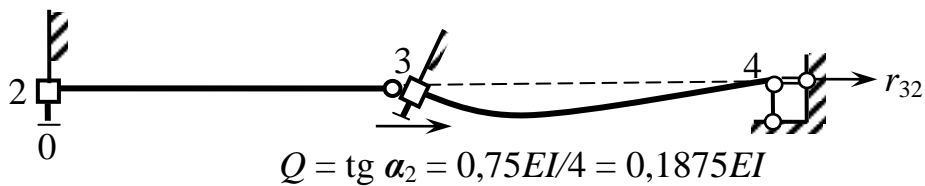


Рис. 4.40. Отсечённая часть основной системы второго единичного состояния

Из условия равновесия отсеченной части ОС

$$\sum X_{2-3-4} = r_{32} + 0,1875EI = 0,$$

находим, что $r_{32} = -0,1875EI$.

Коэффициенты r_{13} , r_{23} и r_{33} находим, рассматривая деформированное состояние ОС (рис. 4.41) от горизонтального смещения опоры 4 на $\bar{Z}_3 = 1$.

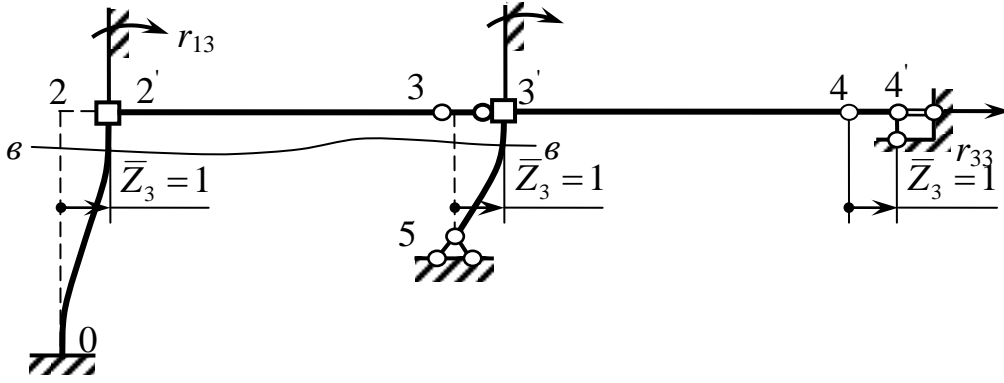


Рис. 4.41. Деформированное состояние основной системы и реакции r_{i3} от единичного смещения $\bar{Z}_3 = 1$ третьей введенной связи

Единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M}_3^0 , построенная с помощью прил. 1, приведена на рис. 4.42.

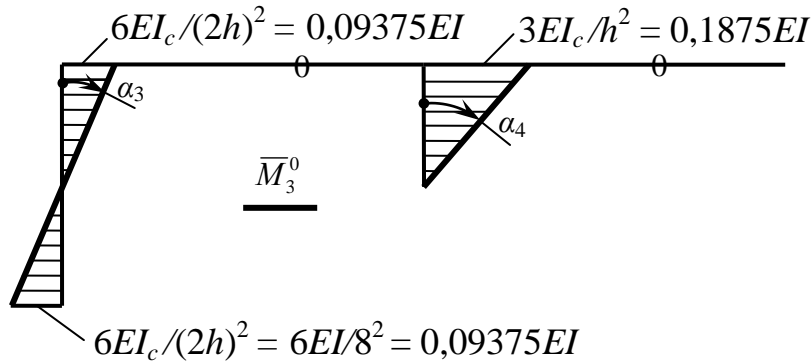


Рис. 4.42. Эпюра изгибающих моментов \bar{M}_3^0 от $\bar{Z}_3 = 1$

Рассматривая равновесие вырезанных узлов 2 (рис. 4.43, а) и 3 (рис. 4.43, б), находим:

$$\sum M_2 = 0; \quad -r_{13} - 0,09375EI = 0; \quad r_{13} = -0,09375EI;$$

$$\sum M_5 = 0; \quad r_{23} + 0,1875EI = 0; \quad r_{23} = -0,1875EI.$$

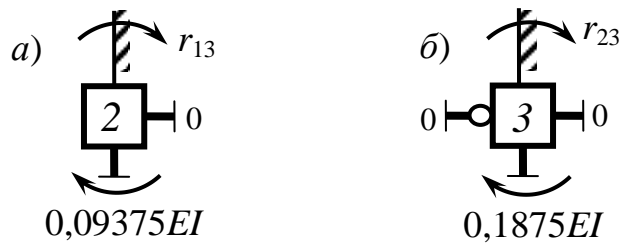


Рис. 4.43. Узлы 2 и 3 основной системы третьего единичного состояния

Убеждаемся в том, что выполняется условие взаимности усилий:

$$r_{13} = r_{31} = -0,09375EI; \quad r_{23} = r_{32} = -0,1875EI.$$

Значение коэффициента r_{33} находим из условия равновесия отсечённой сечением «в-в» части ОС (рис. 4.44):

$$\sum X_{2-3-4} = r_{33} - 0,0234375EI - 0,046875EI = 0; \quad r_{33} = 0,0703125EI.$$

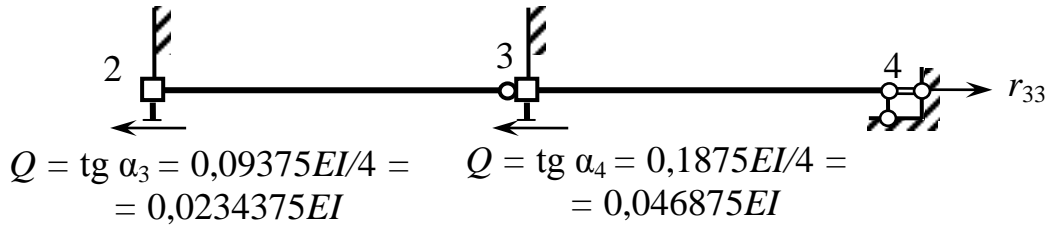


Рис. 4.44. Отсечённая часть основной системы третьего единичного состояния

Для вычисления коэффициентов R_{ip} показываем деформированное состояние ОС от заданной нагрузки (рис. 4.45) и строим с помощью прил. 1 грузовую эпюру изгибающих моментов M_p^0 (рис. 4.46).

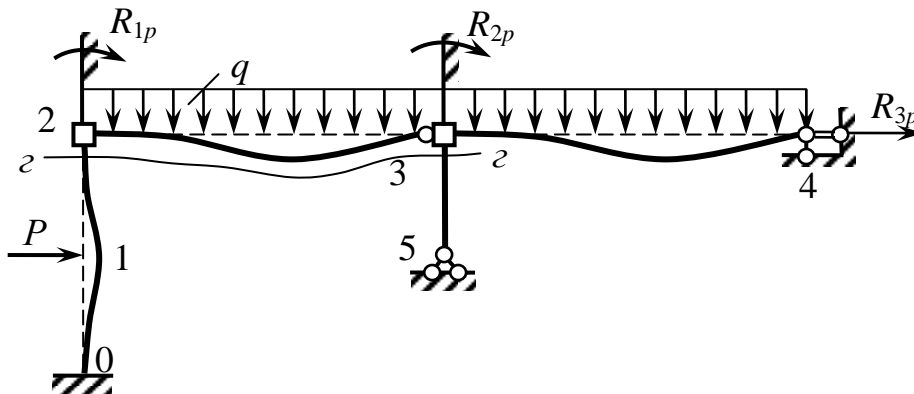


Рис. 4.45. Деформированное состояние основной системы и реакции в введенных связях от заданной нагрузки

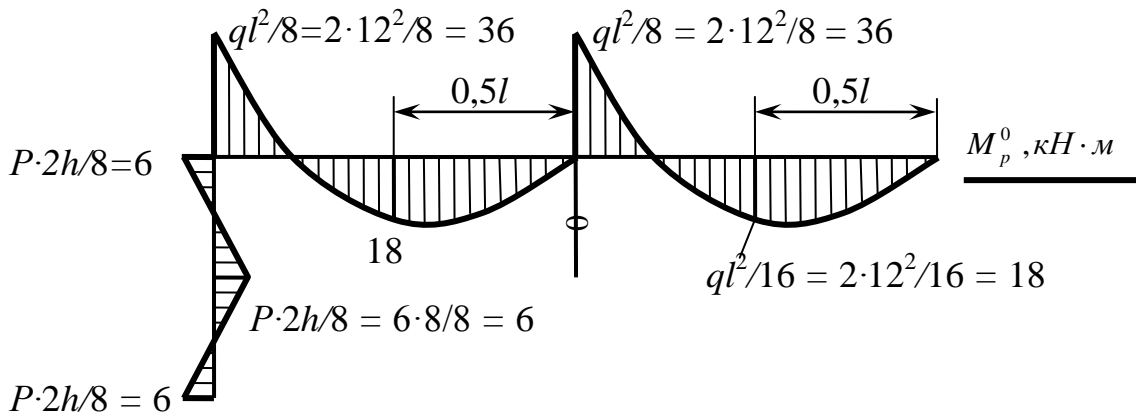


Рис. 4.46. Грузовая эпюра изгибающих моментов в основной системе

Из условий равновесия узла 2 (рис. 4.47, а) и узла 3 (рис. 4.47, б), находим значения коэффициентов R_{1p} и R_{2p} :

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0; \quad R_{1p} + 36 - 6 = 0; \quad R_{1p} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \sum M_3 = 0; \quad R_{2p} + 36 = 0; \quad R_{2p} = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

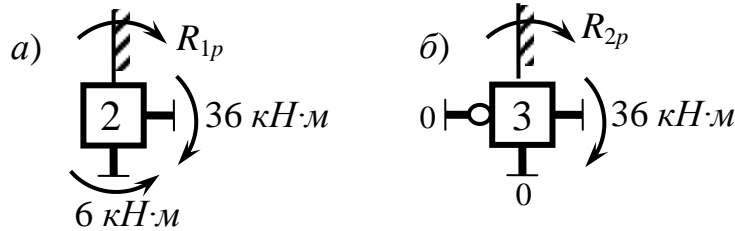


Рис. 4.47. Узлы 2 и 3 ОС грузового состояния

Из условия равновесия части ОС, отсечённой сечением «2-2» (рис. 4.48), находим R_{3p} :

$$\sum X_{2-3-4} = 0; \quad R_{3p} + 3 = 0; \quad R_{3p} = -3 \text{ кН}.$$

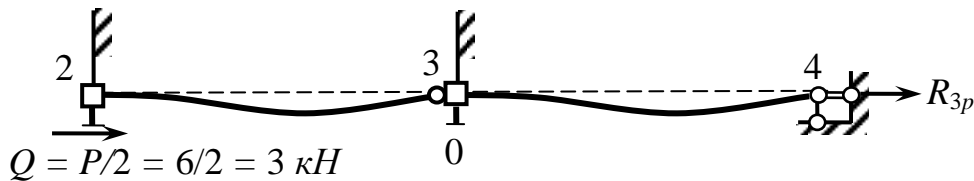


Рис. 4.48. Отсечённая часть основной системы грузового состояния

Выполним проверку правильности вычислений коэффициентов r_{ij} и R_{ip} . Такая проверка необязательна, но желательна. Для коэффициентов r_{ij} проверку осуществляем, перемножая суммарную единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_s^0 (рис. 4.49), построенную суммированием единичных эпюр ($\bar{M}_s^0 = \bar{M}_1^0 + \bar{M}_2^0 + \bar{M}_3^0$), саму на себя.

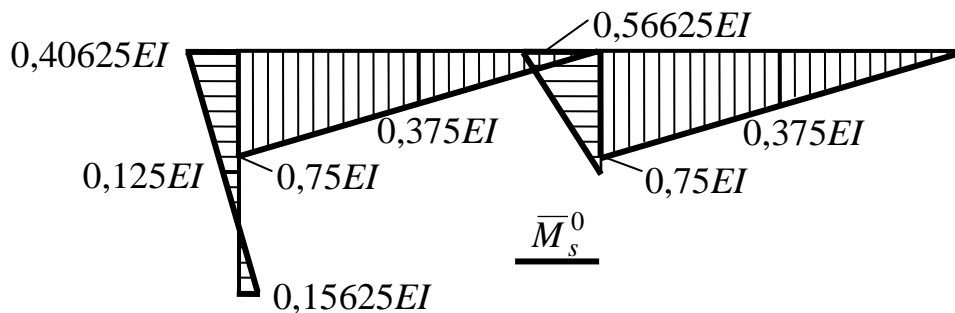


Рис. 4.49. Суммарная единичная эпюра изгибающих моментов

Перемножение эпюр выполним по готовым формулам:

$$r_{ss} = (\bar{M}_s \times \bar{M}_s) = 2 \cdot \frac{12}{6 \cdot 3EI} \cdot (2 \cdot 0,75^2) \cdot (EI)^2 + \frac{4}{6EI} \cdot (2 \cdot 0,5625^2) \cdot (EI)^2 + \\ + \frac{8}{6EI} \cdot (2 \cdot 0,15625^2 + 2 \cdot 0,40625 - 2 \cdot 0,15625 \cdot 0,40625) \cdot (EI)^2 = 2,2578125EI.$$

Сумма коэффициентов

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2(r_{12} + r_{23} + r_{31}) = [1,25 + 1,5 + 0,0703125 + \\ + 2 \cdot (0 - 0,185 - 0,09375)]EI = 2,2578125EI = r_{ss},$$

что подтверждает правильность их вычислений.

Незначительное расхождение результатов, обусловленное вычислительными погрешностями, может быть допущено.

Для проверки правильности вычислений коэффициентов R_{ip} строим эпюру изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки M_p^0 в любой ОС метода сил, например, в той, что была нами рассмотрена в примере расчёта статически неопределимой рамы методом сил (рис. 4.50).

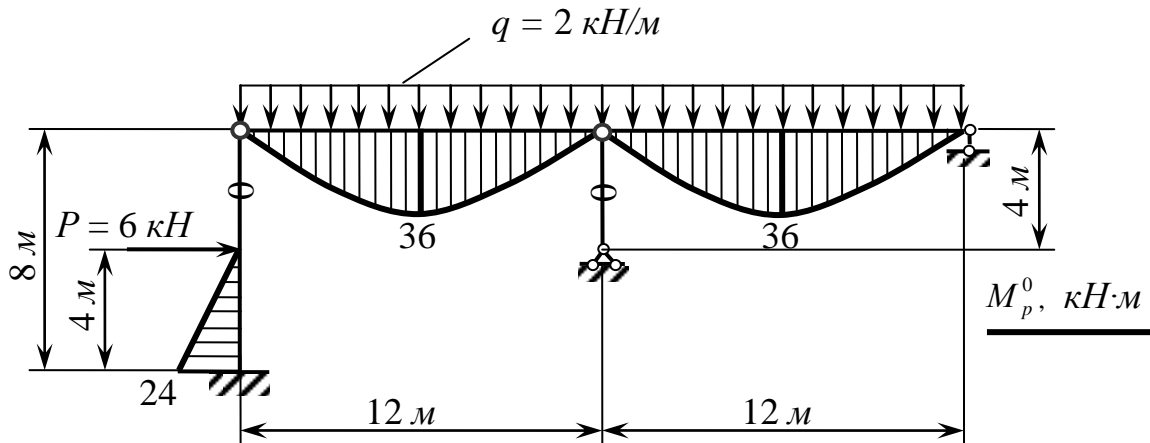


Рис. 4.50. Эпюры изгибающих моментов M_p^0 от внешней нагрузки в основной системе метода сил

Должно выполняться следующее условие:

$$R_{sp} = -(M_p^0 \times \bar{M}_s^0) = -\frac{4}{6EI} (-2 \cdot 24 \cdot 0,15625 + 24 \cdot 0,125) + \\ + \frac{12}{6 \cdot 3EI} (4 \cdot 36 \cdot 0,375) \cdot 2 = -69 = R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} = -30 - 36 - 3 = -69,$$

т.е. вычисления выполнены нами правильно.

Подставив найденные значения r_{ij} и R_{ip} в систему канонических уравнений и разделив всё на EI , получим:

$$\begin{cases} 1,25Z_1 - 0,09375Z_3 = 30/EI; \\ 1,5Z_2 - 0,185Z_3 = 36/EI; \\ -0,09375Z_1 - 0,185Z_2 + 0,0703125Z_3 = -3/EI. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем неизвестные угловые Z_1 , Z_2 и линейное Z_3 перемещения узлов рамы:

$$Z_1 = 42,353/EI; \quad Z_2 = 54,588/EI; \quad Z_3 = 244,706/EI.$$

При решении системы алгебраических уравнений не по стандартным программам на ЭВМ, а «вручную», (например, методом Гаусса или методом Крамера), необходимо выполнить проверку полученных значений.

5. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов M_p .

Как и в методе сил, суммируя «исправленные» эпюры M_1^0 , M_2^0 , M_3^0 (рис. 4.51) с эпюрой M_p^0 (см. рис. 4.50), получаем окончательную эпюру M_p (рис. 4.52). «Исправление» единичных эпюр \bar{M}_i^0 заключается в умножении всех их значений на соответствующие значения Z_i с учётом знака.

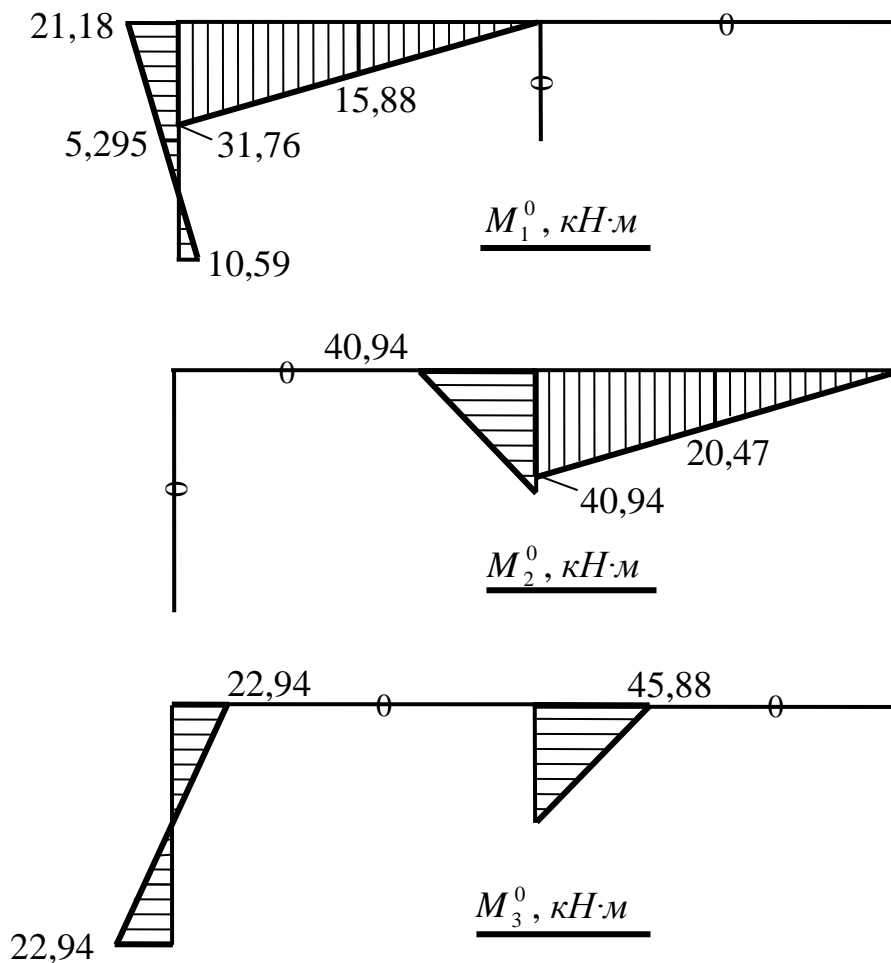


Рис. 4.51. «Исправленные» эпюры изгибающих моментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$

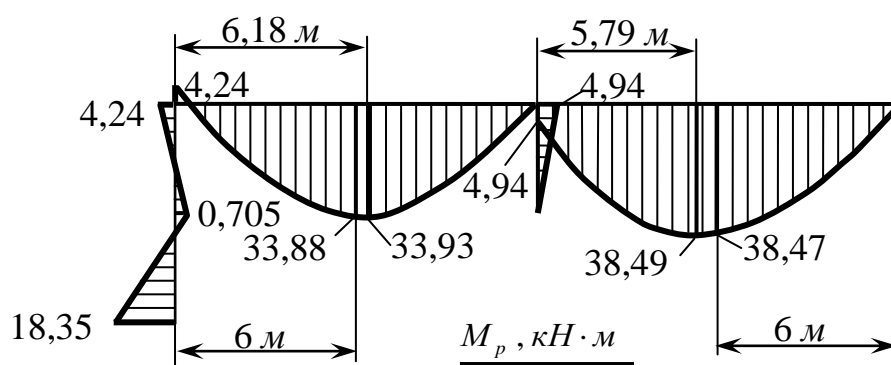


Рис. 4.52. Окончательная эпюра изгибающих моментов M_p

6. Выполняем статическую (обязательную) и кинематическую (деформационную) проверки полученной эпюры изгибающих моментов. Если исходные эпюры $\bar{M}_1^0, \bar{M}_2^0, \bar{M}_3^0$ и M_p^0 построены правильно, т.е. правильно перенесены справочные данные прил. 1 на ОС рассчитываемой рамы, и все дальнейшие вычисления не содержат ошибок, то в методе перемещений достаточной является статическая проверка. Она подтверждает (или не подтверждает, если допущены ошибки) соблюдение условий эквивалентности ЗС и ОС.

Реакции в дополнительно введенных связях ОС должны быть равны нулю, если узлы и части ЗС находятся в равновесии.

Условия равновесия узлов 2 и 3 с изгибающими моментами, взятыми с окончательной эпюры M_p , согласно рис. 4.53, выполняются.

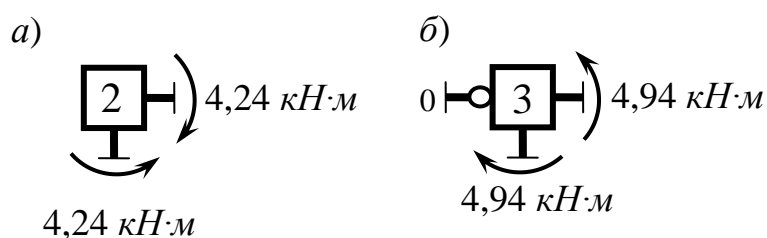


Рис. 4.53. Проверка равновесия узлов 2 и 3

Соблюдается условие равновесия и отсечённой части рамы 2-3-4 с поперечными силами в сечениях стоек, найденными по значениям изгибающих моментов M_p (рис. 4.54).

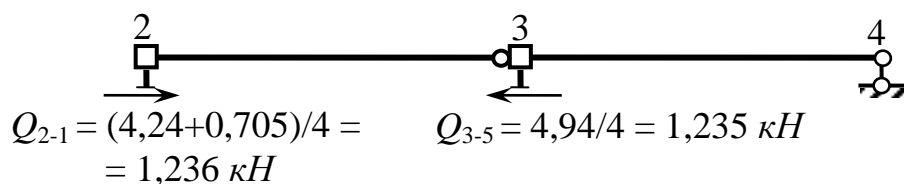


Рис. 4.54. Проверка равновесия осечённой части рамы 2–3–4

Обратим внимание на то, что в выражения $\sum M_2$, $\sum M_3$ продольные и поперечные силы не входят, а в $\sum X_{2-3-4}$ не входят продольные силы и изгибающие моменты в стойках, внешняя нагрузка q и реакция опоры 6, поэтому на соответствующих рисунках они не показаны.

Деформационная проверка позволяет обнаружить ошибки, связанные с неправильным изображением исходных эпюр \bar{M}_1^0 , \bar{M}_2^0 , \bar{M}_3^0 и M_p^0 (из-за неправильного представления схем деформирования ОС хотя бы в одном из состояний).

Деформационная проверка выполняется, как известно, перемножением окончательной эпюры M_p на суммарную единичную эпюру \bar{M}_s^0 , построенную в любом варианте ОС метода сил, например, на ту, что изображена на рис. 4.55:

$$\begin{aligned} \Delta_{sp} = (M_p \times \bar{M}_s^0) &= \frac{12}{6 \cdot 3EI} [(4,24 \cdot 1 - 4 \cdot 33,88 \cdot 0,5) - (4,94 \cdot 1 - 4 \cdot 38,47 \cdot 0,5)] + \\ &+ \frac{4}{6EI} [(2 \cdot 4,24 \cdot 1 - 2 \cdot 0,705 \cdot 2 + 4,24 \cdot 2 - 0,705 \cdot 1) + (-2 \cdot 0,705 + 2 \cdot 18,35 \cdot 3 - \\ &- 0,705 \cdot 3 + 18,35 \cdot 2) - 2 \cdot 4,94 \cdot 1] = \frac{1}{EI} (112 - 111,987) \cong 0. \end{aligned}$$

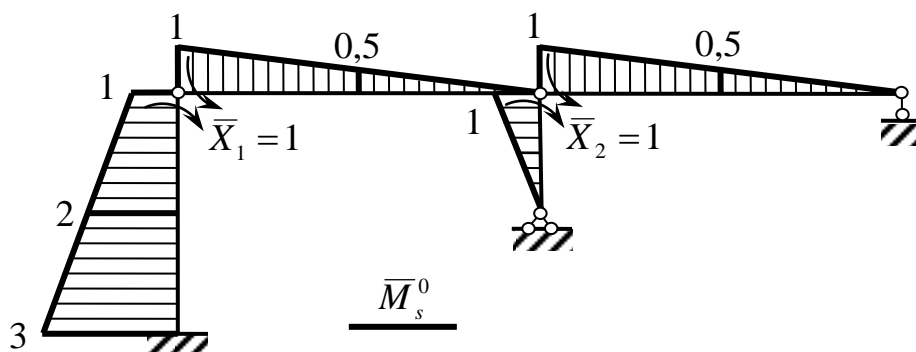


Рис. 4.55. Суммарная единичная эпюра изгибающих моментов в основной системе метода сил

Результаты статической и деформационной проверок показывают, что расчёт заданной рамы выполнен правильно. Это подтверждается ещё и тем, что такое же решение было получено нами выше в раскрытии статической неопределимости той же рамы методом сил.

Там же приведено построение эпюр поперечных и продольных сил и уточнение эпюры M_p (экстремальные значения на ригелях), поэтому эта часть расчёта здесь не рассматривается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ограниченный объём учебного пособия не позволил рассмотреть некоторые важные вопросы курса «Строительная механика».

Так, например, в разделе «Расчёт статически определимы плоских стержневых систем» не рассмотрен вопрос о рациональной компоновке многопролётных статически определимых балок (вопрос о расположении шарниров, разделяющих балку на основные и вспомогательные балки).

Опущено понятие ядрового момента для арок.

Не рассмотрена методика расчёта шпренгельных ферм, хотя такие фермы широко применяются в строительстве.

Раздел «Расчёт статически неопределимых плоских рам» можно было бы расширить и не ограничиваться только рамами, но рассмотреть расчёт многопролётных неразрезных балок, статически неопределимых арок и ферм. Не помешало бы уделить внимание и учёту симметрии стержневых систем в методе сил и методе перемещений, расчёту рам с наклонными стойками.

Однако, как надеются авторы, эти вопросы могут быть изучены студентами самостоятельно при условии их заинтересованности в более глубоком ознакомлении со строительной механикой, являющейся основой специальных дисциплин, определяемых Государственным образовательным стандартом подготовки специалистов.

Творческий, а не формальный подход к решению предлагаемых задач будет способствовать усвоению принципиальных положений и методов, лежащих в основе курса «Строительная механика».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Дарков, А. В.** Строительная механика : учеб. для вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 9-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2004. – 655 с.

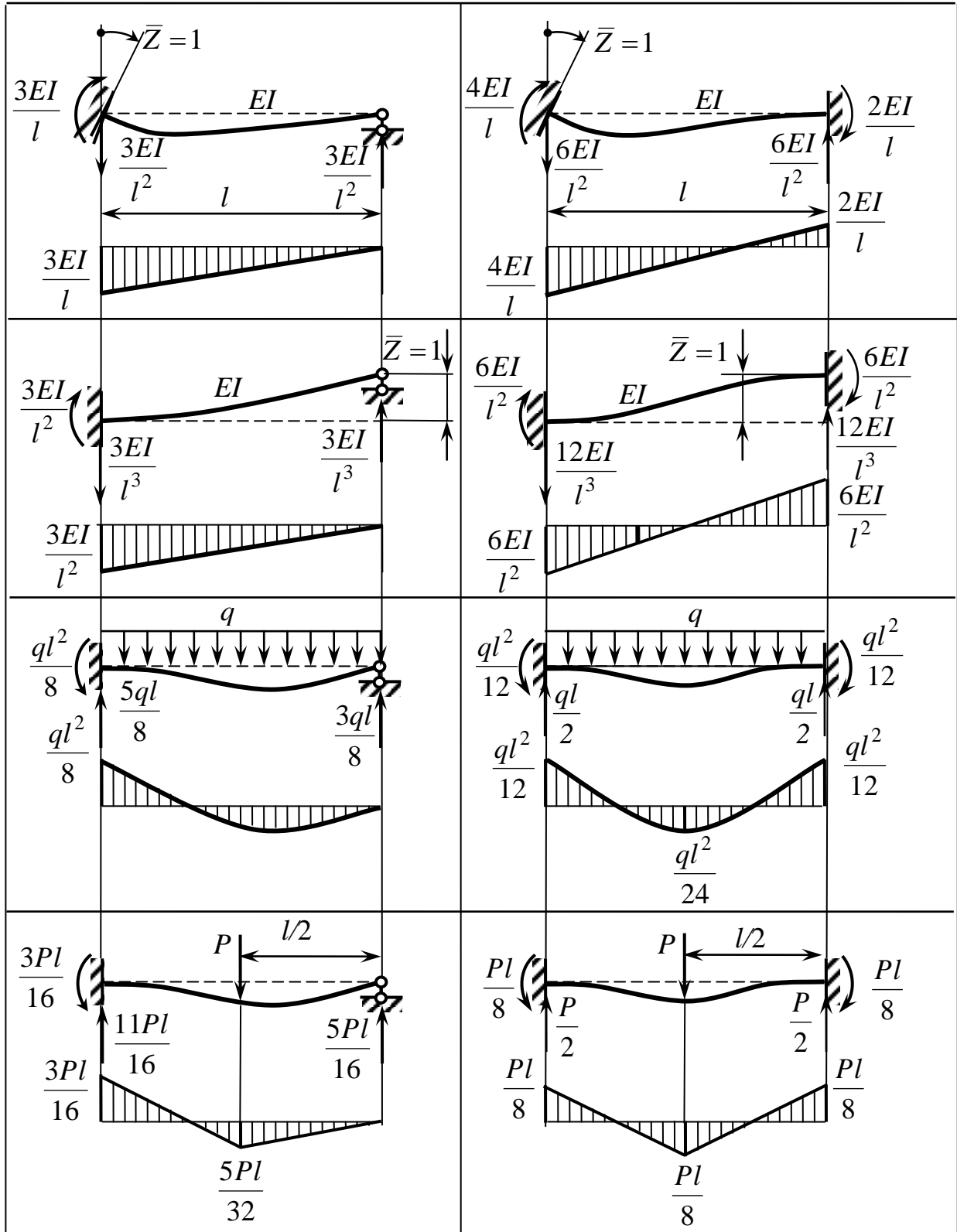
2. **Смирнов, А. Ф.** Строительная механика. Стержневые системы : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашенников, Н. Н. Шапошников. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

3. **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика : учеб. пособие для вузов / А. Р. Ржаницин. – М. : Высш. шк., 1982. – 400 с.

4. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики: Статика стержневых систем : учеб. пособие для строит. спец. вузов / Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Лашенников [и др.] ; под общ. ред. Г. К. Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И РЕАКЦИИ
ЕДИНИЧНЫХ И ГРУЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК**



Симонов Валерий Сергеевич, Лейзерович Григорий Самуилович

ПРАКТИКУМ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Научный редактор Н. А. Тарануха, доктор технических наук, профессор

Редактор Ю. Н. Осинцева

Подписано в печать 17.07.2011.

Формат 60 x 84 1/16. Бумага 65 г/м². Ризограф FR3950EP-α.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,30. Тираж 100 экз. Заказ 24161.

Редакционно-издательский отдел Государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория Государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет».
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.