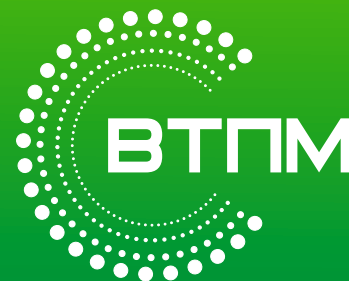


Конференция проводится при финансовой поддержке  
Правительства Хабаровского края  
и администрации г. Комсомольска-на-Амуре



## СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ:

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ОПТИМИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ
3. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ, ТЕХНИКЕ,  
ЭКОНОМИКЕ, БИМЕДИЦИНЕ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ
4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ  
И ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ



III Научная конференция  
с международным участием

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

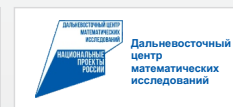
КОНФЕРЕНЦИЯ ПРИУРОЧЕНА К 300-ЛЕТИЮ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
И ПРЕДСТОЯЩЕМУ 70-ЛЕТИЮ КНАГУ

## ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

- Правительство Хабаровского края
- ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре  
государственный университет»
- Дальневосточный федеральный университет
- Амурский государственный университет
- Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН
- Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
- Институт прикладной математики ДВО РАН
- Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН
- Дальневосточный центр математических исследований
- Вычислительный центр ХФИЦ ДВО РАН

## МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

07-11 октября 2024 г.



Сайт конференции: [science.knastu.ru](http://science.knastu.ru)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Российская академия наук  
Правительство Хабаровского края  
ФГБОУ ВО Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
ФГАОУ ВО Дальневосточный федеральный университет  
ФГБОУ ВО Амурский государственный университет  
ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН  
ФГБУН Институт автоматизики и процессов управления ДВО РАН  
ФГБУН Институт прикладной математики ДВО РАН  
Вычислительный центр ФГБУН ХФИЦ ДВО РАН  
Институт машиноведения и металлургии ФГБУН ХФИЦ ДВО РАН  
Дальневосточный центр математических исследований ФГАОУ ВО ДВФУ

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

Материалы III научной конференции с международным участием  
(г. Комсомольск-на-Амуре, 7-11 октября 2024 г.)

Комсомольск-на-Амуре  
2024

УДК 519.6:004.4  
ББК 95.4  
В 949

*Рецензент* – Игорь Иванович Потапов,  
заведующий лабораторией вычислительной механики  
Вычислительного центра ДВО РАН,  
д-р физ.-мат. наук

*Редакционная коллегия:*

Э. А. Дмитриев, д-р техн. наук, проф. (отв. ред.);  
А. И. Евстигнеев, д-р техн. наук, проф. (науч. ред.);  
С. А. Гордин, канд. техн. наук, доцент (техн. ред.);  
И. В. Зайченко, канд. техн. наук, доцент (отв. секретарь)

**Вычислительные технологии и прикладная математика** :  
В 949 материалы III науч. конф. с междунар. участием г. Комсомольск-на-  
Амуре 7–11 октября 2024 / Э. А. Дмитриев (отв. ред.) [и др.]. –  
Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2024. – 412 с.

ISBN 978-5-7765-1588-0

В сборнике представлены материалы докладов с результатами научных исследований по следующим тематическим направлениям: разработка теоретических основ, методов и алгоритмов реализации математических и компьютерных моделей, программных средств анализа данных, систем компьютерного моделирования, программных инструментов для проведения вычислительных экспериментов в разнообразных приложениях; проблемные задачи в механике и машиностроении.

*Проект выполнен за счет гранта Министерства образования  
и науки Хабаровского края № 94С/2024 от 27.06.2024.*

УДК 519.6:004.4  
ББК 95.4

ISBN 978-5-7765-1588-0

© ФГБОУ ВО «КНАГУ», 2024

### *Организационный комитет*

Ректор КНАГУ, проф. **Э.А. Дмитриев** – председатель  
и.о. проректора по НР ДВФУ, доц. **С.Н. Гончарова**  
Директор ИПМ ДВО РАН, академик РАН, **М.А. Гузев**  
Директор ИМиМ ХФИЦ ДВО РАН, **О.Н. Комаров**  
Проректор по НР КНАГУ, проф. **А.В. Космынин**  
Председатель ДВО РАН, академик РАН, **Ю.Н. Кульчин**  
Директор филиала ПАО «ОАК» «КНААЗ им. Ю.А. Гагарина», **А.И. Пекарш**  
Ректор АмГУ, проф. **А.Д. Плутенко**  
Директор ХФИЦ ДВО РАН, **И.Ю. Рассказов**  
Директор ИАПУ ДВО РАН, член-корреспондент РАН, **Р.В. Ромашко**  
Директор ВЦ ДВО РАН, **А.А. Сорокин**  
Директор Департамента математического и компьютерного моделирования  
ДВФУ **А.А. Сущенко**  
Директор ХО ИПМ ДВО РАН, проф. **К. А. Чехонин**

### *Программный комитет*

Проф. **Е.А. Нурминский** (председатель, ДВФУ, Владивосток)  
Проф. **Г.В. Алексеев** (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)  
Чл.-корр. РАН **А.А. Буренин** (ИМиМ ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре)  
Проф. **А.И. Евстигнеев** (КНАГУ, Комсомольск-на-Амуре)  
Проф. **А.Е. Ковтанюк** (ДВФУ, Владивосток)  
Чл.-корр. РАН **Л.В. Ковтанюк** (ИАПУ ДВО РАН, Владивосток)  
Руководитель НПиЦ УТР **Р.Ф. Крупский** (филиал ПАО «ОАК» – КНААЗ им. Ю.А. Гагарина, Комсомольск-на-Амуре)  
Проф. **А.Г. Масловская** (АмГУ, Благовещенск)  
Проф. **К.В. Нефедев** (ДВФУ, Владивосток)  
Проф. **И.В. Прохоров** (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)  
Чл.-корр. РАН **С.И. Смагин** (ВЦ ДВО РАН, Хабаровск)  
Чл.-корр. РАН **Е.Я. Фрисман** (ИКАРП ДВО РАН, Биробиджан)  
Проф. **О.В. Хамисов** (ИСЭМ СО РАН, Иркутск)  
Проф. **А.Ю. Чеботарев** (ИПМ ДВО РАН, Владивосток)  
Проф. **А.В. Чигарев** (БГУ, Минск)  
д-р техн. Наук **Е.В. Шеленок** (ТОГУ, Хабаровск)

## ПРИВЕТСТВЕННОЕ СЛОВО УЧАСТНИКАМ КОНФЕРЕНЦИИ

**Дорогие друзья, коллеги, участники и гости III научной конференции!**

Комсомольский-на-Амуре государственный университет является одним из ведущих университетов по подготовке инженерных для промышленности Дальнего Востока. В университете реализуются все уровни образования, действует одна из самых крупных на Дальнем востоке сетей диссертационных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций, позволяющая готовить научные кадры для всего региона.



Университета на протяжении многих лет реализует курс на развитие интеграционных связей между наукой, образованием и производством. На крупных предприятиях города созданы базовые кафедры, в университете действует технопарк, инжиниринговый центр, сеть студенческих конструкторских бюро и самый крупный на Дальнем востоке центр промышленной робототехники и передовых промышленных технологий. Все это позволяет университету выпускать востребованных специалистов, способных не только осваивать, но и разрабатывать современные передовые технологии, а также вовлекать талантливых студентов в научную деятельность.

Желаю всем участникам и гостям конференции плодотворной работы, установления новых научных связей!

Э.А. Дмитриев  
ректор КнАГУ,  
доктор технических наук,  
профессор

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Авдеева М.О., Чехонин К.А.</b> О РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ КАПЛИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПОДЛОЖКЕ .....	13
<b>Адамов А.А., Келлер И.Э., Жилин С.Г., Богданова Н.А.</b> ИДЕНТИФИКАЦИЯ КЭП-МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЖИМАЮЩЕГО СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ.....	16
<b>Амосова Е.В.</b> РАЗРЕШИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА .....	20
<b>Андрианов И.К., Феоктистов С.И.</b> О МОНОТОННОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ АВТОФРЕТИРОВАНИИ.....	24
<b>Анисич А.И., Макаров Д.В.</b> СИМУЛЯЦИЯ СПИНОВЫХ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННЫХ КОНДЕНСАТОВ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА .....	27
<b>Анисич А.И., Трухин В.О., Нефедев К.В., Лобанова Э.А., Черкасов М.Д., Терновой Н.К.</b> ПОИСК ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛИ ЭДВАРДС-АНДЕРСЕНА ПУТЕМ ПЕРЕБОРА ВСЕХ СОСТОЯНИЙ .....	30
<b>Барсукова Н.В., Попов А.В., Комаров О.Н.</b> СТРУКТУРА И СВОЙСТВАМИ СПЛАВОВ ПОЛУЧАЕМЫХ АЛЮМОТЕРМИЕЙ ПРИ СЕПАРАЦИИ ФРАКЦИОННЫХ СОСТАВОВ КОМПОНЕНТОВ ТЕРМИТНЫХ СМЕСЕЙ .....	33
<b>Бахтин К.Е.</b> О РЕДУКЦИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ТИПА $IPD$ .....	37
<b>Башков О.В., Башков И.О., Безрук М.Н., Ефимов Т.А., Ромашко Р.В.</b> ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В СТЕКЛОПЛАСТИКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ .....	41
<b>Бегун А.С.</b> АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ.....	47
<b>Бекежанова В.Б., Степанова И.В.</b> СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЙ В СИСТЕМЕ БИНАРНЫХ СРЕД С ИСПАРЕНИЕМ.....	51
<b>Белозеров Н.И., Чехонин К.А.</b> ТРЕХМЕРНОЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАСПЛАВА МЕТАЛЛА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА.....	55
<b>Бердоносков В.Д., Шелопугина Е.О.</b> ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ИЗОЛИРОВАННОЙ ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	60

<b>Богданова Н.А., Жилин С.Г., Келлер И.Э., Адамов А.А.</b> ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ ВОСКООБРАЗНЫХ СРЕД НА ПРОЧНОСТЬ ПРЕССОВОК .....	64
<b>Болодурина И.П., Шухман А.Е., Гришина Л.С., Легашев Л.Е.</b> РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА УТОЧНЕНИЯ ПЛАНА ЭКСПЕРИМЕНТОВ СУРРОГАТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ .....	68
<b>Борисова В.В., Дегтярев Д.В., Нефедев К.В.</b> ГЕНЕРАЦИЯ БЕЛЛОВСКИХ ПАР ПО АЛГОРИТМУ КВАНТОВОЙ ТЕЛЕПОРТАЦИИ.....	72
<b>Боровской С.А., Кривенко М.Ю.</b> ПРОГРАММНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ПО ФОТОИЗОБРАЖЕНИЮ КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЯ .....	75
<b>Бризицкий Р.В., Дончак А.А.</b> ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ .....	79
<b>Бризицкий Р.В., Максимова Н.Н.</b> ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДРЕЙФА-ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОНОВ.....	83
<b>Буров А.Е., Москвичев Е.В.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ТКАНОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ .....	87
<b>Варыгина М.П., Буров А.Е.</b> ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА ПОВЕДЕНИЕ ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ .....	91
<b>Веремейчик А.И.</b> НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦОВ С ЗОНАМИ ИЗМЕНЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИСХОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ ПРИ КРУЧЕНИИ .....	95
<b>Водинчар Г.М., Фащенко Л.К.</b> КОМПЛЕКС СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО С ПАМЯТЬЮ .....	100
<b>Гапеев М.И., Марапулец Ю.В., Сододчук А.А.</b> ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЫШЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЕРЕД ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯМИ.....	104
<b>Гапеев М.И., Сододчук А.А.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТРОЕНИЯ СРЕДЫ.....	108
<b>Гладких Д.А.</b> ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГОНОЧНОГО АВТОМОБИЛЯ ПО ТРАССЕ .....	112

<b>Грабарь Д.М., Жиганов С.В., Иванов Ю.С.</b> КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ И СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ONE-SHOT LEARNING .....	119
<b>Гренкин Г.В., Шахгельдян К.И.</b> ИНТЕРПРЕТИРУЕМОЕ МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИСХОДА ЛЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СОЧЕТАНИЙ ФАКТОРОВ РИСКА.....	123
<b>Гришко И.Д., Ващенко С.П., Ковалев О.Б.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ В ДВУХКАМЕРНОМ ПЛАЗМОТРОНЕ.....	125
<b>Дмитриев Э.А., Карпенко В.А.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ РАСПЛАВА МЕТАЛЛА В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ УСТАНОВКИ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКИ СТАЛИ ПРИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РУБАШКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ .....	129
<b>Дудин Д.С., Келлер И.Э., Пойлов В.З.</b> МОДЕЛЬ ОКСИДНО-СУЛЬФИДНОЙ КОРРОЗИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ НИКЕЛЕВЫХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕНИЙ .....	135
<b>Дудко О.В., Лаптева А.А.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ .....	139
<b>Евтихов Д.О.</b> ПОСТРОЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ...	144
<b>Елистратов В.Е., Амосова Е.В.</b> ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА .....	148
<b>Ефремов Е.Л., Степанова А.А.</b> О Т-ПСЕВДОКОНЕЧНЫХ ПОЛИГОНАХ НАД МОНОИДАМИ.....	150
<b>Ефремов Е.Л., Шамич Н.И.</b> СТРОЕНИЕ СВЯЗНЫХ КОНГРУЭНЦ-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ УНАРОВ .....	154
<b>Животова А.А., Бердоносков В.Д.</b> ОПТИМИЗАЦИОННОЕ ПРЕДРЕДАКТИРОВАНИЕ РУССКОЯЗЫЧНЫХ ТЕКСТОВ ДЛЯ ИХ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК .....	158
<b>Животова А.А., Зарембо В.С.</b> ПОИСК В ТЕКСТЕ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ И СООТНЕСЕНИЕ ИХ С ЗАПИСЯМИ РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ.....	162



<b>Жигалов А.Ю., Болодурина И.П., Лосицкий А.О.</b> РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СЕРВИСА ДЛЯ АНАЛИЗА СНИМКОВ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ МЕТОДАМИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ.....	167
<b>Зайко Н.Ю., Любимова О.Н.</b> ТЕРМОДЕФОРМАЦИОННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В РАЗНОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ.....	170
<b>Зинченко Ю.Е., Зинченко Т.А.</b> СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА, ПРЕДСТАВЛЕННОГО СЕТЬЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ .....	173
<b>Исхакова П.В., Баранникова С.А.</b> ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ АЛЮМИНИЯ .....	178
<b>Казаков Е.А.</b> ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В ЭРЕДИТАРНОЙ ДВУМОДОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМО.....	181
<b>Казаков Е.А., Водинчар Г.М.</b> СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДВУМОДОВЫЕ ЭРЕДИТАРНЫЕ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОГО ДИНАМО.....	185
<b>Канашин И.В., Григорьева А.Л., Хромов А.И.</b> ЗАДАЧА О СЖАТИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ПЛОСКИМ ШТАМПОМ .....	189
<b>Клюшин М.А., Тихонов А.А.</b> ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ.....	193
<b>Князева А.Г.</b> НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОЕВОГО КОМПОЗИТА В ПРОЦЕССЕ ЕГО СОЗДАНИЯ .....	197
<b>Ковалев М.А., Москвичев В.В.</b> ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РИСКИ ТЕХНОЛОГИИ ВСКРЫШНЫХ РАБОТ НА УГОЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ .....	201
<b>Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О.</b> ПОЛЗУЧЕСТЬ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ .....	204
<b>Кожевникова Т.В., Шамурина А.И., Беспятчук Е.Е., Окладников В.Е.</b> МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ С ДАННЫМИ ДЗЗ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА ТЕРРИТОРИИ.....	208
<b>Козин В.М., Верещагин В.Ю.</b> ВЛИЯНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СНЕГА НА УРОВЕНЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ, ДЕФОРМИРУЕМОМ РЕЗОНАНСНЫМИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ.....	212

<b>Колобов А.Н., Фрисман Е.Я.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМОИЗРЕЖИВАНИЯ В ОДНОВОЗРАСТНЫХ НАСАЖДЕНИЯХ ПРИ РАЗНЫХ СХЕМАХ ПОСАДКИ ДЕРЕВЬЕВ .....	217
<b>Костиков С.А.</b> ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕНЫ ТРОМБА В КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ .....	221
<b>Крылова Е.Ю., Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.</b> ПЕРЕХОДНЫЕ МИКРОПОЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ.....	226
<b>Кузора С.С.</b> ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИЙ ИННОВАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ .....	230
<b>Лазарев Н.П.</b> ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С НАКЛОННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ .....	233
<b>Лобанова Э.А., Стронгин В.С., Черкасов М.Д., Терновой Н.К., Анисич А.И., Шевченко Ю.А.</b> МАГНИТНЫЕ МОНОПОЛИ НА РЕШЁТКЕ АПАМЕЯ.....	237
<b>Любимова О.Н., Стрельцов А.А., Шелковников К.К.</b> К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОСЫ СТЕКЛОВАНИЯ.....	241
<b>Мороз Л.И., Масловская А.Г.</b> АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЭРЕДИТАРНОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ ПОЛЯРНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ: УЧЕТ ПОЛЕВЫХ ЭФФЕКТОВ.....	244
<b>Москвичев В.В.</b> НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННО–КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ.....	248
<b>Мыльников В.В.</b> АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ИЗ ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННОГО АЛЮМОМАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА В УСЛОВИЯХ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО ИЗГИБА.....	251
<b>Назаров В.В.</b> ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ 304L.....	255
<b>Назаров В.В.</b> СРАВНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ КОБАЯШИ С КЛАССИЧЕСКИМИ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ .....	258
<b>Назаров В.В.</b> ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РАВНОМ МНОГООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ.....	262

<b>Ни А.Э.</b> ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ГИБРИДНЫМ РЕШЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ БОЛЬЦМАНА .....	265
<b>Никифоров Д.Я.</b> ОНЛАЙН БЕССЕТОЧНЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ .....	269
<b>Николаев М.С., Картаев Е.В., Ващенко С.П., Ковалев О.Б.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАМЕРЕ СМЕШЕНИЯ ТРЕХСТРУЙНОГО ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА .....	272
<b>Пестов К.Н., Гузев М.А., Любимова О.Н.</b> УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ-МИТЧЕЛЛА ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ .....	277
<b>Погорелов С.А., Брижик М. А., Каширин А.А.</b> ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА 3-D УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА .....	280
<b>Поляков А.Н.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ YOLO ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ПАХОТНЫХ ПОЛЕЙ .....	285
<b>Полянский Д.Д.</b> НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕМПЕРАТУРОЗАВИСИМЫХ ПРЕДЕЛОВ ТЕКУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ .....	288
<b>Потянихин Д.А.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МЕТАЛЛА В УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЛИТЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЗАГОТОВОК .....	293
<b>Прилепкина Е.Г.</b> О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЕМКОСТЯМИ КОНДЕНСАТОРОВ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ .....	297
<b>Пятков М.И.</b> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СРОКОВ ЧИСТКИ ОТ НАКИПИ .....	299
<b>Салмиянов В.О., Масловская А.Г.</b> СИСТЕМА АНАЛИЗА СНИМКОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ЛЕГКИХ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО ОБУЧЕНИЯ .....	304
<b>Сарицкая Ж.Ю., Бризицкий Р.В.</b> АНАЛИЗ КРАЕВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ .....	308
<b>Саруханян С.К., Масловская А.Г.</b> ДИСКРЕТНО-ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ БИОПЛЕНКИ С УЧЕТОМ МЕХАНИЗМА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ .....	312

<b>Секриеру Р.А., Цыгулёв К.С., Орлов С.А., Смагин С.И.</b> СВЕРТОЧНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ РАЙОНА ДРАЖНЫХ РАБОТ .....	316
<b>Спешилов Е.А.</b> РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТИРОВОК И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ АГРОПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ .....	320
<b>Стельмаков В.А.</b> ШЛИФОВАНИЕ КАК ПРОЦЕСС ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЗЁРЕН АБРАЗИВНОГО ИНСТРУМЕНТА .....	328
<b>Судаков В.А., Сивакова Т.В.</b> БИБЛИОТЕКА MILRU ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	331
<b>Суходоев И.Г.</b> СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХ МИГРАЦИОННО СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ .....	334
<b>Тахиров Ж.О.</b> О ДИНАМИКЕ МОДЕЛИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ИНФЕКЦИИ С ИММУННЫМ ОТВЕТОМ.....	338
<b>Твёрдый Д.А.</b> ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ТИПА ГЕРАСИМОВА-КАПУТО АЛГОРИТМОМ ЛЕВЕНБЕРГА-МАРКВАРДА НА ПРИМЕРЕ НЕОДНОРОДНОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ .....	341
<b>Твёрдый Д.А., Малкин Е.И.</b> ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОНЧ РАДИОВОЛН В ЕСТЕСТВЕННОМ ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ-ИОНОСФЕРА И ОБРАТНОГО РАССЕЙЯНИЯ ОТ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ГРАНИЦ .....	345
<b>Терновой Н.К., Нефедев К.В., Анисич А.И., Лобанова Э.А., Черкасов М.Д., Прохоров Е.И.</b> ПОИСК ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ РЕШЕТКИ ХОПФИЛДА .....	349
<b>Ткачева А.В., Евстигнеева А.А.</b> О НАПРЯЖЕНИЯХ В СФЕРИЧЕСКОЙ КЕРАМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ .....	353
<b>Ткаченко О.П.</b> АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КРИВИЗНЫ ОСИ: ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ.....	358
<b>Устинов К.Б., Гандилян Д.В.</b> О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН.....	362
<b>Худякова В.А., Жилин С.Г., Предеин В.В., Богданова Н.А.</b> ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРЕВА ТЕРМИТНОЙ ШИХТЫ И РЕАКТОРА НА СВОЙСТВА ПОЛУЧАЕМОГО ЖЕЛЕЗОАЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА МЕТОДОМ АЛЮМОТЕРМИИ...	366

<b>Цициашвили Г.Ш.</b> СПИСКИ МЕТОК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ .....	368
<b>Черкасов М.Д., Терновой Н.К., Лобанова Э.А., Анисич А.И., Шевченко Ю.А.</b> ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОТЖИГА В МОДЕЛИ ИЗИНГА .....	373
<b>Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А., Дмитриев Э.А.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ В НЕЙ ШАРООБРАЗНОЙ СТАЛЬНОЙ ОТЛИВКИ.....	377
<b>Чесноков М.А., Наливайко И.Н.</b> РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОБРАЗЦОВ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СПИНОВЫХ СТЕКЛОЛ.....	382
<b>Чехонин К.А.</b> ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОРМИРУЕМОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДВИЖНОГО ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ .....	386
<b>Чупров С.В.</b> ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЭНТРОПИЙНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ ХАОТИЗИРОВАННОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ .....	389
<b>Шарый С.П.</b> ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ГАРАНТИИ ПРИ АГРЕГИРОВАНИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ .....	393
<b>Шевкун И.А., Масловская А.Г.</b> ПОДХОД К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕАКЦИОННО-ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ БАКТЕРИАЛЬНОГО РОСТА В КАНАЛАХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ.....	398
<b>Широких А.А., Котов В.С.</b> ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС КОНСТРУКТИВНОГО РАСЧЕТА СУДОВЫХ ПАРОВЫХ КОТЛОАГРЕГАТОВ.....	402
<b>Шуай И., Масловская А.Г.</b> УЧЕТ ЭФФЕКТА ОЛЛИ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО- ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНОЙ ПОПУЛЯЦИИ .....	405
<b>Шутов К.С.</b> РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ ПРОГРАММНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОРЕЖИМНОГО УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ УСТРОЙСТВОМ .....	409

УДК 532.2

**Авдеева Мария Олеговна**, к.ф.-м.н., ученый секретарь филиала Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.

**Avdeeva Mariia Olegovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, scientific secretary of the Khabarovsk Division, Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences.

**Чехонин Константин Александрович**, д.ф.-м.н., руководитель филиала Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.

**Chekhonin Konstantin Aleksandrovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Khabarovsk Division, Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences.

## **О РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ КАПЛИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПОДЛОЖКЕ**

### **ON THE MODES OF MOTION OF A DROP OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID ON AN INCLINED SUBSTRATE**

**Аннотация.** В работе рассматривается трехмерный процесс растекания и движения вязкой несжимаемой капли на наклонной поверхности под действием гравитационных, капиллярных и диссипативных сил. Диссипация энергии связана с вязкими эффектами жидкости, наличием трения-скольжения на твердой поверхности и линии трехфазного контакта, гистерезисными явлениями взаимодействия жидкости с гетерогенной поверхностью подложки. На основе уравнений Навье-Стокса и неразрывности предложена математическая постановка задачи в виде вариационных неравенств, которая сводится к функционалу Лагранжа с обеспечением проксимальных свойств. Путем численного решения показано влияние определяющих параметров на режимы стекания капли: скольжение и качение с инерционно-капиллярными и вязко-капиллярными динамическими переходными режимами.

**Abstract.** The paper considers a three-dimensional process of spreading and motion of a viscous incompressible drop on an inclined surface under the action of gravitational, capillary and dissipative forces. Energy dissipation is associated with viscous effects of liquid, the presence of friction-sliding on a solid surface and a three-phase contact line, hysteresis phenomena of interaction of liquid with a heterogeneous surface of the substrate. Based on the Navier-Stokes equations and continuity, a mathematical formulation of the problem in the form of variational inequalities is proposed, which is reduced to the Lagrange functional with provision of proximal properties. By means of a numerical solution, the influence of the determining parameters on the modes of drop flow is shown: sliding and rolling with inertial-capillary and viscous-capillary dynamic transient modes.

**Ключевые слова:** Смачиваемость, гистерезис динамического контактного угла, метод конечных элементов, свободная поверхность, капля вязкой жидкости, режимы движения.

**Keywords:** Wettability, dynamic contact angle hysteresis, finite element method, free surface, viscous liquid drop, driving modes.

## **Введение**

Смачиваемость жидкости на твердой поверхности играет ключевую роль во многих природных, биологических и инженерных приложениях, например, при разработке поверхностей с особыми свойствами (самоочищающиеся, водоотталкивающие с защитой от обледенения и т.д.) или при рассмотрении фильтрационных процессов в технологиях формования изделий из высоконаполненных полимерных материалов, где капиллярное давление может составлять треть от технологического, и как следствие, существенно влиять на технологические режимы их производства [1-8]. Поверхностное натяжение начинает доминировать при технологических режимах с достаточно малыми значениями капиллярного числа и параметра Бонда. Ключевую роль в рассматриваемом процессе играет микроструктура твердой поверхности, механизмы взаимодействия фаз на линии трехфазного контакта, статический и динамический углы смачивания и их гистерезис. Валидацию математической модели контактных углов в большинстве случаев производят: в статическом случае путем сравнения с экспериментальными исследованиями полученными методом сидячей капли, а в динамическом - соударением капли с подложкой или при ее движении по наклоненной к горизонту поверхности смачивания. Несмотря на обширный объем публикаций в этой области исследований [1], к настоящему времени отсутствуют динамические модели линии трехфазного контакта и эффективные численные алгоритмы, правильно предсказывающие скорость и режимы движения капли по гидрофильной или гидрофобной наклонной поверхности. В научных кругах давно ведутся споры - капля скользит или скатывается по наклонной поверхности?

В настоящей работе рассматривается трехмерный динамический изотермический процесс растекания и движения капли по твердой наклонной поверхности подложки [1-3]. Диссипация энергии связана с вязкими эффектами жидкости, наличием трения-скольжения на твердой поверхности и линии трехфазного контакта, гистерезисными явлениями взаимодействия жидкости с гетерогенной поверхностью подложки. На основе уравнений Навье-Стокса и неразрывности предложена математическая постановка задачи в виде вариационных неравенств [1], которая сводится к функционалу Лагранжа с обеспечением проксимальных свойств. Исследуется разрешимость задачи. Ее численное решение производим методом конечных элементов в переменных Лагранжа [1-8] с неявной линеаризацией сил поверхностного натяжения. Аппроксимацию основных переменных задачи (вектор скорости и давление) производим с выполнением условия совместности их сеточных пространств (LBB – условие)[2]. Для исключения сингулярности решения на линии трехфазного контакта предложена оригинальная модель скольжения с выбором длины скольжения в функции от определяющих параметров (критического и текущего капиллярного числа, параметров Рейнольдса и Стокса, гистерезиса динамического контактного угла смачивания) [4].

Путем численного решения найдены значения определяющих параметров задачи, приводящие к условиям «прилипания» капли к наклонной поверхности, в том числе с начальной кинетической энергией. Показано влияние определяющих параметров на процесс стекания капли: скольжение, качение с инерционно-капиллярными и вязко-капиллярными динамическими режимами [7]. Для условий доминирующего значения капиллярных сил получены асимптотические решения задачи о растекании капли на горизонтальной поверхности и шаре. Показана устойчивость и вычислительная эффективность модели, обладающей сеточной сходимостью, консервативностью с повышением величины шага по времени на два порядка относительно используемых в настоящее время схем интегрирования.

### **Заключение**

В ходе проведенных исследований предложена математическая модель и эффективный численный алгоритм, основанный на методе конечных элементов, для исследования режимов растекания и движения капли вязкой несжимаемой жидкости по наклонной поверхности подложки. Показана устойчивость численного алгоритма и его вычислительная эффективность с обеспечением сеточной сходимости. Найдены значения определяющих параметров задачи, приводящие к условиям «прилипания» капли к наклонной поверхности. Для условий доминирующего значения капиллярных сил получены асимптотические решения задачи о растекании капли на горизонтальной поверхности и шаре. Показано влияние определяющих параметров на процесс движения капли: скольжение, качение с инерционно-капиллярными и вязко-капиллярными динамическими режимами.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Chekhonin K.A., Vlasenko V.D., “Three-dimensional Finite Element Model of Three-phase Contact Line Dynamics and Dynamic Contact Angle”, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, 2024, V. 19.

2. Чехонин К.А., Власенко В.Д. “Моделирование заполнения вязкой жидкостью области в капиллярном коаксиальном зазоре”, Вычислительная механика сплошных сред, 2019, Т. 12, № 3, С. 313-324.

3. Чехонин К.А., Стецюк А.Е. “Трехмерная конечно-элементная модель движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью с учетом поверхностного натяжения. Постановка задачи и алгоритм”, Вестник ИТПС, 2020, Вып. 16, С. 11-15.

4. Чехонин К.А., Стецюк А.Е. “Трехмерная конечно-элементная модель движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью с учетом поверхностного натяжения. Модель длины скольжения в задачах смачивания и растекания”, Вестник ИТПС, 2020, Вып. 16, С. 16-21.

5. Чехонин К.А., Стецюк А.Е. “Трехмерная конечно-элементная модель движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной



поверхностью с учетом поверхностного натяжения. Моделирование фильтрации в пористой среде”, Вестник ИТПС, 2020, Вып. 16, С. 22-25.

6. Chekhonin K.A., Vlasenko V.D. “Three-dimensional finite element model of the motion of a viscous incompressible fluid with a free surface, taking into account the surface tension”, AIP Conference Proceedings, 2023, V. 2504, № 030007. (doi: 10.1063/5.0132920)

7. Чехонин К.А. “О динамических режимах стекания вязкой несжимаемой капли по наклонной подложке”, В книге: Математические проблемы механики сплошных сред. Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова. Новосибирск, 2024, С. 172-173.

8. Белозеров Н.И., Чехонин К.А. “Трёхмерное конечно-элементное моделирование течения расплава металла со свободной поверхностью в условиях движущегося лазерного источника”, Дальневосточный математический журнал, 2024, Т. 24, № 1, С. 9-21.

УДК 539.374

**Адамов Анатолий Арсангалеевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН  
**Adamov Anatoliy Arsangaleevich**, Dr. Sci. Phys. & Math., Leading Scientist, Institute of Continuous Medium Mechanics UB RAS

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН  
**Keller Ilya Ernstovich**, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Head of Laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS

**Жилин Сергей Геннадьевич**, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН  
**Zhilin Sergey Gennadievich**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Mechanical Science and Metallurgy FEB RAS

**Богданова Нина Анатольевна**, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

**Bogdanova Nina Anatolievna**, junior researcher, Institute of Mechanical Science and Metallurgy FEB RAS

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ КЭП-МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЖИМАЮЩЕГО СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ**

## **IDENTIFICATION OF THE CAP MODEL OF ELASTOPLASTICITY OF NON-COMPACT MEDIA UNDER COMPRESSIVE MEAN STRESS**

**Аннотация.** Предложена программа базовых испытаний и методика идентификации трехмерной модели упругопластического поведения

изотропной пористой либо порошкообразной консолидируемой среды, испытывающей произвольное квазистатическое нагружение в условиях сжимающего среднего напряжения при комнатной температуре. В качестве такой модели рассматривается кэп-модель Димаджио и Сэндлера, присутствующая в пакетах прикладных программ, а в качестве базовых испытаний — свободное и стесненное сжатие цилиндрического образца по специальной программе, содержащей этапы нагрузки и разгрузки при последовательном повышении амплитудного напряжения. Предложен метод явного определения упругих и пластических констант модели, которые определены по данным испытаний порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Модель применима для численного моделирования процессов обработки давлением некомпактных сред.

**Abstract.** A program of basic tests and a method for identifying a three-dimensional model of the elastoplastic behavior of an isotropic porous or powdery consolidated medium experiencing arbitrary quasi-static loading under conditions of low average stress at room temperature are proposed. The cap model of DiMaggio and Sandler, which is present in application software packages, is considered as such a model, and the free and constrained compression of a cylindrical sample according to a special program containing the stages of loading and unloading with a sequential increase in amplitude voltage is considered as basic tests. A method is proposed for the explicit determination of the elastic and plastic constants of the model, which are determined according to the test data of powdered paraffin grade T1 fraction 0.63 mm. The model is applicable for numerical simulation of pressure treatment processes in non-compact media.

**Ключевые слова:** некомпактные среды, уплотнение, кэп-модель пластичности, упругие константы, идентификация, эксперимент, порошкообразный парафин.

**Keywords:** non-compact media, densification, cap models of plasticity, elastic constants, identification, experiment, powdered paraffin.

## **Введение**

Некоторые технологии получения изделий имеют дело с обработкой давлением некомпактных материалов в условиях сжимающих средних напряжений. Примером подобного процесса является штамповка изделий из проката терморасширенного графита (гибкого графита), пористость которого составляет 60-70%, применяемых для изготовления химически инертных прокладок, электродов, датчиков, устройств вибродемпфирования, теплоизоляции, защиты от электромагнитных полей. В литературе предлагается определять механические и прочностные свойства данного материала исключительно из испытаний на одноосное растяжение и индентирование. Воспроизводимые в подобных испытаниях напряженно-деформированные состояния не характеризуются сжимающими средними напряжениями и уплотнением и потому не подходят для расчетов рассматриваемых процессов, в которых подобные состояния реализуются во всем объеме изделия. Еще одним примером является процесс экструзии и

заполнения формы порошковым воскообразным материалом, который может быть использован в технологии литья по выплавляемым моделям. Этот способ обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционной технологией жидкого заполнения формы, требующей применения дорогостоящих литевых восков и керамик для исключения образования усадочных дефектов модели при ее затвердевании и растрескивания керамической оболочки на стадиях выплавления и прокалики. Определение упруговязкопластических свойств подобных порошковых материалов является нетривиальной задачей. Порошковые технологии используются при производстве изделий из неплавких полимеров, имеющих очень большую молекулярную массу, и наполненных композитов на их основе. Разработка методики экспериментальной идентификации подходящих моделей упругопластичности для численного расчета процессов обработки давлением некомпактных сред поэтому представляется необходимой и актуальной задачей.

### **Основная часть**

Авторами предложена программа базовых испытаний и методика идентификации трехмерной модели упругопластического поведения изотропной пористой либо порошкообразной консолидируемой среды, испытывающей произвольное квазистатическое нагружение в условиях сжимающего среднего напряжения при комнатной температуре [1,2]. Рассматриваемая среда в условиях сжимающих средних напряжений уплотняется при повышении эффективного напряжения, что приводит к нелинейному изменению упругих модулей, упрочнению и дилатансии (связанности сдвиговых и объемных компонент деформаций) в области текучести. Для описания подобного поведения рассматривается кэп-модель Димаджио и Сэндлера [3], рис. 1, присутствующая в пакетах прикладных программ [4].

В рамках этой модели выведены вспомогательные соотношения, связывающие регистрируемые величины в базовых экспериментах на свободное и стесненное сжатие. Разработаны программы базовых экспериментов, включающие монотонное и ступенчатое с промежуточными разгрузками нагружение, позволяющие идентифицировать изотропные упругие и пластические свойства исследуемых материалов. Эти программы предусматривают стесненное сжатие в широком диапазоне изменения пористости (и плотности) материала и свободное сжатие материала в весьма узком диапазоне изменения этих переменных состояния. Последнее представляется рациональным для образцов, отштампованных из порошковых материалов, с низкой степенью консолидации.

При этом также не возникает избыточных данных, а задача идентификации рассматриваемой модели оказывается корректной. Кривая упрочнения при свободном сжатии получается масштабированием по независимой и зависимой переменным функции упрочнения при стесненном сжатии. Рассматриваемая трехмерная модель способна описывать кривые упрочнения при пластическом течении в других напряженных состояниях,

находящемся на эллиптической части поверхности текучести, и изменении напряженного состояния. В рамках рассматриваемой модели из базовых экспериментов на сжатие одновременно находится один параметр (угол внутреннего трения) конической части поверхности текучести в предположении отсутствия сцепления. По упругим модулям, определяемым по начальным участкам разгрузки при испытаниях на свободное и стесненное сжатие, вычисляется коэффициент Пуассона, при этом не требуется связываться с измерениями поперечного размера образца, не лишенными определенных недостатков. Полагается, что коэффициент поперечной деформации, постоянный для свободного сжатия в области пластичности в рамках рассматриваемой модели, не претерпевает разрыва в точке текучести и равен коэффициенту Пуассона. Разработанная методика позволяет определить две упругие константы и пять констант кЭП-модели пластичности для достаточно широкого круга некомпактных сред.

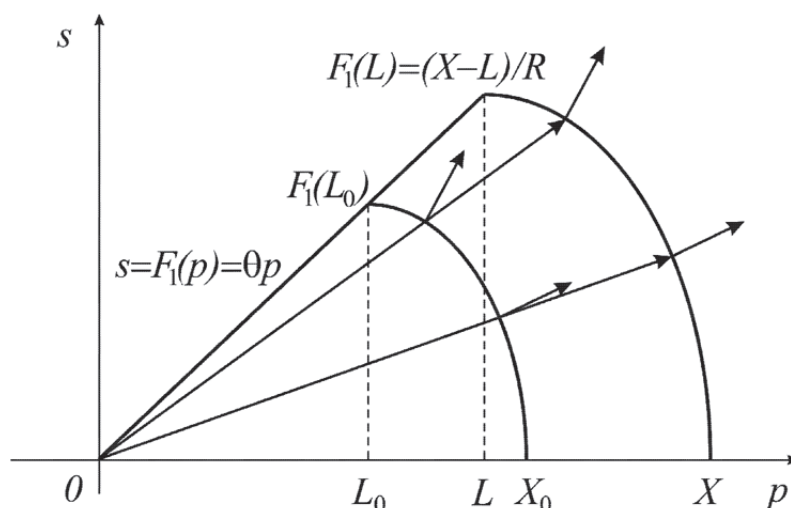


Рисунок 1 – Кривая текучести в модели Димаджо – Сэндлера на плоскости Бужинского при равенстве нулю коэффициента сцепления для двух состояний упрочнения и направления нормалей в точках текучести при пропорциональном нагружении

### Заключение

Разработана расчетно-экспериментальная методика, которая использована для определения упругих и пластических констант модели Димаджо – Сэндлера порошкообразного парафина марки Т1 фракции 0.63 мм. Выполнены базовые эксперименты в условиях квазистатического нагружения при комнатной температуре. Результат позволит использовать стандартные возможности пакета программ LS-DYNA® для расчета процессов экструзии порошкообразного литьевого воска и заполнения формы для отработки перспективных технологий литья по выплавляемым моделям.

### Благодарности

Исследование выполнено в рамках госзадания по темам Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН (А.А. Адамов и И.Э.

Келлер) и Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН (С.Г. Жилин и Н.А. Богданова).

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Адамов А.А., Келлер И.Э., Подкина Н.С. Базовые эксперименты для идентификации кэп-модели пластичности гибкого графита // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 131-142. doi: 10.37972/chgru.2020.20.13.013.

2. Адамов А.А., Келлер И.Э., Жилин С.Г., Богданова Н.А. Идентификация кэп-модели упругопластичности некомпактных сред в условиях сжимающего среднего напряжения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2024. Принято к опубликованию.

3. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material models for granular soils // Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. 1971. № 97. С. 935-950.

4. LS-DYNA<sup>®</sup> Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. Livermore Software Technology Corporation. 2017.

УДК 517.958 517

**Амосова Едена Владимировна**, РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований", ДВФУ; научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН, ИПМ ДВО РАН

**Amosova Elena Vladimirovna**, Russian Scientific Research Center "Far Eastern Center for Mathematical Research", FEFU; senior researcher, Institute of Applied Mathematics, IAM FEBRAS

#### РАЗРЕШИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

#### SOLVABILITY OF TWO-DIMENSIONAL BURGERS EQUATIONS

**Аннотация.** Рассматриваются модельные уравнения газовой динамики, учитывающие эффекты диссипации в двумерном случае. В основе математической модели, описывающей движение волн, лежит система уравнений Бюргерса. Доказана однозначная локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи в пространствах С.Л. Соболева, показано, что в случае отсутствия внешнего воздействия на систему существует единственное слабое решение «в целом» по времени.

**Abstract.** Model equations of gas dynamics are considered, taking into account dissipation effects in the two-dimensional case. The mathematical model describing the motion of waves is based on the Burgers equations system. The unique local solvability in time of the initial-boundary value problem in S.L. Sobolev spaces is proved, it is shown that in the absence of external influence on the system there is a unique weak solution "in general" in time.

**Ключевые слова:** локальная разрешимость, уравнения Бюргера, диссипация.

**Keywords:** local solvability, Burgers equations, dissipation.

Рассматривается вопрос корректности системы уравнений Бюргера в двумерном случае. Наиболее полно уравнение Бюргера исследовано в одномерном случае [1]-[5].

Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $t \in (0, T)$ . Рассмотрим систему нелинейных нестационарных уравнений

$$u_t + uu_x + vu_y = v\Delta u + f_1, \quad (1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = v\Delta v + f_2, \quad (2)$$

удовлетворяющих краевым и начальным условиям:

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} = 0, \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u} = \{u(x, y, t), v(x, y, t)\}$  – вектор-функция,  $v$  – положительная физическая константа,  $\Delta$  – оператор Лапласа, обозначение для частной производной имеет вид:  $g_l = \partial g / \partial l$ .

Будем использовать обычные обозначения  $L^p(W_p^1)$  для пространств функций, интегрируемых со степенью  $p \geq 1$  (вместе с обобщенными производными до порядка  $l \geq 0$ ). Через  $L^2(0, T; X)$  обозначим пространство измеримых функций, отображающих интервал  $(0, T)$  в пространство  $X$ .

Через  $H^s(\Omega)$  будем обозначать пространство Соболева  $W_2^s(\Omega)$ ,  $s > 0$ ,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\},$$

$H_0^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$  – сопряженное к  $H_0^1(\Omega)$  пространство обобщенных функций. Обозначим соответственно, через  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_X$  нормы в пространствах  $L^2(\Omega)$ ,  $X$ . Через  $\langle f, v \rangle_{X' \times X}$  обозначим значение функционала  $f \in X'$  на элементе  $v \in X$ . Скалярное произведение в пространстве  $L^2(\Omega)$  обозначим как  $(f, v)$ .

Отметим, что функция  $t \rightarrow (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  и справедлива оценка

$$\|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2.$$

Определим пространство слабых решений

$$H^{1,0} = \{f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) : f_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Справедлива следующая теорема вложения

$$H^{1,0} \subset C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Пусть выполняются условия

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$  – вектор правых частей,

**Определение.** Слабым решением задачи (1)-(3) называется вектор-функция  $\mathbf{u} \in H^{1,0}(\Omega)$  такая, что  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$  и почти всюду на  $(0, T)$  выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

**Теорема.**

1. Пусть выполняются условия (4). Найдется такое  $t_* \in (0, T)$ , что справедливо условие

$$\int_0^{t_*} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq \varepsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu \in (0, \nu^2).$$

Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)-(3) на интервале  $(0, t_*)$  для которого справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, t_*; L^2(\Omega))}^2 + \int_0^{t_*} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

2. Пусть выполняются условия (4) и  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)-(3) и справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

3. Пусть  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$ . Найдется такое  $t_* \in (0, T)$ , что справедливо условие

$$\|\mathbf{u}_0\|^2 < \nu, \quad \int_0^{t_*} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq \varepsilon_\nu, \quad \varepsilon_\nu \in (0, \nu^2).$$

Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)-(3) на интервале  $(0, t_*)$  для которого справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, t_*; L^2(\Omega))}^2 + \int_0^{t_*} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

Доказательство теоремы проводится на основе получения новых априорных оценок для галеркинских приближений с последующим предельным переходом по последовательности. В силу нелинейности дифференциальных уравнений применить стандартную технику доказательства неравенств, основанную на использовании леммы Гронуолла, не представляется возможным. С этой целью была получена новая оценка дифференциального неравенства, содержащего нелинейные слагаемые, имеющая аналог леммы Гронуолла.

**Лемма** (аналог леммы Гронуолла). Пусть  $\Psi \in C[0, +\infty)$ ,  $\Phi \in C^1[0, +\infty)$ ,  $\Psi(t) \geq 0$ ,  $\Phi(t) > 0$ ,  $t > 0$ ;  $\Phi(0) = 0$  и  $\mu = \text{const} > 0$ ,  $a = \text{const} > 0$ ,  $b(t)$ ,  $\delta(t)$  – заданные неотрицательные функции такие, что  $b \in L^1(0, T)$ ,  $\delta(t) \in L^1(0, T)$ . Тогда если выполняется неравенство

$$\Phi'(t) + \mu\Psi(t) \leq a\Phi(t)\Psi^{1/2}(t) + b(t)\Phi(t) + \delta(t),$$

то

$$\Phi(t) + \int_0^t \Psi(s) ds \leq C(\varepsilon) \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\varepsilon$  – положительное число, удовлетворяющее условиям

$$\int_0^t a^2 e^{\int_0^\tau b(s) ds} d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \int_0^t \delta(\tau) d\tau \leq v\sqrt{\varepsilon}.$$

В работе доказана теорема существования и единственности слабого решения двумерных уравнений Бюргера в случае, когда выполняются условия малости на данные, либо локально по времени. В случае, когда начальные данные имеют большую гладкость  $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$  доказано, что единственное слабое решение существует при условии малости только на функционал правых частей, либо локально по времени, а в случае однородности  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  существование и единственность слабого решения установлены без предположения малости на начальное состояние и временной интервал.

Разрешимость на достаточно малых временах означает, что разрушение решения при малых значениях параметра  $\nu$  может описывать сингулярный характер выхода решения за рамки модели. Анализ основных неравенств показывает, что главной причиной разрушений при наличии внешнего воздействия является градиентная нелинейность, уменьшение которой может привести к полной разрешимости системы.

### **Благодарности**

Работы по изучению свойств квазирегулярных отображений выполнены в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года. Исследование специальных функций поддержано РФФИ, проект № 23-21-00056, <https://rscf.ru/project/23-21-00056/>

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Белов Ю. В., Коршун Я. К. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргера // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Том XVI. № 3(55).
2. Белошапка В. К. О простых решениях уравнений Бюргера и Хопфа // Новосибирск : Изв. РАН. Сер. матем., 2021. Т.85(3). С. 5–12.
3. Юшков Е. В, Корпусов М. О. Градиентная катастрофа в обобщенных уравнениях Бюргера и Буссинеска // Изв. РАН. Сер. матем., 2017. Т. 81(6).С. 232–242.
4. Mamontov A. E. Existence of global solutions of multidimensional Burgers's equations of a compressible viscous fluid // Sbornik: Mathematics. 1999. V. 190(8). С.1131–1150.
5. Jenaliyev M.T., Assetov A.A., Yergaliyev M.G. On the Solvability of the Burgers Equation with Dynamic Boundary Conditions in a Degenerating Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. 15(42). P. 3661-3674.



УДК 539.3

**Андрианов Иван Константинович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Andrianov Ivan Konstantinovich**, candidate of engineering sciences, associate professor "Aircraft", Komsomolsk-na-Amure State University

**Феоктистов Сергей Иванович**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Feoktistov Sergey Ivanovich**, doctor of technical sciences, professor, chief researcher, Komsomolsk-na-Amure State University

## **О МОНОТОННОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ АВТОФРЕТИРОВАНИИ**

### **MONOTONY OF LOADING OF CYLINDRICAL SHELLS DURING AUTOFRETTAGE**

**Аннотация.** Исследование посвящено проблеме применения положений деформационной теории пластичности к решению задач об автофретировании цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением. В работе рассмотрены толстостенные цилиндрические оболочки со свободными и закрытыми концами при использовании упругопластических моделей материала со степенной и линейно-степенной аппроксимациями диаграммы деформирования материала.

**Abstract.** The study is devoted to the problem of applying the provisions of the deformation theory of plasticity to solving problems of autofretion of cylindrical shells loaded with internal pressure. The paper considers thick-walled cylindrical shells with free and closed ends using elastoplastic models of a material with power-law and linear-power approximations of the deformation diagram of the material.

**Ключевые слова:** автофретирование, цилиндрическая оболочка, пространство напряжений Ильюшина, упруго-пластическая деформация.

**Keywords:** autofrettage, cylindrical shell, Ilyushin's stress space, elastic-plastic strain.

#### **Введение**

На сегодняшний день в производственной сфере широко используются толстостенные цилиндрические оболочки, работающие в пределах упругих деформаций. В связи с этим одной из актуальных задач является повышение несущей способности толстостенных оболочек в пределах упругого деформирования, что может быть реализовано методом автофретирования. Процедура автофретирования позволяет повысить предел упругого

сопротивления в цилиндрической оболочке по сравнению с первоначальным, что на практике дает возможность исключить появление неупругих деформаций в заготовке при многократном нагружении.

Суть процесса автофретирования заключается в том, что цилиндрическую оболочку нагружают внутренним давлением, при котором оболочка частично или полностью переходит в стадию пластического деформирования. В результате такой процедуры в стенке оболочки «возникает напряженное состояние, аналогичное состоянию скрепленного многослойного цилиндра» [1]. Слои стенки оболочки, которые перешли в стадию пластического деформирования, создают эффект скрепления. Процесс автофретирования, как правило, проводится двумя способами: с помощью цилиндрической оболочки с закрытыми концами и цилиндрической оболочки со свободными концами [1, 2].

При этом согласно [1] эффект автофретирования повышается с упрочнением металла. На сегодняшний день решения задач об автофретировании цилиндрических оболочек существуют только для моделей материала с идеальной пластичностью и с линейным законом упрочнения. В случае нелинейного закона пластического деформирования расчет автофретирования цилиндрических оболочек требует разработки численных методов. В связи с этим актуальным представляется вопрос выбора эффективного метода для расчета напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек для упруго-пластических моделей материала с нелинейным упрочнением.

В рамках данного исследования рассматривалось применение положений деформационной теории пластичности и метода переменных параметров упругости. Однако одним из допущений, на котором основана деформационная теория пластичности, является монотонность процесса нагружения. Таким образом, цель работы заключалась в исследовании монотонности процесса нагружения при упруго-пластическом деформировании толстостенной цилиндрической оболочки, на внутренней поверхности которой приложено давление.

### **Основная часть**

В рамках данного исследования для оценки монотонности процесс нагружения представлялся в пространстве напряжений Ильюшина. Отслеживание положений точек в процессе нагружения проводилось с помощью условия постоянства объемов цилиндрических слоев, ограниченных поверхностями, проходящими через исследуемые точки. Согласно результатам расчета траектории нагружения в случае автофретирования цилиндрической оболочки с закрытыми концами процесс нагружения и для степенной, и для линейно-степенной аппроксимаций диаграммы деформирования материала является монотонным независимо от уровня нагрузки.

Согласно результатам для цилиндрической оболочки со свободными концами при линейной-степенной аппроксимации диаграммы деформирования наблюдается излом траекторий нагружения в пространстве напряжений Ильюшина, соответствующий излому на диаграмме деформирования материала при переходе от упругих деформаций к пластическим. Для степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала излом траекторий нагружения отсутствует, траектории нагружения близки к прямым лучам, небольшое искривление отмечается в точках вблизи внутренней границы оболочки, при нагрузке, близкой к предельной. Однако если процесс автофретирования рассматривается до момента перехода всей стенки оболочки в стадию пластического деформирования, траектории нагружения в пространстве напряжений Ильюшина представляют собой прямые лучи, исходящие из начала координат.

### **Заключение**

Согласно анализу процесса нагружения цилиндрических оболочек при автофретировании следует, что для оболочек с закрытыми концами процесс нагружения является монотонным и для степенной, и для линейно-степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала. В случае автофретирования цилиндрической оболочки со свободными концами процесс нагружения является близким к монотонному для степенной диаграммы деформирования материалов. Полученные исследования позволяют прийти к заключению, что положения деформационной теории пластичности Лава могут быть использованы для расчета процессов автофретирования.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке «Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации» в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчёта пластического формообразования заготовок штамповочного производства».

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Смирнов-Аляев, Г.А. Теория автоскрепления цилиндров / Г.А. Смирнов-Аляев. - М. : Оборонгиз, 1940. - 284
2. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

УДК 538.94

**Анисич Александр Игоревич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Anisich Alexandr Igorevich**, student, Far Eastern Federal University

**Макаров Денис Владимирович**, д.ф.-м.н., Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева, Дальневосточного Отделения Российской Академии Наук

**Makarov Denis Vladimirovich**, Holder of an Advanced Doctorate (Doctor of Science) in Physico-mathematical Sciences, a V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far East Branch of the Russian Academy of Sciences

## **СИМУЛЯЦИЯ СПИНОВЫХ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭКСИТОН-ПОЛЯРИТОННЫХ КОНДЕНСАТОВ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА SIMULATION OF SPIN MODELS USING EXCITON-POLARITON BOSE-EINSTEIN CONDENSATES**

**Аннотация.** Нам известно, что диссипативные системы могут выступать в качестве инструментов минимизации крупномасштабных, сложных оптимизационных задач. Основной объект нашего исследования — это экситонные поляритоны, конденсированные системы которых предполагается исследовать с помощью XY-модели.

**Abstract.** We know that dissipative systems can act as minimisation tools for large-scale, complex optimisation problems. The main object of our study is exciton polaritons, whose condensed systems are supposed to be investigated using the XY model.

**Ключевые слова:** диссипативные системы, экситонные поляритоны, XY-модель, конденсированные системы, оптимизационные задачи, сложные системы, минимизация.

**Keywords:** dissipative systems, exciton polaritons, XY model, condensed systems, optimization problems, complex systems, minimization.

### **Введение**

В настоящем и будущем различные физические системы применимы в качестве неклассических вычислительных средств и вполне успешно конкурируют с классическими методами решения QUBO-задач. Все эти подходы направлены на более эффективное, точное и быстрое решение. Статистическая физика имеет свой ряд QUBO-задач, а именно поиск глобального минимума различных гамильтонианов. Например, в модели Изинга.

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} S_i S_j$$

отображаются вполне практические задачи, такие как: задача о назначениях [1], задача о рюкзаке [2], задача коммивояжера [3], задача разбиения

графа [4], задача макс-клик [5]. Все они относятся к классу NP-сложных. Модель XY:

$$H = - \sum_{i,j} J_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

непосредственно не применима к решению задач дискретной оптимизации, за исключением некоторых примеров (см. ниже), но ценность модели заключается в отображении в неё физических задач, таких как исследование магнитных плёночных структур [6], квантовых симуляторах [7], квантовые симуляции фазовых переходов [8].

### Основная часть

Экситон-поляритоны — это квазичастицы, относящиеся к классу бозонов, представляющие собой квантовую суперпозицию электромагнитного и поляризационного возбуждения в твёрдом теле. Поляризационный вклад несёт в себе электрон-дырочная пара, реализуемая в полупроводниковой микрополости и имеющая кулоновскую связь — экситон. Электромагнитное возбуждение задают фотоны, запертые в микрорезонаторе, построенном на брэгговских зеркалах. Экситонные поляритоны образуются, когда закачанные фотоны и фотоны, освобождённые из экситона, становятся связанными. Ввиду недолгой жизни поляритона он распадается, испуская фотон, который несёт полную информацию о поляритоне, испустившем его. Данная особенность позволяет в реальном времени давать характеристику системе.

Ввиду того, что экситон-поляритоны подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна и обладают низкой эффективной массой, при определённых условиях они образуют поляритонный конденсат, который характеризуется отсутствием термодинамического равновесия, повышенной температурой конденсации (например, комнатной) и низкой плотностью частиц. Всё это приводит к образованию двумерных сетей конденсатов. Макроскопическая когерентность таких сетей характеризуется сложным классическим полем с чётко определёнными относительными непрерывными фазами с возможностью дискретизации до значений с помощью резонансного возбуждения [11].

В настоящее время используемый нами метод моделирования — это метод временной эволюции марковского стохастического уравнения Гросс-Питаевского [9][10]. Время в данном решении — дискретная величина, и на каждом временном шаге вычисляется новая волновая функция, исходя из её прошлых значений. Уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi(\mathbf{r}, t) + P_{\text{coh}}(\mathbf{r}, t) + \hat{D}_{\text{cav}} \psi(\mathbf{r}, t) + \hat{D}_{\text{ex}} \psi(\mathbf{r}, t)$$

$P_{\text{coh}}(\mathbf{r}, t)$  - член задающий когерентную лазерную накачку фотонов в микрорезонатор.

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + \alpha_c|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \alpha_r\rho_r(\mathbf{r}, t) \quad - \text{ унитарный}$$

оператор включает в себя кинетическую, потенциальную и вызванную межчастичным взаимодействием энергии;

$\hat{D}_{\text{cav}}$  - неэрмитовый оператор, задающий марковское взаимодействие с фотонным резервуаром;

$\hat{D}_{\text{ex}}$  - неэрмитовый оператор, задающий немарковское взаимодействие с экситонным резервуаром

### **Заключение**

Будут получены основные состояния различных форм XY-решеток, в узлах которых заданы экситон-поляритоновые конденсаты. Это исследование должно помочь в дальнейшем развитии не классических вычислителей.

### **Благодарности**

Работы выполнены при финансовой поддержке гранта от фонда "Базис".

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Lyle Ramshaw, Robert E. Tarjan. "On Minimum-Cost Assignments in Unbalanced Bipartite Graphs."
2. Silvano Martello, Paolo Toth. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. John Wiley & Sons, 1990, 296 p.
3. Cook, William. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. Princeton University Press, 2012. ISBN 978-0-691-15270-7
4. Aydin Buluc, Henning Meyerhenke, Ilya Safro, Peter Sanders, Christian Schulz. "Recent Advances in Graph Partitioning."
5. Jean R. S. Blair, Barry W. Peyton. "An Introduction to Chordal Graphs and Clique Trees." January 1991.
6. Wang Yi, Liu Xiao-Yan, Sun Lei, Zhang Xing, Han Ru-Qi. "Critical Properties of XY Model on Two-Dimensional Layered Magnetic Films."
7. I. M. Georgescu, S. Ashhab, Franco Nori. "Quantum Simulation."
8. X. M. Yang, G. Zhang, Z. Song. "Phase Transition in Phase Transition Lines of Quantum XY Model."
9. Aleksei D. Alliluev, Denis V. Makarov, Norair A. Asriyan, Andrey A. Elistratov, Yurii E. Lozovik. "Formation of Exciton-Polariton BEC in the Non-Markovian Regime." Physics Letters A, Volume 453, 2022, 128492, ISSN 0375-9601.
10. Aleksey Alliluev, Denis Makarov, Norair Asriyan, Andrei Elistratov, Yurii Lozovik. "Non-Markovian Stochastic Gross-Pitaevskii Equation for the Exciton-Polariton Bose-Einstein Condensate." Journal of Low Temperature Physics, 214, 2024, 1-13. DOI: 10.1007/s10909-023-03027-4.
11. K. P. Kalinin, N. G. Berloff. "Simulating Ising and n-State Planar Potts Models and External Fields with Nonequilibrium Condensates." Phys. Rev. Lett., vol. 121, no. 23, December 4, 2018, Article 23.

УДК 537.611.2

**Анисич Александр Игоревич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Anisich Alexandr Igorevich**, student, Far Eastern Federal University

**Трухин Вячеслав Олегович**, старший преподаватель Дальневосточный федеральный университет, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Trukhin Viacheslav Olegovich**, senior lecturer, Far Eastern Federal University, junior researcher, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

**Нефедев Константин Валентинович** – д.ф.-м.н., профессор, профессор департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ ДВФУ, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН

**Nefedev Konstantin Valentinovich**. Holder of an Advanced Doctorate (Doctor of Science) in Physico-mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Theoretical Physics and Intelligent Technologies, Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University, Vladivostok

**Лобанова Элиза Александровна**, студент, Дальневосточный федеральный университет, лаборант, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Lobanova Eliza Alexandrovna**, student, Far Eastern Federal University, laboratory assistant, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

**Черкасов Михаил Дмитриевич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Cherkasov Michail Dmitrievich**, student, Far Eastern Federal University

**Терновой Никита Константинович**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Ternovoi Nikita Konstantinovich**, student, Far Eastern Federal University

## **ПОИСК ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛИ**

### **ЭДВАРДС-АНДЕРСЕНА ПУТЕМ ПЕРЕБОРА ВСЕХ СОСТОЯНИЙ**

### **SEARCH FOR AN EXACT SOLUTION OF THE EDWARDS-ANDERSEN MODEL BY A COMPLETE SEARCH OF ALL STATES**

**Аннотация.** Разработан алгоритм полного перебора для двумерной модели Изинга, применены новые методы хранения данных, собраны расчеты для многих конфигураций модели Эдварс-Андерсена.

**Abstract.** A full brute-force algorithm for the two-dimensional Ising model is developed, new data storage methods are applied, and computations for many configurations of the Edwards-Andersen model are collected.

**Ключевые слова:** модель Изинга, алгоритм полного перебора, CUDA, параллельные вычисления, хранение данных, модель Эдварс-Андерсена, спиновые стекла, высокопроизводительные вычисления, двумерные системы, конфигурационные расчеты

**Keywords:** Ising model, brute-force algorithm, CUDA, parallel computing, data storage, Edwards-Anderson model, spin glasses, high-performance computing, two-dimensional systems, configuration calculations.

## **Введение**

С одной стороны, проблема решения больших графов методом полного перебора является основной проблемой для математических моделей, точность решения которых критично для предсказания и описания реальных событий и экспериментов, с другой стороны, она может служить отличной мерой эффективности как аппаратного, так и программного обеспечения. Работа по оптимизации таких решений активно ведется.

## **Основная часть**

Для квадратной решетки модели Изинга[1] размера  $10 \times 10$  с открытыми граничными условиями взаимодействие осуществляется только с ближайшими соседями. Число всех состояний равно  $2^{100}$ , что при классическом перечислении заняло бы несоизмеримо много времени.[2] Мы разработали «Алгоритм расчёта плотности состояний полным перебором» представленный в виде псевдокода:

Алгоритм: Расчет полной плотности состояний методом полного перебора

Входные данные:

- Размер решетки
- Распределение обменных констант

Выходные данные:

- Полная плотность состояний

Конфигурация GPU:

1. Создание массива конфигураций 1D цепочки
2. Создание G-тензора:

G [набор конфигураций] [энергия] [спиновый избыток] [набор простых чисел]

Основной цикл:

Для каждого слоя решетки:

Для каждой добавляемой 1D цепочки:

Для каждой конфигурации самого внешнего слоя текущей цепочки:

Для каждой конфигурации добавленной 1D цепочки:

1. Рассчитать энергию и спиновый избыток.
2. Атомарное добавление кратности вырождения в

G-тензор

[конфигурация внешнего слоя] [энергия] [спиновый избыток] [набор простых чисел]



Конец цикла для конфигурации добавленной 1D цепочки.

Конец цикла для конфигурации внешнего слоя.

Конец цикла для 1D цепочки.

Конец цикла для слоев решетки.

Декодирование:

Декодирование кратности вырождения по набору простых чисел.

Форматирование:

Форматирование данных G-тензора в терминах:

- Кратность вырождения
- Спиновый избыток
- Энергия

Декодирование кратности вырождения по набору простых чисел

Форматирование данных из G-тензора в кратность вырождения, спиновый избыток, энергию

При расчетах на GPU[3] узким местом является запись и чтение в глобальную память, и чтобы не тратить время на многократную запись накапливаемых в результате расчетов данных о вырождении, энергии и спиновом избытке, мы создали G-тензорный массив [config right][E][M][набор простых чисел] с осями одномерного размера цепи, максимальной энергии  $\times 2 + 1$ , максимального спинового избытка  $\times 2 + 1$  и набором простых чисел для записи вырождения, соответственно. Информация о вырождении по координатам энергии + Emax и спинового избытка + Mmax добавлялась к этому тензору атомарно в процессе расчета.

Координата конфигурации цепочки была необходима для того, чтобы знать, какую конфигурацию правого слоя мы соединяем с новой одномерной цепочкой справа и какие состояния всей левой решетки связаны с этой конфигурацией.

Поскольку вырождение состояний с одинаковой энергией и спиновым избытком может принимать значения от  $2 \sim 2^N$ , где N - размер решетки, при размерах больше  $8 \times 8$  вырождения не укладываются в целочисленный встроенный тип. Для решения этой проблемы полученные в решении вырождения разлагаются на простые числа, а после всех вычислений расшифровываются с помощью китайской теоремы об остатках[4],[5].

### **Заключение**

Разработанная оптимизация полного перебора открывает новые перспективы для дальнейших исследований в этой области. Продолжение работы над алгоритмом позволит решать задачи на решетках еще больших размеров за приемлемое время.

## **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10069, <https://rscf.ru/project/24-71-10069/>

The research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-71-10069, <https://rscf.ru/en/project/24-71-10069/>

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. E. Ising, Z. Phys. XXXI (1925)
2. F Barahona. On the computational complexity of ising spin glass models. Journal of Physics A: Mathematical and General,
3. Nvidia CUDA, <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>.
4. Dauben, Joseph W. (2007), "Chapter 3: Chinese Mathematics", in Katz, Victor J. (ed.), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook, Princeton University Press, pp. 187–384, ISBN 978-0-691-11485-9
5. Dence, Joseph B.; Dence, Thomas P. (1999), Elements of the Theory of Numbers, Academic Press, ISBN 9780122091308

УДК 669.15

**Барсукова Нина Валерьевна**, аспирант, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Barsukova Nina Valerievna**, graduate student, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

**Попов Артем Владимирович**, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Popov Artem Vladimirovich**, junior researcher, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

**Комаров Олег Николаевич**, кандидат технических наук, доцент, директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Komarov Oleg Nikolaevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Director, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur

## **СТРУКТУРА И СВОЙСТВАМИ СПЛАВОВ, ПОЛУЧАЕМЫХ АЛЮМОТЕРМИЕЙ ПРИ СЕПАРАЦИИ ФРАКЦИОННЫХ СОСТАВОВ КОМПОНЕНТОВ ТЕРМИТНЫХ СМЕСЕЙ**

## **STRUCTURE AND PROPERTIES OF ALLOYS PRODUCED BY ALUMINOTHERMIA AT SEPARATION OF FRACTIONAL COMPOSITIONS OF THERMITE MIXTURES COMPONENTS**

**Аннотация.** Повышение конкурентоспособности продукции металлургического производства является актуальной задачей и решается

путем совершенствования существующих и разработки новых энергоэффективных и ресурсосберегающих технологий. Одним из таких процессов является алюмотермия. Данный способ получения сплавов не требует подведения внешних источников энергии, а использует тепло экзотермической реакции, протекающей в термитных смесях. Компонентами термитных смесей являются металлотходы машиностроительных и металлургических предприятий, таких как окалина и стружка черных и цветных сплавов. Однако при имеющихся неоспоримых преимуществах алюмотермии существуют и недостатки, сдерживающие ее более широкое применение на производстве, связанные со сложностями прогнозирования и управления, параметрами экзотермических реакций и характеристиками получаемых сплавов. Одним из подходов регулирования указанных показателей является использование термитных шихт с набором разнофракционных составов окислы и восстановителя. Результаты применения данного способа при получении экспериментальных сплавов освещены в представленной работе.

**Annotation.** Increasing the competitiveness of metallurgical production is an urgent task and is solved by improving the existing and developing new energy-efficient and resource-saving technologies. One of such processes is aluminothermy. This method of alloy production does not require external energy sources, but utilizes the heat of exothermic reaction occurring in thermite mixtures. Components of thermite mixtures are metal wastes of machine-building and metallurgical enterprises, such as scale and chips of ferrous and non-ferrous alloys. However, with the existing undeniable advantages of alumina-thermia, there are also disadvantages that restrain its wider application in production, associated with the difficulties of control and forecasting, parameters of exothermic reactions and characteristics of the resulting alloys. One of the approaches to regulate these parameters is the use of thermite charge with a set of different fractional compositions of scale and reducing agent. The results of application of this method in obtaining experimental alloys are covered in the paper.

**Ключевые слова:** термитная шихта, экзотермическая реакция, железоуглеродистый сплав, химический состав, микроструктура, предел прочности, фракционный состав.

**Keywords:** thermite charge, exothermic reaction, iron-carbon alloy, chemical composition, microstructure, tensile strength, fractional composition.

## **Введение**

Существующие экономические реалии требуют сокращения издержек при производстве металлов и сплавов с целью обеспечения их ценовой привлекательности для потребителей. Снижение себестоимости металлопродукции определяется вовлечением в производственный оборот недорогих доступных материалов, в том числе вторичных, а также сокращением потребления энергетических ресурсов к единице объема выпускаемой продукции [1, 2]. Алюмотермия как способ получения

железоуглеродистых сплавов комплексно отвечает заявленным требованиям [3]. В первую очередь за счет того, что при указанном способе используется тепло экзотермической реакции для перевода шихты в жидкое состояние отсутствует необходимость подведения внешних энергетических источников, во-вторых термитная шихты составляется из отходов машиностроительных и металлургических предприятий – стружки алюминиевых сплавов, окалина, скрапа и т.д. Исходя из этого алюмотермия имеет перспективы расширения промышленного использования после решения ряда задач, связанных с управлением свойствами сплавов. Одним из простых и эффективных способов их регулирования представляется использование термитных шихт из разнофракционных составов окислы и восстановителя [4].

Обозначенные обстоятельства обусловили цель работы, связанную с определением влияния фракционных составов окислы и восстановителя на структуру и механические свойства экспериментальных сплавов. Для достижения поставленной цели решались основные задачи:

- получение экспериментальных образцов из составов термитных смесей комбинированием фракций исходных материалов;
- определение показателей предела прочности и относительного удлинения бездефектных образцов;
- проведение анализа микроструктур экспериментальных образцов.

#### **Основная часть**

Для реализации способа алюмотермии применялись следующие компоненты. Металлургическая окислы следующего химического состава, % по массе: Fe=71,5; O<sub>2</sub>=22,64; Si=2,96; Mn=1,19; Al=0,7; Cu=0,44; Ni=0,19; Cr=0,17; C=0,15; S=0,03; P=0,03. Стружка алюминиевого сплава (восстановитель) следующего химического состава, % по массе: Al=89,443; Mn=0,304; Si=1,097; Cr=0,062; Ni=0,008; Cu=2,040; Fe=0,166; Mg=3,917; Zn=2,961. Соотношение содержания окислы и восстановителя в термитных шихтах принималось 75/25%, соответственно. Алюминиевая стружка перед рассевом на фракционные составы проходила стадию измельчения. Для отсева используемых при составлении экзотермических смесей компонентов на фракции использовались сита с размером ячейки 0,2 мм, 1,5 мм, 2,5 мм, 3,2 мм, таким образом получены по пять фракционных составов окислы и восстановителя: <0,2 мм; 0,2-1,5 мм; 1,5-2,5 мм; 2,5-3,2 мм; >3,2 мм, далее по тексту фракционный состав №1, №2, №3, №4, №5, соответственно. После осуществлялось поочередное смешивание фракций, участвующих в алюмотермитном процессе материалов. Методики получения образцов и проведения исследований приведены в работе [5].

Результаты исследования разрушения экспериментальных образцов при растяжении представлены в виде диаграмм на рисунке 1, позволили установить их пределы прочности ( $\sigma_b$ ). В качестве примера рассмотрено использование восстановителя фракционного состава №3 (ФВ3) и окислы фракционных составов №2 (ФО2), №3 (ФО3), №4 (ФО4), №5 (ФО5). На

графике наблюдается различие свойств образцов. Отсутствие на диаграммах разрушения большинства образцов характерной площадки текучести говорит о том, что полученные материалы достаточно хрупкие.

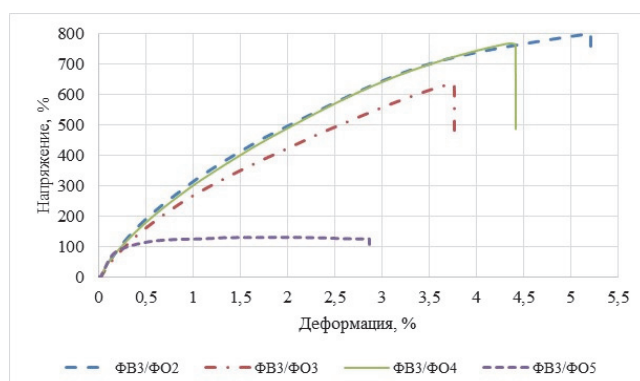


Рис. 1. Диаграммы разрушения образцов полученных при использовании фракционных составов восстановителя №3 и окислителя №2, №3, №4, №5

Еще более существенный разброс значений показателей предела прочности достигается при обоюдном комбинировании фракций исходных компонентов. Данное обстоятельство обуславливается влиянием фракционного состава компонентов на параметры экзотермической реакции (скорость и температуру горения составов), которые определяют выход металлической фазы, ее химический состав, условия кристаллизации, структуру и т.д. На рисунке 2, в качестве примера, приведены структуры экспериментальных образцов.

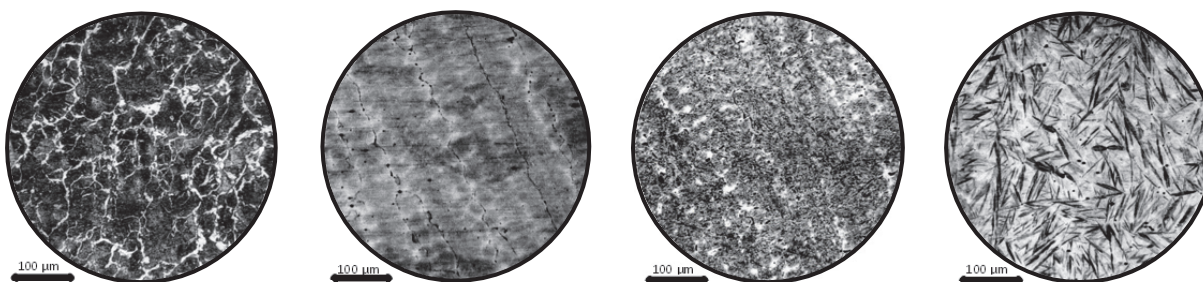


Рис. 2. Микроструктуры образцов полученных при использовании фракционных составов восстановителя №3 и окислителя №2, №3, №4, №5

### Заключение

Проведенными исследованиями установлено, что управление свойствами сплавов, при прочих равных, условиях возможно комбинированием фракционных составов исходных компонентов термитных шихт. Данный подход при использовании одинаковых составов с разным размером частиц позволяет получать сплавы содержанием основных химических элементов: C=0,067-0,900%; Mn=0,029-1,395%; Si=0,022-1,181%. При этом сформированные структуры, состоят из: троостита, феррита и

перлита, видманштетта, мартенсита и др., определяют, вместе с другими показателями, предел прочности при растяжении, значения которого входят в диапазон 129-798 МПа.

### **Благодарности**

Исследование выполнено в рамках государственного задания Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Межрегиональная энергосберегающая компания в черной металлургии. – URL: <https://mec-energo.ru/2011-10-03-19-09-18>. (дата обращения 08.09.2024).

2. Измайлова А.С. Технологические возможности сокращения себестоимости продукции металлургических предприятий на современном этапе/ А.С. Измайлова, А.Н. Шаповалов // Тренды и управление. 2017. №2. С. 132-147.

3. Материалообразующие высокоэкзотермические процессы: металлотермия и горение систем термитного типа / Под ред. М.И. Алымова. – М.: РАН, 2021. – 376 с.

4. Патент № 2807405 РФ. Способ получения сплава из термитной смеси / С.Г. Жилин, О.Н. Комаров, Н.В. Барсукова, В.А. Худякова, В.В. Предеин, А.В. Попов; опубл. 14.11.2023, Бюл. 32.

5. Barsukova N.V. Control of Properties of Iron-Carbon Alloys Produced by Aluminothermy by Varying Technological Factors / N.V. Barsukova, O.N. Komarov, S.G. Zhilin, V.V. Predein, A.V. Popov, V.A. Khudyakova // Metallurgist. 2023. V. 67. P. 1192-1207.

УДК 517.588

**Бахтин Кирилл Евгеньевич**, инженер-исследователь, РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований", ДВФУ  
**Bakhtin Kirill Evgenyevich**, engineer-researcher, Russian Scientific Research Center "Far Eastern Center for Mathematical Research", FEFU

## **О РЕДУКЦИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ТИПА IPD ON REDUCTION OF THE IPD HYPERGEOMETRIC FUNCTION**

**Аннотация.** Данный доклад посвящен изучению обобщенной гипергеометрической функции, вычисленной в единице и с целыми положительными разностями (гипергеометрическая функция типа IPD с единичным аргументом). Получено рекуррентное соотношение, которое сводит гипергеометрическую функцию типа IPD к  ${}_4F_3$ . Получены новые обобщения известных формул суммирования Карлсона-Минтона.

**Abstract.** This report is devoted to the study of a generalized hypergeometric function calculated in unity and with integer positive differences (hypergeometric function IPD in a single argument). We obtain a recurrence relation that reduces the IPD hypergeometric function to  ${}_4F_3$ . Also, continuing the research of hypergeometric functions of this type, we were able to generalize the well-known Carlson-Minton summation formulas.

**Ключевые слова:** обобщенные гипергеометрические функции, IPD тип, специальные функции, Карлсон-Минтон

**Keywords:** generalized hypergeometric functions, IPD type, special functions, Carlson-Minton

### Введение

Пусть  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$  означают комплексные вектора, причем  $b_j \notin \mathbb{N}_0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Гипергеометрическая функция, вычисленная в единице, определяется как ряд

$${}_{p+1}F_p \left( \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n, \dots, (a_{p+1})_n}{n! (b_1)_n, \dots, (b_p)_n},$$

где  $(a)_n$  – символ Похгаммера. Данный ряд сходится в случае, когда выполняется условие положительности параметрического баланса

$$\operatorname{Re}(\sum_{i=0}^p (b_i - a_i) - a_{p+1}) > 0.$$

В теории гипергеометрических функций широко известны преобразования и формулы суммирования, которые восходят к Леонарду Эйлеру. Большое внимание уделяется изучению обобщенных гипергеометрических функций с целыми параметрическими разностями.

Целью данного доклада является исследование свойств обобщенных гипергеометрических функций. Для достижения указанной цели поставлены следующие задачи:

1. Изучить группу преобразований  ${}_4F_3$  с единичной параметрической разностью из статьи [1] и выяснить возможность редукции гипергеометрической функции произвольной размерности к  ${}_4F_3$ .

2. Получить новые формулы суммирования гипергеометрических функций с целыми положительными и отрицательными параметрическими разностями. А именно расширить формулы суммирования Карлсона-Минтона и Миллера-Париса на ранее запрещенные значения параметров.

### Основная часть

Первая часть доклада относится к статье [1], в которой была изучены двухчленные преобразования вида

$${}_4F_3(\mathbf{r}, f) = M(\mathbf{r}) \frac{\varepsilon f + \lambda(\mathbf{r})}{f} {}_4F_3(D\mathbf{r}, \eta), \quad \eta = \frac{\varepsilon f + \lambda(\mathbf{r})}{\alpha(\mathbf{r})f + \beta(\mathbf{r})}, \quad \#(1)$$

где  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{r} = (a, b, c, d, e, 1)^T$  – это векторы-столбцы,  $M(\mathbf{r})$  функция Г-типа,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $\lambda(\mathbf{r})$ ,  $\alpha(\mathbf{r})$ ,  $\beta(\mathbf{r})$  рациональные функции, зависящие от параметров  $a, b, c, d, e$  (возможно исчезающие, но при  $\lambda = 1$ , если  $\varepsilon = 0$ ),

$D$  матрица размерности  $6 \times 6$  с натуральными числами, нижней строкой  $(0,0,0,0,0,1)$  и

$${}_4F_3(\mathbf{r}, f) = {}_4F_3 \left( \begin{matrix} a, b, c, f + 1 \\ d, e, f \end{matrix} \right). \#(2)$$

Теперь заменим параметр  $f$  на конечную последовательность  $\mathbf{f}_k = (f_1, \dots, f_k) \in \mathbb{C}_k$  и обозначим

$${}_{k+3}F_{k+2}(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k) = {}_{k+3}F_{k+2} \left( \begin{matrix} a, b, c, \mathbf{f}_k + 1 \\ d, e, \mathbf{f}_k \end{matrix} \right). \#(3)$$

Давайте поднимем вопрос о существовании преобразований, подобных (1) для функций (3). В первой части доклада будет показано, что каждая функция вида (3) может быть сведена к некоторой функции  ${}_4F_3$ , имеющей форму (2). Таким образом каждая трансформация (1) генерирует некоторое преобразование для функций типа (3).

**Теорема 1.** Для  $k \geq 2$  существуют рациональные функции  $V_k = V_k(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k)$  и  $\mu_k = \mu_k(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k)$  такие, что

$${}_{k+3}F_{k+2}(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k) = V_k(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k) {}_4F_3(\mathbf{r}, \mu_k(\mathbf{r}, \mathbf{f}_k)). \#(4)$$

Функции  $V_k$  и  $\mu_k$  вычисляются рекурсивно.

Вторая часть доклада относится к обобщению известных формул суммирования Минтона и Карлсона. В 1970 Минтон [2] доказал формулу суммирования

$${}_pF_{p-1} \left( \begin{matrix} -k, b, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ b + 1, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{k!}{(b+1)_k} \frac{(\mathbf{f} - b)_k}{(\mathbf{f})_k},$$

справедливую для  $k \geq m, k \in \mathbb{N}$  и где  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{p-2}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^{p-2}$ . Вскоре после этого Карлсон обобщил его результат [3] заменив  $-k$  на произвольный комплексный параметр  $a$ , удовлетворяющий условию  $Re(1 - a - m) > 0$ . Формула Карлсона имеет вид

$${}_pF_{p-1} \left( \begin{matrix} a, b, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ b + 1, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b+1-a)} \frac{(\mathbf{f} - b)_k}{(\mathbf{f})_k}. \#(4)$$

В статье [4] было получено обобщение (4), заменяя число  $b$  на вектор  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ . А именно, была доказана формула [4, (2.11)]

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)} F \left( \begin{matrix} a, \mathbf{b}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \mathbf{b} + \mathbf{p}, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{(\mathbf{b})_p}{(\mathbf{f})_m} \sum_{q=1}^n \frac{\Gamma(\beta_q)(\mathbf{f} - \beta_q)_m}{B_q \Gamma(1 + \beta_q - a)}, \#(5)$$

где  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  представляет собой вектор целых положительных чисел,  $n = p_1 + p_2 + \dots + p_l$ , и все координаты вектора  $\beta = (b_1, b_1 + 1, \dots, b_1 + p_1 - 1, \dots, b_l, b_l + 1, \dots, b_l + p_l - 1) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ ,  $B_q = \prod_{v=1, v \neq q}^n (\beta_v - \beta_q)$ . Достаточно рассматривать случай  $\mathbf{p} = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ . Тогда (4) принимает вид



$${}_{l+p-1}F_{l+p-2} \left( \begin{matrix} a, \mathbf{b}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \mathbf{b} + \mathbf{1}, \mathbf{f} \end{matrix} \right) = \frac{\Gamma(1-a)(\mathbf{b})_1}{(\mathbf{f})_m} \sum_{q=1}^l \frac{\Gamma(b_q)(\mathbf{f} - b_q)_m}{\alpha_q \Gamma(1+b_q-a)}, \#(6)$$

где  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ ,  $\alpha_q = \prod_{v=1, v \neq q}^l (b_v - b_q)$ . В данном докладе речь пойдет об обобщении (6) на случай одинаковых координат вектора  $\mathbf{b}$ . Этот путь приводит нас к следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_l)$ ,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ ,  $Re(n-1-m) > 0$ ,  $(-1+a, -\mathbf{b}, -\mathbf{b}+a-1, -\mathbf{f}) \notin \mathbb{N}_0^{2l+p-1}$ .

Тогда:

$${}_{p+n+l-2}F_{p+n+l-1} \left( \begin{matrix} a, \underbrace{b_1, \dots, b_1}_{n_1\text{-times}}, \underbrace{b_2, \dots, b_2}_{n_2\text{-times}}, \dots, \underbrace{b_l, \dots, b_l}_{n_l\text{-times}}, \mathbf{f} + \mathbf{m} \\ \underbrace{b_1+1, \dots, b_1+1}_{n_1\text{-times}}, \underbrace{b_2+1, \dots, b_2+1}_{n_2\text{-times}}, \dots, \underbrace{b_l+1, \dots, b_l+1}_{n_l\text{-times}}, \mathbf{f} \end{matrix} \right) =$$

$$\frac{\Gamma(1-a)}{(\mathbf{f})_m} \sum_{i=1}^l \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{(-1)^{k_i+1} \alpha_{k_i}^i}{(k_i-1)!} \left( \frac{\Gamma(x)(\mathbf{f}-x)_m}{\Gamma(x-a+1)} \right)_{x=b_i}^{k_i-1}, \#(7)$$

где  $\alpha_{k_i}^i$  коэффициенты разложения  $\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i+x)^{n_i}}$  на простые дроби,

$$\prod_{i=1}^l \frac{b_i^{n_i}}{(b_i+x)^{n_i}} = \sum_{i=1}^l \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{\alpha_{k_i}^i}{(b_i+x)^{k_i}}. \#(8)$$

### Заключение

В рамках данной работы были получены новые формулы преобразования и суммирования для гипергеометрических функций. А именно:

1. Рекуррентная формула, которая сводит гипергеометрическую функцию  ${}_{p+1}F_p$  типа IPD, вычисленную в единице, к  ${}_4F_3$ .

2. Обобщение формул суммирования Минтона и Карлсона для гипергеометрических функций, вычисленных в единице.

Однако, остались открытыми некоторые вопросы.

Например, в данной работе остался открытым вопрос об аналоге Теоремы 1 при  $a = -k$  и отрицательном параметрическом балансе. Предложенное в данной работе доказательство в этом случае перестает работать.

### Благодарности

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Karp, D.V. Transformations for hypergeometric  ${}_4F_3$  with one unit shift: a group theoretic study./ D.V. Karp, E.G. Prilepkina.// Mathematics. - 2020.- V. 8(11) - P. 1966.

2. Minton, B.M, Generalized hypergeometric functions at unit argument./ B.M. Minton.// J Math Phys. - 1970. - V. 12. - P. 1375-1376.

3. Karlsson, P.W. Hypergeometric functions with integral parameter differences./ P.W. Karlsson.// J Math Phys. - 1971. - V. 12. - P. 270-271.

4. Karp, D.B. Extensions of Karlsson–Minton summation theorem and some consequences of the first Miller–Paris transformation./ D.B. Karp, E.G. Prilepkina.// Integral Transforms and Special Functions. - 2018. V. 29. - P. 955-970.

УДК 681.2.082

**Башков Олег Викторович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Материаловедение и технология новых материалов», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Bashkov Oleg Viktorovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Materials Science and Technology of New Materials, Komsomolsk-on-Amur State University

**Башков Илья Олегович**, младший научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Bashkov Ilya Olegovich**, junior researcher, Komsomolsk-on-Amur State University

**Безрук Михаил Николаевич**, старший научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Bezruk Mikhail Nikolaevich**, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS

**Ефимов Тимофей Александрович**, научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Efimiv Timofei Alexandrovich**, Junior Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS

**Ромашко Роман Владимирович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, директор Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Romashko Roman Vladimirovich**, Corresponding Member RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS

## **ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В СТЕКЛОПЛАСТИКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ**

## **CHANGES IN THE SPECTRUM OF ACOUSTIC EMISSION SIGNAL IN FIBERGLASS UNDER THE INFLUENCE OF TENSILE STRESSES**

**Аннотация.** Целью работы является установление влияния растягивающих напряжений в стеклопластике на спектры сигналов

акустической эмиссии, регистрируемых пьезоэлектрическим и волоконно-оптическим датчиком акустической эмиссии. Для этого формовкой по методу вакуумной инфузии были изготовлены образцы стеклопластика. Образцы были вырезаны для испытаний на разрывной машине. На поверхность рабочей части образцов был наклеен волоконно-оптический датчик, функционирующий совместно с адаптивным лазерным голографическим интерферометром. Пьезоэлектрический преобразователь устанавливался на нерабочей части образца. Сигналы акустической эмиссии регистрировались обоими датчиками при ступенчатом нагружении растягивающей нагрузкой. Результатом работы является анализ изменений спектров сигналов акустической эмиссии, вызванных растягивающими напряжениями в материале стеклопластика. Отмечено, что смещение спектра в область высоких частот при увеличении напряжения наблюдается на низкочастотных гармониках. На информативных для акустической эмиссии высоких частотах влияние растягивающих напряжений становится нелинейным.

**Abstract.** The aim of the work is to establish the effect of tensile stresses in fiberglass on the spectra of acoustic emission signals recorded by a piezoelectric and fiber-optic acoustic emission sensor. For this purpose, fiberglass samples were made by molding using the vacuum infusion method. The samples were cut out for testing on a tensile testing machine. A fiber-optic sensor operating in conjunction with an adaptive laser holographic interferometer was glued to the surface of the working part of the samples. The piezoelectric transducer was installed on the non-working part of the sample. Acoustic emission signals were recorded by both sensors under stepwise loading with a tensile load. The result of the work is the analysis of changes in the spectra of acoustic emission signals caused by tensile stresses in the fiberglass material. It is noted that a shift in the spectrum to the high-frequency region with increasing stress is observed at low-frequency harmonics. At high frequencies that are informative for acoustic emission, the influence of tensile stresses becomes nonlinear.

**Ключевые слова:** акустическая эмиссия, стеклопластик, полимерный композиционный материал, волоконно-оптический датчик, пьезоэлектрический преобразователь, адаптивный лазерный голографический интерферометр, спектр, вейвлет

**Keywords:** acoustic emission, fiberglass, polymer composite material, fiber optic sensor, piezoelectric transducer, adaptive laser holographic interferometer, spectrum, wavelet

## **Введение**

В промышленности все большее применение находят инновационные датчики на основе оптических методов. Например, волоконно-оптические датчики (ВОД) на основе дифракционных решеток Брэгга получили свое развитие в области измерения температур и деформаций [1]. Основным преимуществом волоконно-оптических датчиков является их высокая

защищенность от электромагнитных помех в связи с отсутствием электронных систем передачи сигналов к устройству регистрации [2]. Кроме того, оптические волокна можно встраивать в структуру материала объекта при его изготовлении или наклеивать на поверхность [3]. Определенные объекты требуют постоянного мониторинга технического состояния для своевременного выявления повреждений [4]. Этими возможностями обладает метод акустической эмиссии (АЭ). Возможность применения оптических волокон в качестве сенсоров АЭ волн ранее показана в научной литературе [5, 6]. Волоконно-оптические датчики на лазерных интерферометрах обладают большей чувствительностью в сравнении с датчиками на решетках Брэгга. Применяют различные методы стабилизации рабочей точки, позволяющие бороться с температурными флуктуациями и низкочастотными механическими шумами. Одним из наиболее эффективных методов является метод адаптивной лазерной голографической интерферометрии, основанный на взаимодействии опорного и объектного лучей интерферометра, происходящем в фоторефрактивном кристалле [7, 8]. В результате двухлучевого взаимодействия происходит постоянная перезапись формируемой в теле фоторефрактивного кристалла голограммы. Время перезаписи зависит от типа кристалла и определяет частоту подавления низкочастотных температурных и механических шумов, воздействующих на измерительную систему в целом и в основном на оптическое волокно датчика. Таким образом, адаптивный интерферометр в целом работает как фильтр верхних частот. Это позволяет его использовать в качестве измерительной системы для регистрации сигналов АЭ, частотный спектр полезного диапазона которых находится выше 20 кГц. Для выявления в контролируемом объекте различных типов повреждений используют спектральные методы анализа регистрируемых сигналов АЭ. Однако, спектральные характеристики сигналов в нагруженных конструкциях могут изменяться, подобно тому, как меняется частота колебаний натянутой струны в зависимости от степени ее натяжения.

Работа посвящена анализу изменений спектра сигнала АЭ, регистрируемого в нагруженном стеклопластике волоконно-оптическим и пьезоэлектрическим преобразователями. Для этого методом вакуумной инфузии 10 слоев стеклоткани были изготовлены пластины стеклопластика на основе полимерного связующего Derakane 411-350. После отверждения материалы из пластины были вырезаны образцы сс пряпоугольным сечением рабочей зоны 5x10 мм и длиной 100 мм. К рабочей поверхности образца эпоксидным клеем было приклеено оптическое волокно датчика. На образце также был установлен широкополосный пьезоэлектрический преобразователь (ПЭП) модели GT301 с полосой частот 50-550 кГц. Сигнал с ПЭП через усилитель АЭ с полосой пропускания 20-1000 кГц регистрировался цифровым осциллографом. Сигнал с ВОД регистрировался измерительной системой адаптивного голографического лазерного интерферометра на фоторефрактивном кристалле CdTe и одновременно с сигналами с ПЭП записывался на цифровой осциллограф. Образец

подвергался ступенчатому нагружению с диапазоном 2500 Н. Сигналы АЭ генерировались источником Су-Нильсена (изломом грифеля карандаша диаметром 0,5 мм на поверхности образца) на каждой ступени нагружения и регистрировались одновременно обоими датчиками.

Спектр сигналов АЭ, регистрируемых ПЭП и ВОД существенно различается, что связано с особенностями каждого преобразователя. ПЭП является локальным датчиком с собственно амплитудно-частотной характеристикой, зависящей от материала и геометрии пьезопластины, размещенной в корпусе датчика. АЧХ интерференционной системы измерения колебаний в основном определяется параметрами фотодетектора, регистрирующего лазерное излучение, выходящее из фоторефрактивного кристалла. Однако, размещенное на образце оптическое волокно, воспринимающее колебания при прохождении через него волны, испытывает на себе суперпозицию акустических полей, формирующих аддитивное изменение спекла на выходе из световода. Последующее взаимодействие опорного и информационного лучей внутри фоторефрактивного кристалла приводит к изменению уровня интенсивности излучения на фотодетекторе. Таким образом, АЧХ ВОД определяется характеристиками интерференционной измерительной системы и колебательными свойствами образца.

Сравнение спектров сигналов выполнялось отдельно для каждого датчика на различных этапах нагружения. В связи со сложностью спектрального состава сигналов, анализ спектра выполнялся по 10 уровням вейвлет разложения сигналов АЭ. Для разложения использовался вейвлет Добеши 8 порядка. Область частот выше 1 МГц, можно считать шумом, поэтому первый уровень разложения был исключен из анализа. По результатам расчетов построены графики зависимости приведенной доли среднеквадратичного значения (RMS) частотной компоненты сигнала АЭ от частоты в двойных логарифмических координатах (рисунок 1). Учитывая, что расчетные значения RMS расположены достаточно близко друг к другу, диаграммы приведены лишь для этапов нагружения 0 Н., 5000 Н и 12500 Н. Образец разрушился при достижении нагрузки 15000 Н. Из представленных диаграмм можно видеть, что наиболее заметные изменения наблюдаются при переходе от нагрузки 5000 Н к 10000 Н, для сигналов, регистрируемых ПЭП. Вклад низкочастотных компонент 4-8 кГц в энергию сигнала постепенно снижается по мере увеличения нагрузки 10000 Н. В диапазонах 16-31 и 31-63 кГц при увеличении нагрузки возрастает вклад указанных частотных компонент в энергию сигнала увеличивается в 1,48 раза.

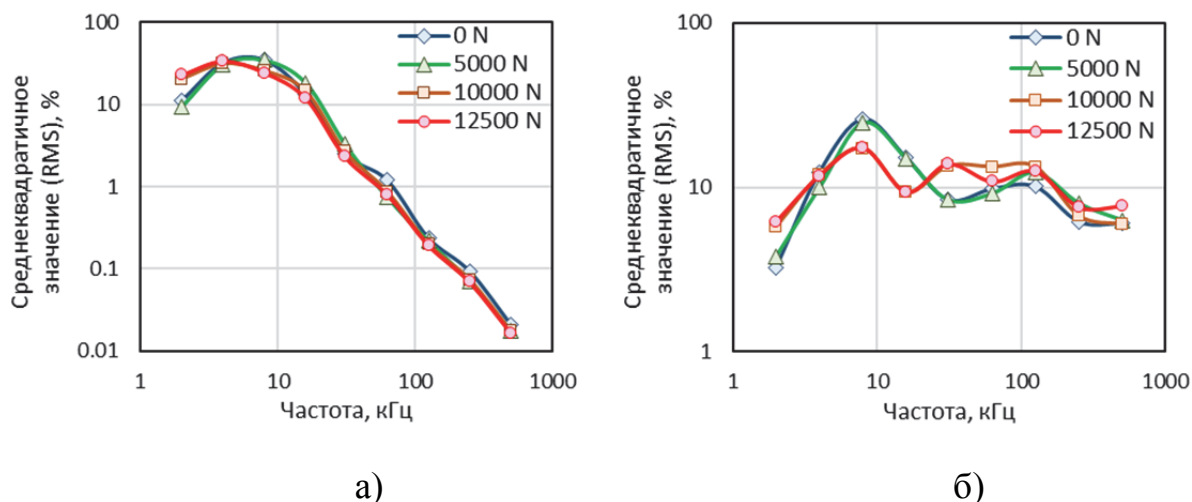


Рисунок 1 – Зависимости приведенной доли среднеквадратичного значения (RMS) частотной компоненты сигнала АЭ от частоты: а) ВОД, б) ПЭП

Этот частотный диапазон для композиционного материала является характерным для генерации сигналов при разрушении полимерной матрицы начальной степени поврежденности. Хотя источником излучения в данном случае является не матрица, а излом карандаша, изменение спектра свидетельствует о том, что в материале композита при данной нагрузке уже наступили некоторые локальные повреждения, изменяющие спектр проходящей звуковой волны.

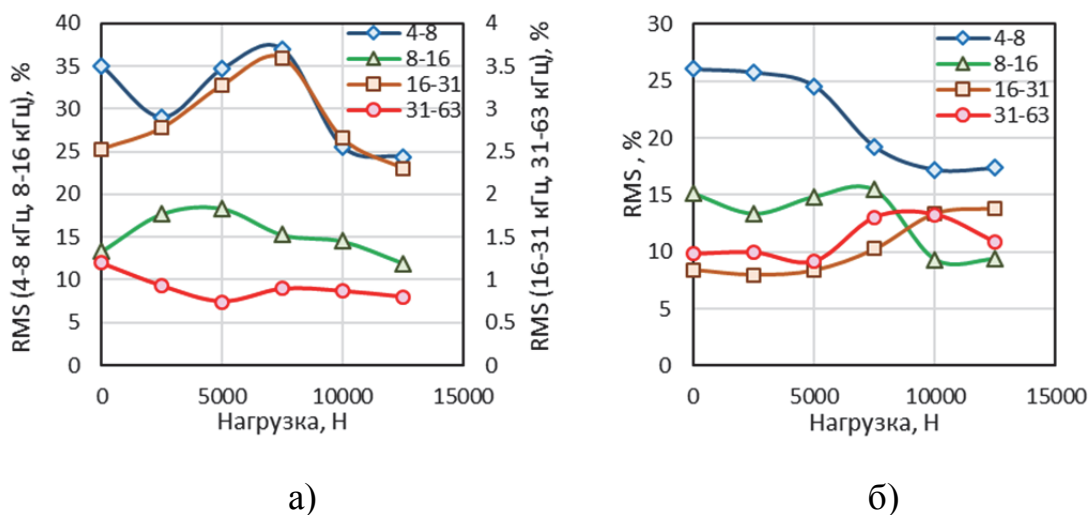


Рисунок 2 – Зависимости RMS частотной компоненты сигнала АЭ от растягивающей нагрузки: а) ВОД, б) ПЭП

Менее заметно на диаграмме изменение спектра для сигналов, зарегистрированных ВОД, в связи с тем, что диаграмма представлена в более широком диапазоне значений в связи с высоким затуханием в области частот выше 30 кГц. На каждой из частот диапазона 8-31 кГц наоборот происходит

постепенное снижение значений RMS сигнала по мере увеличения нагрузки. Наиболее наглядно это можно наблюдать на диаграммах изменения значений RMS от нагрузки (рисунок 2).

Необходимо отметить, что характер изменения спектра для диапазонов частот 4-8 и 16-31 кГц имеет качественную схожесть, хотя вклад более высокочастотных компонент в состав сигнала незначителен. При повышении нагрузки от 2500 Н до 7500 Н в данных частотных диапазонах происходит увеличение значений RMS в 1,3 раза. Дальнейшая ступень повышения нагрузки до 10000 Н приводит к снижению значений RMS в 1,4 раза.

### **Заключение**

Таким образом, изменение нагрузки в композиционном материале могут сопровождаться структурными повреждениями еще в состоянии упругости. Это приводит к изменению спектра акустического сигнала, распространяющегося в объекте контроля. Различие в видах преобразователей ПЭП и ВОД не позволит дать единого подхода к описанию характера изменения спектра регистрируемых сигналов АЭ. При этом, изменение спектра сигналов может являться причиной накопления повреждений в материале в процессе его нагружения, а не вызвана изменением типа генерируемых источников, что нужно учитывать при анализе характера повреждений нагруженных объектов.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00838).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Kordas, G. Structural Health Monitoring with Integrated Optical Fiber Sensors: A Review / G. Kordas, L. B. Liokumovich, N. A. Ushakov // AlfaBuild. – 2023. – No. 4(29). – P. 2909. – DOI 10.57728/ALF.29.9. – EDN SANZIS.
2. Возможности, задачи и перспективы волоконно-оптических измерительных систем в современном приборостроении / В. Б. Гармаш, Ф. А. Егоров, Л. Н. Коломиец [и др.] // Фотон-экспресс. – 2005. – № 6(46). – С. 128-140. – EDN RAHOKB.
3. Волоконно-оптические технологии, устройства, датчики и системы / Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, В. Т. Потапов, Ю. К. Чаморовский // Фотон-экспресс. – 2005. – № 6(46). – С. 114-127. – EDN RAHOJR.
4. Structural health monitoring: An iot sensor system for structural damage indicator evaluation / M. Muttillio, V. Stornelli, R. Paolucci [et al.] // Sensors. – 2020. – Vol. 20, No. 17. – P. 1-15. – DOI 10.3390/s20174908. – EDN ZXRRCE.
5. Регистрация сигналов акустической эмиссии волоконно-оптическими датчиками / О. В. Башков, Р. В. Ромашко, В. И. Зайков [и др.] // Фотон-экспресс. – 2017. – № 6(142). – С. 175-176. – EDN ZSNSAP.
6. Особенности применения адаптивных интерферометрических волоконно-оптических датчиков акустической эмиссии для контроля состояния полимерных композиционных материалов / Р. В. Ромашко, О. В.

Башков, Т. А. Ефимов [и др.] // Дефектоскопия. – 2024. – № 1. – С. 21-27. – DOI 10.31857/S0130308224010023. – EDN ХСНРУУ.

7. Лазерный адаптивный голографический гидрофон / Р. В. Ромашко, Ю. Н. Кульчин, М. Н. Безрук, С. А. Ермолаев // Квантовая электроника. – 2016. – Т. 46, № 3. – С. 277-280. – EDN VUAJUI.

8. Лазерная адаптивная векторно-фазовая гидроакустическая измерительная система / Р. В. Ромашко, Ю. Н. Кульчин, Д. В. Стороженко [и др.] // Квантовая электроника. – 2021. – Т. 51, № 3. – С. 265-271. – EDN QRAUCN.

УДК: 539.37+539.214

**Бегун Александра Сергеевна**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, доцент кафедры Математики и моделирования Владивостокского государственного университета.

**Begun Aleksandra Sergeevna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Modeling, Vladivostok State University

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ**

### **ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF CREEP OF A VISCOELASTIC CYLINDRICAL LAYER**

**Аннотация.** С помощью математической модели больших деформаций получены аналитические решения задач о деформировании вязкоупругого цилиндрического слоя. Рассмотрено деформирование вязкоупругого материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями, при повороте одного из жестких цилиндров за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как другой цилиндр остается неподвижным. Получены аналитические формулы для перемещения, обратимых и необратимых деформаций, напряжений на всех этапах деформирования, включая остаточные деформации и напряжения при полной разгрузке.

**Abstract.** Using a mathematical model of large deformations, analytical solutions to problems on the deformation of a viscoelastic cylindrical layer are obtained. The deformation of a viscoelastic material placed in a gap between two rigid cylindrical surfaces is considered when one of the rigid cylinders rotates due to a torque applied to it, while the other cylinder remains stationary. Analytical formulas are obtained for displacement, reversible and irreversible deformations,



stresses at all stages of deformation, including residual deformations and stresses during complete unloading.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, ползучесть, большие деформации.

**Keywords:** viscoelasticity, creep, large strains.

### Введение

Для авиационной, аэрокосмической, энергетической промышленности актуальными являются задачи определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций со сложными реологическими свойствами. В большинстве исследований рассматривается случай малых деформаций, а численные расчеты выполнены методом конечных элементов [1-3]. Однако, задачи, описывающие процессы ползучести, являются геометрически и физически нелинейными, что приводит к необходимости использовать модель больших деформаций. Поэтому проинтегрировать определяющие соотношения или предложить аналитические методы их решения удастся в редких случаях.

Здесь представим новое аналитическое решение задачи неустановившейся ползучести о деформировании вязкоупругого цилиндрического слоя. Решение строится в рамках модели больших деформаций материалов [4]. Рассматривается случай, когда накопление необратимых деформаций связано только с ползучестью материала, а источник необратимых деформаций задается степенным законом ползучести Нортона.

### Постановка краевой задачи

Пусть вязкоупругий материал, помещен в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями (радиус внутренней  $r = r_0$ , внешней  $-r = R$ ). Рассматривается случай деформирования материала при повороте внутреннего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внешний цилиндр является неподвижным. На жестких поверхностях выполняется условие прилипания, тогда граничные условия зададим в виде

$$\bar{u}|_{r=R} = \bar{v}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=r_0} = \frac{c(t)}{r_0^2}. \quad (1)$$

Кинематика движения среды задается соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta), \quad u_\varphi = r \sin \theta, \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad d_{rr} = -2d_{r\varphi}^2, \\ v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, \quad r_{r\varphi} = \omega_{r\varphi} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} - \varepsilon_{r\varphi} \end{aligned} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае для скоростей необратимых деформаций получим:

$$\varepsilon_{r\varphi}^V = (-1)^n Bn2^{n-1} \left(\frac{c}{r^2}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^V = \frac{(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})\varepsilon_{r\varphi}^V}{2e_{r\varphi}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^V = -\varepsilon_{rr}^V. \quad (3)$$

При задании напряжения сдвига на внутреннем цилиндре параметры  $\varepsilon_{r\varphi}^V$ ,  $\varepsilon_{r\varphi}$ ,  $e_{r\varphi}$ ,  $p_{r\varphi}$  будут известными, что позволяет найти угловую скорость и угол закручивания

$$\omega = \frac{v_\varphi}{r} = \frac{\dot{c}}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{(-1)^n Bn(2c)^{n-1}}{n-1} \left( \frac{1}{R^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}} \right),$$

$$\theta = \frac{c}{2\mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{(-1)^n 2^{n-1} Bnc_1}{n-1} \left( \frac{1}{R^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}} \right), \quad c_1 = \int_0^t c^{n-1} d\xi.$$

Для диагональных компонент обратимых и необратимых деформаций  $e_{rr}$ ,  $p_{rr}$ ,  $e_{\varphi\varphi}$ ,  $p_{\varphi\varphi}$  получаем систему уравнений

$$\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{(p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2)}{e_{r\varphi}} \varepsilon_{r\varphi}^p - 2p_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad (4)$$

$$p_{\varphi\varphi} = -e_{\varphi\varphi} + 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} + e_{r\varphi}^2 / 2, \quad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = -e_{r\varphi}^2.$$

Для решения данной системы в аналитическом виде примем постоянную в законе ползучести Нортона  $n=3$ . Сдвиговое напряжение на внутренней поверхности  $r=r_0$  зададим так, что оно сначала линейно увеличивается по абсолютному значению с течением времени, потом поддерживается постоянным в течение времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ , затем линейно уменьшается до нуля:

$$\tilde{n}(t) = \begin{cases} -at, & 0 \leq t \leq t_1 \\ -at_1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -at_1 + b(t-t_2), & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, при увеличивающемся напряжении сдвига найдем

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{at}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = -\frac{at}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^v = -\frac{4Bna^2t^2}{r^4},$$

$$p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^v(\xi) d\xi = -\frac{4Bna^2t^3}{3r^4}, \quad \omega = \frac{a}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - 2Bn(at)^2 \left( \frac{1}{R^4} - \frac{1}{r^4} \right),$$

$$\theta = \frac{at}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{2}{3} Bna^2t^3 \left( \frac{1}{R^4} - \frac{1}{r^4} \right),$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{-a}{4D\mu^2r^2} \left( \frac{aDt^2}{r^2} + e^{-\frac{aDt^2}{r^2}} - 1 \right) + \frac{4}{3} \frac{Bna^3t^4}{\mu r^6}, \quad p_{rr} = -p_{\varphi\varphi} - 2p_{r\varphi}^2,$$

$$e_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi}p_{r\varphi} - p_{\varphi\varphi} + \frac{e_{r\varphi}^2}{2}, \quad e_{rr} = -2e_{r\varphi}p_{r\varphi} + p_{\varphi\varphi} + \frac{3e_{r\varphi}^2}{2}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 + \frac{a}{2D\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - \frac{a^2t^2}{2\mu^2} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_0^4} \right) + \frac{2}{9} \frac{Da^3t^4}{\mu^2} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_0^6} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2D^2\mu t^2} \left( e^{-\frac{aDt^2}{r^2}} - e^{-\frac{aDt^2}{r_0^2}} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - 2\mu(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 2\mu e_{rr} - 3\mu e_{r\varphi}^2.$$

Аналогичным образом находятся решения задачи при постоянном и уменьшающемся напряжении сдвига.

### Заключение

В рамках модели больших деформаций с дифференциальными уравнениями изменения деформаций получены аналитические решения задач теории о деформировании в условиях ползучести вязкоупругого материала с расчетом упругого отклика при их разгрузке. Получены поля напряжений, деформаций, перемещений и скоростей.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFW-2021-0005).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Rimrott, F.P.J. Large strain creep of rotating cylinders / F.P.J., Rimrott, J.R. Luke // ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1961. – 41(12). – P. 485–500.

2. Bhatnagar, N.S.1975. Creep of thick-walled spherical vessels under internal pressure considering large strains / N.S. Bhatnagar, V.K. Arya // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1975. – 6. – P. 1080.

3. Sakaki, T. Creep of a hollow sphere / T. Sakaki, T. Kuroki, K. Sugimoto // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. – 1990. – 57(2). – P. 276-281.

4. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201.

УДК 532.5

**Бекежанова Виктория Бахытовна**, доктор физико-математических наук, заведующий отделом «Дифференциальные уравнения механики», Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук

**Bekezhanova Victoria Bakhytovna**, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of Department “Differential Equations in Mechanics”, Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

**Степанова Ирина Владимировна**, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела «Дифференциальные уравнения механики», Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук

**Stepanova Irina Vladimirovna**, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of Department “Differential Equations in Mechanics”, Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

## **СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЙ В СИСТЕМЕ БИНАРНЫХ СРЕД С ИСПАРЕНИЕМ**

## **COMPARATIVE ANALYSIS OF FLOW CHARACTERISTICS IN A SYSTEM OF BINARY MEDIA WITH EVAPORATION**

**Аннотация.** В рамках двусторонней математической модели проводится анализ различных постановок краевых задач, предложенных для описания стационарного конвективного течения в двухслойной системе «бинарная жидкость – парогазовая смесь» с фазовым переходом на недеформируемой границе раздела. В качестве канонической области рассматривается бесконечная горизонтальная полоса. Изучается возможность использования условий разных типов для функции температуры на внешних границах области течения при линейной и нелинейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации жидкой испаряющейся смеси. Выделены постановки задач, допускающие

точные решения, адекватно отражающие физический смысл процесса испарительной конвекции. Проведено качественное сравнение характеристик конвекции, полученных на основе точных решений, с имеющимися экспериментальными данными.

**Abstract.** Convective flows in a bilayer system “binary liquid – gas-vapor mixture” with a phase transition at a non-deformable interface are studied. The analysis of various problem statements describing the steady flows is performed within the framework of a two-sided mathematical model. An infinity horizontal strip is considered as the canonical domain. The feasibility of using conditions of different types for the temperature function on external boundaries of the flow domain is analyzed in the cases of linear and nonlinear dependency of the surface tension on the concentration of the volatile liquid mixture. The problem statements admitting exact solutions that adequately reflect the physical meaning of the evaporative convection process are selected. A qualitative comparison of convection characteristics obtained by means of the exact solutions with available experimental data is carried out.

**Ключевые слова:** испарительная конвекция, уравнения Обербека – Буссинеска, поверхностное натяжение, граничные условия

**Keywords:** evaporative convection, Oberbeck – Boussinesque equations, surface tension, boundary conditions

## Введение

Изучение конвективных течений с испарением важно, прежде всего, для разработки и модернизации жидкостных технологий, используемых в материаловедении и теплофизике. Примерами могут служить методики жидкостного охлаждения микроэлектронных устройств и способы термического нанесения/осушения покрытий. Для моделирования процессов конвективного теплообмена в условиях фазовых превращений используются различные подходы [1]. Как правило, экспериментальным исследованиям предшествуют обширные теоретические изыскания, предполагающие всестороннее изучение особенностей конвективных течений многофазных сред и влияния физических и геометрических параметров на характер теплообмена.

Целью данной работы является анализ и валидация математической модели совместного течения двух сред, заполняющих узкий горизонтальный канал (см. рис. 1). В качестве сред рассматриваются двухкомпонентная жидкость в нижнем слое и парогазовая смесь в верхнем.

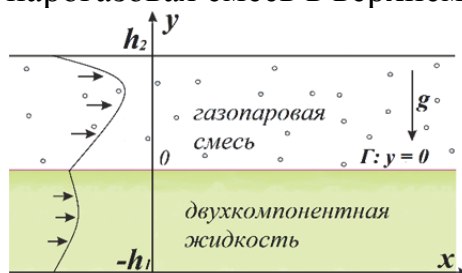


Рисунок 1 – Схема течения в горизонтальном канале

Учёт неоднородности состава рабочей жидкости приводит к более сложным формулировкам задач, например, в силу необходимости предполагать зависимость уравнения состояния и физических характеристик от концентрации примеси. В результате рассмотрения подобных эффектов возможно расширение иерархии математических моделей испарительной конвекции в системах с границей раздела фаз (см., например, [2]). Тем самым, моделирование диффузионного испарения в системах бинарных смесей формирует отдельный класс задач, требующий детального изучения.

### Определяющие уравнения и граничные условия

Теоретические исследования двухфазных систем (рис. 1) проводятся, как правило, в рамках модели Обербека – Буссинеска. Уравнения, описывающие тепломассообмен в объёмных фазах, имеют вид

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g}(\beta_T T + \beta_C C), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla C = D(\Delta C + \alpha \Delta T) = 0.$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $p$  – отклонение давления от гидростатического,  $T$  – температура,  $C$  – концентрация лёгкой компоненты,  $\rho$  – средняя плотность,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\alpha$  – параметр термодиффузии,  $\beta_T$ ,  $\beta_C$  – коэффициенты теплового расширения и солевого сжатия,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  – вектор ускорения свободного падения.

На твёрдых стенках  $y = -h_1$ ,  $y = h_2$  задаются условия прилипания и отсутствия потока вещества. Для функции температуры возможна постановка граничных условий, задающих линейный по продольной переменной  $x$  нагрев (условия первого рода) или отсутствие потока тепла (условия второго рода). Комбинация этих условий на верхней и нижней границе даёт четыре различные постановки задачи. Жидкая и газопаровая смеси имеют общую недеформируемую границу раздела  $y = 0$ , через которую происходит массоперенос из жидкой в газовую среду посредством диффузионного испарения. Вдоль границы раздела действуют термо- и концентрационно-капиллярные силы. На основе анализа существующих экспериментальных данных установлено, что допускается реализация как линейной, так и квадратичной зависимости поверхностного натяжения  $\sigma$  от концентрации  $C$  для одной и той же смеси в разных диапазонах изменения параметров. Кинематическое и динамическое условия формулируются в их классической форме. Балансовое соотношение для потоков массы записывается с учётом термодиффузионного эффекта. Кроме этого на границе раздела постулируются условия непрерывности полей скорости и температур. Если поставленных условий недостаточно для однозначного определения искомых функций, то дополнительно могут быть использованы замыкающие соотношения: интегральное условие на среднюю концентрацию одного из компонентов в жидком слое и/или равенство, задающее расход газа и/или жидкости в слоях.

## **Построение и анализ точного решения**

При построении точного решения предполагается, что функции  $T$  и  $C$  линейно зависят от продольной координаты  $x$ , а вектор скорости имеет только горизонтальную компоненту, зависящую от  $y$ . Система (1) интегрируется в конечных формулах для каждого слоя. Построенное решение допускает использование как линейной, так и квадратичной зависимости поверхностного натяжения  $\sigma$  от  $C$ . В рамках всех возможных постановок рассматриваются оба случая. Соответствующие решения позволяют определить параметр, отвечающий скорости испарения. Установлено, что в случае линейной зависимости  $\sigma(C)$  решения всех четырёх краевых задач корректно отражают увеличение интенсивности испарения и уменьшение концентрации примеси с ростом температуры на границе раздела. Если считать поверхностное натяжение квадратичной функцией концентрации, то решение предсказывает максимальную интенсивность испарения при определённых толщинах жидкого и газопарового слоёв, что подтверждается результатами теплофизических экспериментов. При этом единственной постановкой, в рамках которой согласуются теоретические и экспериментальные данные, является та, в которой на стенках для температуры используются условия Дирихле. Расчёт расхода газопаровой смеси даёт заниженные, по сравнению с реализуемыми в экспериментах, значения. Это связано с тем, что задача решается в двумерной постановке.

### **Заключение**

Предложенные постановки краевых задач, сформулированные в рамках двустороннего подхода, допускают точные решения, адекватно отражающие поведение характеристик течения в зависимости от геометрии канала и физических свойств используемых рабочих сред. Уравнения модели и граничные условия таковы, что решение может быть получено в конечных формулах, что позволяет провести многопараметрический анализ процесса теплообмена на границе раздела. Верификация модели и точных решений выполнена на основе сравнения с данными экспериментов. Исследование режимов испарительной конвекции на основе построенных точных решений для смеси вода – этанол разных концентраций проведено в [3].

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №22-11-00243 (<https://rscf.ru/project/22-11-000243>)

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Бекежанова, В. Б. Задачи испарительной конвекции (обзор) / В. Б. Бекежанова, О. Н. Гончарова // Прикладная математика и механика. – 2018. – № 2. – С. 219-260. – EDN ORSKZP.
2. Bekezhanova, V. B. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions / V. B.

Bekezhanova, O. N. Goncharova // Microgravity Science and Technology. –2020. – Vol. 32. – P. 139-154. DOI: 10.1007/s12217-019-09764-0.

3. Bekezhanova, V. B. Mathematical modeling of concentration influence on evaporative convection in a bilayer system of binary mixtures / V. B. Bekezhanova, I. V. Stepanova // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2024. – Vol. 107. – P. 109385. – DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2024.109385.

УДК 532.2

**Белозеров Николай Игоревич**, инженер-исследователь, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

**Belozerov Nikolay Igorevich**, research engineer, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

**Чехонин Константин Александрович**, доктор физико-математических наук, директор, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

**Chekhonin Konstantin Aleksandrovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

## **ТРЕХМЕРНОЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАСПЛАВА МЕТАЛЛА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА**

### **THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MODELING OF THE FLOW OF A METAL MELT WITH A FREE SURFACE UNDER CONDITIONS OF A MOVING LASER SOURCE**

**Аннотация.** Рассматривается трехмерный конвективный теплоперенос в ванне расплава металла под действием движущегося лазерного источника тепла. В основу математической модели с лагранжевым описанием положены уравнения Навье – Стокса, неразрывности и энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных тепловых потерь. Зависящие от температуры поверхностные эффекты учитываются с использованием поверхностного натяжения (сил Марангони) при динамическом контактном угле на движущейся линии трехфазного контакта. Численное решение задачи производится методом конечных элементов с дивергентно устойчивой аппроксимацией основных переменных. Показано влияние определяющих параметров процесса (мощности и скорости сканирования лазера) на геометрические размеры ванны с расплавом.

**Abstract.** Three-dimensional convective heat and mass transfer in a metal melt bath under the action of a moving laser heat source is considered. The mathematical model with a Lagrangian description is based on the Navier – Stokes



equations, continuity and energy, taking into account diffusion, convective and radiative heat losses. Temperature – dependent surface effects are taken into account using surface tension (Marangoni forces) at a dynamic contact angle on a moving three-phase contact line. The numerical solution of the problem is performed by the finite element method with a divergently stable approximation of the main variables. The influence of the determining process parameters (laser power and scanning speed) on the geometric dimensions of the melt bath is shown.

**Ключевые слова:** лазерный источник энергии, свободная поверхность, поверхностное натяжение, конвективный теплоперенос, метод конечных элементов, фазовый переход.

**Keywords:** laser energy source, free surface, surface tension, convective heat and mass transfer, finite element method, phase change.

### **Введение**

Течение вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью широко распространено в природе и является важной стадией многих физико-химических и гидродинамических явлений, сопутствующих современным технологиям. Например, в оборонной, космической отрасли при химическом формовании изделий из высоконаполненных полимерных композитов, в аддитивных технологиях при наращивании слоя на поверхности подложки с применением металлических порошков, электроискровом легировании, полировании металлических поверхностей с использованием лазера, производстве электронных компонентов.

В работах [1–3] были исследованы особенности течения высоковязкой и неньютоновской жидкостей со свободной поверхностью. При протекании реакции полимеризации показано влияние реологических параметров, неизотермических условий течения и макрокинетических изменений на гидродинамический процесс. Все указанные работы выполнены в рамках модели ползущего течения (число Рейнольдса  $Re \ll 1$ ) оказывает существенное влияние на эволюцию свободной поверхности [4–6]. Моделирование капиллярных течений со свободной поверхностью усложняется в неизотермических условиях фазового перехода жидкости (испарения или затвердевания), с возникновением дополнительных неизвестных границ в расчетной области [6–10].

Целью настоящей работы является исследование трехмерного конвективного теплопереноса в ванне расплава металла под действием движущегося лазерного источника тепла с учетом смачиваемости. В основу математической модели положены уравнения Навье – Стокса, неразрывности и энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных тепловых потерь. Зависящие от температуры поверхностные эффекты учитываются с использованием поверхностного натяжения (сил Марангони). Численное решение задачи производится методом конечных элементов с дивергентно устойчивой аппроксимацией основных

переменных [11]. Интегрирование кинематических и динамических условий на свободной поверхности производится по неявной схеме Ньюмарка – Бассака [2]. Производится верификация предложенного численного алгоритма.

### Результаты расчетов

Рассмотрим конвективное течение расплавленного металла при взаимодействии с лазерным источником энергии заданной мощности. Интенсивность энергии источника распределена по поверхности расплава с заданной функцией распределения. Потери энергии лазера происходят вследствие неполной абсорбции лазерного излучения, наличия конвективного и диффузионного теплообмена с окружающим газом и подложкой, а также радиационные потери. Считаем, что гравитационные силы незначительные по сравнению с капиллярными (число Бонда  $Bo \ll 1$ ). Процессами испарения расплава металла пренебрегаем. Математическая постановка задачи приведена в недавней работе [12].

В начальный момент времени поверхность подложки принимается плоской, имеющей заданную начальную температуру. После начала воздействия лазерного луча поверхность подложки нагревается, а при достижении температуры выше уровня ликвидуса на ее поверхности образуется ванна расплава, в которой возникает конвективное течение под действием сил Марангони и теплового расширения.

Анализ результатов расчета задачи производим с использованием безразмерных критериев имеющие вид:

$$Q = \frac{C\eta P}{\pi\lambda(T_l - T_0)l_0}, Pe = \frac{\rho c_p l_0 v_0}{\lambda}, Ma = \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{(T_l - T_0)}{\mu v_0}, \quad (1)$$

где критериальные параметры Пекле ( $Pe$ ), Марангони ( $Ma$ ), мощности лазера ( $Q$ ),  $C$  – масштабный коэффициент,  $\eta$  – абсорбция,  $P$  – мощность лазера,  $\lambda$  – теплопроводность металла,  $T_l$  – температура жидкой фазы,  $T_0$  – температура окружающей среды,  $l_0$  – характерная длина, равная эффективному радиусу луча лазера  $r_0$ ,  $\rho$  – плотность,  $c_p$  – удельная теплоемкость,  $v_0$  – характерная скорость,  $\gamma$  – поверхностное натяжение,  $\mu$  – динамическая вязкость расплава.

На рис. 1(а) представлены результаты расчетов влияния сил Марангони на геометрию ванны с расплавом в фронтальной плоскости с характерной ее глубиной  $h$ , а на рис. 1(б) ее проекция в горизонтальной плоскости, т.е. перпендикулярной направлению действия луча, где  $w, l$  — ширина и длина ванны расплава. Результаты расчетов показывают, что учет эффекта Марангони на конвекцию приводит к значительным изменениям геометрии ванны и свободной поверхности расплава. Увеличение параметра Марангони приводит к росту скорости конвективного течения.

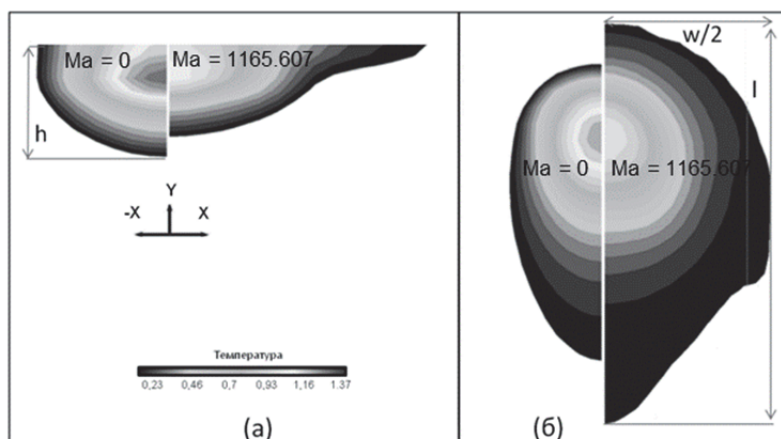


Рисунок 1 – Геометрия ванны расплава при изменении параметра Марангони: (а) – разрез по направлению движения луча лазера; (б) – проекция ванны по направлению действия луча

Влияние мощности лазерного излучения и скорости сканирования поверхности подложки на геометрические параметры ванны с расплавом приведены на рис. 2.

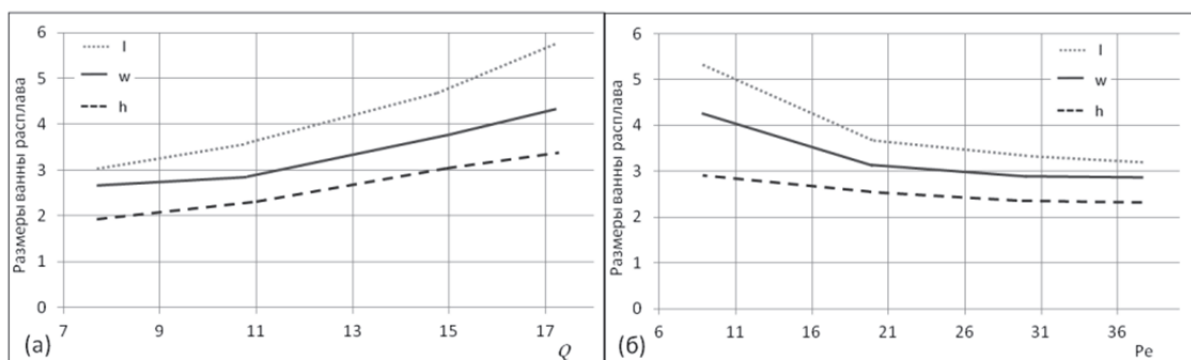


Рисунок 2 – Эволюция геометрических размеров ванны с расплавом в зависимости от: (а) – параметра мощности лазера  $Q$ ; (б) – числа Пекле

Из расчетов следует, что увеличение мощности лазерного луча при постоянной скорости сканирования приводит к значительному росту объема расплава в ванне. Ванна с расплавом приобретает форму эллипса со значительным удлинением по направлению скорости сканирования, что может привести к неустойчивости расплавленного слоя по механизму Плато – Рэля. В то же время увеличение скорости сканирования лазерного луча приводит к значительному сокращению объема ванны. При этом асимптотически ее геометрия приближается к полусфере. Следует отметить, что при варьировании рассматриваемых параметров скорость конвективного течения расплава в ванне изменялась в пределах (50–110)мм/с. Кроме этого, учет эффекта Марангони приводит к снижению максимальной температуры в ванне на (200–400)°С.

## Заклучение

Разработаны математическая модель и устойчивый численный алгоритм решения задачи о неизотермическом конвективном течении расплава металла с учетом углов смачивания на линии трехфазного контакта. Проведена верификация численного алгоритма, основанного на методе конечных элементов. Путем сравнения с известными аналитическими решениями исследована его устойчивость и сходимость. Показано влияние конвективного течения Марангони и определяющих параметров задачи на геометрические размеры ванны с расплавом.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Булгаков, В. К. Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально вязкой жидкостью в неизометрических условиях / В. К. Булгаков, К. А. Чехонин, А. М. Липанов // Инженерно-физический журнал, 1989. – С. 577–582. – DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.27>
2. Чехонин, К.А. Движение нелинейно-вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема / К.А. Чехонин, П. А. Сухинин // Математическое моделирование, 2001. – С. 89–102.
3. Numerical modeling of filling axially symmetric channel with non-linearly viscoelastic fluid taking into account  $\pi$  effect / К. А. Chekhonin, P. A. Sukhinin // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. – 1999. – P. 881–886.
4. Modelling of capillary coaxial gap filling with viscous liquid / К. А. Chekhonin, V. D. Vlasenko // Computational Continuum Mechanics. – 2019. – P. 313–324.
5. Three-dimensional finite element model of three-phase contact line dynamics and dynamic contact angle / К. А. Chekhonin, V. D. Vlasenko // WSEAS transactions on fluid mechanics. – 2024. – P. 577–582.
6. Three-dimensional finite element model of the motion of a viscous incompressible fluid with a free surface, taking into account the surface tension / К. А. Chekhonin, V. D. Vlasenko // AIP conference proceedings. Actual problems of continuum mechanics: experiment, theory, and applications. – 2023. – P. 030007.
7. Contact line arrest in solidifying spreading drops / R. Ruitter // Phys. Rev. Fluids. – 2017. – P. 043602.
8. A criterion for the pinning and depinning of an advancing contact line on a cold substrate / R. Herbaut // Euro. Phys. J. Spec. Top. – 2020. – P. 043602.
9. Solidification of liquid metal drops during impact / M. V. Gielen // J. Fluid Mech. – 2020. – P. 20.
10. Droplet evaporation dynamics on heterogeneous surfaces: Numerical modeling of the stick–slip motion / A. G. Sourais, L. E. Markodimitrakis, A. G. Papathanasiou // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2023. – P. 123992.

11. Булгаков, В. К. Основы теории метода смешанных конечных элементов / В. К. Булгаков, К. А. Чехонин. – Хабаровск: Изд-во Хабар. политех. института, 1999. – 283 с.

12. Белозеров, Н. И. Трёхмерное конечно-элементное моделирование течения расплава металла со свободной поверхностью в условиях движущегося лазерного источника / Н. И. Белозеров, К.А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал, 2024. – С. 9–21. – DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202402>

УДК 519.876.5

**Бердоносков Виктор Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент, Комсомольский на Амуре государственный университет

**Berdonosov Victor Dmetrievich**, PhD, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur State University

**Шелопугина Ева Олеговна**, магистр, Комсомольский на Амуре государственный университет

**Shelopugina Eva Olegovna**, M.Sc, Komsomolsk-on-Amur State University

## **ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ИЗОЛИРОВАННОЙ ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

## **INFORMATION-MATHEMATICAL SUPPORT OF DIGITAL TWIN OF ISOLATED HYBRID ENERGY SYSTEM**

**Аннотация.** В работе представлены математические модели потоков солнечной энергии с учетом облачности, модели данных с экспериментальной установки и модели баланса энергии. А так же изложена методика коррекции данных на основе экспериментальных измерений. Предложена структура цифрового двойника изолированной гибридной энергетической системы (ЦД ИГЭС), включающая три канала: имитационный (теоретический), аппаратный (физический) и вспомогательный. Проанализированы предварительные результаты функционирования ЦД ИГЭС. Разработанная система позволяет проводить качественный и количественный анализ энергетических потоков, что способствует более эффективному управлению энергетическими ресурсами и улучшению надежности энергоснабжения, в частности за счёт обнаружения критических периодов времени с дефицитом энергии.

**Abstract.** The paper presents mathematical models for solar energy fluxes taking into account the cloudiness, models data from the experimental installation and models energy balance. In addition, methods of data correction based on experimental measurements are presented. The structure of the digital twin of the

isolated hybrid energy system (DT IHES) including three channels: simulation (theoretical), hardware (physical) and auxiliary is proposed. Preliminary results of DT IHES functioning are analyzed. The developed system allows qualitative and quantitative analysis of energy flows, which contributes to a more efficient management of energy resources and improvement of the reliability of energy supply, in particular by detecting critical time periods with energy shortages.

**Ключевые слова:** математические модели, цифровой двойник, изолированная гибридная энергетическая система, энергетические потоки, энергоснабжение, дефицит энергии.

**Keywords:** mathematical models, digital twin, isolated hybrid energy system, energy flows, energy supply, energy shortages.

### **Введение**

В современном мире происходят значительные изменения в функционировании, как отдельных компаний, так и целых отраслей экономики, обусловленные стремительным развитием цифровых технологий. Этот процесс известен как цифровая трансформация. Среди технологий, способствующих цифровой трансформации, выделяются искусственный интеллект, машинное обучение, интернет вещей, анализ больших данных [1]. Особое внимание уделяется цифровым двойникам, которые не только представляют собой отдельную технологию, но и являются результатом ее применения.

Цифровые двойники являются продуктом непрерывного развития методов создания моделей физических объектов, обеспечивая создание виртуальных копий физических объектов, что позволяет проводить их анализ и оптимизацию в реальном времени.

Текущий уровень развития технологий приводит к повышенным потребностям в обеспечении энергоснабжением множества автономных объектов, географическое расположение которых, обуславливает невозможность подключения их к централизованным системам энергоснабжения. В таких условиях возникает актуальность, и практическая ценность исследования возможностей обеспечить полные энергетические потребности территориальных объектов, изолированных от единых централизованных систем энергоснабжения, с помощью имеющихся природных возобновляемых источников.

К системам, нуждающимся в оснащении автономными источниками энергии можно отнести как удаленные хозяйства и мелкие предприятия, так и небольшие технологические единицы географически распределенных систем (систем связи, освещения транспортных магистралей, периферийных пунктов технологических трубопроводов и так далее).

В виду низкой транспортной доступности таких объектов, возникает экономическая целесообразность отказа от традиционных энергоносителей (в виде различного вида углеводородного топлива, обеспечивающего работу генераторов электроэнергии) на таких объектах, в качестве основного источника энергии. Рациональнее всего организовывать энергоснабжение

таких объектов на основе гибридных схем с применением возобновляемых источников энергии (ВИЭ), наиболее доступных для использования в конкретном географическом расположении.

В настоящей работе предлагается использовать цифровой подход, на основе технологии цифровых двойников, для повышения степени дискретизации вплоть до почасовой, в отличие от существующих методик, использующих ежемесячную или, в крайнем случае, подневную дискретизацию.

### Основная часть

Степень научной исследованности технологии цифровых двойников показывает значительный рост, это видно, например, по росту числа научных публикаций в международной системе научных цитирований Scopus [2]. Так, с 2018 по 2021 гг. число тематических научных публикаций в мире по этой тематике выросло более чем в восемь раз. В российском сегменте интерес к изучению технологии ЦД проявили А. Прохоров [1], Г.И. Давыдов [3]. Вопросы потенциала применения ветроэнергетики и солнечной энергетики, как наиболее актуальных источников возобновляемой энергии рассмотрены в трудах Н. П. Местникова [4], Г. В. Никитенко [4]. Интерес к изучению задач моделирования производства и потребления электроэнергии в гибридных энергетических системах проявили В. В. Борисов [5], С. Г. Обухов [6].

В работе были использованы наработки российских и зарубежных авторов относительно применения ведущих технологий цифровой экономики, таких как киберфизические системы, большие данные и искусственный интеллект.

Принципы построения цифрового двойника для поступающей солнечной энергии основаны на нескольких ключевых аспектах: учет географических и климатических условий; детальное моделирование всех компонентов солнечной энергетической установки; учёт технических характеристик компонентов солнечной энергетической установки. Принимая во внимание эти аспекты, появляется возможность обеспечить эффективное моделирование и анализ работы солнечных систем.

Цифровой двойник изолированной гибридной энергетической системы представлен тремя каналами: имитационным (теоретическим), аппаратным (физическим) и вспомогательным (рисунок 1).

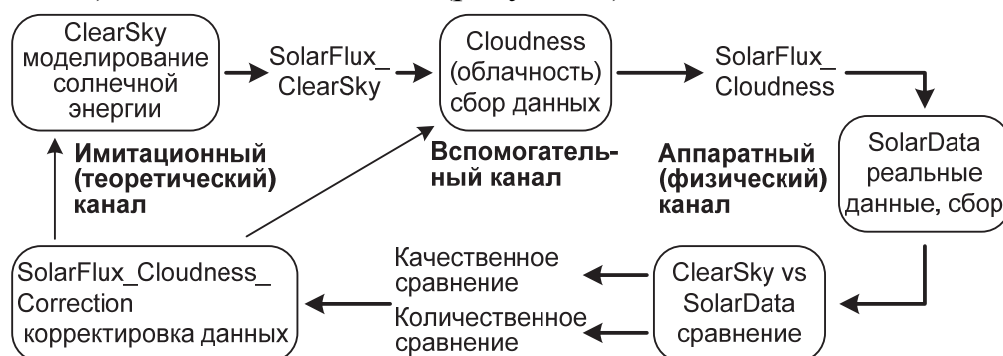


Рисунок 1 – Структура информационных потоков в ЦД ИГЭС

В теоретическом канале проводится имитация потока солнечной энергии в режиме "чистое небо" (ClearSky) с учетом альбедо, но без учета облачности [7]. Вспомогательный канал предоставляет данные об уровне облачности (Cloudness), которые используются для корректировки солнечных потоков, получаемых в режиме "чистое небо", создавая более точную модель реального солнечного потока (SolarFlux\_Cloudness). В физическом канале собираются данные солнечного потока с реальной установки (SolarData). Сравнение данных ClearSky и SolarData позволяет выявить качественные и количественные различия, формируя воздействия на теоретический и вспомогательный каналы для верификации модели.

В результате по уточнённым данным SolarFlux\_Cloudness проводится почасовой анализ энергетических балансов ИГЭС и выявляются, в периоды до трёх лет, критические временные отрезки, в которых наблюдается максимальный дефицит энергии. В дальнейшем, вариацией основных параметров ИГЭС, таких как количество солнечных панелей и объём накопителей энергии, проводится параметрическая оптимизация по критерию минимума финансовых затрат, при отсутствии дефицита энергии, передаваемой потребителям.

### **Заключение**

В данной работе представлен цифровой двойник энергетических потоков изолированной гибридной энергетической системы, включающий три канала: теоретический, аппаратный и вспомогательный. В результате оптимизации конфигурации и управления ИГЭС достигнута значительная экономия ресурсов и улучшена надежность энергоснабжения удаленных потребителей энергии. Верифицированные данные теоретического и вспомогательного каналов, позволяют прогнозировать наличие критических временных отрезков с дефицитом энергии.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Прохоров А., Лысачев М. Цифровой двойник. Анализ, тренды, мировой опыт / под науч. ред. А.И. Боровкова. – М. : Альянсспринт, 2020. – 401 с.
2. Grieves, M. Virtually Intelligent Product Systems: Digital and Physical Twins // Complex Systems Engineering: Theory and Practice / ред. S. Flumerfelt. – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2019. – С. 175–200.
3. Давыдов, Г. И. Гибридная энергетика в децентрализованной зоне / Г. И. Давыдов // COLLOQUIUM-JOURNAL. – 2019. – № 26-2. – С. 135–138.
4. Местников, Н. П. Особенности эксплуатации солнечных электростанций микромощности в условиях Севера : монография / Н. П. Местников. – Якутск : Северо-Восточный федеральный университет, 2022. – 155 с.
5. Борисов, В. В. Композиционное гибридное моделирование автономных комплексных энергетических систем / В. В. Борисов, М. И. Дли, Ю. В. Синявский, А. С. Федулов // Системы управления, связи и безопасности. – 2022. – №4. – С.1-37.



6. Обухов, С. Г. Двухконтурный накопитель энергии для гибридных энергетических систем с возобновляемыми источниками энергии / С. Г. Обухов, И. А. Плотников, И. Ахмед, В. Г. // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2020. – № 1. – С. 64–76.

7. Исаков, С. В. Оценка поступления солнечной радиации на естественные поверхности с применением геоинформационных систем / С. В. Исаков, В. А. Шкляев // Географический вестник. – 2012. – № 1. С. 72-80.

УДК 621.74.045:53.09

**Богданова Нина Анатольевна**, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

**Bogdanova Nina Anatolievna**, junior researcher, Institute of Mechanical Science and Metallurgy FEB RAS

**Жилин Сергей Геннадьевич**, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН

**Zhilin Sergey Gennadievich**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Mechanical Science and Metallurgy FEB RAS

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН

**Keller Ilya Ernstovich**, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Head of Laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS

**Адамов Анатолий Арсангалеевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН

**Adamov Anatoly Arsangaleevich**, Dr. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS

## **ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ ВОСКООБРАЗНЫХ СРЕД НА ПРОЧНОСТЬ ПРЕССОВОК**

## **INFLUENCE OF THE RATE OF DEFORMATION OF POWDER WAXLIKE MEDIA ON THE STRENGTH OF COMPACT**

**Аннотация.** Для производства металлоизделий повышенной точности и сложной пространственной конфигурации с уникальными свойствами разрабатывается технология изготовления выплавляемых моделей биметаллических отливок. Получение таких моделей возможно напрессовкой порошков воскообразных модельных материалов на жесткий металлический каркас. В получаемых моделях отсутствуют дефекты, появляющиеся в результате теплофизических явлений в материалах, однако существует проблема упругого отклика, величину которого можно регулировать изменением ряда технологических условий. В ходе

исследования выявлено влияние скорости перемещения пресс-пуансона на значения напряжений, сопровождающих уплотнение прессовок, величину остаточных напряжений и прочность получаемых прессовок.

**Abstract** For the production of metal products of increased precision and complex spatial configuration with unique properties, a technology for the production of lost wax models of bimetallic castings is being developed. Such models can be obtained by pressing powders of waxy model materials onto a rigid metal frame. The resulting models do not contain defects that appear as a result of thermophysical phenomena in materials, but there is a problem of elastic response, the magnitude of which can be adjusted by changing a number of technological conditions. The study revealed the influence of the rate of movement of the press punch on the values of stresses accompanying the compaction of compacts, the magnitude of residual stresses and the strength of the resulting compacts.

**Ключевые слова:** биметаллическая отливка, воскообразный порошковый материал, прессование, релаксация напряжений, прочность.

**Keywords:** bimetallic casting, waxlike powder material, pressing, stress relaxation, strength.

### **Введение**

Современный этап развития машиностроительной отрасли характеризуется разработкой новых и усовершенствованием существующих технологий для получения металлоизделий сложной пространственной конфигурации с новыми свойствами. Одной из таких разрабатываемых технологий является получение биметаллических отливок способом литья по выплавляемым моделям [1]. Для получения такой отливки выплавляемая модель изготавливается путем напрессовки порошка воскообразного модельного материала на жесткий металлический каркас. В результате получается модель высокой точности без дефектов связанных с теплофизическими явлениями, сопровождающими деформацию материала [2]. Однако для формирования прессовок сложной конфигурации с протяженными элементами необходимо исследовать их прочностные характеристики и упругий отклик итоговых прессовок [3].

В связи с вышеизложенным целью работы является определение влияния скорости перемещения пресс-пуансона на напряженно-деформированное состояние прессовок, получаемых из порошковых воскообразных материалов.

Для реализации цели решались следующие задачи:

- влияние скорости перемещения пресс-пуансона на значения напряжений, возникающих в процессе уплотнения, и значения остаточных напряжений в прессовке;
- определение предела прочности на сжатие для прессовок, полученных при сочетании определенных технологических условий.

### **Основная часть**

В качестве воскообразных модельных материалов были выбраны порошки парафиностеариновой смеси с равным содержанием компонентов в составе (ПС 50/50) и парафина марки Т1 фракций 0,63 мм и 2,5 мм. Процесс

уплотнения прессовок производили в закрытой цилиндрической пресс-форме диаметром 44 мм до момента, когда высота прессовки достигала величины диаметра. Пористость прессовок П изменяли от 0 % (плотность материалов в состоянии свободной заливки) до 10 % с шагом в 2 %, регулировалась пористость массой засыпки. Исследование проводилось при скоростях перемещения пресс-пуансона 0,5 мм/с и 1,5 мм/с. Для минимизации упругого отклика после завершения уплотнения образцы выдерживались при сомкнутых элементах пресс-формы в течение 15 минут. Для исследования прочности полученных прессовок, проводилось испытание на сжатие при скорости перемещения пресс-пуансона 0,5 мм/с [4, 5].

На рисунке 1 (в качестве примера) представлены зависимости напряжений от времени для прессовок с пористостью П = 0 %, изготовленных из порошка парафина Т1 и ПС 50/50 фракции 2,5 мм при скоростях прессования 0,5 мм/с и 1,5 мм/с.

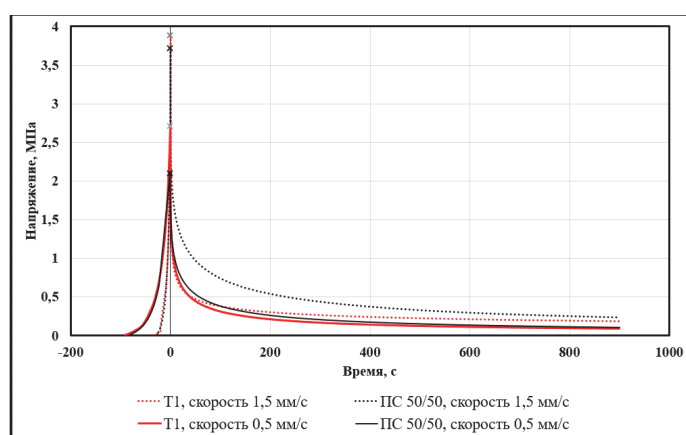


Рисунок 1 – Зависимости напряжений от времени для прессовок с пористостью П = 0 %, выполненных из порошков воскообразных модельных материалов фракции 2,5 мм

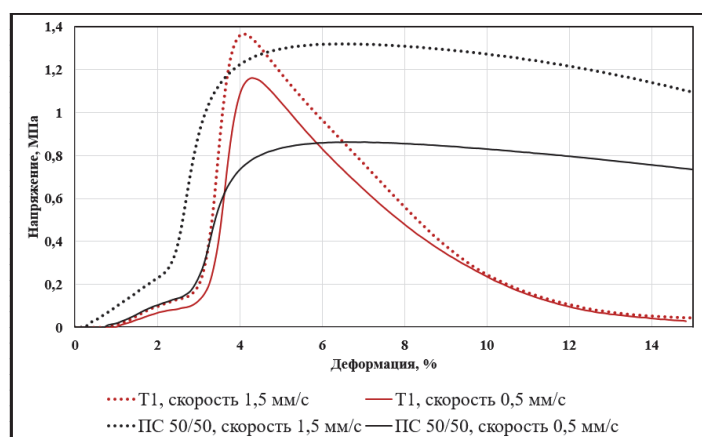


Рисунок 2. Зависимость напряжений от деформации при разрушении прессовок

Из рисунка 1 видно, что значения максимальных напряжений, необходимых для уплотнения прессовок  $\sigma_0$  (на графиках отмечены маркером), выполненных из парафина Т1, превышают значения напряжений для прессовок, полученных из ПС 50/50, при этом с увеличением скорости

перемещения пресс-пуансона значения напряжений  $\sigma_0$  увеличиваются. Также видно, что для прессовок, изготовленных при скорости перемещения пресс-пуансона 1,5 мм/с релаксация напряжений более чем на 90 % происходит медленнее, чем для прессовок полученных при скорости 0,5 мм/с.

На рисунке 2 показаны зависимости напряжений от деформации при разрушении полученных прессовок.

На графиках видны отличия в характере зависимостей для разных материалов, что объясняется различием в физико-механических свойствах. Так в процессе деформации парафиностеариновая смесь проявляет более вязкие свойства. Также очевидна зависимость предела прочности при сжатии от максимального напряжения необходимого для уплотнения  $\sigma_0$ . С увеличением максимальных напряжений при уплотнении увеличивается прочность прессовок. Такой эффект, по всей видимости, связан со структурными изменениями материала прессовок в процессе уплотнения.

### **Заключение**

В процессе исследования выявлено, что влияние на процесс уплотнения, релаксации напряжений и предел прочности получаемых прессовок оказывает совокупность технологических условий. С увеличением скорости перемещения пресс-пуансона происходит увеличение значений напряжений, необходимых для уплотнения, увеличивается время выдержки под нагрузкой. При уплотнении прессовок, выполненных из парафина марки Т1 возникают несколько большие усилия, чем при прессовании парафиностеариновой смеси. На прочность получаемых образцов основное влияние оказывает величина максимального напряжения  $\sigma_0$ . С увеличением значений напряжений происходит рост предела прочности на сжатие.

### **Благодарности**

Исследование выполнено в рамках госзадания по темам Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН (Н.А. Богданова и С.Г. Жилин) и Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН (И.Э. Келлер и А.А. Адамов).

### **Список ИСТОЧНИКОВ**

1. Патент № 2696118 РФ, Способ получения биметаллической отливки / Н.А. Богданова, С.Г. Жилин, О.Н. Комаров; опубл. 31.07.2019, Бюл. 22.

2. Жилин С. Г. Влияние упругого отклика на размерно-геометрические характеристики протяженной прессовки, полученной из воскообразного материала мундштучным выдавливанием / С. Г. Жилин, О.Н. Комаров, А.А. Соснин, Н.А. Богданова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20. № 2. – С. 27–34.

3. Bogdanova N. A. Influence of the packing and compaction parameters of spherical waxy elements on the stress-strain state of the compact / N. A. Bogdanova, S. G. Zhilin, O. N. Komarov // Procedia Structural Integrity, 2021, 40(C), pp. 70–74.

4. Жилин С. Г. Расчетное и экспериментальное определение параметров процесса формирования пористой прессовки из порошкового

воскообразного материала / С. Г. Жилин, Н. А. Богданова, О. Н. Комаров // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния – 2022. – №3(53). – С. 27–38.

5. Brewin P. R. Modelling of Powder die compaction / P.R. Brewin, O. Coube, P. Doremus et.al. Springer – London, 2008.

УДК 519.688

**Болодурина Ирина Павловна**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Оренбургский государственный университет, ведущий научный сотрудник, Университет ИТМО

**Bolodurina Irina Pavlovna**, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of Department of Applied Mathematics, Orenburg State University, Senior Researcher, ITMO University

**Шухман Александр Евгеньевич**, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и цифровых технологий, Оренбургский государственный университет

**Shuhman Alexander Evgenievich**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Mathematics and Digital Technologies, Orenburg State University

**Гришина Любовь Сергеевна**, старший преподаватель кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет

**Grishina Lyubov Sergeevna**, Senior Lecturer at the Department of Applied Mathematics, Orenburg State University

**Легашев Леонид Вячеславович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского института цифровых интеллектуальных технологий, Оренбургский государственный университет

**Legashev Leonid Vyacheslavovich**, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher at the Scientific Research Institute of Digital Intelligent Technologies, Orenburg State University

## **РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА УТОЧНЕНИЯ ПЛАНА ЭКСПЕРИМЕНТОВ СУРРОГАТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

## **DEVELOPMENT AND RESEARCH OF GENETIC ALGORITHM FOR REFINING DESIGN OF EXPERIMENT IN SURROGATE MODELING**

**Аннотация.** В настоящий момент проблема реинжиниринга программного обеспечения, находящегося в эксплуатации, встает наиболее остро в связи с рядом проблем, включающим создание локальных низкоресурсных моделей, повышение скорости вычислений, а также решение задач импортозамещения. В рамках данного исследования

рассматривается задача построения суррогатных моделей на данных, информация о которых собирается на основе аппроксимаций эмпирических результатов расчетов по исходной модели. Проанализированы современные методы планирования вычислительного эксперимента для отраслевого ПО, а также разработаны генетические алгоритмы уточнения плана экспериментов на основе библиотеки SMT.

**Abstract.** At the moment, the problem of reengineering software in operation is most acute due to a number of problems, including the creation of local low-resource models, increasing the speed of calculations, as well as solving problems of import substitution. Within the framework of this study, the task of constructing surrogate models based on data, information about which is collected based on approximations of empirical calculation results based on the original model, is considered. Modern methods of planning a computational experiment for industry software are analyzed, and genetic algorithms for refining the plan of experiments based on the SMT library are developed.

**Ключевые слова:** суррогатное моделирование, планирование экспериментов, эволюционная оптимизация, генетические алгоритмы, полнофакторная выборка, выборка латинского гиперкуба

**Keywords:** surrogate modeling, evolutionary optimization, design of experiments, genetic algorithms, full-factor sampling, Latin hypercube sampling

## Введение

В настоящий момент активное развитие методов суррогатного моделирования обуславливается необходимостью решения задач функционального реинжиниринга отраслевого программного обеспечения (ПО), выполняющего математическое моделирование и сложные инженерные расчеты, путем замены оригинального расчетного алгоритма упрощенной процедурой [1,2]. При этом восстановление зависимости производится на основе данных с помощью методов машинного обучения (МО). При аппроксимации модели непосредственно на данных ресурсы и время, как правило, ограничены [3]. Генетические алгоритмы представляют собой эффективный инструмент оптимизации, который может быть использован для генерации планов экспериментов. Основная идея данного подхода состоит в реализации принципов естественного отбора и эволюции, что позволяет находить решения в сложных многомерных пространствах [4,5].

Целью данной работы является разработка и исследование генетического алгоритма автоматизации процесса генерации плана экспериментов для повышения эффективности расчетов при различных входных параметрах и решения проблемы реинжиниринга ПО.

## Постановка задачи суррогатного моделирования

Пусть  $D_X \subset R^n$  –  $n$ -мерное пространство планирования факторов  $X$ ,  $\{x^{(i)}\}$ ,  $x^{(i)} \in D_X$ ,  $i = 1, \dots, p$  – выборка обучающих данных,  $f(x^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, p$  – расчеты ПО на модели высокой точности.

Тогда построение суррогатной модели  $\hat{f}(x)$  путем аппроксимации пар данных  $\{x^{(i)}, f(x^{(i)})\}$  состоит в решении следующей задачи оптимизации:

$$\sum_{i=1}^p L(\hat{f}(x^{(i)}, \theta), f(x^{(i)})) \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $L(\dots)$  – функция потерь,  $\theta$  – вектор параметров суррогатной модели.

### Планирование экспериментов

В основе планирования экспериментов лежат алгоритмы сэмплирования данных для создания псевдослучайной выборки исходных данных с целью повышения точности суррогатной модели. Основные методы сэмплирования включают: *случайное равновероятностное сэмплирование* (Random Sampling), *латинский гиперкуб* (Latin Hypercube Sampling), где каждое измерение предварительно разбивается на равные интервалы, и *полное факторное сэмплирование* (Full-Factorial Sampling), которое предполагает рассмотрение всех возможных комбинаций уровней факторов в эксперименте.

Каждый из рассмотренных методов имеет различные преимущества и недостатки. Выбор подходящего метода зависит от конкретной задачи и доступных ресурсов.

### Генетический алгоритм генерации плана экспериментов

В рамках данного исследования предложен генетический алгоритм, имитирующий процесс естественного отбора для поиска оптимальных решений в пространстве параметров на основе оценки наибольшей ошибки суррогатной модели, который схематично представлен на рис. 1.

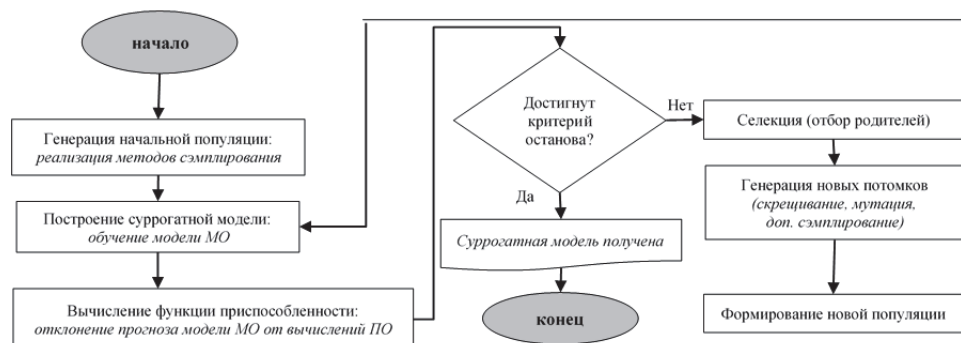


Рисунок 1 – Генетический алгоритм генерации плана экспериментов

Возможные модификации предложенного алгоритма генерации плана экспериментов включают:

- 1) Стратегии отбора (турнирный отбор, отбор усечением);
- 2) Мутация (равномерная / гауссова мутация с центром в поисковой области);
- 3) Скрещивание (одноточечное / многоточечное скрещивание с использованием пропорционального выбора / «частей»);
- 4) Сэмплирование (Random, Latin Hypercube, Full-factorial).

### Результаты вычислительных экспериментов

Для реализации численных экспериментов выбрана тестовая оптимизационная функция для построения суррогата – функция Экли:

$$f(x, y) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))} + e + 20. \quad (2)$$

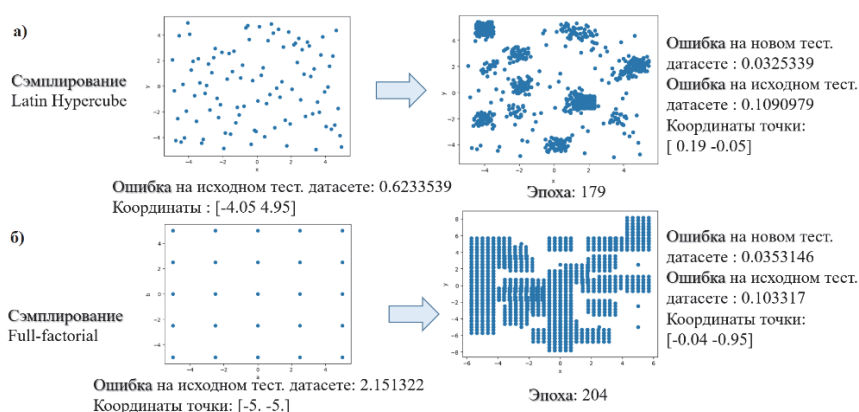


Рисунок 2 – Оценка сходимости генетического алгоритма

Результаты вычислительного эксперимента по сходимости алгоритма для функции Экли (глобальный экстремум в точке (0,0)) с разными конфигурациями метода сэмпирования (LHS, Full-factorial), ограничением количества итераций до 250 и стабилизацией функции приспособленности в течении 10 эпох продемонстрированы на рисунке 2. В качестве суррогатной модели использована модель машинного обучения RandomForestRegressor.

### Заключение

Разработанный генетический алгоритм для автоматизации процесса генерации плана экспериментов продемонстрировал высокую эффективность на различных конфигурациях методов сэмпирования и сравнимые по точности результаты. Несмотря на разный дизайн эксперимента (планы для расчета ПО и построения обучающего набора значительно отличаются), среднеквадратичная ошибка (MSE) на исходном тестовом наборе составляет не более 0.1. Таким образом, предложенный подход эволюционной оптимизации плана вычислительного эксперимента для построения суррогатной модели можно использовать для повышения эффективности расчетов при различных входных параметрах и решения проблемы реинжиниринга ПО. При этом, выбор подходящей конфигурации алгоритма зависит от конкретной задачи, доступных ресурсов и необходимых результатов.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Metamodels for computer-based engineering design: survey and recommendations / T.W. Simpson, J.Peplinski, P.N.Koch, J.K. Allen // Computer Simulation. – 2001. – Vol. 17. – No 2. – P. 129-150. – DOI 10.1007/PL00007198.
2. Machine learning-based surrogate model assisting stochastic model predictive control of urban drainage systems / X. Luo, P. Liu, Q. Xia [et al.] // Journal of Environmental Management. – 2023. – Vol. 346. – P. 118974. – DOI 10.1016/j.jenvman.2023.118974. – EDN ODFLXG.
3. Investigation of the surrogate model in an ANN-Meanline Hybrid model for Radial Turbine Performance Prediction / P. Ren, Ch. Stuart, M. Zhang [et al.] // International Journal of Gas Turbine, Propulsion and Power Systems. – 2024. – Vol. 15, No. 2. – P. 9-18. – DOI 10.38036/jgpp.15.2\_9. – EDN OEQJAO.
4. Трушин, С. М. Применение эволюционного моделирования и генетических алгоритмов для решения задач оптимизации / С. М. Трушин,



А. К. Титлянов // Научный аспект. – 2024. – Т. 46, № 4. – С. 6138-6149. – EDN GPUEMH.

5. Карпенко, А. П. Ко-эволюционные алгоритмы глобальной оптимизации / А. П. Карпенко // Интеллектуальные системы: труды одиннадцатого международного симпозиума / Под редакцией К. А. Пупкова. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2014. – С. 37-42. – EDN UUONJN.

6. Hou, Ch. K. J. Dimensionality Reduction in Surrogate Modeling: A Review of Combined Methods / Ch. K. J. Hou, K. Behdinin // Data Science and Engineering. – 2022. – Vol. 7, No. 4. – P. 402-427. – DOI 10.1007/s41019-022-00193-5. – EDN GISUXC.

УДК 51-73+ 004.932.2

**Борисова Влада Владимировна**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Borisova Vlada Vladimirovna**, student, Far Eastern Federal University

**Дегтярев Данил Викторович**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Degtyarev Danil Viktorovich**, student, Far Eastern Federal University

**Нефедев Константин Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий Института наукоёмких технологий и передовых материалов Дальневосточного федерального университета, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Nefedev Konstantin Valentinovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Theoretical Physics and Intelligent Technologies of the Institute of Physics and Mathematics of the Far Eastern Federal University, Leading Researcher at the Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **ГЕНЕРАЦИЯ БЕЛЛОВСКИХ ПАР ПО АЛГОРИТМУ КВАНТОВОЙ ТЕЛЕПОРТАЦИИ**

### **GENERATION OF BELL PAIRS USING THE QUANTUM TELEPORTATION ALGORITHM**

**Аннотация.** Выполнен анализ алгоритма квантовой телепортации, предоставляющего собой метод передачи квантового состояния на расстояние с использованием квантовой запутанности и классической связи. Основная идея квантовой телепортации предполагает генерацию белловских пар, а также шаги алгоритма телепортации, начиная с подготовки начальных состояний до передачи квантового состояния от Алисы к Бобу. Обсуждаются потенциальные применения квантовой телепортации в различных областях, таких как квантовая криптография, квантовые вычисления и квантовые

коммуникационные сети. Подчёркивается значимость данного метода для развития квантовых технологий связи. Представлен обзор перспектив дальнейшего исследования и применения квантовой телепортации в современном мире информационных технологий.

**Abstract.** This report is dedicated to the study and analysis of the quantum teleportation algorithm, a method for transmitting a quantum state over a distance using quantum entanglement and classical communication. The report examines the fundamental idea of quantum teleportation, the process of generating Bell pairs, and the steps of the teleportation algorithm, starting from the preparation of initial states to the transmission of the quantum state from Alice to Bob. The potential applications of quantum teleportation in various fields, such as quantum cryptography, quantum computing, and quantum communication networks, are discussed. The report highlights the significance of this method for the development of quantum technologies and provides an overview of the prospects for further research and application of quantum teleportation in modern information technologies.

**Ключевые слова:** алгоритм квантовой телепортации, квантовая запутанность, белловские пары, квантовое состояние.

**Keywords:** quantum teleportation algorithm, quantum entanglement, Bell pairs, quantum state.

### Основная часть

Квантовая телепортация – это метод передачи квантового состояния на расстояние, используя запутанные частицы и классический канал связи. Эффект квантовой телепортации был впервые предложен в 1993 году Чарльзом Беннетом, Жилем Brassаром и их соавторами [1, 2].

Основная идея квантовой телепортации заключается в том, что одна сторона (например, Алиса) имеет частицу в определённом квантовом состоянии и хочет передать это состояние другой стороне (например, Бобу). Для этого Алиса и Боб должны иметь пару запутанных частиц, называемых белловскими парами. Белловские пары созданы в таких условиях, что любое изменение состояния одной частицы мгновенно влияет на состояние другой, даже если они разделены на большие расстояния. Генерация таких пар достигается с помощью специальных источников, таких как ЭПР-источник [3, 4].

Алгоритм квантовой телепортации начинается с того, что Алиса имеет два кубита в состоянии  $|\psi\rangle$ , содержащие квантовое состояние, которое необходимо телепортировать. Третий и четвёртый кубиты Алисы изначально находятся в состоянии  $|0\rangle$  и предназначены для создания запутанных пар (Рисунок 1).

Алиса применяет вентиль Адамара (H) к третьему и четвёртому кубитам, переводя их в состояние суперпозиции  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Затем она применяет CNOT-вентиль между ними, что приводит к формированию запутанного состояния  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ .

Далее Алиса применяет CNOT-вентили между первым и третьим, а затем между вторым и четвёртым кубитами, осуществляя квантовое "смешивание" передаваемого состояния с запутанной парой. Затем она применяет вентиль Адамара (H) к первому и второму кубиту.

После этого Алиса измеряет первые два кубита и получает два классических бита информации (0 или 1), которые она передаёт Бобу по классическому каналу связи. Эти биты содержат информацию, необходимую для корректировки состояния на стороне Боба.

Получив классические биты от Алисы, Боб применяет соответствующие унитарные операции, такие как X или Z-вентиль, к своему кубиту, восстанавливая исходное квантовое состояние  $|\psi\rangle$ . Таким образом, квантовое состояние передается от Алисы к Бобу без физического перемещения кубита, а только с помощью квантовой запутанности и классической связи.

Квантовая телепортация представляет собой передачу квантового состояния частицы из одного места в другое с помощью квантовой запутанности. Это позволяет осуществлять обмен информацией между двумя сторонами без физической транспортировки. Учёные отмечают, что использование многомерных квантовых состояний может увеличить пропускную способность канала связи и объём передаваемой информации в будущих квантовых сетях.

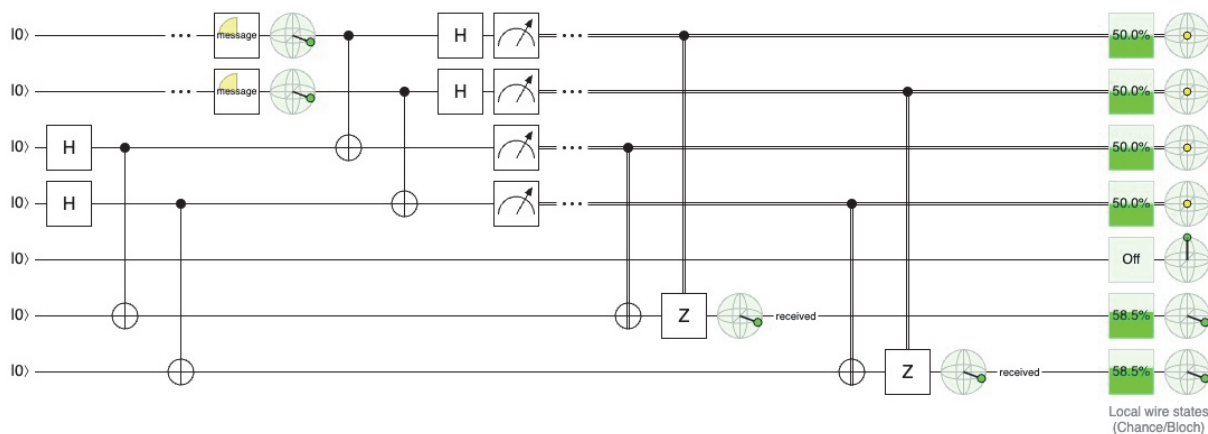


Рисунок 1 – Квантовая схема алгоритма телепортации

Одним из ключевых применений квантовой телепортации является обеспечение безопасности передачи данных. Поскольку перехватить информацию, передаваемую таким образом, практически невозможно, это открывает возможности для разработки надёжных систем шифрования. Кроме того, квантовая телепортация может лечь в основу создания квантовых компьютеров, способных решать задачи, недоступные для современных суперкомпьютеров.

Несмотря на значительные успехи в экспериментальной демонстрации квантовой телепортации, физическая телепортация макроскопических объектов по-прежнему остаётся в области научной фантастики. Для этого потребовалось бы оцифровать объект, передать данные, а затем воссоздать

его в другом месте, что на практике пока невозможно. Тем не менее, дальнейшее развитие квантовых технологий, включая квантовую телепортацию, открывает широкие перспективы для прорывных достижений в области информационных технологий.

Квантовая телепортация также имеет огромный потенциал для применения в различных областях, включая квантовую криптографию, квантовые вычисления и квантовые коммуникационные сети. Её возможности в создании безопасных квантовых сетей и передаче информации на большие расстояния делают её ключевым элементом будущего развития квантовых технологий [5].

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Bennett C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels //Physical review letters. – 1993. – Т. 70. – №. 13. – С. 1895.

2. Бауместер Д., Экерт А., Цайлингер А. Физика квантовой информации //М.: Постмаркет. – 2002. – Т. 1.

3. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? //Physical review. – 1935. – Т. 47. – №. 10. – С. 777.

4. Ekert A. K. Quantum cryptography based on Bell's theorem //Physical review letters. – 1991. – Т. 67. – №. 6. – С. 661.

5. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. – 2006.

УДК 621.671.2

**Боровской Семен Александрович**, студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Borovskoy Semen Alexandrovich**, student, Komsomolsk-na-Amure State University

**Кривенко Марина Юрьевна**, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Marina Yuryevna Krivenko**, Postgraduate student, Komsomolsk-on-Amur State University

#### **ПРОГРАММНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА ЖИДКОСТИ ПО ФОТОИЗОБРАЖЕНИЮ КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЯ SOFTWARE IDENTIFICATION OF THE STRUCTURE OF LIQUID FLOW BY PHOTO IMAGE OF THE FLOW PATTERN**

**Аннотация.** В статье рассмотрена технология обработки результатов оптической визуализации установившегося режима течения рабочего тела (газа или жидкости) в программе Mathcad. Цель обработки - идентификация

разноэнергетических зон потока, с определением их конфигурации, месторасположения и площади.

**Abstract.** The article discusses the technology for processing the results of optical visualization of the steady-state flow of a working fluid (gas or liquid) in the Mathcad program. The purpose of processing is to identify flow zones of different energies, determining their configuration, location and area.

**Ключевые слова:** оптическая визуализация, Mathcad, матрица, цвет пикселя

**Keywords:** optical visualization, Mathcad, matrix, pixel color

### **Введение**

Визуализация течения жидкости в каналах является важным источником информации при проведении экспериментальных исследований структуры потока и валидации результатов численных методов [1, 2]. Она позволяет получить представление о структуре потока: линиях тока и зонах вихреобразования, беспроточных областях, режимах ламинарного и турбулентного течений. Визуализация становится важным инструментом для углублённого понимания физических процессов, происходящих в потоке рабочего тела.

Простым и эффективным методом визуализации является смыв контрастного индикатора, предварительно нанесенного на омываемую поверхность. На установившемся режиме течения, в зоне пограничного слоя происходит размывание индикатора и формирование линий тока.

В качестве иллюстрации качества визуализации с помощью индикатора, на рис.1 показано фотоизображение двумерной картины течения в рабочем колесе малоразмерного центробежного насоса (диаметр  $D_2=0,041$  м) с довольно сложной структурой потока. В его каналах совмещаются два вида течений: относительного (вдоль межлопаточных каналов) и переносного (по касательной к окружности на текущем радиусе). Поток состоит из зон ламинарного течения (отдельные линии тока), турбулентного течения (зоны полного смыва индикатора), беспроточной области (несмытый индикатор под зоной отрыва), а также участков ламинарно-турбулентного перехода, не содержащих явно выраженных линий тока. Формирование картины течения во всех каналах рабочего колеса происходит одновременно. Контрастность изображения зависит от длительности стационарного режима, определяемого эмпирическим путём. Устойчивая повторяемость картины течения во всех каналах косвенно указывает на достоверность и точность получаемых результатов.

### **Основная часть**

Важной частью обработки результатов визуализационных исследований становится идентификация структурных зон потока, их конфигурации, месторасположения и размеров. Ниже рассмотрен метод идентификации картины течения в программе Mathcad путём

преобразования фотоизображения с помощью функции read.bmp в числовую матрицу  $(a_{i,j})$  [3, 4]. В этой матрице её элементы представляют собой целые числа, значения которых характеризуют оттенок серого цвета каждого пикселя фотоизображения, и изменяются от 0 (абсолютно чёрный) до 255 (абсолютно белый цвет).

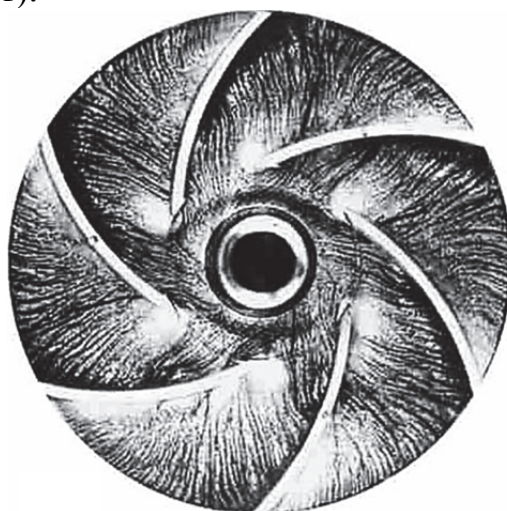


Рисунок 1 –Картина течения в межлопаточных каналах рабочего колеса малоразмерного центробежного насоса

Для устранения визуального «шума» внутри локальных зон программа содержит блок цветовой коррекции пикселя. С этой целью назначаются пороговые значения (константы), обеспечивающие однородность цвета внутри каждой зоны.

Фрагмент преобразованной матрицы показан на рисунке 2. По плоскости матрицы, через непрерывную цепочку элементов, имеющих одинаковое численное значение (в данной иллюстрации равное 50) проводятся дискретные линии тока. При их отсутствии, например, в зонах турбулентного, беспроточного и переходного режимов течения по аналогичной схеме строятся границы этих зон.

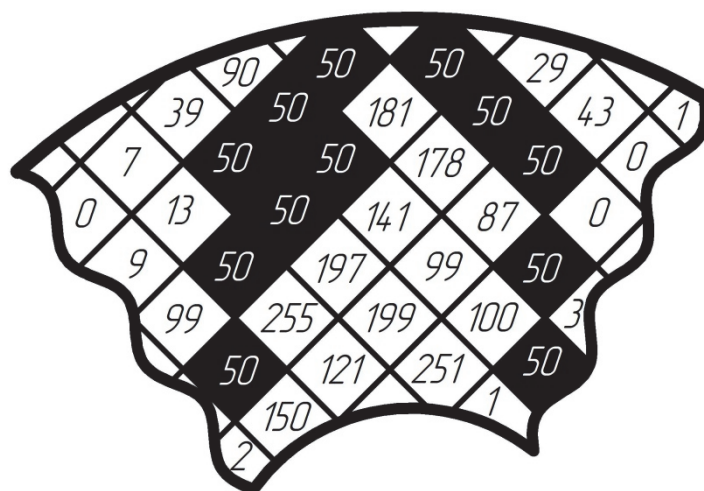
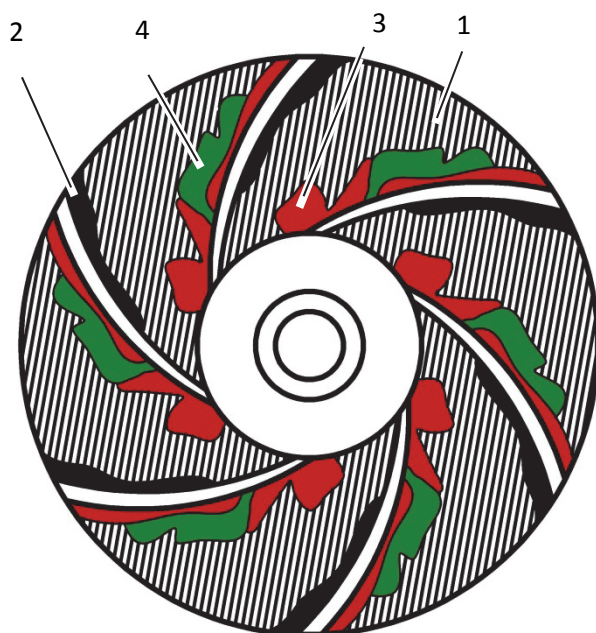


Рисунок 2 – Линии тока, сформированные равнозначными элементами матрицы



Режим течения:

1 - ламинарный,

2 - беспроточный,

3 - турбулентный,

Рисунок 3 – Зонированная картина течения

Зонированная картина течения, как результат программной обработки фотоизображения на рисунке 1 представлен на рисунке 3. На нём разным цветом идентифицированы структуры потока в межлопаточных каналах.

Они различаются режимами течения: ламинарный режим (занимает наибольшую площадь в слое пристеночного течения и относится к вторичному течению вдоль дисков рабочего колеса), беспроточный режим, расположенный под отрывной зоной вдоль тыльной стороны лопатки, турбулентный режим течения, существующий вдоль напорной стороны лопатки и область ламинарно -турбулентного перехода.

Недостатком рассмотренного метода визуализации и программной обработки картины течения является получение «отпечатка» структуры потока на плоскости. Поэтому она требует теоретического дополнения пространственной картины течения. Задача облегчается, если визуализация осуществляется одновременно на обоих дисках рабочего колеса. Тогда, в силу неразрывности течения, однозначность построения пространственной картины существенно повышается.

### **Заключение**

Идентификация структуры потока жидкости по фотоизображению в программе Mathcad позволяет сократить время анализа экспериментальных данных, повысить достоверность получаемых результатов и возможность проведения объективной оценки гидродинамических процессов, происходящих при течении жидкости.

Изложенный метод, кроме построения геометрической модели течения, позволяет проводить количественную оценку параметров неравномерности потока: конфигурацию, месторасположение и площадь отдельных структур течения. Указанные параметры косвенно характеризуют эффективность преобразования энергии в межлопаточных каналах рабочего

колеса и позволяют проводить целенаправленную оптимизацию геометрии проточной части.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ван-Дайк, М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк - М.: Мир, 1986. - 182 с.
2. Charles, D. Hansen, Chris, R. Johnson. The Visualization Handbook/ Scientific visualization Computer graphics, Elsevier. 2005 962 p.
3. Новиковский, Е. А. Учебное пособие «Работа в системе MathCAD» / Е. А. Новиковский. – Барнаул: Типография АлтГТУ, 2013. – 114 с.
4. Дьяконов В.П. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование. Смоленск: СГПУ, 2003. - 192 с. с рис ISBN 5-88118-337-8

УДК 517.95

**Бризицкий Роман Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент департамента математического и компьютерного моделирования, Дальневосточный федеральный университет

**Brizitskii Roman Viktorovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, Far Eastern Federal University

**Дончак Ангелина Антоновка**, магистрант Дальневосточного федерального университета

**Donchak Angelina Antonovna**, master's student of Far Eastern Federal University

#### **ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ**

#### **MULTIPLICATIVE CONTROL PROBLEMS FOR NONLINEAR REACTION–DIFFUSION–CONVECTION EQUATION**

**Аннотация.** Исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для уравнения реакции-диффузии-конвекции, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а так же зависит от пространственных переменных. Для концентрации вещества используются смешанные граничные условия, когда на одной части границе задается неоднородное условие Дирихле, на другой ее части задается условие Робена. Роль управлений играют вектор скорости и старший коэффициент диффузии. Доказана разрешимость экстремальной задачи при минимальной гладкости управлений и локальная устойчивость ее оптимальных решений. Установлено свойство релейности



распределенного управления, используемого в одной из экстремальных задач.

**Abstract.** We study a two-parameter multiplicative control problem for the reaction-diffusion-convection equation, in which the reaction coefficient nonlinearly depends on the substance's concentration, and depends on spatial variables. For the substance's concentration, mixed boundary conditions are used, when the non-homogeneous Dirichlet condition is specified on one part of the boundary, and the Robin condition is specified on the other part. The role of controls is played by the velocity vector and the leading diffusion coefficient. The solvability of the extremum problem with minimal smoothness of controls and the local stability of its optimal solutions are proven. The bang-bang principle of distributed control used in one of the extreme problems has been established.

**Ключевые слова:** модель реакции-диффузии-конвекции, переменные коэффициенты, слабое решение, принцип максимума, задача мультипликативного управления, система оптимальности, свойство релейности.

**Keywords:** reaction-diffusion-convection model, variable coefficients, weak solution, strong solution, a priori estimates, maximum principle, control problem, optimality system, bang-bang principle.

### **Введение**

Длительный интерес к исследованию задач управления связан не только с поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода к задачам управления могут быть сведены задачи восстановления неизвестных функций краевой задачи по дополнительной информации о ее решении. О корректности такого подхода см. [1]. В частности, к задачам мультипликативного управления сводятся обратные коэффициентные задачи.

Настоящая работа посвящена исследованию задач мультипликативного управления для уравнения реакции-диффузии-конвекции, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а так же зависит от пространственных переменных. Для концентрации вещества используются смешанные граничные условия, отвечающие заданию неоднородного условия Дирихле на одной части границы и условий Робена на другой его части. Предполагается, что коэффициент диффузии и коэффициент массообмена в граничном условии зависят от пространственных переменных. Роль мультипликативных управлений играют вектор скорости и коэффициент диффузии. Разрешимость задачи управлений доказана при минимальных требованиях на гладкость выбранных управлений. Далее при степенных коэффициентах реакции и дифференцируемых по Фреше функционалов качества для рассматриваемых экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем выводятся оценки устойчивости

оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданных функций краевой задачи. Отметим, что полученные результаты обобщают результаты статьи [1] и частично статьи [2].

В заключение исследуется экстремальная задача, содержащая мультипликативное управление  $\mathbf{u}$  и распределенное управление  $f$ . Для управления  $f$  установлено свойство релейности, которое может быть строгим в зависимости от ведения  $\mathbf{u}$  (см., например, [3]).

### Краевая задача

В ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей:  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_R$ , рассматривается следующая краевая задача:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D \text{ и } \lambda(\mathbf{x})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha(\mathbf{x})\varphi\right) = \chi \text{ на } \Gamma_R. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация (загрязняющего) вещества,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $\lambda(\mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии,  $k(\varphi, \mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии,  $\alpha(\mathbf{x}) > 0$  – коэффициент массообмена,  $f$  – объемная плотность источников вещества. Ниже при заданных функциях  $\lambda, \mathbf{u}, f, \psi, \alpha$  и  $\chi$  на задачу (1), (2) будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальное существование и единственность слабого решения задачи 1 доказывается по схеме [3]. Так же, по схеме, изложенной в [3], устанавливается принцип максимума и минимума для концентрации вещества.

### Задачи управления

Для постановки задачи управления введем пространство тестовых функций для концентрации вещества  $\varphi$ :

$$\mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega) : h = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$$

и пространство для вектора скорости  $\mathbf{u}$ :

$$Z = \{\mathbf{v} \in L^3(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_R\}.$$

В данном разделе исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления на слабых решениях задачи 1, роль управлений в которой играет пара функций  $g = (\lambda, \mathbf{u})$ :

$$J(\varphi, g) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad s > 1/2,$$

$$F(\varphi, g) = 0, \quad (\varphi, g) \in \mathcal{T} \times K. \quad (2)$$

Предполагается, что управление  $\lambda$  может изменяться в замкнутом выпуклом множестве  $K_1 \subset H^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $s > 1/2$ , которое ограничено по норме  $L^\infty(\Omega)$ , а управление  $\mathbf{u}$  изменяется в выпуклом замкнутом множестве  $K_2 \square Z$ , которое ограничено по норме пространства  $L^3(\Omega)$ . При этом  $\mu_0$  – положительное, а  $\mu_1$  – неотрицательное число и оператор

$$F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times H^2(\Gamma),$$

где  $K = K_1 \times K_2$ , определен по формулам:

$$\langle F_1(\varphi, g), h \rangle = (\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) + (k(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h) + (\lambda\alpha\varphi, h)_{\Gamma_R} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_R} \quad \forall h \in \mathcal{T},$$

$$F_2(\varphi, g) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi \quad \text{в } H^{1/2}(\Gamma_D)$$

и уравнение  $F(\varphi, g) = 0$  является операторной формой записи слабой формулировки задачи 1.

Примерами функционала качества  $I(\varphi)$  являются следующие функционалы:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,\Omega}^2.$$

Здесь  $\varphi^d \in L^2(Q)$  (или  $\varphi^d \in H^1(\Omega)$ ) обозначает заданное поле концентрации в подобласти  $Q \subset \Omega$  (или в  $\Omega$ ).

Разрешимость задачи управления (2) на слабых решениях задачи 1 доказана при указанных выше условиях на мультипликативные управления, которые, по всей видимости, являются минимальными. Далее, для степенных коэффициентов реакции и дифференцируемых по Фреше функционалов качества выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем получены оценки устойчивости оптимальных решений задачи (2) относительно малых возмущений, как функционалов качества, так и заданных функций  $f$  и  $\chi$ . При выводе оценок устойчивости предполагается, что  $\mathbf{u} \in H^s(\Omega)^3 \subset L(\Omega)^3, s > 1/2$ , и  $\lambda \in H^r(\Omega), r > 3/2$ , с использованием соответствующей регуляризации.

Для двухпараметрической задачи управления, роль управлений в которой играют вектор скорости  $\mathbf{u}$  и плотность источников  $f$ , для распределенного управления  $f$  установлено свойство релейности (принцип bang-bang). Отметим, что работа с указанной парой управлений позволяет установить у некоторых подмножествах области  $\Omega$  строгое свойство релейности для управления  $f$ , как это сделано в [3].

### **Заключение**

В настоящей работе доказана разрешимость двухпараметрической задачи мультипликативного управления для нелинейного уравнения реакции-диффузии-конвекции при минимальных требованиях на гладкость используемых управлений и выполнен качественный анализ оптимальных решений рассматриваемой задачи. Возможность выбора управлений из более широкого класса функций может иметь прикладную ценность. Аппарат данной работы будет применен в дальнейшем при исследовании задач управления для более сложных моделей массопереноса из [4,5].

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2024-1440).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Brizitskii, R.V. Optimization analysis of the inverse coefficient problems / R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia // Journal Inverse Ill-Posed Problems. – 2018. – V. 29 (4). – P. 1809-1828. – DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0011>.
2. Brizitskii, R.V. Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model / R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia // Journal Dynamical and Control Systems. – 2021. – V. 27. – P. 379-402. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10883-020-09508-z>.

3. Brizitskii R.V. Multiplicative control problem for nonlinear reaction-diffusion model / A.A. Donchak // *Comp. Math. Math. Phys.* – 2024. – V. 64(1). – P. 56-72. – DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542524010056>.

4. Baranovskii, E.S. Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients / E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia // *Nonlinear Analysis: Real World Appl.* – 2024. – V. 75. – 103979. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103979>.

5. Сарицкая, Ж.Ю. Краевая задача для нелинейных уравнений массопереноса с условием Дирихле / Ж.Ю. Сарицкая // *Сиб. электрон. матем. изв.* – 2022. – Т. 19, № 1. – С. 360-370.

УДК 517.95

**Бризицкий Роман Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент департамента математического и компьютерного моделирования, Дальневосточный федеральный университет, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Brizitskii Roman Viktorovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, Far Eastern Federal University, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University

**Максимова Надежда Николаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и моделирования, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Maksimova Nadezhda Nikolaevna**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Modeling, Leading Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University

## **ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДРЕЙФА-ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОНОВ**

## **LOCAL STABILITY ESTIMATES OF OPTIMAL SOLUTIONS OF ONE CONTROL PROBLEM FOR A STATIONARY ELECTRON DRIFT-DIFFUSION MODEL**

**Аннотация.** Исследуется двухпараметрическая задача управления для стационарной модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика. Выводятся достаточные условия единственности и точные оценки локальной устойчивости ее оптимальных решений

относительно малых возмущений вектора напряженности электрического поля для конкретного функционала качества.

**Abstract.** A two-parameter control problem is studied for a stationary model of electron-induced charging of an inhomogeneous polar dielectric. Sufficient conditions for uniqueness and exact estimates of the local stability of its optimal solutions with respect to small perturbations of the electric field strength vector for a specific quality functional are derived.

**Ключевые слова:** стационарная модель дрейфа-диффузии электронов, модель зарядки неоднородного полярного диэлектрика, двухпараметрическая задача управления, система оптимальности, оценки локальной устойчивости

**Keywords:** stationary electron drift-diffusion model, charging model of a non-uniform polar dielectric, two-parameter control problem, optimality system, local stability estimates

### Введение

В междисциплинарных исследованиях в настоящее время активно исследуются процессы типа «адвекция-реакция-диффузия» или «конвекция-реакция-диффузия». Математическое описание конвективно-реакционно-диффузионных процессов представляется в виде начально-граничных задач для уравнений с частными производными параболического типа в неустановившихся режимах или краевых задач для уравнений эллиптического типа для описания стационарных состояний.

К математическим моделям данного типа относится диффузионно-дрейфовая модель процесса зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях. Важнейшей частной задачей является применение диффузионно-дрейфового подхода для моделирования процесса зарядки полярных диэлектриков, индуцированного электронным облучением (см. [1, 2] и ссылки в них). В условиях длительного по времени (на практике достаточно и доли секунды) облучения материала система переходит из динамического состояния в стационарное. Поэтому особую актуальность для практики приобретает детальное исследование математических моделей, описывающих стационарные режимы процессов зарядки.

### Постановка краевой задачи

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ :

$$-\operatorname{div}(d\nabla\rho) + \mu_n \mathbf{E} \cdot \nabla\rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \beta|\rho|\rho = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{k} \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\mathbf{E}$  – вектор-функция напряженности электрического поля,  $d(\mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии электронов,  $\mu_n$  – дрейфовая подвижность электронов,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость

материала,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $f$  – генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте,  $\beta(\mathbf{x}) > 0$  – нормализованный коэффициент потери заряда. Ниже на задачу (1)-(3) при заданных функциях  $d$ ,  $f$ ,  $\beta$  и  $\mathbf{k}$  будем ссылаться как на задачу 1.

Несмотря на длительное использование модели (1)-(3) на практике, теоретическое исследование глобальной разрешимости и локальной единственности решения задачи 1 впервые было проведено недавно. Краевые и экстремальные задачи для модели дрейфа-диффузии электронов с переменным коэффициентом  $\beta$ , учитывающим неоднородность потери заряда в пространстве, и при  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  исследованы в [3]. В частности, для задачи 1 доказана разрешимость задачи управления с двумя мультипликативными управлениями  $d$  и  $\beta$  и с распределенным управлением  $f$ . Для указанной задачи получена система оптимальности и на основе ее анализа доказана локальная единственность решения задачи распределенного управления. В статье [4] установлены достаточные условия локальной единственности решения задачи мультипликативного управления, роль управления в которой играет функция  $d$ . В работе [5] выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений двухпараметрической задачи мультипликативного управления, роль управлений в которой играют коэффициенты  $d$  и  $\beta$ , относительно малых возмущений как функционала качества, так и заданной функции  $f$ .

#### Постановка задачи управления

Введем функциональное пространство  $\tilde{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^3 \cap \ker(\text{rot})$  и произведения пространств

$$X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Omega) \text{ и } Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_T^{1/2}(\Gamma).$$

Для граничной функции  $\mathbf{k}$  из (3) введем функциональное пространство

$$H_T^{-1/2}(\text{div}_\Gamma; \Gamma) = \left\{ \mathbf{w} \in H_T^{-1/2}(\Gamma) : \text{div}_\Gamma \mathbf{w} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\},$$

наделенное нормой  $\|\mathbf{w}\|_{-1/2, \text{div}_\Gamma}^2 = \|\mathbf{w}\|_{-1/2, \Gamma}^2 + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{w}\|_{-1/2, \Gamma}^2$ , где  $\text{div}_\Gamma$  – линейный оператор поверхностной дивергенции (см. [6]), и его подпространство:

$$\tilde{H}_T^s(\Gamma) = \left\{ \mathbf{w} \in H_T^s(\Gamma) : \text{div}_\Gamma \mathbf{w} = 0 \right\}, \quad s \in [-1/2, 1/2].$$

Сформулируем следующую задачу управления, роль управлений в которой играют функции  $f$  и  $\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}, u) &\equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|_\Omega^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{k}\|_{1/2, \Gamma}^2 \rightarrow \inf, \\ F(\mathbf{x}, u) &= 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$ ,  $u = (f, \mathbf{k}) \in K$ , где  $K = K_1 \times K_2$  ( $K_1 \subset L^2(\Omega)$ ,  $K_2 \subset \tilde{H}_T^{1/2}(\Gamma)$  – непустые выпуклые замкнутые множества),  $\mu_0$  – положительное, а  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – неотрицательные числа, оператор  $F = (F_1, F_2, F_3): X \times K \rightarrow Y$  определен по формулам:

$$\begin{aligned} \langle F_1(\mathbf{x}, u), h \rangle &= (d \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho| \rho, h) - (f, h) \\ &\quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \text{ в } \Omega, \quad F_3(\mathbf{x}, u) = \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} - \mathbf{k} \text{ в } H_T^{1/2}(\Gamma)$$

и уравнение  $F(\mathbf{x}, u) = 0$  является операторной формой записи слабой формулировки задачи 1.

Примерами функционала качества  $I(\mathbf{x})$  являются функционалы:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2, \quad I_2(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_{1,\Omega}^2, \\ I_3(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2, \quad I_4(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_{1,\Omega}^2.$$

Здесь  $\rho^d \in L^2(Q)$  (или  $\rho^d \in H^1(\Omega)$ ) обозначает заданное поле концентрации в подобласти  $Q \subset \Omega$  (или в  $\Omega$ ). Функция  $\mathbf{E}^d \in L^2(Q)^3$  (или  $\mathbf{E}^d \in H^1(\Omega)^3$ ) имеет аналогичный смысл для электрического поля.

В настоящей работе доказана глобальная разрешимость краевой и экстремальной задач для модели (1)-(3). Для задачи управления (4) выведены системы оптимальности и на основе их анализа получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений функционалов качества.

### **Заключение**

Отметим, что с прикладной точки зрения интересны некоторые частные случаи полученных в работе результатов. Например, для задачи управления с коэрцитивным «электрическим» функционалом качества  $I_4(\mathbf{E})$  при выборе «электрического» управления  $\mathbf{k}$  локальная единственность оптимального решения доказана без использования регуляризации. Аналогичный эффект получен для функционала  $I_2(\rho)$  управлением  $f$ . Подобное свойство часто использовалось и в более ранних работах по управлению (см. [6]).

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проекты № 122082400001-8 и № 075-02-2024-1440).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Maslovskaya, A. G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching / A. G. Maslovskaya // Journal of Surface Investigation. – 2013. – V. 7 (4). – P. 680-684.
2. Pavelchuk, A. V. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source / A. V. Pavelchuk, A. G. Maslovskaya // Russian Physics Journal. – 2020. – V. 63. – P. 105-112. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s11182-020-02008-4>
3. Бризицкий, Р.В. Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова, А.Г. Масловская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63, № 9. – С. 1537-1552.

4. Бризицкий, Р.В. О единственности решения задачи мультипликативного управления для модели дрейфа-диффузии электронов / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2024. – Т. 34, вып. 1. – С. 3-18.

5. Бризицкий, Р.В. Задачи мультипликативного управления для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 5. – в печати.

6. Алексеев, Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г.В. Алексеев. – М.: Научный мир, 2010. – 412 с.

УДК 539.4

**Буров Андрей Ефимович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Burov Andrey Efimovich**, Candidate of Engineering Sciences, Leading researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies

**Москвичев Егор Владимирович**, кандидат технических наук, старший ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Moskvichev Egor Vladimirovich**, Candidate of Engineering Sciences, Senior researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ТКАНОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ**

## **EXPERIMENTAL STUDY ON EFFECT OF HOLE ON STRENGTH OF PLAIN WEAVE COMPOSITE UNDER TENSION**

**Аннотация.** Работа посвящена экспериментальным исследованиям эффекта концентратора напряжений, размер которого сопоставим с элементарной ячейкой структуры, на прочность композиционных материалов при растяжении. Испытания проводились на пластинах из тканого (полотняное плетение) материала на основе углеродных волокон и эпоксидного связующего с центральным отверстием. Распределение напряжений в ослабленном отверстием сечении пластины, вычисленное по измеренным деформациям, сравнивается с аналитическим решением. Наблюдаемое снижение прочности образцов с отверстием значительно меньше теоретического значения, что свидетельствует о низкой чувствительности материала к данному типу концентратора. На основе критерия напряжения в точке определена зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений от масштабного параметра.



**Abstract.** The work is devoted to experimental study on the effect of a stress concentrator, which size is comparable with a unit cell, on the strength of composite materials under tension. Tests were carried out on plates made of plain weave composite based on carbon fibers and epoxy binder with a central hole. The stress distribution in the plate section weakened by the hole, calculated from the measured strains, is compared with the analytical solution. The observed strength reduction of the notched samples is significantly less than the theoretical value, indicating a low sensitivity of the material to this type of concentrator. Based on the point stress criterion, the dependence of the effective stress concentration coefficient on the scale parameter is determined.

**Ключевые слова:** эксперимент, тканые композиты, отверстие, концентрация напряжений, прочность

**Keywords:** experiment, plain weave composite, hole, stress concentration, strength

### Введение

Определение влияния концентрации напряжений, вызываемой наличием отверстия, на несущую способность является актуальной задачей при проектировании деталей из композиционных материалов (КМ) [1, 2]. Как правило, ее решение индивидуально для конкретного типа КМ и конфигурации образцов. Это обуславливает разработку расчетно-экспериментальных методов, позволяющих прогнозировать прочность элементов конструкций из КМ, содержащих концентраторы напряжений при ограниченном наборе экспериментальных данных.

Для оценки прочности композитных пластин широко применяют критерий напряжений в точке, согласно которому разрушение возникает, когда нормальные напряжения на некотором расстоянии  $d$  от края концентратора достигают значения предела прочности [2, 3]. Считается, что этот параметр характеризует структуру материала, и может быть определен по экспериментальным данным в предположении, что его малый размер не вносит существенного изменения в распределение напряжений, полученного на основе решения упругой задачи. Эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_{ef}$  для образца шириной  $W$  с центральным отверстием диаметром  $D$  определяется как отношение предела прочности  $\sigma_B$  и номинальных разрушающих напряжений  $\sigma_{nc}$  [2]:

$$\eta = D/W; \quad \xi = \eta + 2d/W; \quad M = \left( \sqrt{1 - 8 \left[ \frac{3(1-\eta)}{2+(1-\eta)^3} - 1 \right]} - 1/2\eta^2 \right)^{0.5}$$

$$f_w = \left( \frac{3(1-\eta)}{2+(1-\eta)^3} + \frac{(\eta M)^6}{2} (K_\infty - 3)(1 - (\eta M)^2) \right)^{-1}$$

$$K_{ef} = \frac{\sigma_B}{\sigma_{nc}} = f_w \left[ 1 + \frac{(\eta/\xi)^2}{2} + \frac{3(\eta/\xi)^2}{2} (\eta/\xi)^4 - \frac{K_\infty - 3}{2} (5(\eta/\xi)^6 - 7(\eta/\xi)^8) \right] \quad (1)$$

где  $K_\infty$  – коэффициент концентрации на кромке отверстия для бесконечной ортотропной пластины, рассчитываемый по известному решению [4].

Целью настоящих расчетно-экспериментальных исследований является установление влияния отверстия, размер которого сопоставим с элементарной ячейкой структуры материала, на прочность пластин из тканых углепластиков при растяжении.

### Методы и результаты

В исследованиях использовались ткани полотняного плетения на основе углеродных волокон и эпоксидного связующего производства Китай. Размер элементарной ячейки материала составляет порядка 4x4 мм. Прямоугольные образцы из композитных пластин и отверстия получали по технологии гидроабразивной струи. Диаметр отверстий  $D$ , расположенных в центре образца, варьировался от 3 до 8 мм с шагом 1 мм. Ширина образцов  $W$  выбиралась, исходя из постоянного соотношения  $D/W=0,17$ . Испытания на растяжения до разрушения проводились в Инженерно-испытательном центре ФИЦ ИВТ на универсальной испытательной машине Tinius Olsen 100ST со скоростью нагружения 1 мм/мин. В качестве методической основы проведения экспериментов применялся стандарт ASTM D 5766. Продольные деформации в ослабленном сечении регистрировались при помощи бесконтактного видеозкстензометра в восьми точках, расположенных на различном расстоянии от кромки отверстия.

Определение характеристик механических свойств материала проводили на стандартных образцах с двухсторонними лопатками (ГОСТ 32656-2014). По экспериментальным данным получены следующие средние значения: модуль упругости  $E_1 = 58,88$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,044$ , напряжения разрушения (предел прочности)  $\sigma_B = 578$  МПа.

Все образцы показали хрупкое разрушение по минимальному сечению с линейным характером диаграммы деформирования. Результаты испытаний и значения  $d$  из решения уравнения (1) представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Разрушающие напряжения и эффективные коэффициенты концентрации

№	$D$ , мм	$\sigma_{nc}$ , МПа	$K_{ef}$	$d$ , мм	№	$D$ , мм	$\sigma_{nc}$ , МПа	$K_{ef}$
1	3,0	436,2	1,33	1,2	6	6,0	443,2	1,30
2	3,0	443,3	1,30	1,3	7	7,0	456,9	1,26
3	4,1	414,6	1,39	1,4	8	7,1	447,1	1,29
4	5,0	385,5	1,50	1,4	9	7,9	447,5	1,29
5	5,1	411,0	1,41	1,7				

На рисунке 1 представлено сравнение распределения напряжений в ослабленном сечении, определенное по экспериментальным значениям деформаций, с аналитическим решением [4].

Как следует из данных таблицы 1, эффективные коэффициенты концентрации напряжений значительно меньше теоретического значения, которое для квазизотропного материала равно 3. Зависимость  $K_{ef}$  от относительного характеристического расстояния  $(d/D)$  хорошо аппроксимируется степенной функцией (рисунок 2).

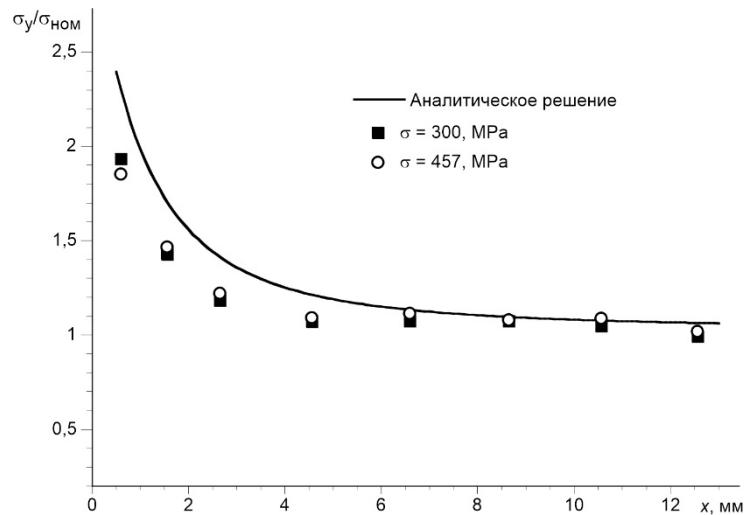


Рисунок 1 – Распределение напряжений в ослабленном сечении с отверстием диаметром 7 мм

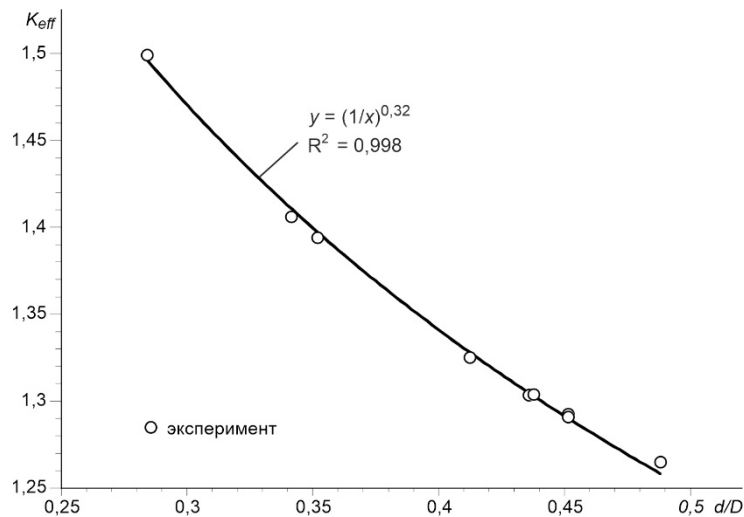


Рисунок 2 – Масштабная зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений для пластин с отверстием

### Заключение

Проведены испытания до разрушения пластин из тканого углепластика с центральным круглым отверстием диаметром 3-8 мм. Распределение напряжений в ослабленном сечении пластины, вычисленное по экспериментальным значениям деформаций, показало приемлемое соответствие аналитическому решению. Для оценки несущей способности пластин использовался критерий напряжений в точке. По результатам исследований получена зависимость эффективного коэффициента концентрации от отношения характеристического расстояния к диаметру отверстия. Меньшее по сравнению с теоретическим значением снижение прочности образцов с отверстием свидетельствует о низкой чувствительности материала к данному типу концентратора.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Review of Stress Concentration Studies on Fibre Composite Panels with Holes and Cutouts. / S. A Kumar, R. Rajesh, S. A. Pugazhendhi // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials. – 2020. – V. 234. – P. 1461–1472. – DOI:10.1177/1464420720944571.

2. Design tool to predict the open-hole failure strength of composite laminates subjected to in-plane loads / M. M. Moure, J. Herrero-Cuenca, S. K. García-Castillo, E. Barbero // Composite Structures. – 2020. – V. 238. – 111970. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.111970.

3. Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами / С. В. Сукнев // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 1. – С. 129–141. – DOI: 10.31857/S0572329922100191.

4. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. - Москва: Гостехтеоретиздат, 1950. - 299 с.

УДК 539.37

**Варыгина Мария Петровна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Varygina Maria Petrovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies

**Буров Андрей Ефимович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий

**Burov Andrey Efimovich**, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies

## **ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА ПОВЕДЕНИЕ ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ**

## **NUMERICAL ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF POROUS PERIODIC STRUCTURES ON THE BEHAVIOR OF TUBULAR ELEMENTS UNDER TENSILE**

**Аннотация.** Современные технологии аддитивного производства позволяют создавать сложные пористые структуры с заранее заданными механическими свойствами. При проектировании и оптимизации таких структур важную роль играет численное моделирование. В работе представлены результаты конечно-элементного анализа трубчатых

элементов конструкции, состоящих из трижды периодических минимальных поверхностей, под действием осевого растяжения. Показано влияние топологии элементарной ячейки структуры элемента на его напряженное состояние и жесткость.

**Abstract.** Modern additive manufacturing technologies make it possible to create tailored complex porous structures with predetermined mechanical properties. Numerical modeling plays an important role in the design and optimization of such structures. In this paper, a finite element analysis of tubular construction elements consisting of triply periodic minimal surfaces under axial tensile is carried out. The influence of the elementary cell topology of the element structure on its stress state and rigidity is shown.

**Ключевые слова:** трижды периодические минимальные поверхности, трубчатый элемент, конечно-элементный анализ, напряженное состояние

**Keywords:** triply periodic minimal surfaces, tubular element, finite element analysis, stress state

### Введение

Концепция пористых легких структур с высокой способностью поглощения энергии становится все более популярной в различных областях промышленности, включая гражданское строительство, транспорт, аэрокосмическую промышленность, биомедицинские технологии [1]. В последние годы были разработаны различные конструкции, состоящие из повторяющихся элементарных ячеек, основанных на трижды периодических минимальных поверхностях TPMS (triply periodic minimal surface) [2,3]. TPMS представляет собой поверхность, обладающей свойством периодичности по трем пространственным направлениям, состоящую из точек со средней кривизной, равной нулю. Такая структура имеет гладкую поверхность и может быть выражена математическими функциями [4,5], изменением параметров которой можно контролировать пористость и удельную площадь поверхности.

В работе представлены результаты численного анализа механического отклика трубчатых элементов конструкции, составленных из TPMS, при осевом растяжении. Основной целью является оценка влияния топологии и геометрических параметров TPMS на напряженное состояние и жесткостную эффективность элементов конструкции.

### Результаты моделирования

В работе рассматриваются два типа TPMS: ИВП (Schoen I-graph Wrapped Package) и примитив (Schwarz Primitive). Трижды периодические минимальные поверхности могут быть описаны с использованием метода, основанного на неявных функциях [4, 5]:

$$f(x, y, z) \leq |t|. \quad (1)$$

При  $t = 0$  генерируемая поверхность делит все пространство на два равных объема. При  $t \neq 0$ , сгенерированная поверхность смещена относительно поверхности с нулевым значением  $t$ . Для неравенства (1)

можно определить область между поверхностями со значением  $t$  и  $-t$ . Меньшему значению  $t$  соответствует меньшая толщина стенки элементарной ячейки.

Неявные функции  $f_i(X, Y, Z)$  и  $f_p(X, Y, Z)$  для поверхностей ИВП и примитива, соответственно, заданы уравнениями (2) – (3).

$$f_i(X, Y, Z) = 2(\cos X \cos Y + \cos Y \cos Z + \cos X \cos Z) - (\cos 2X + \cos 2Y + \cos 2Z), \quad (2)$$

$$f_p(X, Y, Z) = \cos X + \cos Y + \cos Z, \quad (3)$$

где  $X = 2\pi x/l_x$ ,  $Y = 2\pi y/l_y$ ,  $Z = 2\pi z/l_z$ , а  $l_x, l_y, l_z$  – константы, связанные с размером элементарной единичной ячейки в направлении декартовых координат  $x, y, z$ , соответственно.

В данной работе рассматривались трубчатые элементы, составленные из повторяющихся ячеек TPMS (рисунок 1). Размеры элементарной ячейки  $a = l_x = l_y = l_z$  выбирались равными 10 и 20 мм. Высота цилиндра  $L = 20$  мм, внешний радиус  $R = 30$  мм, внутренний радиус  $r = 20$  мм. Число элементарных ячеек в направлениях  $x \times y \times z$  равно  $36 \times 1 \times 2$  при  $a = 10$ , и  $18 \times 0,5 \times 1$  при  $a = 20$ .

Одним из факторов, которые позволяют сравнивать различные топологии TPMS, является относительная плотность структуры  $\rho'$ , определяемая как  $\rho' = V_c/V$ , где  $V_c$  – объем структуры, а  $V$  – объем области, ограничивающей структуру. Различные пористые структуры целесообразно сравнивать, если они имеют одинаковую относительную плотность  $\rho'$ . Для заданных размеров элементарной ячейки методом золотого сечения выполнялся поиск параметра  $t$ , при котором  $\rho' = 0,5$ .

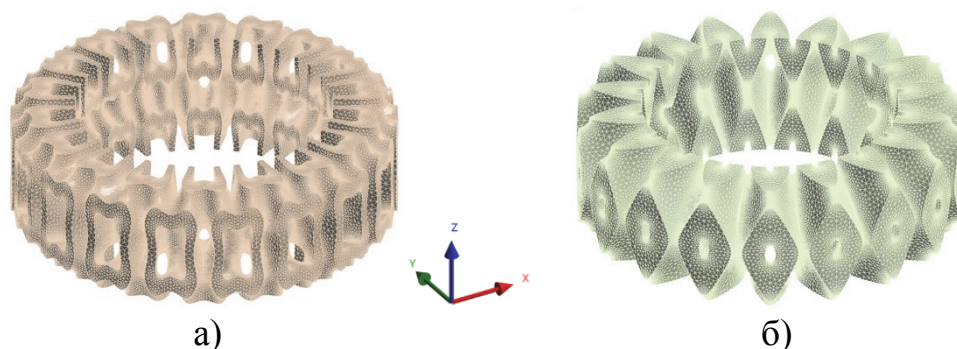


Рисунок 1 – Трубчатые элементы, составленные из повторяющихся ячеек TPMS при  $a = 20$ : а) ИВП, б) примитив

Этапы построения численной модели включают в себя создание stl-файла элементарной ячейки, соответствующего TPMS, преобразование к цилиндрической системе координат, регуляризацию фасетной геометрии, генерацию структуры и ее конечно-элементную дискретизацию.

Расчеты выполнены в среде Ansys Mechanical. На верхней площадке трубы действует осевая растягивающая нагрузка 10000 Н, нижние

поверхности трубы закреплены. Приняты следующие упругие постоянные материала: модуль Юнга  $E = 1943$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,43$ .

В таблице 1 приведены значения максимальных эквивалентных напряжений и коэффициента жесткости элементов. Последний определялся как отношение силы к вызванному ею перемещению. На рисунке 2 показаны результаты численных расчетов напряженного состояния трубчатых образцов. Для двух типов TPMS концентрация напряжений наблюдается в местах резкого изменения геометрии (прежде всего в сечениях, ослабленных отверстиями), однако для ИВП значения максимальных напряжений в несколько раз ниже, чем для примитивов. Это объясняется меньшей относительной жесткостью и особенностью геометрии последних. Параметр  $a$  также влияет на механический отклик – его возрастание ведет к снижению жесткости трубчатого элемента и возрастанию уровня напряжений.

Таблица 1 – Расчетные значения максимальных эквивалентных напряжений и коэффициентов жесткости

Тип структуры	$a$ , мм	$t$	$\sigma_{eq,max}$ , МПа	$k_{stiff}$ , Н/м
ИВП	10	1,843	32,474	$6,14 \cdot 10^7$
	20	1,849	51,561	$5,73 \cdot 10^7$
Примитив	10	0,871	81,662	$5,40 \cdot 10^7$
	20	0,873	102,09	$5,02 \cdot 10^7$

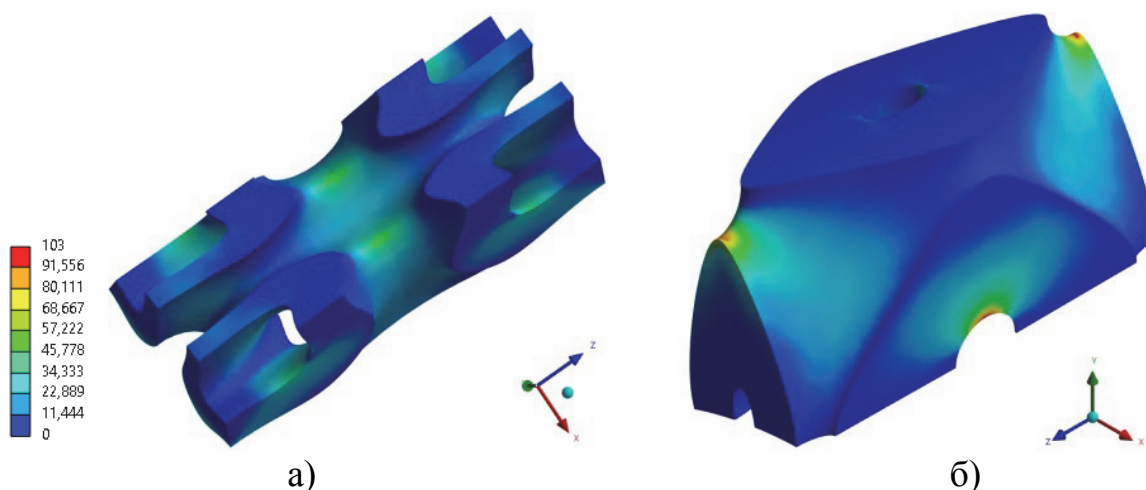


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу для  $\frac{1}{2}$  части элементарной ячейки,  $a = 20$ : а) ИВП, б) примитив

### Заключение

Объектом исследований настоящей работы является трубчатый элемент конструкции, стенки которого состоят из TPMS различной топологии, но одинаковой относительной плотности. Результаты конечно-элементного моделирования свидетельствуют о выраженном эффекте структуры TPMS на напряженное состояние и жесткость составленных из них конструктивных элементов. Для структуры ИВП уровень напряжений и податливость меньше, чем для аналогичных параметров примитивов. Для

обеих структур уменьшение размера элементарной ячейки ведет к большей жесткости и меньшим максимальным напряжениям. Анализ механического поведения рассмотренных структур при других видах нагружения является предметом дальнейших исследований.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Lessons from nature: 3D printed bio-inspired porous structures for impact energy absorption – A review / S. H. Siddique, P. J. Hazell, H. Wang, J. P. Escobedo, A. A. Ameri // Additive Manufacturing. – 2022. – V. 58. – P. 103051. – DOI: 10.1016/J.ADDMA.2022.103051.

2. Review on mechanical properties of metal lattice structures / X. Miao, J. Hu, Yi. Xu, J. Su, Ya. Jing // Composite Structures. – 2024. – V. 342. – P. 118267. DOI: 10.1016/j.compstruct.2024.118267.

3. Mechanical properties of porous materials based on new triply periodic and minimal surfaces / A. V. Eremin, M. A. Frolov, A. F. Krutov, M. I. Smolkov, A. S. Shulga, D. M. Bragin, A. I. Popov, V. A. Blatov // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2024. DOI: 10.1080/ 15376494.2024.2303724.

4. Schwarz, H. A. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. – Berlin / Heidelberg: Springer, 1890. – 358 p.

5. Schoen, A. H. Infinite Periodic Minimal Surfaces without Self-Intersections. – Washington, DC: NASA, 1970. – 92 p.

УДК 004.94:620.172

**Веремейчик Андрей Иванович**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной механики, Брестский государственный технический университет

**Veremeychik Andrei Ivanovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mechanics, Brest State Technical University

#### **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦОВ С ЗОНАМИ ИЗМЕНЕННОЙ СТРУКТУРЫ ИСХОДНОГО МАТЕРИАЛА ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ ПРИ КРУЧЕНИИ** **STRESS-STRAIN STATE OF SAMPLES WITH ZONES OF ALTERED STRUCTURE OF THE SOURCE MATERIAL AFTER TORSION HEAT TREATMENT**

**Аннотация.** Исследуется напряженно-деформированное состояние образцов с зонами измененной структуры материала, которые возникают после термообработки локальным высокоэнергетическим источником нагрева. Проведено компьютерное моделирование задачи при кручении образцов. Исследовано влияние механических характеристик материала зон



термообработки (модуль упругости, коэффициент Пуассона) на напряженно-деформированное состояние. Определены коэффициенты концентрации напряжений в окрестности термообработанных областей.

**Abstract.** The stress-strain state of samples with zones of altered material structure that arise after heat treatment with a local high-energy heating source is investigated. A computer simulation of the problem of torsion of the samples was carried out. The influence of the mechanical characteristics of the material of the heat treatment zones (modulus of elasticity, Poisson's ratio) on the stress-strain state is investigated. Stress concentration coefficients in the vicinity of heat-treated areas are determined.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, кручение, зона измененной структуры, коэффициент концентрации напряжений, модуль упругости, коэффициент Пуассона.

**Keywords:** stress-strain state, torsion, zone of altered structure, stress concentration coefficient, modulus of elasticity, Poisson's ratio.

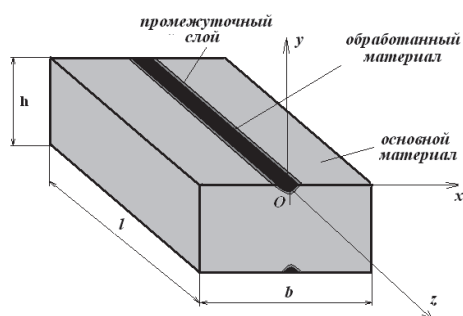
### **Введение**

При лазерной, плазменной и других высокоэнергетических методах сосредоточенного воздействия на деталь возникают зоны измененной структуры исходного материала – зона целевого воздействия и окружающая ее зона термического влияния [1], в которых структура материала заметно отличается от структуры основного металла. Управление свойствами материала в зоне термического влияния ограничено в связи с отсутствием возможности непосредственного сопутствующего воздействия на структурообразование в этой области. Свойства материала в этих зонах изучены в недостаточной мере, что не позволяет прогнозировать поведение обработанной детали в разнообразных условиях ее эксплуатации. Наиболее важными параметрами материала, определяющими его прочностные свойства, являются модуль упругости, коэффициент Пуассона, пределы прочности и текучести. Однозначных аналитических зависимостей между ними не существует, поэтому после сосредоточенной высокоэнергетической обработки материала имеет место большая неопределенность в их значениях. Данная работа является продолжением исследований НДС образцов с зонами измененной структуры при растяжении, проведенных в статьях [2, 3].

### **Основная часть**

Для исследования влияния различий модуля упругости и коэффициента Пуассона двух новообразованных зон образца и их количества после его термообработки движущимся источником нагрева (лазерный луч, плазменная струя и др.) по сравнению с характеристиками основного

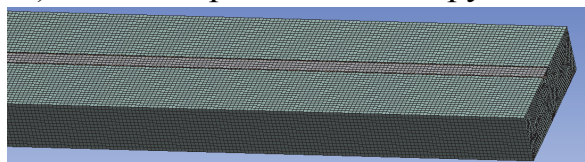
материала проведено конечно-элементное моделирование задачи о деформировании стержня (образца) размерами  $b \times h \times l = 20 \times 7 \times 200$  мм с зонами обработанного материала (дорожками) сечением в форме полукруга радиусом 0,4 мм, окруженного промежуточной серповидной зоной термического влияния толщиной 0,2 мм (рисунок 1), расположенными вдоль всей длины образца или на половине его длины с одной или двух сторон, а также образца с двумя дорожками при варьировании расстояния между дорожками от 0 до 4 мм. В качестве расчетного пакета использовался программный комплекс *ANSYS Workbench*.



а) схема образца



б) схема закрепления и нагружения



в) конечно-элементная модель

Рисунок 1 – Образец с дорожками

Модуль упругости основного материала («*bas*») принимался равным  $E = E_{bas} = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = \mu_{bas} = 0,3$ . Модули упругости промежуточного («*int*») и обработанного («*pr*») слоев и их коэффициенты Пуассона варьировались, но принято, что после обработки материал тела во всех его точках остается в упругой области работы и при одинаковой температуре, что соответствует большинству реализующихся случаев эксплуатации деталей машин. Отношение модулей упругости и коэффициентов Пуассона обработанного материала к значениям для исходного материала варьировалось в пределах  $K_E = E_{pr} / E_{bas} = K_\mu = \mu_{pr} / \mu_{bas} = 0,5 - 1,5$ . При расчетах принималось:

$$E_{int} = \frac{E_{bas} + E_{pr}}{2}, \quad \mu_{int} = \frac{\mu_{bas} + \mu_{pr}}{2}. \quad \text{Рассматривалось НДС тела в}$$

установившемся тепловом режиме. Коэффициенты концентрации напряжений  $K_\sigma$  определялись как отношение максимального значения напряжений  $\sigma_i^{\max}$  с учетом концентрации к номинальному значению  $\sigma_{ном}$  для образца без зон измененной структуры. При моделировании испытаний образец жестко защемлялся в левом торцевом сечении и нагружался в правом торцевом сечении моментом  $M = 50$  Н·м относительно оси  $z$  (рисунок 1, б). Номинальные эквивалентные напряжения по Мизесу для

образца с двумя дорожками с противоположных сторон по всей длине составили 359,8 МПа.

На рисунках 2–4 приведено распределение эквивалентных напряжений по Мизесу в образцах при различных соотношениях  $E$  и  $\mu$ , а также зависимость коэффициентов концентрации напряжений от соотношений  $K_E$  или  $K_\mu$ .

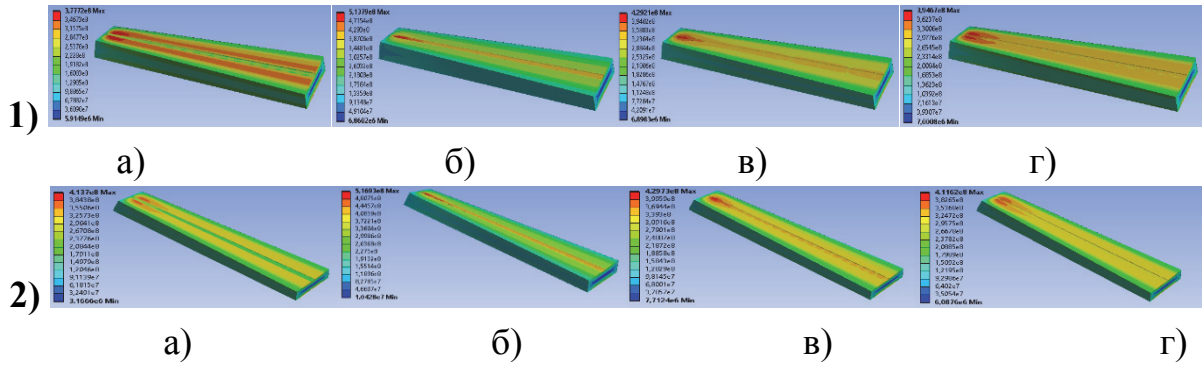


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений на половине образца с дорожками с двух сторон (1) и с одной стороны (2),  $E_{bas} = 200$  ГПа,  $\mu_{bas} = 0,3$   
 а)  $E_{int} = 160$  ГПа,  $E_{pr} = 120$  ГПа,  $\mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ; б)  $E_{int} = 250$  ГПа,  $E_{pr} = 300$  ГПа,  $\mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$ ; в)  $E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{int} = 0,24$ ,  $\mu_{pr} = 0,18$ ;  
 г)  $E_{int} = E_{pr} = 200$  ГПа,  $\mu_{int} = 0,375$ ,  $\mu_{pr} = 0,45$

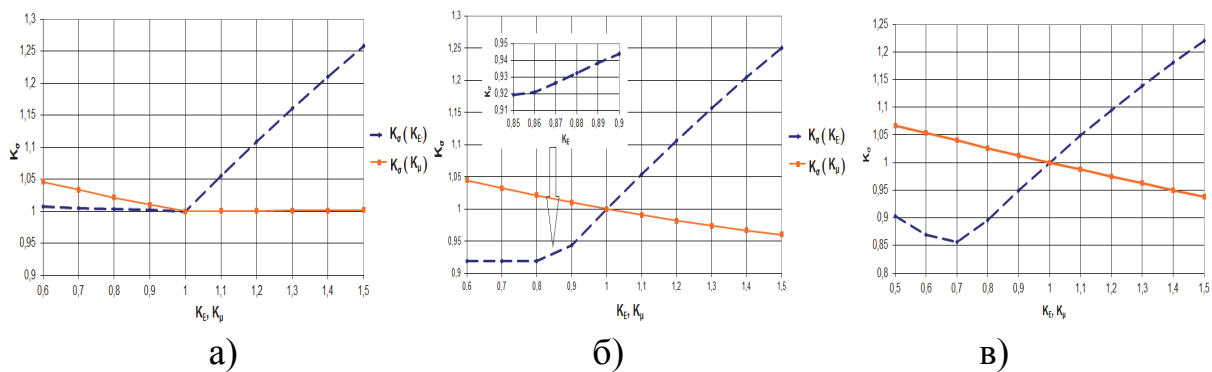
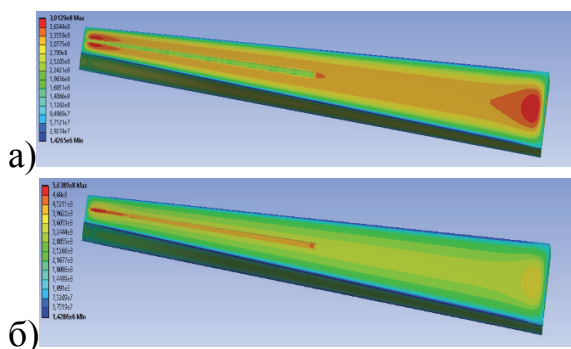


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений от соотношений  $K_E$  или  $K_\mu$

- а) дорожка с одной стороны; б) дорожки с двух сторон;
- в) две дорожки с двух сторон, расстояние между дорожками 2 мм

### дорожка на половине длины



### две дорожки с двух сторон, расстояние между дорожками 2 мм

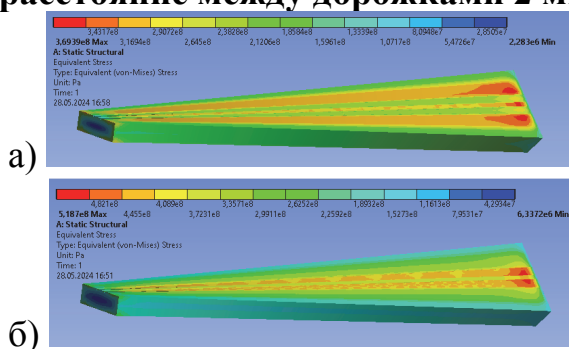


Рисунок 4 – Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу,  $E_{bas} = 200$

$$\text{ГПа}, \mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$$

$$\text{а) } E_{int} = 160 \text{ ГПа}, E_{pr} = 120 \text{ ГПа; б) } E_{int} = 250 \text{ ГПа}, E_{pr} = 300 \text{ ГПа}$$

### Заключение

В широком диапазоне характеристик материала проведены исследования НДС образцов с зонами трансформированной структуры материала после термообработки при кручении. Получено распределение эквивалентных напряжений для различных характеристик материала зон с измененной структурой. Установлены зависимости коэффициентов концентрации напряжений от модуля упругости и коэффициента Пуассона. Результаты исследований показывают, что изменение характеристик материала упрочненной зоны незначительно влияет на эквивалентные напряжения. При кручении характер изменения коэффициентов концентрации напряжений при варьировании  $E$  и  $\mu$  принципиально отличается от испытаний на растяжение [3]. Установлено, что любое изменение модуля упругости и коэффициента Пуассона материала обработанной и промежуточной зон по отношению к основному материалу приводит к изменению НДС образцов; при этом максимальные напряжения возникают в обработанном слое, в основном материале или промежуточной зоне.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Бирюков, В. П. Определение параметров зон лазерной закалки сталей и их трибологических характеристик / В. П. Бирюков [и др.]. ФОТОНИКА. 2019; 13(3): 242–250.
2. Веремейчик, А.И. Конечно-элементное моделирование задачи о растяжении материала с зонами измененной структуры / А. И. Веремейчик. М. В. Нерода, Б. Г. Холодарь // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – № 3 (60). – С. 77–84.
3. Verameichyk AI, Neroda MV, Holodar BG. The influence of the altered structure zone characteristics after the material jet treatment on the samples stress state during tensility. Materials Physics and Mechanics. 2023;51(4): 130-141. DOI: 10.18149/MPM.5132023\_12.

УДК 004-94, 519-688, 51-73

**Водинчар Глеб Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Vodinchar Gleb Mikhailovich**, Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory of Physical Process Modeling, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Фещенко Любовь Константиновна**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Feshchenko Lyubov Konstantinovna**, Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory of Physical Process Modeling, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **КОМПЛЕКС СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО С ПАМЯТЬЮ**

## **SYMBOLIC-NUMERICAL COMPUTATIONS COMPLEX FOR SIMULATION OF GEODYNAMO WITH MEMORY**

**Аннотация.** При построении спектральных моделей геодинамо используется разложение полей задачи о магнитогидродинамической конвекции в ядре Земли в линейные комбинации базисных мод. Расчет коэффициентов моделей удобно проводить, сочетая аналитические и численные расчеты. Целью работы является разработка комплекса программ для составления моделей и численного моделирования. Модели описывают маломодовую крупномасштабную конвекцию и учитывают механизм памяти в подавлении альфа-эффекта. Интенсивность альфа-эффекта корректируется импульсным случайным процессом, описывающим спонтанные синхронизации мелкомасштабных мод. Комплекс включает в себя модули: расчета базисных мод полей задачи; расчета коэффициентов спектральной модели; численного моделирования с возможностью выбора распределений импульсов случайного процесса; расчета статистических характеристик модельных последовательностей инверсий.

**Abstract.** When geodynamo spectral models constructing, the decomposition of the fields of magneto-convection in the Earth's core into linear combinations of basis modes is used. It is convenient to calculate model coefficients by combining analytical and numerical computations. The goal of the work is to develop a set of programs for compiling models and numerical

simulation. The models describe low-mode large-scale convection and take into account the memory mechanism in suppressing the alpha effect. The intensity of the alpha effect is corrected by a pulsed random process that describes spontaneous synchronization of small-scale modes. The complex includes modules: calculation of basic modes for fields of geodynamo; calculating the coefficients of the spectral model; numerical modeling with the ability to select distributions of impulses of a random process; calculation of statistical characteristics of model sequences of reversals.

**Ключевые слова:** геодинамо, спектральные модели, память, эрeditарность, символично-численные вычисления, комплексы прикладных программ

**Keywords:** geodynamo, spectral models, memory, hereditary, symbolic-numerical computations, application software.

### Введение

В задаче геодинамо рассматривается магнитогидродинамическая конвекция проводящей вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке (жидкое ядро Земли) с твердыми границами [1]. Поля скорости  $v$ , температуры  $T$  и магнитной индукции  $B$  связываются уравнениями Навье-Стокса с кориолисовым и лоренцевым членами, температуропроводности и магнитной индукции с начальными и граничными условиями. При построении спектральных моделей используют приближенное представление полей задачи в виде разложения по модам свободного затухания полей  $v = \sum_{l=1}^L \beta_l(t)v_l(r)$ ,  $T = \sum_{s=1}^S \beta_s(t)T_s(r)$ ,  $B = \sum_{p=1}^P \beta_p(t)B_p(r)$ . Подстановка этих разложений в уравнения геодинамо и применение процедуры метода Галеркина дает динамическую систему для амплитуд. Эта система вместе с набором мод и образует спектральную модель [2].

В случае маломодовых моделей, содержащих только крупномасштабные моды, необходимо включать в уравнения динамо в явном виде альфа-эффект. Он описывает генерацию крупномасштабного поля турбулентными мелкомасштабными вихрями. Чтобы избежать неограниченного роста  $B$  необходима и обратная связь в виде подавления альфа-эффекта энергией этого поля [3]. Временная нелокальность (память или эрeditарность) этой обратной связи в рассматриваемых моделях проявляется в том, что подавление определяется не только актуальным, но и всеми предшествующими значениями энергии. Математически это формализуется в виде функционала от энергии с разностным ядром и уравнения модели являются интегро-дифференциальными. Для некоторых частных типов ядер возможно сведение уравнений только к дифференциальным.

Крупномасштабные приближения неявно предполагают, что влияние мелкомасштабных мод в среднем нулевое. Однако эти моды могут

спонтанно синхронизироваться на случайное время, оказывая влияние на генерацию. В модели это введено как аддитивная поправка в интенсивность альфа-эффекта в виде стохастического процесса  $\xi(t)$ . Процесс представляет собой последовательность прямоугольных импульсов, возникающих в случайные моменты, имеющие случайную длительность и гауссовскую, в среднем нулевую, амплитуду.

Для автоматизированного составления описанных моделей и проведения численного моделирования разработан программный комплекс комбинированных символьно-численных вычислений.

### **Описание комплекса**

Разработанный комплекс моделирования включает в себя следующие расчетные модули и базы данных:

1. Модуль символьно-численного расчета параметров базисных мод скорости, температуры и магнитной индукции.

2. База данных параметров базисных мод скорости, температуры и магнитной индукции.

3. Модуль символьно-численного расчета коэффициентов Галеркина.

4. База данных параметров базисных мод скорости, температуры и магнитной индукции.

5. Модуль генерации случайного процесса  $\xi(t)$  с возможностью выбора типа закона распределения случайных времен ожидания и существования импульсов (экспоненциального или степенного), медианных значений этих времен, значения показателя степени для степенного закона.

6. Модуль численного решения интегро-дифференциальных уравнений модели с возможностью выбора одного из двух разностных методов типа «предиктор-корректор» (комбинированного метода, объединяющего метод Коши-Эйлера для дифференциальной части модели и метод трапеций для интегральной части; метода Адамаса-Башфорта-Моултона для случая ядер, допускающих сведение уравнений к дифференциальным).

7. Модуль расчета гистограмм времен ожидания инверсий (смен полярности модельного магнитного поля) и фрактальной размерности шкалы полярности.

8. Модуль ввода-вывода.

Основными входными данными являются идентификаторы используемых для построения модели мод, которые представляют из себя мультииндексы, характеризующие квантование спектра мод по радиальному, широтному и долготному направлениям и тип моды (тороидальная или полоидальная). По этим индексам проводится поиск в базе коэффициентов Галеркина. Если соответствующих коэффициентов в базе нет, то проводится их вычисление и пополнение базы. Для вычисления коэффициентов необходимы параметры мод. Поэтому сначала выполняется поиск в базе параметров мод. Если необходимых мод в базе нет, выполняется расчет параметров и пополнение базы. Вычисление параметров мод и коэффициентов выполняется с помощью комбинированных символьно-

численных вычислений, которые подробно описаны в работах [2, 4] и реализованы в математическом пакете Maple.

Для моделирования эредитарного подавления возможно использование одного из четыре видов ядер  $K(s)$  функционала подавления, задаваемых формулами при  $s \geq 0$ :

$$\exp(-s), \quad s \cdot \exp(-s), \quad 1/(1+s)^{\nu}, \quad s/(1+s)^{\nu+1}.$$

Эти четыре вида ядер соответствуют качественно различным случаям экспоненциальной или степенной асимптотики ядра подавления, а также мгновенному отклику при  $K(0) \neq 0$  или задержке отклика при  $K(0) = 0$ . Для экспоненциальных ядер уравнения модели сводятся к дифференциальным.

Модуль расчета фрактальной размерности шкалы полярности модельного поля реализует алгоритм, предложенный в работе [5] для реальной палеомагнитной шкалы и адаптированный и использованный в [6] для работы с модельными шкалами.

### **Заключение**

Разработан вычислительный комплекс программ для автоматизированного составления спектральных моделей геодинамо с эредитарным подавлением альфа-эффекта и численного моделирования. Он дает возможность быстро варьировать наборы базисных мод, пересчитывать коэффициенты моделей и проводить моделирование с возможностью выбора ядер функционала подавления и распределения импульсов в возмущении альфа-эффекта.

Комплекс может быть использован для численного исследования задачи геодинамо и статистического анализа инверсий магнитного поля.

### **Благодарности**

Работа выполнена за счет проекта РНФ 22-11-00064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Merrill, R., McElhinny, M., McFadden, P. The Magnetic Field of the Earth / R. Merrill, M. McElhinny, P. McFadden. – N.Y.: Acad. Press, 1996. – 532 p.

2. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System / G. Vodinchar, L. Feshchenko // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – № 13. – 3000. – DOI: 10.3390/math11133000. – EDN KMDXCF.

3. Зельдович, Я.Б., Рузмайкин, А.А., Соколов, Д.Д. Магнитные поля в астрофизике / Я.Б. Зельдович, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов. – Москва-Ижевск: НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 384 с.

4. Применение компьютерной алгебры для составления спектральных моделей кинематического осесимметричного динамо / Г.М. Водинчар, Л.К. Фещенко // Вычислительные технологии. – 2023. – Vol. 28. – № 2. – С. 4-18. – DOI: 10.25743/ICT.2023.28.2.002. – EDN ASOXJJ.



5. Фрактальный анализ временной шкалы геомагнитной полярности / Д.М. Печерский, М.Ю. Решетняк, Д.Д. Соколов // Геомагнетизм и аэрономия. – 1997. – Vol. 37. – № 4. – С. 132-142.

6. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary  $\alpha\omega$ -Dynamo Model / G. Vodinchar, L. Feshchenko // Fractal and Fractional. – 2022. – Vol. 6. – № 6. – 328. – DOI: 10.3390/fractalfract6060328. – EDN BODMGL.

УДК 004.942, 51-73:550.3, 550.394

**Гапеев Максим Игоревич**, младший научный сотрудник лаборатории акустических исследований, ИКИР ДВО РАН

**Gapeev Maksim Igorevich**, Junior Researcher, Laboratory of Acoustic Research, IKIR FEB RAS

**Марапулец Юрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, директор ИКИР ДВО РАН

**Marapulets Yury Valentinovich**, Doctor of Physical and Mathematical Science, director, IKIR FEB RAS

**Солодчук Александра Андреевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории акустических исследований, ИКИР ДВО РАН

**Solodchuk Alexandra Andreevna**, Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Laboratory of Acoustic Research, IKIR FEB RAS

## **ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЫШЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЕРЕД ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯМИ ASSESSMENT OF THE SPATIAL DISTRIBUTION OF INCREASED DEFORMATIONS BEFORE EARTHQUAKES**

**Аннотация.** Для повышения эффективности обнаружения предсейсмических аномалий в различных геофизических полях предложен новый подход к моделированию областей, наиболее подверженных влиянию повышенных деформаций при подготовке землетрясений. В каждой точке рассматриваемой поверхности земной коры вычисляются значения относительных деформаций, после чего производится подсчет количества землетрясений, перед которыми относительные деформации превышали пороговое значение  $10^{-8}$ . После этого вычисляются относительные частоты появления таких деформаций. С помощью разработанного подхода произведена оценка пространственного распределения повышенных деформаций на территории Камчатского полуострова.

**Abstract.** To increase the efficiency of detecting pre-seismic anomalies in various geophysical fields, a new approach to modeling the areas most affected by increased deformations during earthquake preparation is proposed. At each point

of the considered earth's crust surface, the values of relative deformations are calculated. The number of earthquakes is calculated, before which the relative deformations exceeded the threshold value of  $10^{-8}$ . After that, the relative frequencies of such deformations are calculated. The spatial distribution of increased deformations on the territory of the Kamchatka Peninsula is estimated.

**Ключевые слова:** моделирование предсейсмических деформаций, теория упругости, функция Грина.

**Keywords:** modeling of pre-seismic deformations, theory of elasticity, Green's function.

### **Введение**

При подготовке землетрясения вокруг его очага формируется поле напряжений, которое приводит к деформации слоев горных пород, составляющих земную кору. В случаях, когда деформации превышают уровень земных приливов, обусловленных гравитацией Солнца и Луны, в различных геофизических полях могут проявляться предсейсмические аномалии [1]. В настоящее время существует большое количество моделей подготовки землетрясения, в той или иной степени объясняющих причины возникновения таких аномалий. Однако большинство моделей носят феноменологический характер, отсутствие достаточно разработанного математического аппарата не позволяет использовать их для моделирования напряженно-деформированного состояния земной коры вокруг очагов наблюдаемых землетрясений. Наиболее разработанными с этой точки зрения математическими моделями подготовки землетрясения являются энергетическая модель [2,3], а также модели консолидации и деструкции [4-6]. Результаты моделирования в большинстве работ сопоставлялись с деформациями земной коры, возникающими перед отдельными землетрясениями. Анализ общих тенденций формирования областей повышенных предсейсмических деформаций в сейсмоактивных регионах не проводился. В настоящей работе предлагается новый подход к выделению областей, наиболее подверженных влиянию повышенных деформаций при подготовке землетрясений. Применение разработанного подхода будет актуально для повышения эффективности обнаружения предсейсмических аномалий.

### **Основная часть**

Очаг тектонического землетрясения представляет собой разрыв сплошности материала Земли, который возникает под действием упругих сдвиговых напряжений, накопленных в процессе тектонической деформации. В момент землетрясения происходит полное или частичное снятие накопленных напряжений в его очаге. Соответствующий очагу тектонического землетрясения разрыв является разрывом скольжения, то есть взаимное перемещение его берегов по нормали к поверхности разрыва равно нулю. В рамках механики сплошных сред будем рассматривать источник землетрясения в виде сосредоточенной системы сил [7],

приложенных к точке упругого изотропного полупространства с координатами  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Поведение такой модели можно описать при помощи системы дифференциальных уравнений Ламе:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $u_i$  - компоненты вектора перемещений,  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе,  $X_i$  - компоненты вектора массовых сил; индексами после запятой обозначено дифференцирование по соответствующим пространственным координатам.

Компоненты вектора массовых сил  $X$  имеют вид:

$$X_i = p_{ij} \frac{\partial \delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $p_{ij}$  - интенсивность соответствующей пары сил,  $\partial \delta(\xi) / \partial \xi_j$  - значение производной дельта функции Дирака.

Поверхность земли задается уравнением  $x_3 = 0$ . Эта поверхность свободна от напряжений в направлении оси  $x_3$ , следовательно на  $x_3 = 0$  заданы граничные условия вида

$$\sigma_{31}|_{x_3=0} = \sigma_{32}|_{x_3=0} = \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений.

Задача (1) с граничными условиями (3) решается методом функций Грина. Для случая точечного источника решение поставленной задачи можно найти в виде

$$u_k(\mathbf{x}) = m_{pq} \frac{\partial g_k^p(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi_q} \quad (4)$$

где  $m_{pq}$  - тензор плотности сейсмического момента [7], который отражает механику землетрясения,  $g$  - функция Грина.

Для моделирования из каталога механики очагов землетрясений «The Global Centroid-Moment-Tensor Catalog» (<https://www.globalcmt.org/>) были отобраны землетрясения, произошедшие вблизи полуострова Камчатка с 1976 г. по 2020 г. Всего выборка содержит 877 землетрясений.

Моделирование деформаций проводилось на плоскости  $x_3 = 0$ , соответствующей поверхности земной коры. На этой поверхности была задана сетка с шагом —  $0.5^\circ$ . Для каждого землетрясения в каждом узле сетки произведено вычисление предсейсмических деформаций. После чего в каждой точке сетки производился подсчет количества землетрясений, перед которыми деформации превышали значение приливных относительных деформаций, равное  $10^{-8}$ . На основании этих данных были вычислены относительные частоты  $\omega_{ij}$  в узле с номером  $i, j$ .

Результаты моделирования пространственного распределения повышенных предсейсмических деформаций за весь период показали, что распределение частот неравномерно — максимумы располагаются вдоль линии основного разлома, пролегающего вдоль побережья Камчатки. При этом в центре расчетной области наблюдается наибольшая частота повышенных деформаций. Отметим, что наибольшая часть населения полуострова проживает именно в этом районе.

## **Заключение**

В рамках линейной теории упругости предложен новый подход к моделированию пространственного распределения областей повышенных деформаций, возникающих при подготовке землетрясений. В каждой точке рассматриваемой поверхности земной коры вычисляются значения относительных деформаций, после чего производится подсчет количества землетрясений, перед которыми относительные деформации превышали пороговое значение  $10^{-8}$ . На основании этих данных вычисляются относительные частоты появления предсейсмических деформаций. Применение разработанного подхода будет актуально для повышения эффективности обнаружения предсейсмических аномалий в сейсмоактивных регионах планеты.

## **Благодарности**

Исследование выполнено за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Gapeev, M. I. Modeling Locations with Enhanced Earth's Crust Deformation during Earthquake Preparation near the Kamchatka Peninsula / M. I. Gapeev, Y. V. Marapulets // Applied Sciences (Switzerland). – 2023. – Vol. 13, No. 1. – DOI 10.3390/app13010290. – EDN QLTHTS.

2. Пережогин, А. С. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями / А. С. Пережогин, Б. М. Шевцов // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 48-57. – EDN JXMWHA.

3. Салтыков, В. А. Развитие приповерхностных зон дилатансии как возможная причина аномалий в параметрах сейсмической эмиссии перед сильными землетрясениями / В. А. Салтыков, Ю. А. Кугаенко // Тихоокеанская геология. – 2012. – Т. 31, № 1. – С. 96-106. – EDN OXSTWD.

4. Добровольский, И. П. Распределение деформаций и напряжений при подготовке тектонического землетрясения / И. П. Добровольский // Физика Земли. – 2003. – № 10. – С. 33-40. – EDN OOHLPX.

5. Ребецкий, Ю. Л. Учет закритического состояния геосреды и проблема дальнедействующего влияния очагов землетрясений / Ю. Л. Ребецкий, А. С. Лермонтова // Вестник Камчатской региональной ассоциации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле. – 2016. – № 4(32). – С. 115-123. – EDN XDRZSD.

6. Ребецкий, Ю. Л. О проблеме дальнедействующего влияния очагов землетрясений / Ю. Л. Ребецкий, А. С. Лермонтова // Вулканология и сейсмология. – 2018. – № 5. – С. 53-66. – DOI 10.1134/S0203030618050061. – EDN OMSOWB.

7. Aki, K., Richards, P. Quantitative Seismology / 2nd ed. Sausalito, California: University Science Books, 2002. – 704 p.

УДК 519.63 004.942 51-73:550.3

**Гапеев Максим Игоревич**, младший научный сотрудник лаборатории акустических исследований, ИКИР ДВО РАН

**Gapeev Maksim Igorevich**, Junior Researcher, Laboratory of Acoustic Research, IKIR FEB RAS

**Солодчук Александра Андреевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории акустических исследований, ИКИР ДВО РАН

**Solodchuk Alexandra Andreevna**, Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Laboratory of Acoustic Research, IKIR FEB RAS

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОГО СТРОЕНИЯ СРЕДЫ**

## **MATHEMATICAL MODELING OF GEOACUSTIC EMISSION ZONES IN THE FRAME OF INHOMOGENOUS MEDIUM**

**Аннотация.** Геоакустическая эмиссия — это процесс генерации упругих волн горными породами в результате динамической перестройки их структуры. Результаты наблюдений показывают, что на динамику геоакустической эмиссии влияют механические процессы, протекающие в очаге готовящегося землетрясения. Ранее с целью обоснования связи между вариациями геоакустической эмиссии и процессом подготовки землетрясений было проведено моделирование зон геоакустической эмиссии — областей поверхности земной коры с деформациями порядка  $10^{-8} - 10^{-5}$ . Результаты моделирования показывают, что уровень расчетных деформаций в пунктах наблюдений превышает приливные, но ниже на порядок зарегистрированных. Это может связано с тем, что земная кора рассматривается в виде однородной среды. Но в действительности на разных уровнях земной коры находятся горные породы с отличающимися свойствами. Настоящий доклад посвящен разработке математической модели формирования зон геоакустической эмиссии с учетом слоистого строения земной коры и наличия аномальных «мягких» и «жестких» включений. Модель описывается в рамках линейной теории упругости, численное решение строится на основе метода конечных элементов. С помощью разработанной модели и численной схемы произведен сравнительный анализ зон геоакустической эмиссии в случае однородной и неоднородной сред.

**Abstract.** Geoacoustic emission is the process of generation of elastic waves by rocks as a result of their dynamic restructuring. Observation results show that the dynamics of geoacoustic emission is influenced by mechanical processes occurring in the source of an impending earthquake. Previously, in order to substantiate the relationship between variations in geoacoustic emission and the

earthquake preparation process, geoaoustic emission zones were modeled. Zones are areas of the earth's crust surface with deformations of the order of  $10^{-8} - 10^{-5}$ . Modeling results show that the level of calculated deformations at observation points exceeds tidal ones, but is an order of magnitude lower than those recorded. Such a result can be caused by considering the Earth's crust as a homogeneous medium. In fact, at different levels of the earth's crust there are rocks with different properties. This report is devoted to the development of a mathematical model for the formation of geoaoustic emission zones taking into account the layered structure of the earth's crust and the presence of anomalous "soft" and "hard" inclusions. The model is described within the framework of the linear theory of elasticity, the numerical solution is based on the finite element method. Based on the developed model and numerical scheme, a comparative analysis of geoaoustic emission zones in the case of homogeneous and inhomogeneous media is performed.

**Ключевые слова:** теория упругости, предсейсмические деформации, метод конечных элементов.

**Keywords:** theory of elasticity, pre-seismic deformations, finite element method.

## **Введение**

Геоакустическая эмиссия — это процесс генерации упругих волн горными породами в результате динамической перестройки их структуры. На ее динамику влияют различные механические процессы, протекающие в горных породах, в том числе и механические процессы в очаге готовящегося землетрясения. В ряде исследований установлено [1–3], что предсейсмический отклик наблюдается в сигналах геоакустической эмиссии, зарегистрированной на расстоянии первых сотен километров от источника землетрясения. С целью обоснования связи между вариациями геоакустической эмиссии и характером деформационного процесса ранее было проведено моделирование зон геоакустической эмиссии в упругом однородном приближении среды [4, 5]. Зона геоакустической эмиссии — это область поверхности земной коры с деформациями порядка от  $10^{-8}$  до  $10^{-5}$ , вызванными процессами в очаге готовящегося землетрясения. Такие значения деформаций выше приливных, но ниже порога прочности горных пород.

Результаты ранее проведенного моделирования показывают, что уровень расчетных деформаций в пунктах наблюдений превышает приливные, но на порядок ниже зарегистрированных. Это может быть результатом приближения земной коры в виде однородного пространства. В действительности на разных уровнях земной коры находятся горные породы с отличающимися свойствами.

Цель настоящей работы заключается в построении математической модели формирования зон геоакустической эмиссии с учетом неоднородного

строения земной коры: наличия аномальных «мягких» и «жестких» включений и слоистой структуры, а также разработке численной схемы решения на основе метода конечных элементов.

### Основная часть

Земная кора представляется в виде изотропного неоднородного упругого полупространства. Описать поведение такой среды в статическом случае можно при помощи уравнений равновесия, закона Гука и соотношения для компонентов тензора деформаций:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений,  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $X_i$  — компоненты вектора массовых сил,  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}), \mu = \mu(\mathbf{x})$  — коэффициенты Ламэ как функции, зависящие от пространственных координат,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, индекс стоящий после запятой означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Пусть полупространство занимает область  $x_3 \leq 0$ . Тогда поверхность Земли задается уравнением  $x_3 = 0$ . Эта поверхность свободна от напряжений в направлении оси  $x_3$ , следовательно на  $x_3 = 0$  заданы граничные условия вида

$$\sigma_{31}|_{x_3=0} = \sigma_{32}|_{x_3=0} = \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0. \quad (4)$$

Напряжения, возникающие под действием источника готовящегося землетрясения, стремятся к нулю на бесконечности, т.е.

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{ij} = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{ij} = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \sigma_{ij} = 0. \quad (5)$$

Очаг тектонического землетрясения представляет собой разрыв сплошности материала Земли, который возникает под действием упругих сдвиговых напряжений, накопленных в процессе тектонической деформации. Такой источник может быть представлен в виде эквивалентной системы массовых сил, компоненты вектора плотности которой равны

$$X_i = p_{ij} \frac{\partial \delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_j} \quad (6)$$

где  $p_{ij}$  — интенсивность соответствующей пары сил,  $\partial \delta(\xi)/\partial \xi_j$  — значение производной дельта функции Дирака,  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — координата очага готовящегося землетрясения.

Для построения численного решения краевой задаче (1 – 6) ставится в соответствие вариационная задача в перемещениях. На ее основе и методе Галеркина строится численная схема метода конечных элементов. Финитные базисные функции, участвующие в аппроксимации решения, полагаются линейными.

## **Заключение**

Разработана математическая модель формирования зон геоакустической эмиссии с учетом неоднородного строения земной коры. Построена численная схема на основе метода конечных элементов. Произведено моделирование формирования зон геоакустической эмиссии в случае слоистого строения земной коры и наличия аномальных «мягких» и «жестких» включений. Показано существенное различие от случая однородного упругого полупространства, что может объяснять несоответствие результатов моделирования и наблюдений в предыдущих исследованиях.

## **Благодарности**

Исследование выполнено в рамках гранта РФФИ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Gregori, G. "Storms of crustal stress" and AE earthquake precursors / G. Gregori, M. Poscolieri, G. Paparo, et al. // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. – Vol. 10, No. 2. – P. 319-337. – DOI 10.5194/nhess-10-319-2010.
2. Sobolev, G. A. Microseismic impulses as earthquake precursors / G. A. Sobolev, A. A. Lyubushin // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. – 2006. – Vol. 42, No. 9. – P. 721-733. – DOI 10.1134/S1069351306090023. – EDN LJSWGX.
3. Аномалии перед камчатскими землетрясениями ( $ML \geq 4.75$ ) в сигналах электромагнитного излучения и геоакустической эмиссии в 2013 году / О. О. Луковенкова, Е. И. Малкин, М. А. Мищенко, А. А. Солодчук // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. – 2021. – Т. 34, № 1. – С. 137-149. – DOI 10.26117/2079-6641-2021-34-1-137-149. – EDN FUUSWS.
4. Пережогин, А. С. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями / А. С. Пережогин, Б. М. Шевцов // *Вычислительные технологии*. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 48-57. – EDN JXMWHA.
5. Gapeev, M. I. Modeling Locations with Enhanced Earth's Crust Deformation during Earthquake Preparation near the Kamchatka Peninsula / M. I. Gapeev, Y. V. Marapulets // *Applied Sciences (Switzerland)*. – 2023. – Vol. 13, No. 1. – DOI 10.3390/app13010290. – EDN QLTHTS.



УДК 519.857.6

Гладких Дмитрий Александрович, студент, Тихоокеанский государственный университет

Gladkikh Dmitrii Aleksandrovich, student, Pacific National University

## ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГОНОЧНОГО АВТОМОБИЛЯ ПО ТРАССЕ

## USE OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS TO CONTROL THE MOVEMENT OF A RACING CAR ON THE TRACK

**Аннотация.** Для решения задачи управления движением гоночного автомобиля по сложной трассе спроектирована управляющая система, построенная с использованием искусственной нейронной сети. Для настройки системы использован метод обучения с подкреплением. Проблема континуальности пространства состояний и действий также решена с использованием искусственных нейронных сетей. Полученная модель протестирована на макете реально существующей трассы.

**Abstract.** The artificial neural networks were used to solve the movement control problem for the racing car on the complex-shaped track. Reinforcement learning method is used to configure the parameters of the control system. The problem of continuity of the space of states and actions has also been solved using artificial neural networks. The resulting model was tested on a layout of a real-life track.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, искусственный интеллект, уравнение оптимальности Беллмана, марковский процесс, система управления.

**Keywords:** mathematical modelling, artificial intelligence, Bellman optimality equation, Markov decision process, control system.

### Введение

В настоящее время уже разработаны системы автоматического управления для личных транспортных средств [1, 2], предназначенных для движения по дорогам общего пользования, однако до сих пор не существует решений, позволяющих создать автоматически управляемый автомобиль для участия в высокоскоростных соревнованиях («гонках») на специально отведённых трассах. Решение данной проблемы увеличит безопасность при проведении таких мероприятий, а также позволит разрабатывать и тестировать более совершенные в техническом плане прототипы гоночных автомобилей, улучшая эффективность последних.

К сожалению, почти все существующие на сегодняшний день системы автоматического управления транспортным средством являются проприетарными, что не позволяет получить доступ ни к исходному коду программы для микропроцессорной техники, ни даже к математическим

моделям, на основе которых построена СУ, поэтому оценить работу таких систем можно только субъективно.

В последнее время системы управления на основе искусственных нейронных сетей активно интегрируются в повседневную жизнь человека. Одним из перспективных направлений их применения является использование системы поддержки принятия решений в транспортной инфраструктуре. С другой стороны, использование системы искусственного интеллекта в качестве СУ оправдывается тем, что её эффективность не должна сильно изменяться при изменении конфигурации трассы, а поскольку искусственные нейронные сети обладают свойством обобщения, данное требование будет выполняться.

### **Постановка задачи**

Существует замкнутая гладкая линия произвольной формы, заданной ширины и определённых размеров, называемая трассой. Для удобства описания потребуем, чтобы у линии трассы не было самопересечений.

Вдоль этой трассы движется объект (гоночный автомобиль) определённых геометрических размеров и массы с переменной скоростью. Изменение скорости зависит от приложенных к автомобилю сил, величина равнодействующей которых нелинейно зависит от большого числа параметров. С точки зрения физики на тело действуют силы консервативные (например, сила упругости, возникающая в амортизаторе подвески) и диссипативные (например, сила трения или сила сопротивления воздуха), также ему сообщается энергия извне (за счёт сжигания топлива система из двигателя и трансмиссии увеличивает кинетическую энергию автомобиля). Математически данная формулировка может быть записана в следующем виде (1):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n_k} \vec{F}_{\kappa_i} + \sum_{j=1}^{n_d} \vec{F}_{\delta_j}, \quad (1)$$

где  $\vec{F}$  – вектор равнодействующей сил, воздействующих на тело;

$n_k$  – количество консервативных сил;

$\vec{F}_{\kappa_i}$  – вектор  $i$ -й консервативной силы;

$n_d$  – количество диссипативных сил;

$\vec{F}_{\delta_j}$  – вектор  $j$ -й диссипативной силы.

Задача управления состоит в формировании управляющего сигнала системам автомобиля, позволяющего минимизировать время прохождения трассы. Так как трасса задается замкнутой, то движение автомобиля завершается в начальной точке. Естественным условием является обеспечение движения без столкновений с препятствиями. Поскольку препятствием может быть как статический объект (стена), так и динамический (другой гоночный автомобиль), в работе представлена многоагентная система [10].

В качестве объектов, на которые действует управляющий сигнал, использованы педали акселератора и тормоза, а также руль. Результатом

моделирования являются усилия нажатия на педали акселератора и тормоза, и угол поворота руля. Для задания данных величин используется диапазон от 0 до 1.

### Метод обучения с подкреплением

Марковский процесс принятия решений (МППР), оперирующий такими понятиями, как состояние, действие и вознаграждение, является мощным инструментом для описания динамических систем, где заранее неизвестно, какое действие является правильным, но возможно определить то, какое из сравниваемых действий более предпочтительно выбрать на данном шаге. Впервые данный термин был употреблён Ричардом Беллманом в работе [11] для описания дискретной задачи оптимального управления на основе вероятностного распределения.

МППР для исходной задачи может быть представлен в следующем виде. В качестве состояния системы предлагается использовать вектор

$$s_i = (v_x, v_y, x_{fl}, x_f, x_{fr}, x_l, x_r, x_{bl}, x_b, x_{br}), \quad (2)$$

где  $v_x$  – проекция вектора скорости на горизонтальную ось, параллельную направлению движения автомобиля;

$v_y$  – проекция вектора скорости на горизонтальную ось, перпендикулярную к направлению движения автомобиля;

$x_{ab}$  – расстояние от центра масс автомобиля до ближайшего препятствия, с которым столкнётся луч, выпущенный по направлению  $ab$ . Всего используется восемь направлений по количеству установленных датчиков:  $fl$  – вперёд-влево;  $f$  – вперёд;  $fr$  – вперёд-вправо;  $l$  – влево;  $r$  – вправо;  $bl$  – назад-влево;  $b$  – назад;  $br$  – назад-вправо.

За действие отвечает вектор

$$a_i = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}), \quad (3)$$

где  $\hat{a}$  – действительное число, обозначающее степень нажатия на педаль акселератора, где 0 обозначает полностью отпущенную педаль, а 1 – полностью нажатую;

$\hat{b}$  – степень нажатия на педаль тормоза, где 0 обозначает полностью отпущенную педаль, а 1 – полностью нажатую;

$\hat{c}$  – угол поворота рулевого колеса, где 0 обозначает поворот до упора против часовой стрелки, а 1 – поворот до упора по часовой стрелке.

Вознаграждение определяется следующим образом:

–  $(r_{i+1} | s_{i+1} = s_{npen}) = -10$  – награда за состояние, при котором автомобиль врезается в препятствие;

–  $(r_{i+1} | s_{i+1} \neq s_{zakl}) = -\Delta t$  – награда за любое другое состояние, не являющееся заключительным;

–  $(r_{i+1} | s_{i+1} = s_{закл}) = 0$  – награда за переход в заключительное состояние (пересечение линии финиша).

Как уже было отмечено ранее, одним из ключевых понятий метода обучения с подкреплением является стратегия. Для данной стратегии  $\pi$  можно рекурсивно определить функцию ценности состояния  $v_\pi(s)$  как

$$v_\pi(s_i) = M[r_{i+1} + \gamma v_\pi(s_{i+1})] = \sum_{\bar{a}} \pi(s_i, \bar{a}) \sum_{\bar{s}} p(s_{i+1} = \bar{s} | a_i = \bar{a}) \times \sum_{\bar{r}} p(r_{i+1} = \bar{r} | a_i = \bar{a}, s_{i+1} = \bar{s}) [\bar{r} + \gamma v_\pi(\bar{s})], \quad (4)$$

где  $p(s_{i+1} = \bar{s} | a_i = \bar{a})$  – вероятность того, что система перейдет из состояния  $s_i$  в состояние  $s_{i+1} = \bar{s}$  при выполнении действия  $\bar{a}$ ;

$p(r_{i+1} = \bar{r} | a_i = \bar{a}, s_{i+1} = \bar{s})$  – вероятность того, что при переходе из состояния  $s_i$  в состояние  $s_{i+1} = \bar{s}$  при выполнении действия  $\bar{a}$ , будет получено вознаграждение  $\bar{r}$ .

Процесс вычисления  $v_\pi(s)$  называется оценкой стратегии  $\pi$ . Очевидно, что в случае, когда задачу удаётся формализовать при помощи конечного марковского процесса принятия решений, то выражение (4) может быть представлено в виде системы из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, где  $n = |S|$  [12, 13].

### **Обобщение на случай непрерывного множества состояний и действий**

Часто для решения задач обучения с подкреплением приходится работать с множествами с большой мощностью. Большое количество данных сложно обрабатывать: увеличивается время, необходимое для осуществления доступа к произвольному элементу, увеличивается количество кэш-промахов, производительность вычислений сильно деградирует [14]. Однако существует ситуация ещё хуже, и она заключается в невозможности в общем случае определить рельеф функции ошибки. Алгоритм требует, чтобы она была непрерывно дифференцируема, но практически всегда это условие не выполняется.

Решить данную проблему можно при помощи аппроксимации исходной функции той, которая обладает нужными для исследователя признаками. Современный способ добиться приближения сильно нелинейной функции с приемлемыми затратами памяти и вычислительных ресурсов – это использование искусственных нейронных сетей (ИНС).

После того, как было удовлетворено условие дифференцируемости функции ценности, можно рассмотреть градиентные алгоритмы обучения с подкреплением. По аналогии со стохастическим градиентным спуском, применяющимся в задачах подстройки весовых коэффициентов ИНС, в

обучении с подкреплением используется градиент стратегии (англ. «policy gradient») [15, 16]:

$$\nabla_{w_\mu} J = \nabla_{w_\mu} Q(s, \mu(s, w_\mu), w_Q) = \nabla_a Q(s, a, w_Q) \nabla_{w_\mu} \mu(s, w_\mu), \quad (5)$$

где  $J = J(\theta) = M[r_i] = v_{\pi_\theta}(s)$ ;

$$Q(s, a, w_Q) \approx q(s, a);$$

$$\mu(s, w_\mu) \approx \underset{a}{\operatorname{argmax}} Q(s, a).$$

Данный алгоритм называется Deep deterministic policy gradient. Для него предполагается использование модели актёр-критик, состоящей в настройке двух нейросетей параллельно: одна сеть (актёр) совершает действие, вторая – его оценивает. Чтобы обучение не закончилось в локальном минимуме функции ошибки, существует поощрение исследования, реализуемое путём добавления случайного шума к выходу  $\mu$ .

### Вычислительный эксперимент

Для проверки качества полученной модели будет использоваться макет реальной трассы «Autodromo del Enzo e Dino Ferrari di Monza» (г. Монца, Италия). Конфигурация трассы изображена на рисунках 2 а, б.



Рисунок 1 – Трасса: а) вид сверху; б) полученный макет

Показателем адекватности построенной модели будет служить различие между мировым рекордом времени  $t_q$ , установленным пилотом-человеком, и минимальным временем проезда виртуальной модели  $t_m$ . Таким образом, метрика качества определяется по формуле (6):

$$E = \frac{|t_m - t_q|}{t_q} \cdot 100\% \quad (6)$$

На модель наложены следующие ограничения:

- скорость ограничена 340 км/ч для тестов;
  - максимальный угол поворота управляемых колёс –  $20^\circ$ ;
  - диаметр колёсного диска – 20 дюймов (508 мм); профиль – 30%;
- итого диаметр колеса – 66.04 см.

Обучение выполняется со следующими параметрами:

а) Для сети  $Q(s, a, w_Q)$ :

- 1  $\alpha = 0.01$ ;
  - 2 обновление весовых коэффициентов один раз за 100 шагов.
- б) Для сети  $\mu(s, w_\mu)$ :
- 1  $\alpha = 10^{-5}$ ;
  - 2 корректировка весовых коэффициентов каждые 20 шагов.

В случае, если вознаграждение за эпоху становится меньше -180 (что соответствует трём минутам времени), эпизод заканчивается, автомобиль переносится в точку старта, направление движения меняется на противоположное и эпизод разыгрывается заново.

Модель в процессе настройки представлена на рисунке 2.

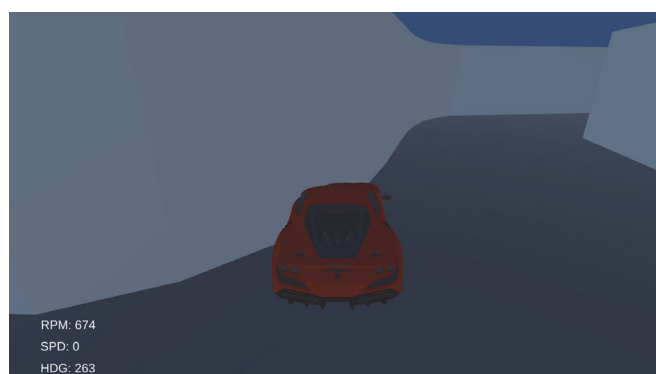


Рисунок 2 – Модель в процессе настройки

Время обучения модели составило приблизительно 8 часов. За это время было разыграно 32000 эпизодов, средняя скорость автомобиля составила 239.79 км/ч, то есть 70.5% от максимальной, что при длине трассы в 5.793 км даёт время круга около 86.97 секунд. Ошибка по метрике (6) составляет 10.25%.

### **Заключение**

В результате проведённого исследования построена и исследована система управления движением гоночного автомобиля по трассе сложной формы, работающая на основе марковского процесса принятия решения. Система управления представляет собой искусственную нейронную сеть, для настройки которой использовался метод обучения с подкреплением, являющийся разновидностью методов обучения без учителя.

В процессе обучения модели получены данные для визуализации результатов исследования. Модель протестирована на макете реально существующей трассы, для которой рекорд времени круга составляет 78.887 секунд при максимальной скорости в 372.6 км/ч. Учитывая ограничения, описанные в п. «Численный эксперимент», модель можно считать адекватной.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Хабаровского отделения Научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр

математических исследований». Допсоглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-02-2024-1432 от 28.02.2024.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Intelligent Control Systems / S. N. Vassilyev, F. F. Pashchenko, A. Y. Kelina, Y. I. Kudinov // *Procedia Computer Science*, Moscow, October 05–07, 2016. Vol. 103. – Moscow: Elsevier B.V., 2017. – P. 623-628. – DOI 10.1016/j.procs.2017.01.088.

2. Патент № 2686030 С1 Российская Федерация, МПК G06N 3/08. Непрерывное управление с помощью глубокого обучения с подкреплением: № 2018106248: заявл. 22.07.2016: опубл. 23.04.2019 / Т. П. Лилликрап, Д. Д. Хант, А. Притцель [и др.]; заявитель ДИПМАЙНД ТЕКНОЛОДЖИЗ ЛИМИТЕД.

3. Safe multi-agent reinforcement learning for multi-robot control / Sh. Gu, Ja. Grudzien Kuba, Yu. Chen [et al.] // *Artificial Intelligence*. – 2023. – Vol. 319. – P. 103905. – DOI 10.1016/j.artint.2023.103905.

4. Bellman, R. A Markovian decision process / R. Bellman // *Journal of Mathematics and Mechanics* – 1957. – Vol. 6. – P. 679–684.

5. Pananjady, A. Instance-dependent  $\ell_\infty$ -bounds for policy evaluation in tabular reinforcement learning / A. Pananjady, M. J. Wainwright // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 2021. – Vol. 67, No. 1. – P. 566-585. – DOI 10.1109/TIT.2020.3027316.

6. Matching-based capture strategies for 3D heterogeneous multiplayer reach-avoid differential games / R. Yan, X. Duan, Z. Shi [et al.] // *Automatica*. – 2022. – Vol. 140. – P. 110207. – DOI 10.1016/j.automatica.2022.110207.

7. Design space exploration of latency and bandwidth in RRAM-based solid state drives / L. Zuolo, C. Zambelli, P. Olivo [et al.] // 2015 15th Non-Volatile Memory Technology Symposium, NVMTS 2015: 15, Beijing, October 12–14, 2015. – Beijing, 2015. – P. 7457495. – DOI 10.1109/NVMTS.2015.7457495.

8. Williams, R. J. Simple Statistical Gradient-Following Algorithms for Connectionist Reinforcement Learning / R. J. Williams // *Machine Learning*. – 1992. – Vol. 8, No. 3. – P. 229-256. – DOI 10.1023/a:1022672621406.

9. Esfahani, H. N. Policy Gradient Reinforcement Learning for Uncertain Polytopic LPV Systems based on MHE-MPC / H. N. Esfahani, S. Gros // *IFAC-PapersOnLine*. – 2022. – Vol. 55, No. 15. – P. 1-6. – DOI 10.1016/j.ifacol.2022.07.599.

УДК 004.932.72'1

**Грабарь Даниил Михайлович**, лаборант исследователь, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Grabar Daniil Mikhailovich**, Laboratory assistant researcher, Komsomolsk-on-Amur State University

**Жиганов Сергей Викторович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Zhiganov Sergey Viktorovich**, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Komsomolsk-on-Amur State University

**Иванов Юрий Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Ivanov Yuri Sergeevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Komsomolsk-on-Amur State University

## **КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ И СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНСТРУМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ONE-SHOT LEARNING**

### **A COMBINED APPROACH TO THE CLASSIFICATION AND SEMANTIC SEGMENTATION OF PRODUCTION TOOLS THROUGH THE USE OF THE ONE-SHOT LEARNING METHOD**

**Аннотация.** В работе решена задача сегментации и классификации инструментов в автоматизированной производственной среде с использованием метода One-Shot Learning. Представлена архитектура, сочетающая сиамские сети с предобученной моделью ConvNeXt для извлечения признаков, что позволяет эффективно классифицировать объекты при минимальном количестве данных. За сегментацию объектов выступает модель LRASPP. Эффективность системы доказана на наборе данных из четырёх классов инструментов, что улучшает контроль действий оператора и снижает вероятность ошибок.

**Abstract.** The paper solves the problem of segmentation and classification of tools in an automated production environment using the One-Shot Learning method. An architecture is presented that combines Siamese networks with a pre-trained ConvNeXt model for feature extraction, which allows for efficient classification of objects with a minimum amount of data. The LRASPP model is used for segmentation of objects. The efficiency of the system is proven on a data set of four tool classes, which improves operator control and reduces the likelihood of errors.

**Ключевые слова:** One Shot Learning, сегментация, классификация, автоматизированные системы, набор данных

**Keywords:** One Shot Learning, segmentation, classification, automated systems, dataset



## **Введение**

Современное промышленное производство характеризуется высокой степенью автоматизации и тесным взаимодействием человека с роботизированными системами, что становится возможным благодаря достижениям в коллаборативной робототехнике и искусственном интеллекте. В таких условиях обеспечение точной видеоаннотации действий оператора приобретает критическое значение, так как это позволяет оптимизировать рабочие процессы и предотвращать ошибки, которые могут привести к производственным дефектам [1].

В рамках исследования разработана система сегментации и классификации производственных инструментов, использующая метод One-Shot Learning (OSL). Представленная система интегрирует предобученные модели для извлечения признаков и семантическую сегментацию для распознавания промышленных инструментов в производственной среде. Комбинированная архитектура, включающая сиамские сети и методы пространственного анализа, демонстрирует способность эффективно идентифицировать и сегментировать объекты на основе минимального набора данных.

### **Комбинированные подходы к распознаванию ключевых точек и инструментов в динамичных производственных процессах**

В условиях автоматизации производства и активного взаимодействия человека с роботизированными системами особое внимание уделяется анализу действий оператора и распознаванию инструментов, что способствует повышению безопасности и эффективности процессов. Разработанный в работе [2] модуль для распознавания ключевых точек, использующий ансамбли нейронных сетей и мультимодальную систему камер, производит эффективный мониторинг действий оператора, предотвращая столкновения с коллаборативным роботом.

Для глубокого анализа действий оператора важно точно определять, с каким инструментом производится работа. Метод OSL, в сочетании с семантической сегментацией, представляет собой оптимальное решение (точность) для распознавания и сегментации инструментов в автоматизированной среде при ограниченном наборе данных. Семантическая сегментация эффективно выделяет границы объектов, что помогает классифицировать инструменты среди множества других предметов в рабочей зоне робота.

### **Разработка моделей классификации для извлечения признаков с изображений**

Для работы метода OSL важно эффективно выделять вектор признаков, который будет определять степень сходства между объектами. Для извлечения таких векторов были использованы предобученные модели EfficientNet B3 [3], ResNet50 [4], ConvNeXt [5] и EfficientNet V2 [6], адаптированные с помощью трансферного обучения на наборе данных из четырёх классов: bayonet, spray\_gun, welder, wrench. Обучение проводилось

на собственном наборе данных состоящий из 200 изображений для каждого класса для тренировки и 50 изображениях для валидации. Результаты показали (таблица 1), что архитектура ConvNeXt показывает наилучшие результаты с точность 0.9687 на валидации.

Таблица 1 – Результаты обучения

Model	Input image size	Accuracy (train)	Accuracy (validation)
EfficientNet B3	224x224	0.8162	0.9141
ResNet50	224x224	0.9402	0.9673
ConvNeXt	200x200	0.9614	0.9687
EfficientNet V2	400x400	0.9029	0.9590

### Интеграция предобученной модели для метода One Shot Learning с возможностью сегментации

Для решения задачи OSL необходимо эффективно извлекать признаки, которые позволяют различать объекты, имея лишь один пример каждого класса. В нашем подходе используется предобученная сеть ConvNeXt для извлечения векторов признаков изображений, которые затем сравниваются с помощью сиамской сети, обученной на метрике сходства Triplet Loss [7]. За сегментацию объектов отвечает модель Lightweight Rethinking Atrous Spatial Pyramid Pooling [8].

Архитектура системы включает два ключевых этапа: извлечение признаков с помощью ConvNeXt и сегментация с помощью LRASPP. Результаты работы сиамской сети и модели LRASPP продемонстрированы на рисунке 1. Представленная система может быть эффективно использована в роботизированных коллаборативных системах, где точное определение положения инструмента критично для дальнейшего взаимодействия с роботами, способными захватывать инструменты с высокой точностью.

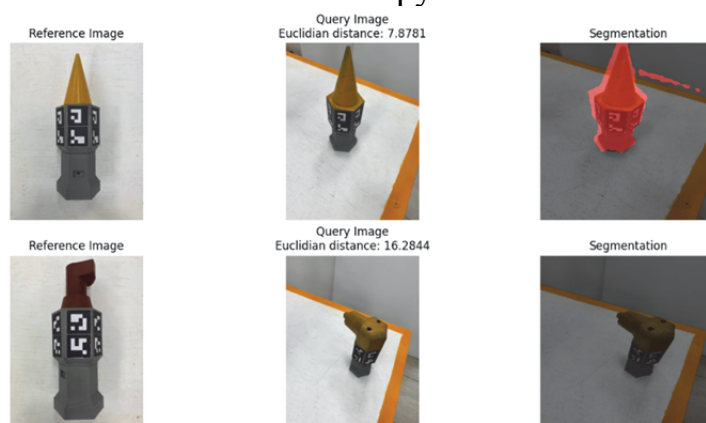


Рисунок 2 – Результаты экспериментов работы метода OSL совместно с моделью LRASPP

## **Заключение**

Результаты экспериментов, представленные в работе, показывают, что метод OSL в сочетании с моделью сегментации LRASPP обеспечивает точное и надёжное распознавание инструментов, что существенно повышает безопасность и эффективность производственных процессов. Система, основанная на сочетании сиамских сетей и методах сегментации, может быть успешно интегрирована в роботизированные коллаборативные системы, обеспечивая точное определение положения инструмента и предотвращая потенциальные ошибки взаимодействия между человеком и роботом.

## **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 22–71–10093 «Разработка и синтез перспективных мультимодальных адаптивных алгоритмов и методов управления поведением коллаборативных робототехнических систем с учетом нестандартных ситуаций и экстремальных условий в недетерминированной среде»

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Kanimozhi S., Sasithradevi A., Sairamesh L. Ontology based Action Recognition in Sport Video's using Semantic Verification Model //IEEE Access. – 2024.
2. Ivanov Y. et al. Using an ensemble of deep neural networks to detect human keypoints in the workspace of a collaborative robotic system //Engineering Proceedings. – 2023. – Т. 33. – №. 1. – С. 19.
3. Tan M. Efficientnet: Rethinking model scaling for convolutional neural networks //arXiv preprint arXiv:1905.11946. – 2019.
4. He K. et al. Deep residual learning for image recognition //Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2016. – С. 770-778.
5. Liu Z. et al. A convnet for the 2020s //Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2022. – С. 11976-11986.
6. Tan M., Le Q. Efficientnetv2: Smaller models and faster training //International conference on machine learning. – PMLR, 2021. – С. 10096-10106.
7. Schroff F., Kalenichenko D., Philbin J. Facenet: A unified embedding for face recognition and clustering //Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2015. – С. 815-823.
8. Howard A. et al. Searching for mobilenetv3 //Proceedings of the IEEE/CVF international conference on computer vision. – 2019. – С. 1314-1324.

УДК 004.85

**Гренкин Глеб Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент, Владивостокский государственный университет

**Grenkin Gleb Vladimirovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Vladivostok State University

**Шахгельдян Карина Иосифовна**, доктор технических наук, профессор, Владивостокский государственный университет, Дальневосточный федеральный университет

**Shakhgeldyan Karina Iosephovna**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Vladivostok State University, Far Eastern Federal University

## **ИНТЕРПРЕТИРУЕМОЕ МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИСХОДА ЛЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СОЧЕТАНИЙ ФАКТОРОВ РИСКА**

### **INTERPRETABLE MACHINE LEARNING FOR PREDICTION OF THE RESULT OF MEDICAL TREATMENT BY USING RISK FACTORS COMBINATIONS**

**Аннотация.** Рассмотрена проблема прогнозирования смертных случаев в результате лечения острого инфаркта миокарда с помощью чрескожного коронарного вмешательства. Математическая задача состоит в построении объяснимой модели машинного обучения для предсказания конечной точки по ряду непрерывных и категориальных признаков. Предлагается три метода: минимизация энтропии, максимизация площади под ROC-кривой и метод двойного обучения.

**Abstract.** The problem of prediction of interhospital mortality after medical treatment of myocardial infarction by percutaneous coronary interventions is considered. The mathematical problem is to construct an explainable machine learning model for prediction of final point by a number of continuous and categorical features. Three methods are proposed: entropy minimization, maximization of AUC and double learning method.

**Ключевые слова:** объяснимый искусственный интеллект, факторы риска, категоризация непрерывных признаков.

**Keywords:** explainable artificial intelligence, risk factors, categorizing continuous variables.

#### **Введение**

Прогнозирование исхода лечения в клинической практике основано на традиционных шкалах, с помощью которых оценивают уровень риска, зная меру соответствия клинических показателей норме. Уточнение прогноза возможно на основе методов интерпретируемого машинного обучения.

В работе [1] эти методы исследовались применительно к данным о смертности пациентов после чрескожного коронарного вмешательства. В настоящей работе предлагаются подходы выявления сочетаний факторов риска, способствующих смертным случаям.

## **Основная часть**

Первый метод – оценка пороговых значений для отдельных предикторов, исходя из критерия минимизации расстояния Кульбака–Лейблера. В результате получены пороговые значения, одновременное превышение которых двумя предикторами приводит к увеличению риска смертности в 10 раз. На основе этих правил построена модель с показателями чувствительности и специфичности на уровне 80%.

Второй метод – построение модели логистической регрессии, обучаемой на дихотомизированных конъюнктивных признаках. Алгоритм для нахождения первичных порогов пошагово выделяет по очереди каждый признак из модели, после чего формирует двухфакторную модель логистической регрессии, в которой один признак – это выделенный бинарный признак (с неизвестным пока порогом), а второй признак – это взвешенная сумма остальных признаков модели. Таким образом, вычисляется оптимальный порог вместе с весом для выделенного признака. Процесс повторяется до тех пор, пока алгоритм поиска порогов не сойдется. Аналогично формируются парные признаки.

Третий метод – построение модели логистической регрессии на преобразованных бинарных признаках: каждый признак представлен конъюнкцией первичного дихотомизированного предиктора и выхода логистической регрессии, обученной на части выборки, на элементах которой сработал выделенный предиктор. В результате получена нелинейная модель, имеющая  $AUC \approx 0.875$ , что значительно не отличается от точности модели с первичными порогами.

Программная реализация доступна по ссылке: <https://github.com/lapkin25/XAI-Model>.

## **Заключение**

Метод минимизации энтропии выделил отдельные пороги, сочетания которых обладают хорошей прогностической информативностью. Метод максимизации AUC позволил построить модель логистической регрессии с небольшим числом парных дихотомизированных признаков. Метод двойного обучения представляет собой нелинейную зависимость, учитывающую совместное срабатывание остальных признаков после срабатывания базового предиктора; достигнут AUC, как у модели с отдельными признаками.

## **Благодарности**

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект Госзадание FZNS-2023-0010 ДВФУ).

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Shakhgelyan K.I. et al. Interpretable machine learning for in-hospital mortality risk prediction in patients with ST-elevation myocardial infarction after percutaneous coronary interventions // Computers in Biology and Medicine. 2024. V. 170. P. 107953.

УДК 537.527

**Гришко Игорь Дмитриевич**, студент, Новосибирский государственный университет

**Grishko Igor Dmitrievich**, student, Novosibirsk State University

**Ващенко Сергей Петрович**, научный сотрудник ИТПМ им. Христиановича СО РАН

**Vashenko Sergey Petrovich**, research associate, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

**Ковалев Олег Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией физики плазменнодуговых и лазерных процессов ИТПМ им. Христиановича СО РАН

**Kovalev Oleg Borisovich**, Candidate of Engineering Sciences, Professor, Head of Laboratory of plasma-arc and laser processes, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ В ДВУХКАМЕРНОМ ПЛАЗМОТРОНЕ**

### **STUDY OF GAS DYNAMICS OF VORTEX FLOWS IN A TWO-CHAMBER PLASMA TORCH**

**Аннотация.** Методом численного моделирования исследована газодинамика внутренних электродов, отличающихся геометрией профиля канала в двухкамерном плазмотроне в отсутствие электрической дуги. Согласно расчетам, пространственная картина течения, в целом, соответствует картинам течения, полученных ранее в экспериментах с плазмотронами двухкамерной схемы. По пространственному распределению кинетической энергии турбулентности установлено, что цилиндроконическая форма электрода способствует более интенсивному взаимодействию потоков газа в первой циркуляционной зоне, чем в электроде цилиндрической формы. Значительное увеличение степени турбулентности в приосевой зоне электрода создает благоприятные условия для увеличения напряженности электрического поля в столбе электрической дуги.

**Abstract.** The gas dynamics inside inner electrodes with different channel profile geometry of a two-chamber plasma torch without an electric arc is studied using numerical modeling. According to the computation results the flow pattern corresponds with flow patterns which were previously observed in experiments with two-chamber plasma torch. Analyzing turbulent kinetic energy distribution, the cylindric-conical electrode geometry, compared to the cylindric one, has been found more effective for gas flows interaction at the first circulation zone. A significant growth of turbulence rate in axial zone of the electrode provides favorable conditions for increasing the electric field strength in the electric arc.

**Ключевые слова:** вихревые потоки, турбулентность, плазмотрон, CFD-моделирование

**Keywords:** vortex flows, turbulence, plasma torch, CFD modeling

### **Введение**

Плазмотрон – это устройство, предназначенное для получения низкотемпературной плазмы, т.е. ионизованного газа, нагретого до температуры  $(3 \div 15) \cdot 10^3$  К. В настоящее время наиболее распространенным способом получения низкотемпературной плазмы является нагрев газа с помощью электрической дуги. Плазмотроны, в зависимости от предназначения, отличаются длиной дуги, характером течения в газоразрядной камере (ГРК), полярностью подключения электродов, геометрией внутренних электродов и прочими характеристиками. Эффективность работы плазмотрона во многом определяется характером взаимодействия столба электрической дуги с потоком плазмообразующего газа. Напряженность электрического поля в столбе электрической дуги определяется интенсивностью теплообмена с плазмообразующим газом, степенью турбулентности потока газа.

С целью исследования влияния формы внутреннего электрода двухкамерного плазмотрона на степень турбулентности газового потока в приосевой зоне дугового канала плазмотрона, проведено численное моделирование течения газа для электродов цилиндрической формы (ЦФ) и цилиндроконической формы (ЦКФ).

### **Основная часть**

Рассматривается задача о моделировании стационарного течения газа в аноде двухкамерного плазмотрона постоянного тока при различных режимах подачи газа. Задача не предполагает моделирование дуги, горящей внутри ГРК, так как ранее [1], при исследовании двухкамерных плазмотронов было установлено слабое влияние наличия электрической дуги на характер течения газа внутри электрода.

Численно в декартовой системе координат  $Oxuz$  решаются: уравнения неразрывности, Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, уравнение теплопереноса в турбулентном потоке, осредненное по Фавру, уравнение состояния в приближении идеального одноатомного газа, а также  $k - \varepsilon$  модель турбулентности для замыкания всей системы. В качестве граничных условий задается расход газа через сечения входных трубок, расположенные над пусковым зазором ( $G1$ ) и у торца анода ( $G2$ ), Рис. 1. В пределах общего расхода газа, подводимого через все отверстия:  $G1 + G2 = 36$  г/с, варьировалось соотношение  $G2/G1$ . На стенках задавались условия непроницаемости, на границе свободной области (*out*) – равенство нулю градиентов всех переменных и давление, равное 1 атм. Расчеты проводились с использованием пакета COMSOL Multiphysics 5.6.

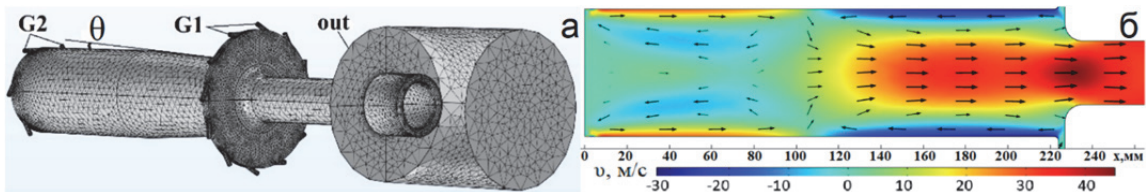


Рисунок 1 – а) геометрия ЦКФ анода с углом наклона конуса  $\theta = 7^\circ$ , двумя вихревыми камерами с суммарными расходами ( $G1, G2$ ), дополнительной расчетной областью (*out*) и сеткой; б) распределение осевой компоненты скорости  $v$  и картина течения при отношении расходов  $G2/G1 = 0,5$

Полученные в расчетах распределения осевой компоненты скорости и линии тока газа качественно согласуется с ранее опубликованными экспериментальными данными о картине течения во внутреннем электроде двухкамерного плазмотрона с цилиндрической геометрией [1] (см. Рис. 2).

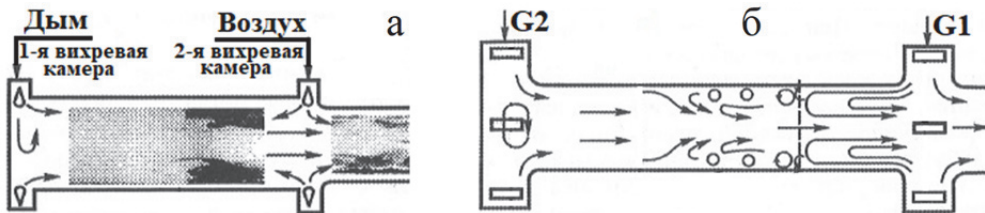


Рисунок 2 – а) – типичная фотография картины течения газа в двухкамерном плазмотроне, полученная при дымовой продувке; б) - схема течения в двухкамерном плазмотроне

На рис. 3 изображено распределение кинетической энергии турбулентности  $k$  в ГРК, характеризующее интенсивность турбулентности потока на каждом её участке. Наибольшая интенсивность турбулентности наблюдается под кольцом крутки вихревой камеры с расходом  $G1$ . Область повышенной турбулентности начинается от места встречи газовых потоков и заканчивается на расстоянии около двух калибров от пускового зазора, ведущим к выходу из электрода.

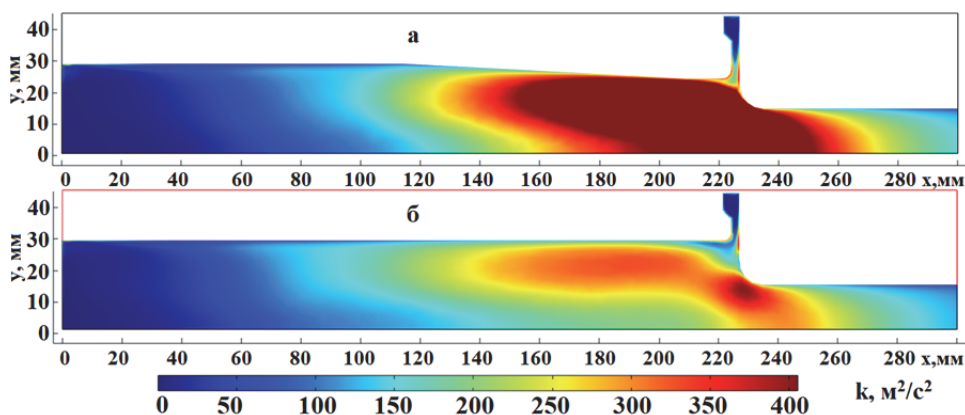


Рисунок 3 – распределение кинетической энергии турбулентности в ГРК: а) ЦКФ ( $k_{max} = 882 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ); б) ЦФ ( $k_{max} = 417 \text{ м}^2/\text{с}^2$ )



Интегральное распределение кинетической энергии турбулентности (см. Рис. 4) имеет максимум в области пускового зазора, и наибольшее значение достигается при соотношении расходов  $G2/G1 = 0,4$  на любой геометрии анода, и снижается при его увеличении. Интегральные значения  $k$  для ЦКФ-электрода существенно выше, чем для ЦФ-электрода.

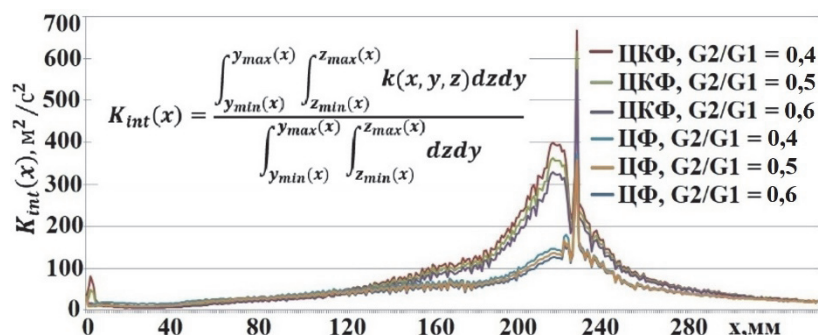


Рисунок 4 – распределение интегрального значения кинетической энергии турбулентности вдоль оси электрода

### Заключение

В электроде с ЦФ характер течения в первой циркуляционной зоне определяется интенсивностью взаимодействия двух газовых потоков: приосевого, и пристеночного. Приосевой поток имеет меньшую тангенциальную и большую осевую компоненту скорости, по сравнению с пристеночным потоком. Интенсивность взаимодействия двух потоков определяет интенсивность турбулентности и ее характерный масштаб. В электроде с ЦКФ в сужающемся канале дозвуковой поток разгоняется. Ускоряющийся поток, движущийся вдоль оси электрода по направлению к выходному каналу, встречается с потоком из кольца крутки  $G1$ , и взаимодействует с ним в пределах буферного слоя, т.е. тормозится. Возникает большой градиент скорости, а вместе с ним и градиент давления, растут величина буферного слоя и интенсивность взаимодействия двух потоков, следовательно, стремительно развивается турбулентный режим течения. Таким образом, применение анода с ЦКФ обеспечивает существенно большую степень турбулентности потока, что позволяет получить более высокую напряженность электрического поля в столбе электрической дуги, чем в аноде с ЦФ.

### Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Электродуговые генераторы термической плазмы / М. Ф. Жуков, И. М. Засыпкин, А. Н. Тимошевский и др. — Новосибирск: Наука. Сиб. предпр. РАН, 1999. — (Низкотемпературная плазма. Т. 17).

УДК 621.74.045

**Дмитриев Эдуард Анатольевич**, д.т.н., профессор, ректор, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Eduard A. Dmitriev**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rector, Komsomolsk-on-Amur State University

**Карпенко Владимир Анатольевич**, соискатель, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Vladimir A. Karpenko**, Candidate, Komsomolsk-on-Amur State University

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ РАСПЛАВА МЕТАЛЛА В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ УСТАНОВКИ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКИ СТАЛИ ПРИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РУБАШКЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ<sup>1</sup>**

### **SIMULATION OF THE PROCESS OF MIXING THE MOLTEN METAL IN THE MOLD OF A CONTINUOUS STEEL CASTING PLANT WITH A ROTATING JACKET WITH VERTICAL RIBS**

**Аннотация.** Целью данной работы является построение математической модели, описывающей гидродинамический процесс в кристаллизаторе УНРС с использованием нового метода подачи стали в кристаллизатор, и пояснение полезности использования принудительного вращения для подачи и перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе УНРС по сравнению со свободным вращением стакана при разливке стали. Описан и проанализирован новый технологический процесс подачи и перемешивания жидкой стали в кристаллизатор. В отличие от описанных ранее процессов, данный технологический процесс позволяет в широком диапазоне регулировать скорость перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе, что способствует получению непрерывных слитков более высокого качества.

**Abstract.** The purpose of this work is to construct a mathematical model describing the hydrodynamic process in the UNRS crystallizer using a new method of feeding steel into the crystallizer, and to explain the usefulness of using forced rotation to feed and mix liquid metal in the UNRS crystallizer compared with the free rotation of the glass when casting steel. A new technological process of feeding and mixing liquid steel into the mold is described and analyzed. Unlike the processes described earlier, this technological process allows for a wide range of adjustment of the mixing rate of liquid metal in the mold, which contributes to the production of continuous ingots of higher quality.

---

<sup>1</sup> В работе участвовали д.т.н., профессор В.И. Одинокоев, д.т.н., профессор А.И. Евстигнеев

**Ключевые слова:** моделирование, кристаллизатор, потоки расплава, математическая модель, численная схема, алгоритм, скорость течения.

**Keywords:** modeling, crystallizer, melt flows, mathematical model, numerical scheme, algorithm, flow velocity.

### Основная часть

Экспериментальное исследование течения жидкого металла в кристаллизаторе является длительным, сложным и трудоемким процессом, поэтому для этой цели все чаще используется математическое моделирование, в частности численные методы. Теоретические и практические проблемы подачи и перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе УНРС рассматривались в многочисленных исследованиях отечественных и зарубежных исследователей, в том числе и авторов настоящей работы [1, 2].

В данном исследовании моделируется и анализируется новый процесс подачи и перемешивания жидкого металла (стали) в прямоугольном кристаллизаторе УНРС [3].

Среда (жидкий металл) считается несжимаемой. Рассмотрим уравнения гидродинамики. Следующие уравнения справедливы для течения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости (процесс стационарный):

$$\sigma_{ij,j} + F_i^* = I_i^*; \quad I_i^* = \rho(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}); \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\mu \xi_{ij}; \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (2)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = a\Delta\theta; \quad \frac{d\theta}{d\tau} = v_i \frac{d\theta}{dx_i}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3)$$

здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\sigma$  – гидростатическое напряжение;  $\mu$  – коэффициент вязкости  $(\text{г} \cdot \text{с})/\text{см}^2$ ;  $v_i$  – проекция скоростей перемещений по координатным осям  $x_i$  ( $i=1,2,3$ );  $\rho$  – плотность жидкого металла;  $F_i^*$  – проекция удельной объемной силы на координатные оси  $x_i$  ( $i=1,2,3$ );  $\tau$  – время;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\theta$  – температура;  $a = \lambda/(c \cdot \gamma)$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\gamma$  – удельный вес; ( $\lambda, c$  – принимаются постоянными (константами)).

На рис. 1 показана формализованная расчетная схема рассматриваемого процесса:

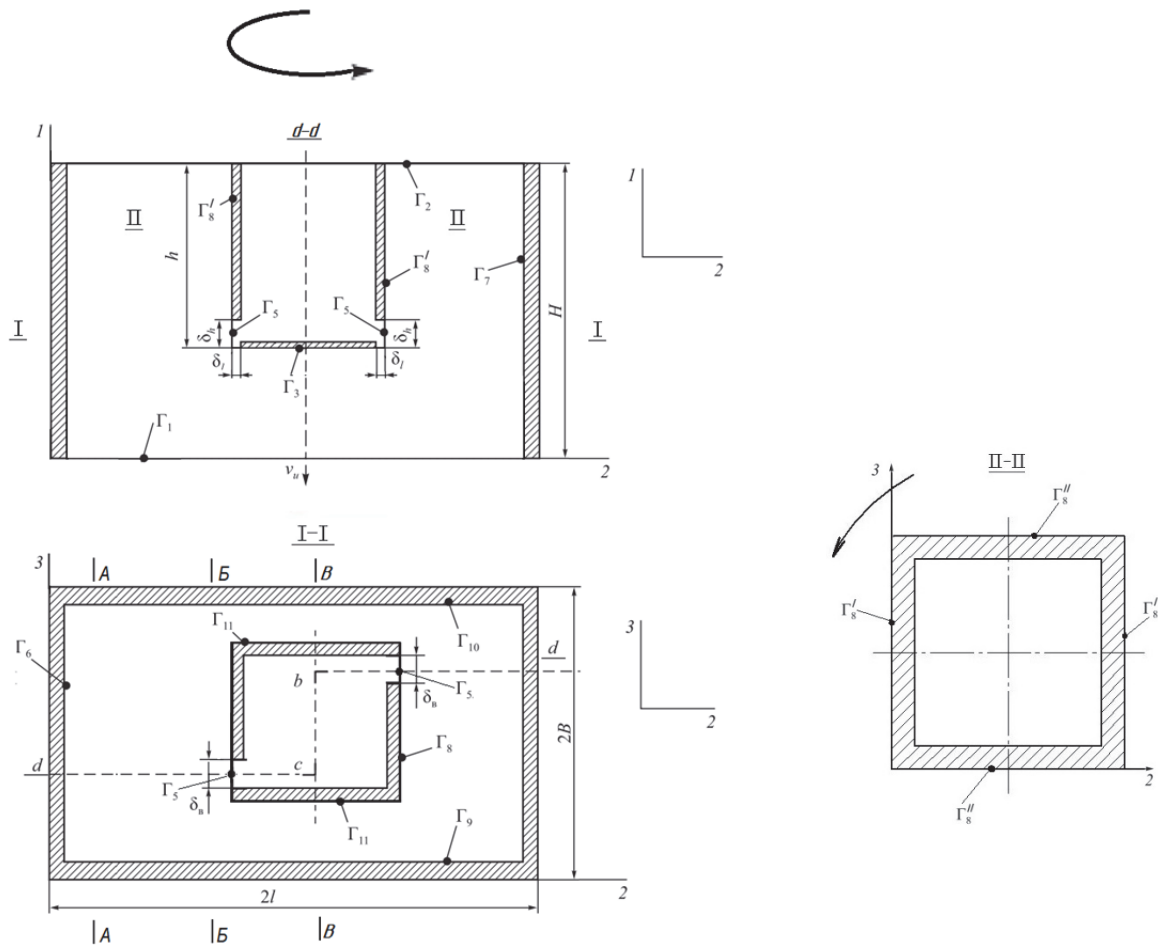


Рис. 1 Формализованная расчетная схема процесса разливки металла в кристаллизатор.

Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{11}|_{\Gamma_2} = p_1; \quad (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{\Gamma_i} = 0; \quad i = 1 \div 3; \\
 & (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{\Gamma_i} = 0; \quad i = 5 \div 8; \quad (\sigma_{31} = \sigma_{32})|_{\Gamma_i} = 0; \quad i = 9 \div 11; \\
 & (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{\Gamma'_8} = 0; \\
 & v_2|_{\Gamma_5} = v^*; \quad v_3|_{\Gamma''_8} = V'_t; \quad v_2|_{\Gamma'_8} = V''_t; \quad v_1|_{\Gamma_1} = v_u; \\
 & v_1|_{\Gamma_3} = 0; \quad v_2|_{\Gamma_i} = 0; \quad i = 6 \div 8; \quad v_3|_{\Gamma_i} = 0; \quad i = 9 \div 11.
 \end{aligned} \tag{4}$$

При решении уравнения теплопроводности использовались граничные условия:

$$\begin{aligned}
 & \theta|_{\Gamma_i} = \theta_i^*; \quad i = 1 \div 4, 8; \quad \theta|_{\Gamma_5} = \theta_5^*; \\
 & q|_{\Gamma_i} = q_i^*; \quad i = 6, 7, 9, 10.
 \end{aligned} \tag{5}$$

здесь  $v_u$  – скорость вытягивания слитка (рис. 1);  $v_2^*$  – скорость выхода жидкого металла из окон погружного стакана;  $\theta_i^*$  – заданные функции распределения температуры металла на поверхностях  $\Gamma_i$ ;  $q_i^*$  – заданные из экспериментальных данных тепловые потоки через поверхности  $\Gamma_i$ ;  $\theta_5^*$  – заданная температура выхода металла из окна  $\Gamma_5$ . Численная схема и алгоритм решения системы уравнений (1)-(3) при граничных условиях (4, 5) подробно описан в работе [4] с использованием широко апробированного численного метода [5].

При скорости вращения  $n = 50$  об/мин металл в узких стенках кристаллизатора может проникать в область шлаковой подушки. На рис. 2 показано поле движения жидкого металла в сечении А – А (рис. 1). Действительно, движение жидкого металла направлено вверх, причем это движение охватывает по высоте половину вертикальной плоскости боковой стенки кристаллизатора, ускоряясь к шлаковой рубашке, где достигает 10 см/с.

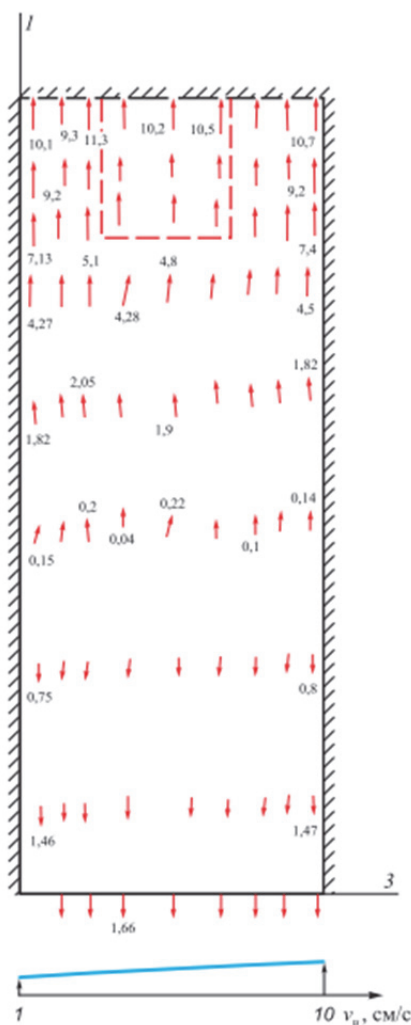


Рис. 2 – Поле скоростей потоков течения металла в кристаллизаторе в сечении А – А при  $n = 30$  (а) и 50 об/мин. (б)

На рис. 3 показаны потоки металла в сечении Б – Б (рис. 1) – это вертикальное сечение у выхода металла из погружного стакана. На рис. 3 показаны потоки при вращении рубашки при  $n$ , равном 30 и 50 об/мин. Все векторы потоков направлены преимущественно вниз. Интенсивность, как и следовало ожидать, больше при  $n = 50$  об/мин.

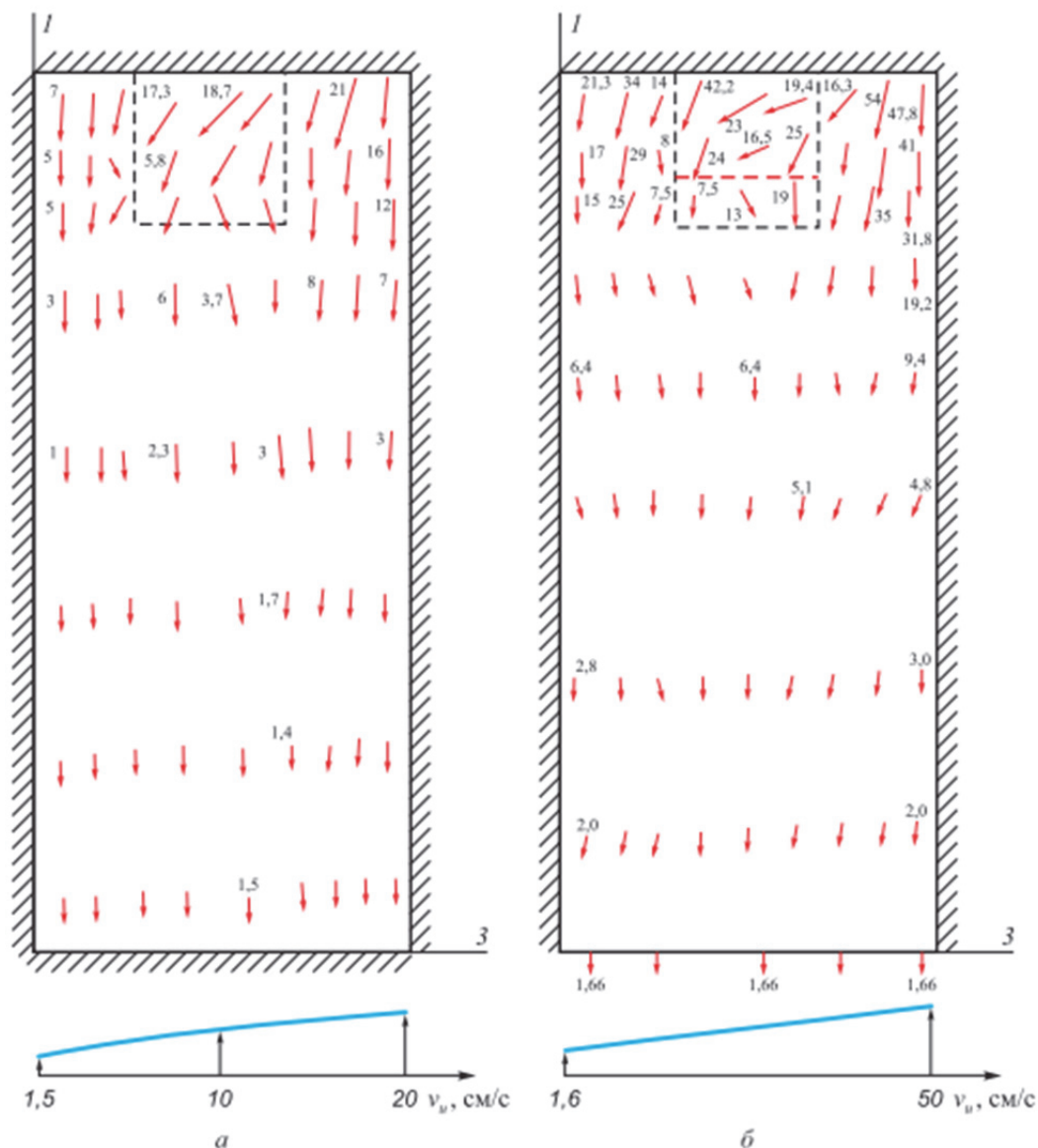


Рис. 3 – Поле скоростей течения металла в кристаллизаторе в сечении Б – Б при  $n = 30$  (а) и 50 об/мин. (б)

На рис. 4, а изображены потоки металла в сечении В – В (рис. 1) при вращении рубашки при  $n$ , равном 30 и 50 об/мин. Наблюдаются малые вихри под погружным стаканом по его центру при  $n = 30$  об/мин (рис. 4, а), при  $n = 50$  об/мин – вихри отсутствуют. Скорость потока металла по боковым граням значительно выше, чем под погружным стаканом.

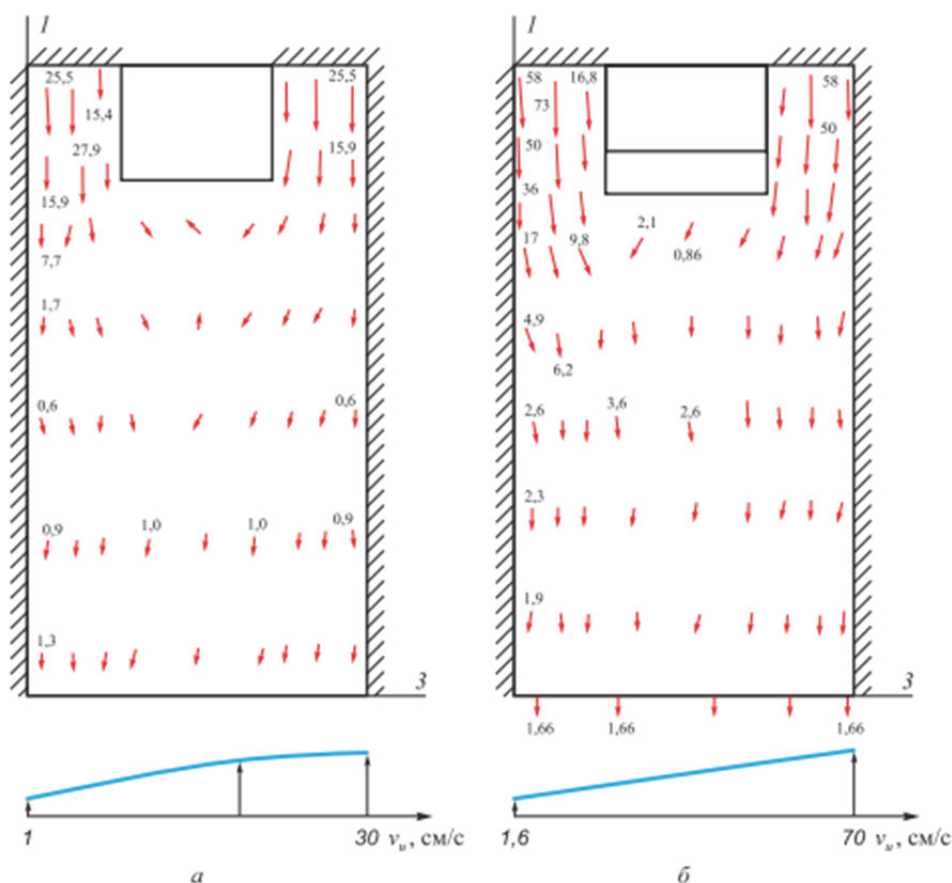


Рис. 4 – Поле скоростей течения металла в кристаллизаторе в сечении В – В при  $n = 30$  (а) и 50 об/мин. (б)

### Заключение

Новизна исследования заключается в постановке и решении задачи определения полей скоростей и температуры течения металла в кристаллизаторе, а также алгоритма решения.

В качестве примера расчета разливки стали в кристаллизатор прямоугольного поперечного сечения показана схема течения жидкого металла по разным сечениям формы.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Одинокоев, В. И. Численное моделирование процесса заполнения металлом кристаллизатора с отражателем УНРС / В. И. Одинокоев, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2019. – Т. 62, № 10. – С. 747-755. – DOI 10.17073/0368-0797-2019-10-747-755.

2. Одинокоев В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Карпенко В.А., Петров В.В. Анализ результатов численного моделирования эффективности свободного и принудительного перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе УНРС // Металлург, 2024, №2, с. 76-81.

3. Патент № 2764446 С1 Российская Федерация, МПК В22D 11/114, В22D 41/62. Устройство для подачи и перемешивания стали в

кристаллизаторе установки непрерывной разливки : № 2021114411 : заявл. 20.05.2021 : опубл. 17.01.2022 / В. И. Одинокоев, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев [и др.] ; заявитель ФГБОУ ВО «КнАГУ».

4. Моделирование нового процесса перемешивания жидкого металла в кристаллизаторе установки непрерывной разливки стали при вращающейся рубашке с вертикальными ребрами / В. И. Одинокоев, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, В. А. Карпенко // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2023. – Т. 66, № 6. – С. 733-742. – DOI 10.17073/0368-0797-2023-6-733-742.

5. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокоев [и др.] ; [отв. ред. А. И. Евстигнеев] ; Российская акад. наук, Дальневосточное отд-ние, Ин-т машиноведения и металлургии. – Москва : Наука, 2008. – ISBN 978-5-02-035563-7.

УДК 539.3+539.219.3

**Дудин Дмитрий Сергеевич**, ведущий инженер, Институт механики сплошных сред УрО РАН

**Dudin Dmitriy Sergeevich**, leading engineer, Institute of Continuous Medium Mechanics UB RAS

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН

**Keller Ilya Ernstovich**, Dr. Sci. Phys. & Math., Associate Professor, Head of Laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS

**Пойлов Владимир Зотович**, доктор технических наук, руководитель Центра наукоемких химических технологий и физико-химических исследований, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

**Poilov Vladimir Zotovich**, Dr. Tech. Sci., Head of Center for High-Tech Chemical Technologies and Physico-Chemical Research, Perm National Research Polytechnical University

## **МОДЕЛЬ ОКСИДНО-СУЛЬФИДНОЙ КОРРОЗИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ НИКЕЛЕВЫХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕНИЙ**

### **A MODEL OF OXIDE-SULFIDE CORROSION OF HIGH-TEMPERATURE NICKEL ALLOYS UNDER STRESSES**

**Аннотация.** Для изучения оксидно-сульфидной коррозии жаропрочных никелевых сплавов высоконагруженных деталей авиадвигателей в агрессивной среде продуктов сгорания топлива построена модель, в которой учтен механизм с четырьмя химическими реакциями (окисления железа, хрома и сульфида хрома и сульфидирования хрома),



описание транспорта компонент к зоне коррозии на основе связанной модели взаимной диффузии в упругом теле и системы балансовых и определяющих уравнений и граничных условий. Численно исследуется одномерная задача, демонстрирующая рост коррозионного слоя и обеднение хромом приповерхностного слоя материала с течением времени в атмосфере. Модель может описывать обеднение легирующими элементами поверхности реальных многокомпонентных никелевых сплавов при необходимой детализации, а ее результаты могут быть сопоставлены с экспериментами.

**Abstract.** To study the oxide-sulfide corrosion of heat-resistant nickel alloys of highly loaded aircraft engine parts in an aggressive environment of fuel combustion products, a model was built that takes into account a mechanism with four chemical reactions (oxidation of iron, chromium and chromium sulfide and chromium sulfidation), a description of the transport of components to the corrosion zone based on a related model of mutual diffusion in an elastic body and a system of balance and defining equations and boundary conditions. A one-dimensional problem is numerically investigated, demonstrating the growth of the corrosion layer and the depletion of the near-surface layer of the material with chromium over time in the atmosphere. The model can describe the surfaces of real nickel alloys depleted by alloying elements with the necessary detail, and its results can be compared with experiments.

**Ключевые слова:** сульфидно-оксидная коррозия, высокотемпературные никелевые сплавы, диффузия и напряжения, связанная модель, взаимная диффузия.

**Keywords:** sulfide-oxide corrosion, high temperature nickel alloys, diffusion and stresses, coupled model, interdiffusion.

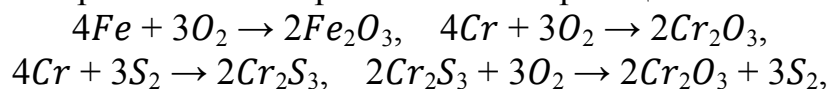
### **Введение**

Жаропрочные никелевые сплавы испытывают оксидно-сульфидную коррозию в агрессивной среде продуктов сгорания топлива при повышенных температурах, приводящую к формированию дефектного коррозионного поверхностного слоя и истощённого легирующими элементами пористого слоя, и к разрушению высоконагруженных деталей авиадвигателей: лопаток и дисков турбины высокого давления и вентилятора, элементов камеры сгорания, дисков компрессора высокого давления. Прочностные испытания в условиях агрессивной среды при высоких температурах являются дорогостоящими, оправдывая изучение явления с помощью математической модели. Описание процесса коррозии сплавов требует формулировки модели, которая описывает взаимную диффузию (транспорт) компонентов в деформируемой среде с учётом химических реакций и микроструктурных изменений, имеющей минимальное количество идентифицируемых физико-механических параметров для возможности её практического применения.

С этой целью строится модель взаимной диффузии и химических реакций в условиях воздействия напряжений, описывающая формирование коррозионного слоя при сульфидно-оксидной коррозии.

### Основная часть

На основе анализа работ [1-5] предложен наиболее простой механизм сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали, в котором рассматривается четыре химических реакции: окисление железа, хрома и сульфида хрома, сульфидирование хрома (рис. 1). На первом этапе молекулярный кислород проникает в металл и реагирует с ионами  $Fe$  и  $Cr$ , движущимися навстречу кислороду (рис. 1, а). После достижения критической толщины коррозионного слоя молекулярная сера проникает в повреждённый поверхностный слой и доходит до границы металл-оксид, где начинает реагировать с  $Cr$  и проникать вглубь металла, стимулируя взаимную диффузию и развитие сульфидного слоя (рис. 1, б). Продолжается наращивание оксидных слоёв вместе с окислением сульфида хрома, что освобождает серу для дальнейшего проникновения вглубь металла, из-за чего присутствие серы в оксидных слоях не наблюдается (рис. 1, в). Всего в процессе рассматриваются четыре химических реакции



в которых фигурируют диффундирующие реагенты  $Fe$ ,  $Cr$ ,  $O_2$ ,  $S_2$  и неподвижные продукты  $Fe_2O_3$ ,  $Cr_2O_3$ ,  $Cr_2S_3$ .

Описанный механизм учтен в формулировке связанной модели процессов взаимной диффузии и химических реакций в упруго деформируемой среде. Она позволяет описывать формирование слоистой структуры корродирующего поверхностного слоя. Для описания транспорта компонент металлического сплава к коррозионной зоне разработан комбинированный подход к разложению диффузионного и деформационного движения, сочетающий использование маркерной диффузионной системы отсчёта и материальной конвективной скорости для описания связанных процессов взаимной диффузии и упруговязкого деформирования, обладающий преимуществами по сравнению с существующими [6]. На основе термодинамики сплошной среды получена система балансовых уравнений механики и вещества, из которых выведены граничные условия на поверхностях.

С помощью построенной модели исследуется одномерная задача распространения фронта продуктов коррозии в напряжённой среде. Модель при необходимой детализации может описывать обеднение легирующими элементами поверхности реальных многокомпонентных никелевых сплавов, а ее результаты могут быть сопоставлены с результатами специальных испытаний [4].

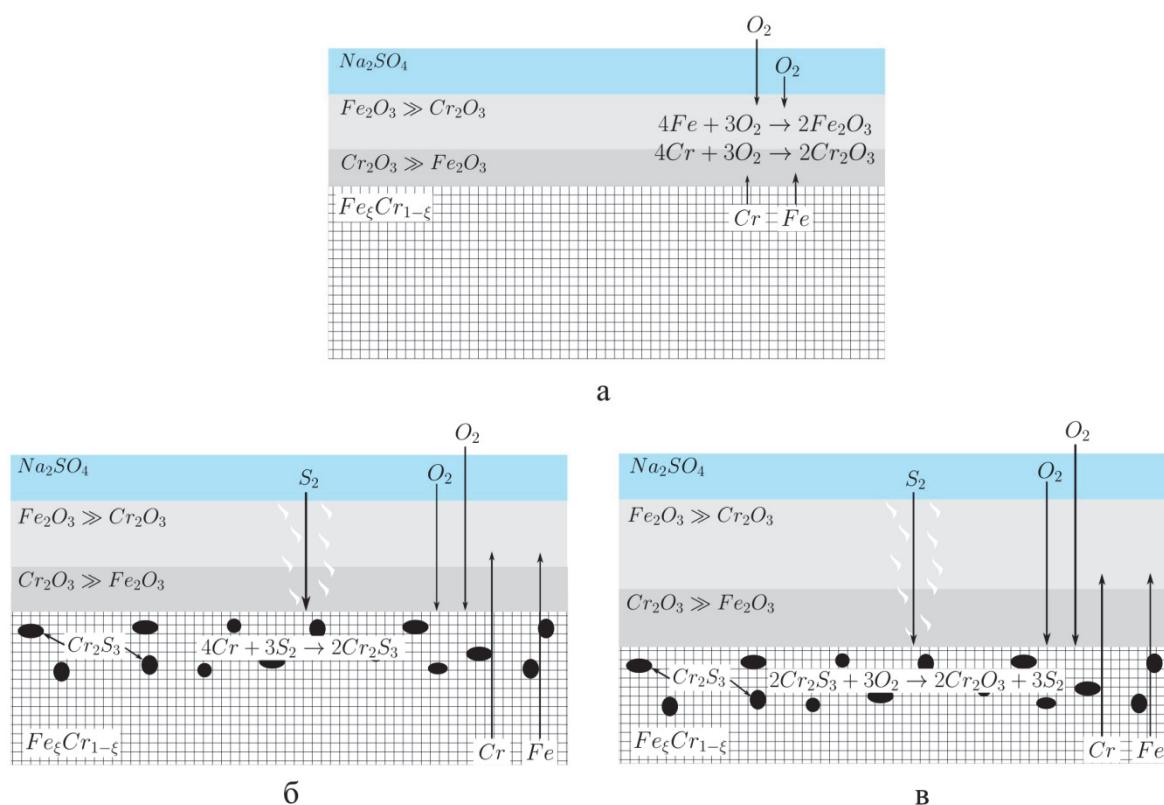


Рисунок 1 – Механизм сульфидно-оксидной коррозии жаропрочной стали: а) формирование оксидной плёнки, б) проникновение серы через дефектную структуру и образование сульфидных частиц, в) оксидация сульфидов с увеличением толщины окислов

### Заключение

Модель связанных процессов взаимной диффузии и деформаций, использующая маркерный подход к описанию диффузии, была адаптирована для описания сульфидно-оксидной коррозии жаропрочного никелевого сплава под напряжениями. В модели учтены основные химические реакции: окисления металлов и сульфида хрома, сульфидирование хрома. Подход к построению физических уравнений через удовлетворение второго закона термодинамики позволил получить линейные кинетические уравнения для химических реакций, зависящие от среднего значения напряжений. Исследуется одномерная задача о формировании слоистой структуры поверхностного слоя корродирующей стали, решаемая численными методами.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет **крупного научного проекта** Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Lee W. H., Lin R. Y. Oxidation, sulfidation and hot corrosion of intermetallic compound Fe<sub>3</sub>Al at 605°C and 800°C // Mat. Chem. Phys. — 1999. — Т. 58. — С. 231—242.

2. Sun H., Liu J. Hot corrosion of Fe-Cr-Ni multi-principal element alloys in Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>+25%NaCl mixture salts at 700–900°C // *Intermetallics*. — 2024. — Т. 166. — С. 108203.

3. Effects of imposed stresses on high temperature corrosion behaviour of T91 / Z. Ning [и др.] // *Corros. Sci.* — 2021. — Т. 189. — С. 109595.

4. Высокотемпературная газовая коррозия никелевого сплава / В. З. Пойлов [и др.] // *Материаловедение*. — 2021. — Т. 3. — С. 42—46.

5. Давыдов М. Н., Гишваров А. С., Рахимов А. Х. Моделирование долговечности лопаток турбин в условиях коррозионно-активной среды // *Вестник УГАТУ*. — 2016. — Т. 20, № 1. — С. 71—80.

6. Дудин Д. С., Келлер И. Э. Обзор подходов к формулировке связанных уравнений взаимной диффузии в вязкоупругом теле // *Хим. физ. мезоскопия*. — 2022. — Т. 24, № 3. — С. 296—311.

УДК 539.3+519.6

**Дудко Ольга Владимировна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН  
**Dudko Olga Vladimirovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Nonlinear Dynamics of Deformation, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS

**Лаптева Анастасия Александровна**, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН  
**Lapteva Anastasiya Aleksandrovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Laboratory of Nonlinear Dynamics of Deformation, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ**

### **SIMULATION OF THE DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL DEFORMATIONS OF A BI-MODULUS ELASTIC MEDIUM**

**Аннотация.** Разработан программный комплекс для проведения вычислительных экспериментов при решении начально-краевых задач нестационарного одноосного деформирования разномодульных упругих тел. Итерационный алгоритм решения основан на кусочно-линейной аппроксимации граничного условия и реализован в системе компьютерной алгебры МАХИМА. Использование программного комплекса с различными нестационарными режимами нагружения позволило выявить ряд новых

характерных особенностей динамического деформационного поведения разномодульной упругой среды.

**Abstract.** A software package has been developed for mathematical modeling and conducting computational experiments when solving initial-boundary value problems of non-stationary uniaxial deformation of elastic bodies of different modulus. The iterative algorithm for solving is based on a piecewise linear approximation of the boundary condition and is implemented in the MAXIMA computer algebra system. The use of the software package with various non-stationary loading conditions made it possible to identify a number of new characteristic features of the dynamic deformation behavior of a bi-modulus elastic medium.

**Ключевые слова:** моделирование, вычислительный эксперимент, упругость, разномодульная среда, столкновение волн, MAXIMA, итерационный алгоритм.

**Keywords:** simulation, computational experiment, elasticity, bi-modulus medium, wave collision, MAXIMA, iterative algorithm.

### **Введение**

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент давно стали привычными инструментами научного познания. Использование современной компьютерной техники дополняет, а в некоторых случаях даже заменяет натурные эксперименты. В механике деформирования вычислительный эксперимент позволяет проводить исследования механических свойств различных материалов в случаях, когда натурный эксперимент требует существенных временных или финансовых затрат. В сфере инженерных и механических расчетов достаточно популярны специализированные программные решения (например, CAE ANSYS, Abaqus, Fidesys, SOLIDWORKS Simulation и др.), однако часто их применение затрудняется высокой стоимостью, повышенными требованиями к компетенциям пользователя и т.д. В связи с этим многие исследователи обращаются к универсальным системам компьютерной алгебры (СКА), которые позволяют разрабатывать собственное программное обеспечение и реализовывать нестандартные алгоритмы для решения избранного класса задач.

Целью настоящей работы является демонстрация результатов использования программного комплекса *Vimodular Dynamics* [1], разработанного для решения начально-краевых задач нестационарного одноосного деформирования полуограниченного разномодульного упругого тела (стержень, полупространство). Разномодульные материалы (горные породы, зернистые композиты, сплавы и др.) по-разному сопротивляются растяжению и сжатию. Особенно сильно это свойство сказывается на динамике деформирования подобных материалов. Для выявления

особенностей динамического поведения разномодульных сред необходим тщательный комплексный анализ, связанный с проведением большого количества вычислительных экспериментов. Отсюда следует актуальность разработки программного средства, предназначенного для автоматизации такого процесса.

В основу *Vimodular Dynamics* [1] положен итерационный алгоритм, в различных вариантах описанный в [2, 3, 4]. В качестве средства реализации выбрана универсальная система компьютерной алгебры *МАХИМА* – бесплатный мультиплатформенный инструмент научных расчетов. Основное назначение программного комплекса – упростить исследователю поиск и анализ новых особенностей деформационного поведения разномодульных материалов при различных нестационарных режимах нагружения.

### **Основная часть**

В программном комплексе [1] используется тензорно-линейный вариант модели разномодульной упругой среды Мясникова-Олейникова [5] с сингулярностью в точке свободного состояния. Линеаризация модельных соотношений дает возможность в некоторой степени привлекать известные подходы линейной теории, а дополнительное упрощение постановки краевых задач через кусочно-линейную аппроксимацию нестационарных граничных условий расширяет эту возможность на случаи столкновений волновых фронтов [2].

В [2, 3, 4] показано, что продольные волны растяжения и сжатия движутся в разномодульной среде с разными скоростями и могут сталкиваться не только встречно, но и попутно. Таким образом, поле деформаций динамически изменяется не только за счет нестационарного граничного нагружения, но и при столкновениях и отражениях разнотипных волн, количество которых быстро растет. Построение такого поля с учетом эффектов взаимодействия волн в разномодульной среде – достаточно трудоемкая задача даже в простом случае нагружения в форме единичного знакопеременного импульса. Поэтому процедура решения подобного класса задач была сведена к итерационному алгоритму, пригодному для программной реализации.

На рисунке 1 приведен пример результата вычислительного эксперимента, проведенного при помощи программного комплекса [1]. На вход подаются: 1) механические параметры разномодульного материала, в котором волны сжатия движутся в 1.095 раза быстрее волн растяжения (подобными характеристиками обладают, например, графит и песчаник [5]); 2) координаты узловых точек кусочно-линейного граничного перемещения, задающего сложный (в представленном примере – циклический) режим нагружения. На выходе получаем графическое представление решения задачи: характеристическую плоскость (рисунок 1а), отражающую состояние

волновой картины, и ступенчатые диаграммы деформаций в выбранные моменты времени (рисунок 1б). На характеристической плоскости  $\{x - t\}$  время  $t$  располагается по оси абсцисс, пространственная координата  $x$  – по оси ординат. Быстрым фронтам сжатия соответствуют красные линии, медленным фронтам растяжения – синие. Ударные волны, скачком изменяющие растяжение на сжатие, отмечены толстыми черными линиями. Пересечение наклонных линий обозначает столкновение волн, линии с положительным угловым коэффициентом соответствуют прямым волнам, бегущим от нагружаемой границы, с отрицательным угловым коэффициентом – отраженным волнам, бегущим в сторону границы. На диаграммах деформаций по оси абсцисс располагаются координаты волновых фронтов (вертикальные пунктирные линии), нормированные на координату переднего фронта волнового пакета в выбранный момент времени. Ось ординат, обозначающая уровень деформаций, имеет степенной масштаб.

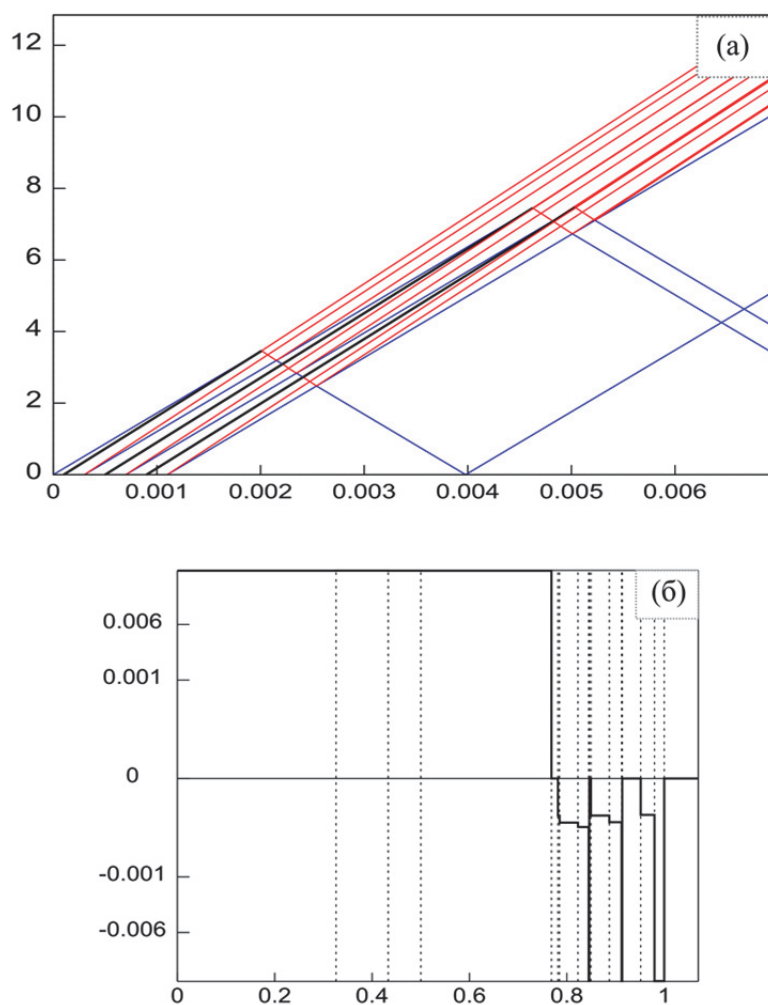


Рисунок 1 – Характеристическая плоскость решения (а) и диаграмма деформаций при  $t = 1.75 \cdot 10^{-3}$  с (б)

## **Заключение**

Представленный в работе программный комплекс *Vimodular dynamics* [1] существенно ускоряет проведение вычислительных экспериментов при различных режимах нестационарного одноосного граничного нагружения разномодульных материалов. На этапе его разработки и отладки в [2, 3, 4] были выявлены такие особенности одномерной динамики разномодульной упругой среды, как появление отраженных ударных волн и перераспределение поля деформаций на удалении от нагружаемой границы, неоднозначность результатов взаимодействия определенных типов продольных волн и др. Дополнительно отметим, что этот инструмент совместим со всеми операционными системами, с которыми совместима СКА МАХИМА, и при необходимости может дорабатываться, так как имеет открытый программный код.

## **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАПУ ДВО РАН (тема № FWW-2021-0005).

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023667828 Российская Федерация. *Vimodular dynamics* – вычислительный комплекс для моделирования динамики одномерного деформирования разномодульных сред : № 2023666274 : заявл. 02.08.2023 : опубл. 18.08.2023 / А. А. Лаптева, О. В. Дудко ; заявитель Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук. – EDN OJTKUX.

2. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестник ПНИПУ. Механика (PNRPU Mechanics Bulletin). – 2019. – № 4. – С. 37-47. – DOI 10.15593/perm.mech/2019.4.04. – EDN PCRUTF.

3. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Evolution of the Wave Pattern for Piecewise Linear Uniaxial Tension and Compression of a Heteromodular Elastic Bar // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2022. – Vol. 16, No. 4. – P. 645-658. – DOI 10.1134/s1990478922040068. – EDN WVTUII.

4. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Interaction of Plane Strain Waves in a Heteromodular Elastic Half-Space at the Stage of Forced Stopping of Its Boundary after Uniaxial Tension-Compression // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2023. – Vol. 17, No. 4. – P. 710-723. – DOI 10.1134/s1990478923040038. – EDN FVQKIZ.

5. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 172 с.



УДК 539.374

**Евтихов Денис Олегович**, аспирант, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва  
**Evtikhov Denis Olegovich**, postgraduate student, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

## **ПОСТРОЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ CONSTRUCTION OF AN ELASTIC-PLASTIC BOUNDARY FOR A ROD UNDER THE ACTION OF TANGENTIAL STRESS**

**Аннотация.** Построена упругопластическая граница для стержня прямоугольного сечения, находящегося под действием касательных напряжений с использованием законов сохранения. Разработано приложение для нахождения упругопластической границы, приведены результаты для стержней разного поперечного сечения.

**Annotation.** An elastic-plastic boundary is constructed for a rod of rectangular cross-section under the action of tangential stresses using conservation laws. An application for finding the elastoplastic boundary has been developed, and the results for rods of different cross-sections are presented.

**Ключевые слова:** упругопластическая граница, стержень под действием касательных напряжений, законы сохранения.

**Keywords:** elastic-plastic boundary, the rod is under the influence of tangential stresses, conservation laws.

Нахождение упругопластической границы в стержнях под действием касательных напряжений на боковой поверхности важная научная задача. Ее решение, позволяет более точно определять прочностные характеристики стержня под действием касательных напряжений на боковой поверхности, которые используются в различных конструкциях и механизмах. Это, в свою очередь, приводит к облегчению конструкций и повышает их эксплуатационные характеристики. С другой стороны, пластические деформации, которые возникают под действием касательных напряжений, приводят к упрочнению стержней. Такой процесс широко используется в промышленной обработке элементов конструкций. При этом очень важно, чтобы пластическому деформированию подвергались только близкие к внешней поверхности слои металла, и чтобы в процессе деформирования не произошло разрушение упрочняемого изделия и не ухудшились его эксплуатационные характеристики

Перечисленные проблемы приводят к задаче нахождения упругопластической границы стержня под действием касательных напряжений [1]. До работ авторов [2-3] не было представлено эффективного метода, который позволял бы решать эту задачу. Использование законов

сохранения для решения дифференциальных уравнений позволило получить аналитические формулы для нахождения упругопластической границы стержней под действием касательных напряжений.

### Постановка задачи

Рассмотрим стержень с прямоугольным поперечным сечением, который находится под действием касательных напряжений на боковой поверхности см. рисунок 1

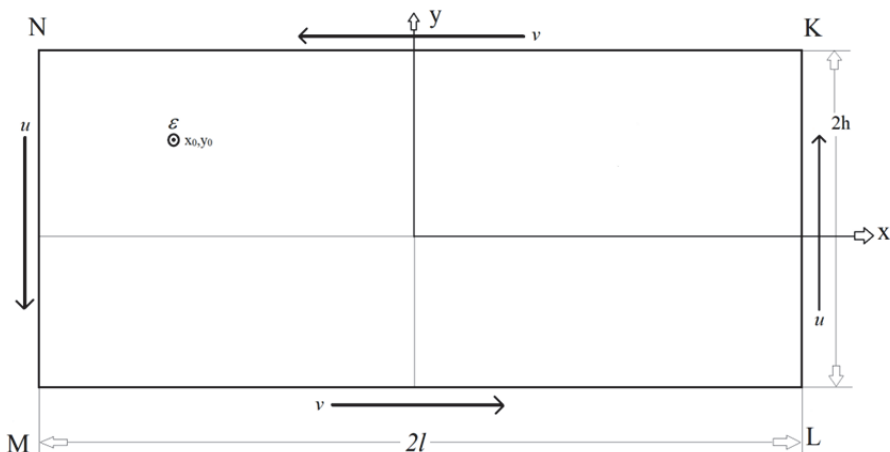


Рисунок 1 – стержень под действием касательных напряжений.

Пусть  $u = \tau_{xz}, v = \tau_{yz}$  - единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= u_x + v_y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= u_y - v_x = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

### Граничные условия:

KNML – боковая поверхность стержня, которая находится в пластичном состоянии, пусть на ней выполняется условия:

$$un_1 + vn_2 = 0, u^2 + v^2 = k^2. \quad (2)$$

На KN  $v = -k_s$ , NM  $u = -k_s$ , ML  $v = k_s$ , LK  $u = k_s$ , где  $k_s$  - предел текучести

Запишем (1) в виде

$$F_1 = u_x + v_y = 0, F_2 = u_y - v_x = 0, \quad (3)$$

### Закон сохранения

Закон сохранения для системы (3) запишем в виде [2]

$$\partial_x A + \partial_y B = \square_1 F_1 + \square_2 F_2 = 0, \quad (4)$$

Здесь  $\square_{1,2}$  некоторые линейные дифференциальные операторы. Пусть  $A = \alpha^1 u + \beta^1 v$ ,  $B = \alpha^2 u + \beta^2 v$  из (4) получаем:

$$\alpha_x^1 u + \alpha^1 u_x + \beta_x^1 v + \beta^1 v_x + \alpha_y^2 u + \alpha^2 u_y + \beta_y^2 v + \beta^2 v_y = \omega_1(u_x + v_y) + \omega_2(u_y - v_x) = 0, \quad (5)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  функции только от  $x$ ,  $y$ , где индексы внизу обозначают производную по соответствующей переменной.

Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \alpha^1 = \omega_1, \\ \beta_x^1 + \beta_y^2 &= 0, \beta^1 = \omega_2, \\ \alpha^2 &= -\omega_2, \beta^2 = \omega_1, \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует условия для функций  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\alpha^1 = \beta^2, \beta^1 = -\alpha^2, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \\ \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1 u + \beta^1 v, \\ B &= -\beta^1 u + \alpha^1 v, \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (8) имеющие особенность в точке  $(x_0, y_0)$ , первое решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

Второе решение возьмем в виде:

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^3 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

Из закона сохранения (4) следует:

$$\iint_s (A_x + B_y) dx dy = \oint_\Gamma A dy - B dx = 0, \quad (12)$$

Где  $s$  – поперечное сечение,  $\Gamma$  - граница области интегрирования KNMLK

Тогда из (15) получаем для первого решения:

$$2\pi u(x_0, y_0) = -\tau_{xz}(x_0, y_0) 2\pi = - \int_{KNMLK}, \quad (13)$$

для второго решения:

$$2\pi v(x_0, y_0) = -\tau_{yz}(x_0, y_0) 2\pi = - \int_{KNMLK}, \quad (14)$$

Более подробно эти вычисления рассматриваются в [2].

Формулы (13) и (14) позволяют построить упругопластическую границу для стержня, находящегося под действием касательных напряжений

на боковой поверхности. Т.е. точки поперечного сечения, в которых выполняется условие  $u^2 + v^2 < k_s^2$  принадлежат упругой области, остальные – пластической. С использованием этих формул нами была разработана программа в среде Maple. На рисунке 2 представлен результат работы программы при  $l=6, h=3$ . Светлые области упругие, темные пластичные.

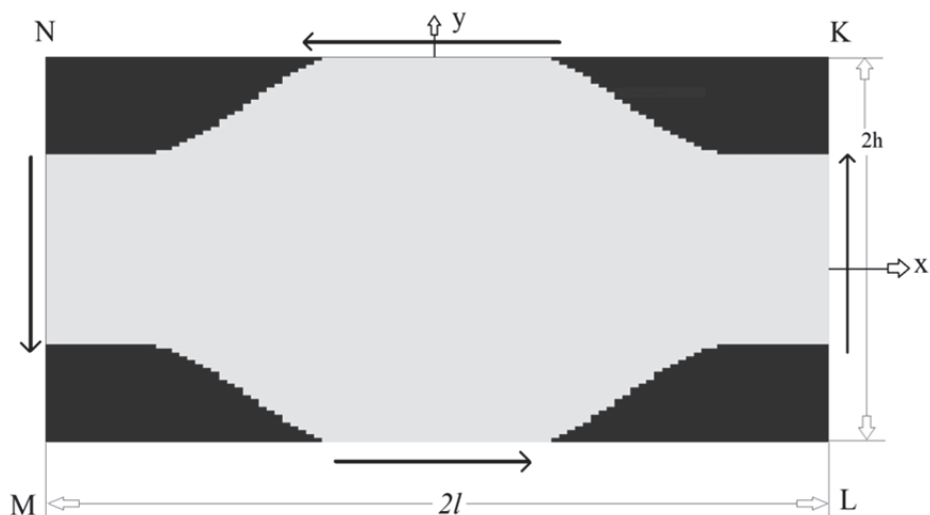


Рисунок 2 – Упругопластическая граница при  $l=6, h=3$ .

Далее мы уменьшили ширину поперечного сечения стержня. Результаты расчетов представлены на рисунках 3-5.



Рисунок 3 – Упругопластическая граница при  $l=6, h=2$ .

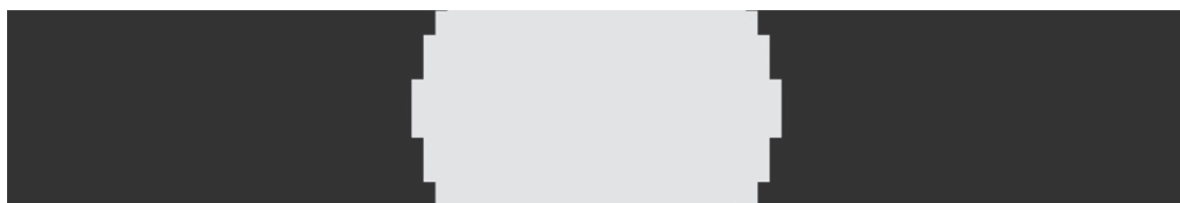


Рисунок 4 – Упругопластическая граница при  $l=6, h=1$ .

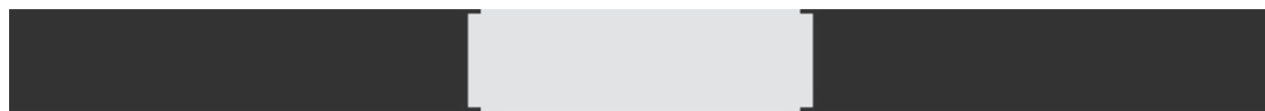


Рисунок 5 – Упругопластическая граница при  $l=6, h=0.5$ .

## **Заключение**

В работе построена упругопластическая граница для стержня прямоугольного сечения, находящегося под действием касательных напряжений с использованием законов сохранения. Разработано приложение для нахождения упругопластической границы, приведены результаты для стержней разного поперечного сечения.

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 126 с.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 192 с.
3. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. P. 16

УДК 519.63

**Елистратов Вячеслав Евгеньевич**, студент, Институт математики и компьютерных технологий Дальневосточный федеральный университет  
**Elistratov Vyacheslav Evgenievich**, student, Institute of Mathematics and Computer Technology, Far Eastern Federal University

**Амосова Елена Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор, Институт математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет

**Amosova Elena Vladimirovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Institute of Mathematics and Computer Technology, Far Eastern Federal University

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

## **APPLICATION OF THE METHOD OF CHARACTERISTICS IN SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FIRST-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS**

**Аннотация.** В работе рассматривается метод нахождения численных решений нелинейных и квазилинейных уравнений гиперболического типа первого порядка, основанный на аппроксимации дифференциального оператора полной производной вдоль характеристик для начального состояния. Построенное таким образом приближенное решение обладает

гладкостью начального состояния, но в тоже время описывает разрывное поведение решения. Схема имеет первый порядок аппроксимации и абсолютно устойчивая.

**Abstract.** The paper considers a method for finding numerical solutions to nonlinear and quasilinear first-order hyperbolic equations based on the approximation of the differential operator of the total derivative along the characteristics for the initial state. The approximate solution constructed in this way has the smoothness of the initial state, but at the same time describes the discontinuous behavior of the solution. The scheme has the first order of approximation and is absolutely stable.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение, метод характеристик, приближенное решение.

**Keywords:** hyperbolic equation, method of characteristics, approximate solution.

### **Введение**

Создание новых и преобразование уже существующих численных методов для повышения надежности является актуальной задачей вычислительной математики. Решение различных задач математической физики описываются гиперболическими уравнениями первого порядка, которые, не смотря на простоту вида дифференциального уравнения, решение могут быть гладкими в одних областях и разрывными в других. [1]-[4]. Разрывные решения могут возникать из гладких начальных данных. Такие свойства решений накладывают на алгоритм численного решения определенные препятствия, преодоление которых влечет многократное увеличение вычислительных и временных затрат. Вычислительная сложность в таких задачах обусловлена наличием подобластей, где решения имеют большие градиенты и происходит быстрый рост неизвестной функции. В работе авторов [5] на основе методов Рунге-Кутты получены новые схемы высоких порядков точности для начально-краевых задач с дифференциальными уравнениями в частных производных, решения которых имеют большие градиенты. Получение требуемой точности достигается за счет уменьшения сетки.

В работе обсуждается алгоритм численного решения нелинейных гиперболических уравнений, основанный на методе характеристик. Численный расчет строится на итерационной процедуре от начального состояния и имеет высокую точность при достаточно небольшом количестве шагов. Разработан алгоритм, позволяющий получать численное решение на участках не единственности.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Рождественский, Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике // М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы. 1978. 688 с.

2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.

3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. 47 (89). № 3. С. 271-306.

4. Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики // 1985. Наука, Новосибирск.

5. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Обобщение методов Рунге-Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики // Сиб. журн. вычислит. математики. 2005. Том 8. № 3(55). С.57–76.

УДК 510.67, 512.57

**Ефремов Евгений Леонидович**, кандидат физико-математических наук, доцент департамента математики Института математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет

**Efremov Evgeniy Leonidovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Institute of Mathematics and Computer Technologies, Far Eastern Federal University

**Степанова Алена Андреевна**, доктор физико-математических наук, профессор департамента математики Института математики и компьютерных технологий, профессор, Дальневосточный федеральный университет

**Stepanova Alena Andreevna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Institute of Mathematics and Computer Technologies, Professor, Far Eastern Federal University

**Чеканов Сергей Геннадьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент департамента математики Института математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет

**Chekanov Sergey Gennadievich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Institute of Mathematics and Computer Technologies, Far Eastern Federal University

## **О Т-ПСЕВДОКОНЕЧНЫХ ПОЛИГОНАХ НАД МОНОИДАМИ**

## **ON T-PSEUDOFINITE ACTS OVER MONOIDS**

**Аннотация.** В работе изучается структура Т-псевдоконечных полигонов над моноидом  $S$ , где  $T$  – теория всех полигонов над моноидом  $S$ . Доказывается, что если число типов изоморфизмов конечных циклических полигонов над моноидом  $S$  конечно и полигон  $A$  над моноидом  $S$  является Т-псевдоконечным, то любой циклический подполигон  $A$  конечен.

**Abstract.** The work studies the structure of T-pseudofinite acts over a monoid S, where T is the theory of all acts over the monoid S. It is proved that if the number of isomorphisms types of finite cyclic acts over the monoid S is finite and an act A over the monoid S is T-pseudofinite, then any cyclic subact of A is finite.

**Ключевые слова:** псевдоконечная структура, T-псевдоконечная структура, полигон над моноидом, T-псевдоконечный полигон над моноидом.

**Keywords:** pseudofinite structure, T-pseudofinite structure, act over monoid, T-pseudofinite act over monoid.

### **Введение**

Работа посвящена теории моделей псевдоконечных структур. Структура M языка L псевдоконечна, если любое предложение языка L, истинное в M, истинно в некоторой конечной структуре языка L. Псевдоконечные модели классических теорий изучались во многих работах: в [1] описаны псевдоконечные поля; в [2] дана характеристика простых псевдоконечных групп; в [3] показано, что копроизведение конечных полигонов над моноидом псевдоконечно, в частности, любой полигон над конечной группой псевдоконечен; в [4] приводится пример конечного моноида, над которым существует как псевдоконечный полигон, так и не псевдоконечный, в [5] изучено строение псевдоконечных ациклических графов; в [6] рассмотрены псевдоконечные модели теории отношения эквивалентности.

Модификацией понятия псевдоконечности является понятие T-псевдоконечности, где T – теория языка L. A именно, структура M языка L называется T-псевдоконечной, если любое предложение языка L, истинное в M, истинно в некоторой конечной модели теории T. В данной работе изучается строение T-псевдоконечных полигонов над моноидом S, т.е. множеств, на которых действует S, при условии конечности числа типов изоморфизмов конечных циклических полигонов над S.

### **Основная часть**

Все необходимые определения можно найти в [3, 7].

Структура A языка  $L_S = \{s \mid s - \text{элемент } S\}$  называется (левым) S-полигоном, если  $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$  и  $1a = a$  для любых  $s_1, s_2$  из S и a из A. Циклическим S-полигоном называется однопорожденный S-полигон.

**Факт 1.** Пусть T – теория языка L, M – T-псевдоконечная модель T. Тогда M элементарно эквивалентна ультрапроизведению конечных моделей теории T.

**Факт 2.** Пусть D – фильтр на множестве I. Тогда D является ультрафильтром в том и только том случае, когда для любого подмножества K множества I либо K принадлежит D, либо дополнение K до I принадлежит D.



**Теорема.** Пусть  $T$  – теория  $S$ -полигонов и для моноида  $S$  число типов изоморфизмов конечных циклических  $S$ -полигонов конечно. Если  $S$ -полигон  $A$  является  $T$ -псевдоконечным, то любой циклический подполигон  $A$  конечен.

*Доказательство.* Пусть условия теоремы выполнены,  $S$ -полигон  $A$  является  $T$ -псевдоконечным и  $l$  — это максимальная из мощностей всех конечных циклических  $S$ -полигонов над  $S$ . По факту  $1 \text{ } {}_S A \equiv_S B$ , где  ${}_S B = \prod_{i \in I} {}_S B_i / D$ ,  ${}_S B_i$  — конечные  $S$ -полигоны,  $D$  — ультрафильтр на  $I$ .

Покажем, что любой циклический подполигон  $S$ -полигона  ${}_S B$  содержит не более  $l$  элементов. Пусть  $b/D \in B$ . Поскольку  ${}_S B_i$  — конечные  $S$ -полигоны, то  $S$ -полигоны  ${}_S S b(i)$  также конечны для любого  $i \in I$ . По условию число типов изоморфизмов конечных циклических  $S$ -полигонов конечно. Пусть  ${}_S S a_0, \dots, {}_S S a_{m-1}$  — представители всех типов изоморфизмов конечных циклических  $S$ -полигонов. Тогда  $K_0 \cup \dots \cup K_{m-1} = I$ , где  $K_j = \{i \in I \mid {}_S S b(i) \cong {}_S S a_j\}$  ( $0 \leq j < m$ ). По факту 2 существует  $j \in I$  такой, что  $K_j \in D$ . Так как  $|S a_j| \leq l$ , то  $K_j \subseteq \{i \in I \mid |S b(i)| \leq l\} \in D$ . Тогда по теореме Лося ([6], теорема 3.3.5)  $|S b/D| \leq l$ . Следовательно, любой циклический подполигон  $S$ -полигона  ${}_S B$  содержит не более  $l$  элементов.

Покажем, что любой циклический подполигон  $S$ -полигона  ${}_S A$  конечен. Предположим противное, а именно, существует  $a \in A$  такой, что  $|S a| \geq \omega$ . Пусть  $a_0, \dots, a_l$  — произвольные различные элементы из  $S a$ . Тогда  $a_i = t_i a$  ( $0 \leq i \leq l$ ) для некоторых  $t_0, \dots, t_l \in S$ . Через  $\Phi$  обозначим формулу

$$\exists x \exists x_0 \dots \exists x_l \left( \bigwedge_{0 \leq i < j \leq l} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq l} x_i = t_i x \right).$$

Тогда  ${}_S A \models \Phi$ . Поскольку  $S$ -полигоны  ${}_S A$  и  ${}_S B$  элементарно эквивалентны, то  ${}_S B \models \Phi$ , т.е. в  $S$ -полигоне  ${}_S B$  есть циклический  $S$ -полигон, содержащий больше  $l$  элементов. Противоречие. Теорема доказана.

Следующий **пример** показывает, что условие конечности любого циклического подполигона  $S$ -полигона в теореме не является достаточным для  $T$ -псевдоконечности  $S$ -полигона. Пусть  $(S; \cdot)$  – моноид, где  $S = \{1, s, t, r\}$ ,  $1$  – единица  $S$ ,  $u \cdot v = r$  для любых  $u, v \in S \setminus \{1\}$ ,  ${}_S S_i$  – копии  $S$ -полигона  ${}_S S$ ,  $u_i$  – копии элементов  $u \in S$  в  $S$ -полигоне  ${}_S S_i$  ( $i \in \omega$ ),  ${}_S A = \bigcup_{i \in \omega} {}_S S_i / \Theta$ , где  $\Theta$  – конгруэнция  $S$ -полигона  $\bigcup_{i \in \omega} {}_S S_i$ , порожденная множеством  $\{(s_i, t_{i+1}) \mid i \in \omega\}$ . Тогда  $S$ -полигон  ${}_S A$  не  $T$ -псевдоконечен.

*Доказательство.* Пусть моноид  $S$  и  $S$ -полигон  ${}_S A$  определены указанным в примере образом. Введем обозначения:

$$\Phi_1 \Leftrightarrow \forall x (s x \neq t x \rightarrow \exists! y (s x = t y \wedge t y \neq s y)),$$

$$\Phi_2 \Leftrightarrow \exists x (s x \neq t x \wedge \neg \exists y (t x = s y)),$$

$$\Phi_3 \Leftrightarrow \forall x y (s x = s y \wedge s x \neq t x \rightarrow x = y),$$

$$\Phi \Leftrightarrow \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3.$$

Из построения  $S$ -полигона  ${}_S A$  следует, что  ${}_S A \models \Phi$ .

Покажем, что формула  $\Phi$  ложна в любом конечном  $S$ -полигоне над моноидом  $S$ . Предположим, что  ${}_S B \models \Phi$  для некоторого  $S$ -полигона.

Покажем, что  ${}_S B$  – бесконечный S-полигон. Пусть  $F = \{b \in B \mid sb \neq tb\}$ . Если  $b \in F$  и  $sb = b$ , то  $tb = tsb = rb = s^2b = sb$ , противоречие. Следовательно,  $sb \neq b$  для любого  $b \in F$ . Аналогично,  $tb \neq b$  для любого  $b \in F$ . Если  $rb = b$ , то  $sb = s(rb) = (sr)b = (tr)b = t(rb) = tb$ , противоречие, т.е.  $rb \neq b$  для любого  $b \in F$ . Так как  ${}_S B \models \Phi_2$ , то существует  $b_0 \in F$  такой, что  $tb_0 \neq sb$  для любого  $b \in B$ . Предположим, что построены элементы  $b_0, \dots, b_k \in F$  такие, что  $sb_i = tb_{i-1}$  ( $0 \leq i < k$ ) и  $sb_i \notin \bigcup_{0 < j \leq i-1} Sb_j$  ( $0 \leq i \leq k$ ). Покажем, что существует  $b_{k+1} \in F$ , для которого выполняются соотношения:  $tb_{k+1} = sb_k$  и  $sb_{k+1} \notin \bigcup_{0 \leq j \leq k} Sb_j$ . Так как  ${}_S B \models \Phi_1$ , то существует единственный  $b \in F$  такой, что  $tb = sb_k$ . Полагаем  $b_{k+1} = b$ . Покажем, что  $sb_{k+1} \notin \bigcup_{0 \leq j \leq k} Sb_j$ . Предположим, что  $sb_{k+1} \in Sb_i$  для некоторого  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Возможны несколько случаев.

1)  $sb_{k+1} = b_i$ . Тогда  $sb_i = s^2b_{k+1} = tsb_{k+1} = tb_i$ , т.е.  $b_i \notin F$ , противоречие.

2)  $sb_{k+1} = sb_i$ . Так как  ${}_S B \models \Phi_3$ , то  $b_{k+1} = b_i$ . Так как  $tb_{k+1} = sb_k$ , то  $tb_i = sb_k$ . Так как  $b_i \in F$ , то  $b_i \neq b_k$  и  $i < k$ , при этом  $sb_k \in Sb_i$ , противоречие.

3)  $sb_{k+1} = rb_i$ . Тогда  $sb_{k+1} = ssb_i = stb_i$ . Так как  ${}_S B \models \Phi_3$ , то  $b_{k+1} = sb_i = tb_i$ , т.е.  $b_i \notin F$ , противоречие.

4)  $sb_{k+1} = tb_i$ . По выбору элемента  $b_0$  имеем  $sb_i \neq tb_0$ , т.е.  $i > 0$ . Тогда  $sb_{i-1} = tb_i = sb_{k+1}$ . Поскольку  ${}_S B \models \Phi_3$ , то  $b_{i-1} = b_{k+1}$ . Отсюда, также как в случае 2, доказывается, что  $i - 1 < k$  и  $sb_k \in Sb_{i-1}$ . Противоречие.

Таким образом, доказано, что  ${}_S B$  – бесконечный S-полигон.

### **Заключение**

В работе доказано, что если число типов изоморфизмов конечных циклических полигонов над моноидом S конечно и полигон A над моноидом S является T-псевдоконечным, то любой циклический подполигон A конечен. Приведен пример конечного моноида, над которым существует не T-псевдоконечный полигон, что показывает, что условие конечности любого циклического подполигона S-полигона в теореме не является достаточным для псевдоконечности S-полигона.

### **Благодарности**

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28.02.2024 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Ax, J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88. – P. 239–271 (1968)
2. Wilson, J.S. On pseudofinite simple groups // J. Lond. Math. Soc. 1995. – Vol. 51. – No 2. – P. 471–490.

3. Ефремов, Е. Л. Pseudofinite S-acts / Е. Л. Ефремов, А. А. Степанова, С. Г. Чеканов // Сибирские электронные математические известия, 2024, Т. 21, № 1, С. 271-276. – DOI: 10.33048/semi.2024.21.020

4. Степанова, А. А. О псевдоконечных полигонах над конечными моноидами / А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов, С. Г. Чеканов // ALGEBRA AND MODEL THEORY 14: Collection of papers, Novosibirsk State Technical University, 2023. – С. 138-142

5. Мархабатов, Н. Д. Approximations of Acyclic Graphs // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2022. Т. 40. – С. 104–111.

6. Мархабатов, Н. Д. Аппроксимации теорий структур с одним отношением эквивалентности // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2023. Т. 20. - № 2. С. 67-72. – DOI: 10.55452/1998-6688-2023-20-2-67-72

7. Ершов, Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин // Москва : Физматлит. 2011. С. – 320.

УДК 510.67:512.57

**Ефремов Евгений Леонидович**, кандидат физико-математических наук, доцент Департамента математики Института математики и компьютерных технологий, Дальневосточный федеральный университет

**Efremov Evgenii Leonidovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Mathematics, Institute of Mathematics and Computer Technologies, Far Eastern Federal University

**Шамич Никита Ильич**, учитель математики Университетской школы, Дальневосточный федеральный университет

**Shamich Nikita Ilyich**, math teacher at University School, Far Eastern Federal University

## **СТРОЕНИЕ СВЯЗНЫХ КОНГРУЭНЦ-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ УНАРОВ**

## **THE STRUCTURE OF CONNECTED CONGRUENCE-COMMUTATIVE UNARS**

**Аннотация.** В работе изучается строение связанных конгруэнц-перестановочных унаров, т.е. таких алгебраических систем с одной одноместной операцией, любые две конгруэнции которых перестановочны относительно композиции.

**Abstract.** The work studies the structure of connected congruence-commutative unars, i.e. such algebraic systems with one unary operation, any two congruences of which commute with respect to composition.

**Ключевые слова:** унар, конгруэнц-перестановочная алгебра.

**Keywords:** unar, congruence-commutative algebra.

## Введение

Конгруэнцией алгебраической структуры называется бинарное отношение, сохраняющее операции и предикаты, определённые в этой структуре. Умножение конгруэнций в общем случае не является коммутативной операцией. Алгебраические структуры, для которых умножение конгруэнций коммутативно, называются конгруэнц-перестановочными. Многие классы алгебр состоят из конгруэнц-перестановочных алгебр, однако класс унаров содержит унары, не являющиеся конгруэнц-перестановочными.

Для класса полигонов над моноидом вопрос о строении конгруэнц-перестановочных полигонов был частично решён в работе [1]. Структура конгруэнций некоторых типов унаров очень подробно описана в работах [2, 3]. Так как любая подалгебра конгруэнц-перестановочной алгебры сама является конгруэнц-перестановочной, то изучение строения и свойств связанных алгебр служит хорошим началом для дальнейшего построения теории. В настоящей работе приводится критерий конгруэнц-перестановочности связного унара. В частности, изучено строение решётки конгруэнций унара, являющегося петлёй с единственным хвостом или циклом.

## Предварительные сведения

Все основные сведения можно найти в [1, 2, 4]. Приведём лишь некоторые специальные обозначения и определения.

Пусть  $\mathcal{A} = \langle A; f^{(1)} \rangle$  – унар. Подунар  $\mathcal{B} = \langle B; f^{(1)} \rangle$  унара  $\mathcal{A}$ , где  $B = \{b_i | i \in \omega\}$ , называется *полуцепью*, если  $fb_i = b_{i+1}$  для всех  $i \in \omega$  и  $b_i \neq b_j$  для всех различных  $i, j \in \omega$ . Подунар  $\mathcal{C} = \langle C; f^{(1)} \rangle$  унара  $\mathcal{A}$  называется *циклом длины*  $n \in \mathbb{N}$ , если  $C = \{c_i | 0 \leq i < n\}$ , где  $c_i \neq c_j$  для всех различных  $i, j < n$ ,  $fc_i = c_{i+1}$  для всех  $i < n - 1$  и  $fc_{n-1} = c_0$ . *Петлёй* называется цикл длины 1.

*Хвостом элемента*  $a_0 \in A$  называется множество  $B = \{a_i | i \in I\} \subseteq A$ , где

- 1)  $I = \mathbb{Z}^-$  или  $I = \{-1, \dots, -n\}$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ ,
- 2)  $fa_i = a_{i+1}$  для всех  $i \in I$ ,
- 3)  $fa_0 \notin B$ ,
- 4)  $a_i \neq a_j$  для всех различных  $i, j \in I$ ,
- 5) если  $I = \{-1, \dots, -n\}$ , то  $b_{-n}$  без прообразов.

Если  $I = \mathbb{Z}^-$ , то  $B$  называется *бесконечным хвостом*, если  $I = \{-1, \dots, -n\}$  – *хвостом длины*  $n$ . Элемент  $a_0$  называется *началом хвоста*  $B$ .

## Строение связанных конгруэнц-перестановочных унаров

Пусть  $\mathcal{C}$  – цикл длины  $n \in \mathbb{N}$ . Через  $\theta_k$  ( $k < n$ ) обозначим конгруэнцию унара  $\mathcal{C}$ , порождённую парой  $\langle c_0, f^k c_0 \rangle$ . Заметим, что  $\theta_0 = \Delta_{\mathcal{C}}$ ,  $\theta_1 = \mathcal{C}^2$ ,  $\theta_k = \{\langle c_i, c_j \rangle | i, j < n, i - j : k\}$  для любого ненулевого  $k < n$ .

**Лемма 1.**  $\text{Con}(\mathcal{C}) = \{\theta_k | k = 0 \vee n : k\}$ .

**Утверждение 2.** *Любой цикл конгруэнц-перестановочен.*

*Доказательство.* Пусть  $k, l < n$ ,  $n : k$  или  $k = 0$ ,  $n : l$  или  $l = 0$ . Ясно, что если  $0 \in \{k, l\}$ , то  $\theta_k \theta_l = \theta_l \theta_k$ . Пусть  $k \neq 0$ ,  $l \neq 0$ ,  $\langle c_i, c_j \rangle \in \theta_k \theta_l$ . Тогда существует  $r < n$  такое, что  $r - i : k$  и  $r - j : l$ , т.е.  $r = i + ks$  и  $r = j + lt$  для некоторых  $s, t \in \omega$ . Тогда  $i - lt = j - ks$ .

Пусть  $m = (i - lt) \bmod n$ . Тогда

$$m - (i - lt) : n \Rightarrow m - i + lt : l \Rightarrow m - i : l \Rightarrow c_i \theta_l c_m.$$

Аналогично получим, что  $c_m \theta_k c_j$ . Следовательно,  $\langle c_i, c_j \rangle \in \theta_l \theta_k$ . Утверждение 2 доказано.

Пусть  $\mathcal{A}$  – цикл  $\mathcal{C}$  длины  $n$  с единственным хвостом  $B$ ,  $b_0 \in \mathcal{C}$  – начало  $B$ ,  $\mathcal{C} = \{b_i | 0 \leq i < n\}$ ,  $B = \{b_i | i \in I\}$ , где  $I = \mathbb{Z}^-$  или  $I = \{-1, \dots, -m\}$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ ,  $fb_i = b_{i+1}$  для любого  $i < n$ ,  $fb_{n-1} = b_0$ ,  $b_i \neq b_j$  для всех различных  $i, j \in I \cup \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Через  $\theta_{ik}$  ( $i \in I \cup \{0\}$ ,  $k \leq n$ ) обозначим конгруэнцию унара  $\mathcal{A}$ , порождённую парой  $\langle b_i, f^k b_i \rangle$ . Нетрудно понять, что  $\theta_{0k} = \theta_k \cup \Delta_{\mathcal{A}}$ ,  $\theta_{i0} = \Delta_{\mathcal{A}}$  и для  $k \neq 0$

$$\theta_{ik} = \{\langle b_j, b_l \rangle | j, l \geq i, j - l : k\} \cup \Delta_{\mathcal{A}}.$$

Если  $I = \mathbb{Z}^-$ , то через  $\theta_{\infty k}$  обозначим конгруэнцию  $\{\langle b_j, b_l \rangle | j - l : k\}$ . Если  $I = \{-1, \dots, -m\}$ , то  $\theta_{\infty k}$  будем отождествлять с  $\theta_{-mk}$ .

**Лемма 2.**  $\text{Con}(\mathcal{A}) = \{\theta_{ik} | i \in I \cup \{0, \infty\}, k = 0 \vee n : k\}$ .

**Утверждение 3.** Любая петля с одним хвостом конгруэнц-перестановочна.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{C}$  — петля,  $\theta_{ik}, \theta_{jl} \in \text{Con}(\mathcal{A})$ . Ясно, что если  $0 \in \{k, l\}$ , то  $\theta_{ik} \theta_{jl} = \theta_{jl} \theta_{ik}$ . Предположим, что  $0 \notin \{k, l\}$ . Согласно лемме 2,  $k = l = 1$ . Пусть  $b_s \theta_{i1} \theta_{j1} b_t$  для некоторых  $s, t \in I \cup \{0, 1, \dots, n-1\}$ . По определению существует  $r \in I \cup \{0, 1, \dots, n-1\}$  такой, что  $b_s \theta_{i1} b_r \theta_{j1} b_t$ . Рассмотрим несколько случаев.

*Случай 1:*  $s < i$ . Тогда  $r = s$  и  $b_s \theta_{j1} b_t \theta_{i1} b_t$ .

*Случай 2:*  $t < j$ . Тогда  $r = t$  и  $b_s \theta_{j1} b_s \theta_{i1} b_t$ .

*Случай 3:*  $s \geq i$  или  $i = \infty$ ,  $t \geq j$  или  $j = \infty$ . Тогда  $b_s \theta_{j1} b_0 \theta_{i1} b_t$ .

Следовательно,  $\mathcal{A}$  — конгруэнц-перестановочный унар.

**Утверждение 4.** Если  $\mathcal{A}$  — связный конгруэнц-перестановочный унар, то  $\mathcal{A}$  является циклом с не более чем одним хвостом.

*Доказательство.* Пусть условия утверждения выполнены.

Предположим, что  $\mathcal{A}$  содержит полуцепь  $\mathcal{B}$ , где  $B = \{b_i | i \in \omega\}$ ,  $fb_i = b_{i+1}$  для любого  $i \in \omega$  и  $b_i \neq b_j$  для всех различных  $i, j \in \omega$ . Через  $\rho_1$  обозначим конгруэнцию подунара  $\mathcal{B}$ , порождённую парой  $\langle b_0, b_2 \rangle$ ,  $\rho_2$  — конгруэнцию  $\mathcal{B}$ , порождённую парой  $\langle b_2, b_3 \rangle$ . Нетрудно понять, что

$$\rho_1 = \{\langle b_i, b_j \rangle | i, j \in \omega, i - j : 2\},$$

$$\rho_2 = \{\langle b_0, b_0 \rangle, \langle b_1, b_1 \rangle\} \cup \{\langle b_i, b_j \rangle | i, j \geq 2\}.$$

Пусть  $\eta_1 = \rho_1 \cup \Delta_{\mathcal{A}}$ ,  $\eta_2 = \rho_2 \cup \Delta_{\mathcal{A}}$ . Ясно, что  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — конгруэнции  $\mathcal{A}$ . Тогда  $b_0 \eta_1 b_2 \eta_2 b_3$  и в силу конгруэнц-перестановочности  $\mathcal{A}$  существует  $u \in A$  такой, что  $b_0 \eta_2 u \eta_1 b_3$ . Так как  $b_0 / \eta_2 = \{b_0\}$ , то  $u = b_0$  и  $b_0 \eta_1 b_3$ . Из

$b_0 \neq b_3$  следует  $b_0 \rho_1 b_3$ , что противоречит определению  $\rho_1$ . Следовательно,  $\mathcal{A}$  не содержит полупечей и, так как является связным, содержит единственный цикл  $C$ .

Предположим, что существует два различных хвоста  $B_1$  и  $B_2$  с началами  $c_1, c_2 \in C$  соответственно. Для  $i \in \{1, 2\}$  введём следующие обозначения:  $\mathcal{B}_i = \langle C \cup B_i; f^{(1)} \rangle$ ,  $\rho_i$  – конгруэнция Риса на  $\mathcal{B}_i$  и  $b_i \in B_i$  такой, что  $fb_i = c_i$ . Так как  $c_1, c_2 \in C$ , то  $c_1 \rho_2 c_2$ . Следовательно,  $b_1 \rho_1 c_1 \rho_2 b_2$ . В силу конгруэнц-перестановочности  $\mathcal{A}$  существует  $d \in A$  такой, что  $b_1 \rho_2 d \rho_1 b_2$ . Так как  $b_1 \notin C \cup B_2$ , то  $b_1/\rho_2 = \{b_1\}$  и  $d = b_1$ . Аналогично  $d = b_2$ , т.е.  $b_1 = b_2$  — противоречие.

Таким образом,  $\mathcal{A}$  — цикл с не более чем одним хвостом.

**Утверждение 5.** Если  $\mathcal{A}$  — конгруэнц-перестановочный цикл  $C$  с хвостом, то  $|C| = 1$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $|C| = n \neq 1$ ,  $n : k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $b_{-1} \theta_{-1n} b_{n-1} \theta_{0k} b_{k-1}$ . В силу конгруэнц-перестановочности  $\mathcal{A}$  найдётся  $r \in I \cup \{0, 1, \dots, n-1\}$  такой, что  $b_{-1} \theta_{0k} b_r \theta_{-1n} b_{k-1}$ . Так как  $b_{-1}/\theta_{0k} = \{b_{-1}\}$ , то  $r = -1$ . Тогда  $(k-1) - (-1) = k : n$ . Таким образом, любой делитель  $n$  равен  $n$ , что верно только для  $n = 1$ .

**Теорема.** Связный унар  $\mathcal{A}$  конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}$  имеет один из следующих видов:

- 1) цикл произвольной длины,
- 2) петля с одним хвостом.

### Заключение

В работе приводятся леммы 1 и 2 о строении решёток конгруэнций связных унаров, являющихся циклами с не более чем одним хвостом. Доказано, что умножение конгруэнций в этих решётках коммутативно тогда и только тогда, когда унар является циклом или петлёй с единственным хвостом. В дальнейшем планируется получить критерии конгруэнц-перестановочности несвязных унаров и полигонов.

### Благодарности

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Конгруэнц-перестановочные полигоны / А. А. Степанова, С. Г. Чеканов // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63. – № 1. – С. 202–208. – DOI: 10.33048/smzh.2022.63.114.
2. Егорова, Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки: межвузовский научный сборник. – Саратов: Издательство Саратовского университета. – 1978. – Вып. 5. – С. 11–44.

3. Карташова, А. В. О решётках конгруэнций прямых сумм сильно связанных коммутативных унарных алгебр / А. В. Карташова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – № 4 (2). – С. 57–62.

4. Пинус А. Г., Основы универсальной алгебры: Учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 137 с. – ISBN: 978-5-406-08192-1.

5. О строении коммутативных унарных алгебр с дистрибутивной решёткой конгруэнций / В. В. Попов // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21. – Вып. 3. – С. 19–30. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.3.2.

УДК 004.9:519.768

**Животова Алена Анатольевна**, ассистент кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Zhivotova Alena Anatolievna**, assistant of Applied Mathematics Department, Komsomolsk-na-Amure State University

**Бердонос Витор Дмитриевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Berdonosov Victor Dmitrievich**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Applied Mathematics Department, Komsomolsk-na-Amure State University

## **ОПТИМИЗАЦИОННОЕ ПРЕДРЕДАКТИРОВАНИЕ РУССКО-ЯЗЫЧНЫХ ТЕКСТОВ ДЛЯ ИХ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК**

### **OPTIMIZING PRE-EDITING OF RUSSIAN-LANGUAGE TEXTS FOR MACHINE TRANSLATION INTO ENGLISH**

**Аннотация.** В работе исследуется процесс перевода текстов, а именно метод оптимизационного предредактирования как способ повышения качества машинного перевода на английский язык при работе с русскоязычными узкоспециальными текстами. В результате исследования реализован программный комплекс оптимизационного предредактирования русскоязычных текстов. При разработке программного комплекса использованы ресурсы Центра коллективного пользования научным оборудованием «Центр обработки и хранения научных данных ДВО РАН». Данные для обучения и валидации моделей предоставлены ООО «Агентство переводов «ФИАС-Амур». Тестирование программного комплекса показало эффективность предложенных методик для повышения качества машинного перевода узкоспециальных русскоязычных текстов на английский язык.

**Abstract.** The paper researches the process of translation, namely the method of optimizing pre-editing as a way to improve the quality of machine translation into

English for narrow-specialized Russian-language texts. As resulted of the research the software of optimizing pre-editing of Russian-language texts has been developed. The software was developed in cooperation with the Center for Collective Use of Scientific Equipment "Center for Processing and Storage of Scientific Data of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences". Training and model validation data are provided by FIAS-Amur Translation Agency Ltd. Software tests show the effectiveness of the proposed methods for improving the quality of machine translation of narrowly-specialized Russian-language texts into English.

**Ключевые слова:** машинный перевод, предредактирование, качество перевода, обработка естественного языка, комплекс программ.

**Keywords:** machine translation, pre-editing, translation quality, natural language processing, software package.

### **Введение**

Перевод – рутинная необходимость во многих отраслях, включая науку, производство, медицину и т.д., и с ростом количества информации и скорости ее генерирования растет и потребность в повышении качества перевода наряду с сокращением затрат на него. **Актуальность** исследования обусловлена тем, что, несмотря на выдающиеся прорывы в области семантической точности и гладкости машинного перевода (МП), стоит учитывать, что результат работы МП – черновик, который пользователь должен оценить и доработать самостоятельно. Пользователь без знания языка перевода не имеет инструментов для того, чтобы влиять на результат или хотя бы оценить качество полученного перевода [1, 2].

### **Степень разработанности темы.**

Проблему активно освещают зарубежные исследователи A. Lear, C. Quinci, C. Canfora, A. Ottman, D. Kenny, P. Sanchez-Gijon: предоставляя пользователю средства обработки текста на языке, носителем которого он является, на любом из этапов перевода, можно повысить его качество. На этот принцип опирается концепция интерактивного перевода, широко описанная в литературе [3], одним из направлений которой является перевод с предредактированием, когда исходный текст предварительно редактируется с целью его адаптации для более легкого «понимания» системой МП.

### **Цель работы**

Целью работы является разработка моделей и алгоритмов и их реализация для повышения качества МП узкоспециальных технических текстов путем автоматического оптимизационного предредактирования.

### **Методы и алгоритмы**

В основе исследования лежит применение апробированных математических методов, включая теорию множеств, численные методы оптимизации, такие как метод наименьших квадратов и метод градиентного спуска, статистические методы, в том числе метод максимального правдоподобия.



Задача оптимизационного предредактирования состоит в том, чтобы максимизировать правдоподобие, то есть вероятность того, что при параметрах  $\Psi$  предредактора, текст  $txt'_{ITXT}$  на языке  $яз_{ВХ}$  будет эквивалентен  $txt_{ITXT}$  по смыслу, понятен системе МП  $пер_{iПЕР}$  и оценка качества ОК<sub>j</sub> перевода  $txt_{ITXT}$  относительно  $txt_{ITXT}$  при генерации перевода из  $txt'_{ITXT}$  будет максимальной. Подробно модель процесса перевода и математическая постановка задачи оптимизационного редактирования подробно описана в работах авторов [4, 5].

### **Программный комплекс оптимизационного предредактирования**

Программный комплекс реализован на языке Python и состоит из трех основных подсистем: подсистемы тренировки языковой модели, подсистемы оценки сложности задачи перевода, подсистемы оптимизационного предредактирования русскоязычного текста и генерации машинного перевода на английский язык. При реализации были приняты следующие допущения:

1. Критерий качества перевода должен быть четко определен и формализован с возможностью получения вещественного нормированного значения. Могут применяться любые метрики оценки качества в зависимости от требований к качеству перевода. В рамках исследования была выбрана метрика hLEPOR, которая имеет наивысший балл корреляции Пирсона с человеческими суждениями по языковой паре английский-русский.

2. Для тестирования МП необходим тренировочный корпус, включающий тексты на языке оригинала и перевод, принятый за эталон. В компаниях, внедривших ISO 17100 и CAT, процесс накопления тренировочных корпусов, включающих исходный текст, перевод, выполненный системой МП и проверенный перевод, утвержденный редактором, происходит автоматически в режиме реального времени.

### **Тренировочный корпус для модели предредактирования**

Для обучения модели, которая будет преобразовывать текст на языке  $яз_{ВХ}$  в текст требуемой структуры для повышения качества перевода, необходимо создать корпус тренировочных текстов в паре  $яз_{ВХ} - яз_{ВХ}$ . Для оптимизации временных затрат на подготовку исходных данных для тренировки модели предредактирования текста предлагается методика с использованием обратного перевода для генерирования эталонного предредактированного текста.

Структура параллельного корпуса исходных данных: *RefCor*: [src\_ref; tgt\_ref], где src\_ref – это оригинал, т.е. текст на языке  $яз_{ВХ}$ , tgt\_ref – это перевод (текст на языке  $яз_{ВЫХ}$ ).

Методика сбора корпуса обучающих текстов для модели оптимизационного предредактирования включает следующие шаги:

1. Настраиваем системы МП МТ: tgt – src, МТ: src – tgt.
2. При помощи системы МТ: tgt – src переводим текст tgt\_ref на язык  $яз_{ВХ}$ , получим массив текстовых данных pre\_src (массив условно предредактированных текстов).

3. При помощи системы МТ: src – tgt переводим текст src\_ref на язык яз<sub>вых</sub>, получим массив текстовых данных tgt1 (src\_ref → tgt1).

4. При помощи системы МТ: src – tgt переводим текст pre\_src на язык яз<sub>вых</sub>, получим массив текстовых данных tgt2 (src\_ref → tgt1).

5. Оцениваем качество выполненного перевода на язык яз<sub>вых</sub> tgt1 и tgt2 относительно эталона tgt\_ref, получаем массивы оценок QC\_score(tgt1) и QC\_score(tgt2).

6. Для дальнейшей работы отберем тренировочный корпус TrainCor, включающий пары src\_ref<sub>i</sub> и pre\_src<sub>i</sub>, для которых наблюдается повышение оценки качества перевода на английский язык при применении предредактирования и при условии, что ΔQC\_score<sub>i</sub> является условно значимой d<sub>max</sub> для выбранного типа оценки:

$$\text{TrainCor} = \{(\text{src}_{\text{ref}_i}; \text{pre}_{\text{src}_i}) : \exists (\text{tgt1}_i, \text{tgt2}_i) | \text{QC\_score}(\text{tgt2}_i) > \text{QC\_score}(\text{tgt1}_i) \ \& \ \Delta \text{QC\_score}_i \geq d_{\text{max}}\} \quad (1)$$

Полученный корпус обучающих текстов TrainCor объемом выборки L будем использовать для обучения языковой модели LM: src – pre\_src для решения задачи автоматического оптимизационного редактирования текстов на языке яз<sub>вх</sub>.

### **Тестирование программного комплекса**

В целях тестирования из русскоязычных узкоспециальных технических текстов, переведенных на английский язык, были сформированы корпуса RefCor объемом 140 000 семплов и TranslatorExpCor объемом 90 000 семплов. После обработки корпуса RefCor в подсистеме тренировки языковой модели оптимизационного предредактирования русскоязычных текстов в корпус TrainCor вошло 84 000 семплов. Тестовая выборка для оценки работы системы TestCor составила 20 000 семплов. Тестирование показало, что использование оптимизационного предредактирования узкоспециальных русскоязычных текстов в более чем 30% случаях повышает качество их МП на английский язык на 15-30% по показателю hLEPOR. Использование полученных результатов исследования и внедрение программного комплекса в работу Агентства переводов «ФИАС-Амур» позволило повысить эффективность использования систем МП и производительность труда редакторов переводов на 13,16%.

### **Заключение**

Авторами разработаны модели и алгоритмы для решения задачи оптимизационного предредактирования узкоспециальных русскоязычных текстов, реализованные в виде программного комплекса для повышения качества машинного перевода на английский язык, подтверждена эффективность применения оптимизационного предредактирования русскоязычных узкоспециальных текстов с целью повышения качества МП на английский язык. Интеграция программного комплекса в контур автоматизации процессов перевода технической документации позволяет снизить затраты на постредактирование МП и организацию переводческих процессов.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Quinci C., Pontrandolfo G. Testing neural machine translation against different levels of specialization. *Trans-kom*, 2023, vol.1, pp.174-209.
2. Canfora C., Ottmann A. Risks in neural machine translation. *Translation Spaces*, 2020, vol. 9(1), pp. 58–77.
3. Kumar V., Kulkarni A., Singh P., Ramakrishnan G. A machine assisted human translation system for technical documents. *Miami MT Summit XV*, 2015, vol.2, pp. 259–272.
4. Zhivotova A. A., Berdonosov V. D., Gordin S. A. Mathematical Modeling of the Translation Process and Its Optimization by the Criterion of Quality Maximization // *Information Technologies and Intelligent Decision-Making Systems: Communications in Computer and Information Science*. – 2023. – vol. 1821. – P. 1–15.
5. Животова А.А. Оптимизационное предредактирование узкоспециальных русскоязычных текстов для их машинного перевода на английский язык / А.А. Животова, В. Д. Бердоносков // *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. – 2024. – № 2 (34). – С. 169-182.

УДК 004.9

**Животова Алена Анатольевна**, аналитик платформы контакт-центра, ООО «Эрллекта»

**Zhivotova Alena Anatolievna**, Contact Center Analyst, Erlelecta Ltd.

**Зарембо Валерия Сергеевна**, лингвист-разработчик, ООО «Эрллекта»

**Zarembo Valeria Sergeevna**, Linguist and Developer, Erlelecta Ltd.

## ПОИСК В ТЕКСТЕ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ И СООТНЕСЕНИЕ ИХ С ЗАПИСЯМИ РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ

## SEARCH FOR PERSONAL DATA IN A TEXT AND MATCHING IT WITH RELATIONAL DATABASE RECORDS

**Аннотация.** Процесс обслуживания клиента цифровым ассистентом служб технической поддержки требует идентификации клиента для загрузки контекста из информационных систем компании-оператора. Необходимые данные, как правило, уже содержатся в речи клиента (полное имя, адрес и другие), а переспрашивание цифровым ассистентом вызывает раздражение, увеличивает время обслуживания и снижает лояльность клиентов. Авторы предлагают решение проблемы извлечения необходимых данных из речи клиента в формате, необходимом для корректного поиска контекста в базах данных. В докладе описана реализация программного комплекса и результаты проведенного тестирования.

**Abstract.** The process of client support by a digital assistant for help-desk services requires client identification to load data from corporate information systems. The necessary information is usually provided in client's speech (full name, address, etc.), and over-questioning by the digital assistant is annoying and reduces client loyalty. Authors offer a solution to the problem of extracting required data from client's speech in the format needed for correct search in a database. The paper describes software implementation and testing results.

**Ключевые слова:** поиск именованных сущностей, классификация именованных сущностей, извлечение данных из текста, текстовый поиск

**Keywords:** named entity recognition, named entity classification, text data mining, text search

## **Введение**

В условиях развития цифровых технологий и широкого распространения автоматизированных систем обслуживания клиентов важность эффективного взаимодействия между пользователями и цифровыми ассистентами становится все более очевидной. Одной из ключевых задач при этом является быстрая и точная идентификация клиента для предоставления ему релевантной информации и услуг. Стандартные методы идентификации подразумевают сбор данных в соответствии с логикой сценария обслуживания и требуют от клиента четкого ответа на поставленный вопрос, например «Назовите полное имя». Такой подход увеличивает время обслуживания и создает негативный опыт, что может вызывать раздражение клиентов и снижать их лояльность, поэтому актуальной является автоматизация сбора и классификации персональных данных при общении с цифровым ассистентом (ЦА). Актуальность обусловлена необходимостью улучшения клиентского опыта при использовании цифровых сервисов за счет оптимизации сценариев обслуживания, что влияет на затраты и конкурентоспособность компании.

Цель работы состоит в разработке и тестировании программного комплекса (ПК), способного извлекать и классифицировать персональные данные из речи клиента и соотносить их с записями реляционной БД, обеспечивая тем самым сокращение времени на идентификацию и обслуживание клиентов ЦА. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: извлечение и классификация уникальных идентификаторов имени; извлечение и классификация уникальных идентификаторов адреса; преобразование найденных идентификаторов в формат, требуемый для реализации поиска в реляционной БД; подключение к БД и поиск клиента.

## **Степень разработанности темы**

Задачи извлечения и классификации уникальных идентификаторов имени и адреса относятся к классу задач распознавания именованных

сущностей (Named Entity Recognition, NER) [1]. Описанные в литературе решения NER разделяются по принципу использования следующих подходов: правила и паттерны, машинное обучение и глубокое обучение [2]. На практике наилучший результат в решении задачи NER достигается при использовании гибридных подходов [3]. Для русского языка существуют готовые решения задачи NER: набор библиотек natasha [4], использующий модели машинного обучения; фреймворк deepPavlov[5], реализующий алгоритмы глубокого обучения с использованием языковой модели BERT. Оба продукта решают задачу поиска в тексте токенов-идентификаторов именованных сущностей, однако не позволяют классифицировать найденные идентификаторы по типу составных частей (для имени – фамилия, имя, отчество; для адреса – улица, дом, корпус, квартира).

**Методы и алгоритмы.** При разработке программного комплекса был использован гибридный подход к решению задачи NER: в основе поиска идентификаторов имени применяется фреймворк deepPavlov, их классификация по типу составных частей осуществляется при помощи библиотек natasha и дополнительных правил; поиск и классификация идентификаторов адреса выполняется при помощи языковой модели на основе сети Маркова и набора правил. Поиск в БД осуществляется методом пересекающихся n-gram, что обеспечивает высокую точность даже при наличии орфографических ошибок и некорректном распознавании речи системой транскрибации.

#### **Исходные данные**

Источником данных для идентификации клиента и загрузки контекста решаемого вопроса из БД является неструктурированная информация, содержащаяся в репликах клиента при общении с ЦА. ЦА зачастую являются омниканальными, поэтому реплики клиента могут быть получены как в виде текста из чата переписки, так и из модуля транскрибации диалогов. Информация, позволяющая идентифицировать полное имя и адрес, в речи клиента не имеет четкого паттерна, на качество исходного текста для анализа влияют: структурные особенности речи клиента и игнорирование пунктуации; ошибки в речи клиента; лексические особенности речи клиента; ошибки систем распознавания речи. Входными данными ПК является текстовая переменная, содержащая реплику клиента в формате string.

#### **Архитектура программного комплекса**

ПК включает в себя пять основных модулей: модуль для создания узкоспециальной языковой модели на основе сетей Маркова; модуль извлечения и классификации уникальных идентификаторов адреса; модуль извлечения и классификации уникальных идентификаторов имени; модуль генерации паттернов текстовых подстрок для поиска в БД; модуль для подключения к БД и осуществления поиска.

Модуль создания узкоспециальной языковой модели на основе сетей *Маркова* предназначен для создания языковой модели генерации текста в ограниченном домене, в данном случае, модели генерации названий улиц, и используется для вероятностной оценки отдельных текстовых токенов на принадлежность классу «Улица». Данная оценка учитывается в дальнейшем для классификации токенов и поиске идентификаторов адреса.

Модуль извлечения и классификации уникальных идентификаторов адреса создает объект класса *AdressCollector*, который содержит методы поиска и верификации идентификаторов адреса; словарь классифицированных токенов, идентифицирующую информацию об адресе. Поиск и верификация осуществляются при помощи вероятностных оценок и набора правил, проверяющих токены текста на соответствие паттернам адреса.

Модуль извлечения и классификации уникальных идентификаторов имени создает объект класса *NamesCollector*, который, используя *NER* модель фреймворка *deepPavlov*, размечает токены в тексте по классам сущностей; отфильтровывает токены типа *PER* и с помощью классификатора *natasha* и набора правил разделяет найденные токены на список отдельных имен. Далее для каждого имени создается объект класса *FullNameCollector*, который при помощи набора правил разделяет токены имени на фамилию, имя и отчество.

Модуль генерации паттернов текстовых подстрок для поиска в БД вызывает методы генерации паттернов для токенов имени и для токенов адреса. Оба метода для разных типов данных создают паттерны двух видов: объединение начала слова и конца слова, т.е. [*\*first\_n-gram\*last\_n-gram*]; все возможные пары непересекающихся *n-gram*, т.е. [*\*n-gram n-gram\**]. Выходными данными модуля является переменная типа *dict* следующей структуры: `client_dict = {'name_var': str, 'street_var': str, 'house_var': str, 'bldg_var': str, 'apt_var': str}`.

Модуль подключения к БД и осуществления поиска преобразует значения ключей переменной *client\_dict* в формат, необходимый для корректного исполнения запроса к БД. Далее создается *sql*-запрос, который отправляется в БД. Из полученной в качестве ответа переменной *cursor* извлекается необходимая информация о найденном клиенте *client\_info*.

Для оценки точности идентификации клиентов в БД было проведено тестирование на БД, содержащей информацию о 55 000 клиентах. В качестве тестовой выборки исходных данных использовались подготовленные вручную тексты для 2 300 случайно выбранных записей БД, содержащих полное имя и адрес клиента, описанные в свободной форме в контексте выдуманной истории. Полученная в результате анализа текста и поиска запись из БД сравнивалась с исходными данными. Результаты тестирования показали, что ПК корректно идентифицирует клиентов в 97,7% случаев.

## Заключение

В ходе исследования разработан ПК Erlecta Text2Client [6] – программное обеспечение, позволяющее в русскоязычном тексте найти и классифицировать токены-идентификаторы персональных данных, а именно полного имени (с разделением на фамилию, имя, отчество) и адреса (с разделением на улицу, дом, корпус, квартиру/офис) и соотнести с записями в БД, тем самым идентифицировав клиента. В отличие от существующих программ, предлагаемое решение реализует алгоритмы сбора данных и поиска, которые не чувствительны к регистру, пунктуации, орфографическим ошибкам, к сокращенным формам имен и адресообразующих слов, паттернам написания ФИО и адреса, использованию строчного написания числительных, что обеспечивает высокую точность; не используют методы сравнения текстовых строк по типу расстояния Левенштейна и подобных, что обеспечивает его быстрое действие при поиске по БД большого размера.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. A survey on Named Entity Recognition – datasets, tools, and methodologies / В. Jehangir, S. Radhakrishnan, R. Agarwal // Natural Language Processing Journal. – 2023. – vol. 3.
2. A survey on recent advances in named entity recognition / I. Keraghel, S. Morbieu, M. Nadif //arXiv preprint arXiv:2401.10825. – 2024.
3. Developing a named entity recognition model for text documents in Russian to detect personal data using machine learning methods / А. А. Gultiaev, J. V. Domashova //Procedia Computer Science. – 2022. – vol. 213. – pp. 127-135.
4. Natasha project—a set of Python libraries for processing texts in natural Russian language. – URL: <https://natasha.github.io/>(дата обращения: 15.05.2024).
5. DeepPavlov: An open-source conversational AI framework. – URL: <https://deerpavlov.ai> (дата обращения: 15.05.2024).
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024663685 Российская Федерация. Программный комплекс поиска персональных данных в тексте и соотнесения их с уникальной идентификационной записью в реляционной базе данных : № 2024662784: заявл. 05.06.2024: опублик. 10.06.2024 / А. А. Животова, В. С. Зарембо ; заявитель – Общество с ограниченной ответственностью «Эрлекта».

УДК 004.932

**Жигалов Артур Юрьевич**, аспирант, Оренбургский государственный университет

**Zhigalov Arthur Yurievich**, aspirant, Orenburg State University

**Болодурина Ирина Павловна**, доктор технических наук, профессор, Оренбургский государственный университет

**Bolodurina Irina Pavlovna**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Orenburg State University

**Лосицкий Александр Олегович**, заместитель директора по организационно-методической работе, Оренбургский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения «Микрохирургия глаза имени С.Ф. Федорова»

**Lositskiy Alexander Olegovich**, Deputy Director for Organizational and Methodological Work, Orenburg Branch of the S. Fyodorov Eye Microsurgery Federal State Institution

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СЕРВИСА ДЛЯ АНАЛИЗА СНИМКОВ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ МЕТОДАМИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ**

### **DEVELOPMENT OF A SOFTWARE SERVICE FOR ANALYZING OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY IMAGES USING DEEP LEARNING METHODS**

**Аннотация.** В данной работе представлена разработка сервиса для автоматического описания снимков оптической когерентной томографии с помощью методов компьютерного зрения. Рассмотрены задачи детекции, классификации, аугментации и интерпретации результатов. Для решения поставленных задачи использовались модели нейронных сетей Faster R-CNN с backbone RetinaNet, Densenet-121.

**Abstract.** This paper presents the development of a service for the automatic description of optical coherence tomography images using computer vision techniques. The issues of detection, classification, augmentation and interpretation of the results are considered. To solve the tasks set, the Faster RUN neural network model with backbone Pertinent, Dense net-121 was used.

**Ключевые слова:** глубокое обучение, анализ изображений, оптическая когерентная томография, сверточные нейронные сети, карта активации классов

**Keywords:** deep learning, image analysis, optical coherence tomography, convolutional neural networks, class activation mapping

#### **Введение**

Методы компьютерного зрения нашли широкое применения при решении задач в области офтальмологии [1, 2]. В настоящее время алгоритмы и методы глубокого обучения используются для распознавания патологий на



снимках сетчатки, а также сегментации ее слоев и областей. Для обучения моделей компьютерного зрения используются снимки оптической когерентной томографии ОКТ. Оптическая когерентная томография является одним наиболее информативных способов анализа состояния глаза для врачей офтальмологов. Однако существует различные режимы и конфигурации томографа, что усложняет автоматический анализ снимков ОКТ методами искусственного интеллекта. Следовательно, актуальным является разработка системы, позволяющей комплексно анализировать разно-шаблонные ОКТ документы с помощью нейронных сетей.

Целью данной работы является разработка сервиса автоматического описания, анализа и интерпретации результатов разно-шаблонных снимков ОКТ сетчатки методами компьютерного зрения. Для построения сервиса необходимо решить комплекс задач: детекция сегментов ОКТ снимка, анализ распознанных сегментов и интерпретация результатов.

### **Данные**

Обучение и тестирование моделей проводилось на наборе данных, предоставленном оренбургским филиалом «Микрохирургия глаза имени С.Ф. Федорова». Данные были предварительно анонимизированы и размечены специалистами медицинского учреждения.

Итоговый размеченный набор данных содержит 13204 изображения горизонтальных проекций сетчатки с файлами аннотаций в формате json. Файл аннотации содержит информацию о наличии патологоанатомических свойствах ОКТ изображения. Число различных биомаркеров описания сетчатки составляет 123 бинарных признака.

### **Интеллектуальная система анализа ОКТ изображений**

Для построения сервиса автоматического анализа ОКТ снимков сетчатки методами компьютерного необходимо решить комплекс задач:

- детекция основных сегментов анализа (горизонтальные проекции сетчатки, как наиболее информативные изображения для специалистов);
- анализ найденных сечения методами компьютерного зрения;
- интерпретация результатов работы модели анализа.

Для решения задачи детекции из однотипных шаблонов ОКТ отчетов произведена аугментация данных за счет искусственной генерации изображений с файлами аннотаций. На рисунке 1 представлен пример генерации изображения.

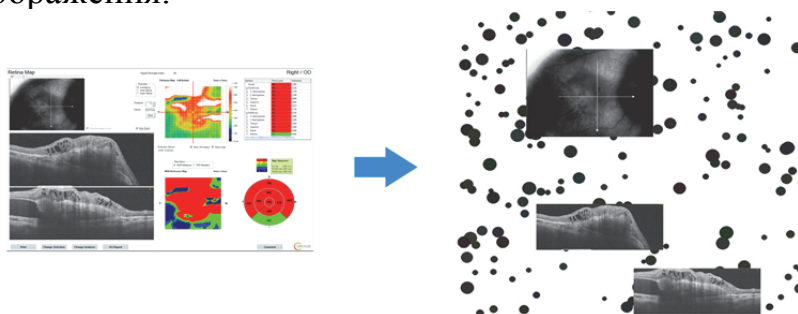


Рисунок 1 – Пример аугментации шаблона ОКТ снимка

Сгенерированный набор данных содержит 500 примером, состоящих как из оригинальных шаблонов ОКТ снимков, так и искусственно созданных. Для распознавания bounding-box горизонтальных срезов сетчатки использована модель Faster R-CNN с backbone RetinaNet [3]. Показатель точность по метрике mAP (MS-COCO) составил 0.9271.

Анализ изображения проекции сетчатки представляет собой решение задачи мульти-классификации. Из-за сильного дисбаланса в данных и нехватки экземпляров миноритарных классов для описания снимка выбрано 52 бинарных признаков, с количеством данных более 100 изображений. Для анализа на наличие бинарных признаков обучены 20 моделей нейронной сети архитектуры DenseNet-121 [4]. В качестве функции потерь при обучении использована взвешанная кросс-энтропия. Точность обученных моделей оценивалась с помощью сбалансированной точности, результаты представлены на рисунке 2.

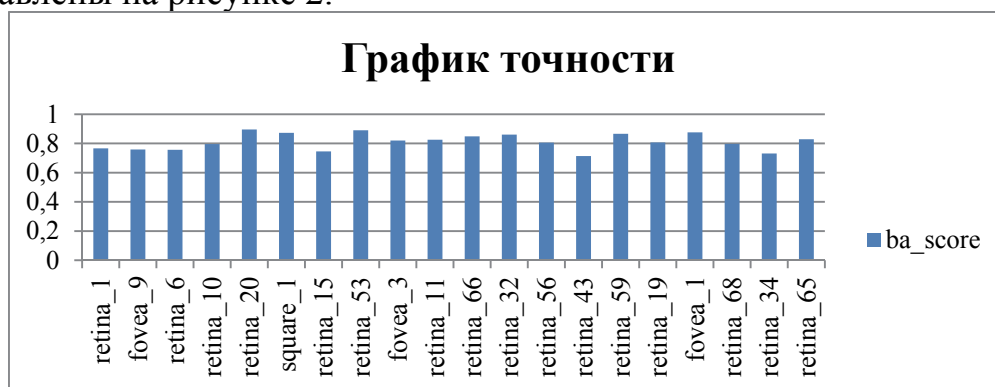


Рисунок 2 – График точности моделей в зависимости от признака

Среднее значение сбалансированной точности по всем классам составило 0.8132.

Интерпретация прогнозов модели проводится с помощью class activation mapping (CAM) [5]. Для демонстрации размещено веб-приложение доступное по прямой ссылке [6].

### **Заключение**

В данной работе представлена программная система, позволяющая проводить автоматическое описание, анализ и интерпретацию результатов разно-шаблонных снимков ОКТ сетчатки методами компьютерного зрения. Полученные в работе результаты имеют практическую значимость и могут быть использованы при построении систем поддержки принятия решения в офтальмологии.

### **Благодарности**

Исследование выполнено финансовой поддержке стипендии Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам (СП-919.2022.5).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Применение искусственного интеллекта в диагностике и хирургии кератоконуса: систематический обзор / Б. Э. Малюгин, С. Н. Сахнов, В. В. Мясникова, Л. Е. Аксенова // Офтальмохирургия. – 2022. – № 1. – С. 77-96. – DOI 10.25276/0235-4160-2022-1-77-96. – EDN PPQRWZ.

2. Методы машинного обучения в офтальмологии. Обзор литературы / Д. Д. Гарри, С. В. Саакян, И. П. Хорошилова-Маслова [и др.] // Офтальмология. – 2020. – Т. 17, № 1. – С. 20-31. – DOI 10.18008/1816-5095-2020-1-20-31. – EDN RSCNAV.

3. Automated Optic Disc and Cup Segmentation for Glaucoma Detection from Fundus Images Using the Detectron2's Mask R-CNN/ F. Wu, M. Chiariglione, X. R. Gao // 2022 International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies (ISMSIT) – 2022. – P. 567-570. – DOI 10.1109/ISMSIT56059.2022.9932660.

4. Residual Networks and Deep-Densely Connected Networks for the Classification of retinal OCT Images / M. R. Mathews, S. M. Anzar // 2022 International Conference on Connected Systems & Intelligence (CSI) – 2022. – P. 1-7. DOI 10.1109/CSI54720.2022.9923993.

5. Interpretable Diagnosis of Glaucoma Based on Attention Mechanism and Embedded Class Activation Map / B. Liu, S. -q. Li, R. -l. He, Y. -g. Zhao // 2023 IEEE 12th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS) – 2023. – P. 1492-1497. DOI 10.1109/DDCLS58216.2023.10166113.

6. Demo // Retina DeepAI [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://31.128.39.109:8080/demo> (дата обращения 06.07 2024).

УДК: 531.534

**Зайко Надежда Юрьевна**, аспирант, Дальневосточный федеральный университет

**Zaiko Nadezhda Yurievna**, graduate student, Far Eastern Federal University

**Любимова Ольга Николаевна**, д.ф.-м.н., профессор, Дальневосточный федеральный университет

**Lyubimova Olga Nikolaevna**, Doctor of Ph.D., Professor of Far Eastern Federal University

## ТЕРМОДЕФОРМАЦИОННЫЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В РАЗНОРОДНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ

## THERMODEFORMATION METHOD FOR MODELING BOUNDARY CONDITIONS IN HETEROGENEOUS COMPOUNDS

**Аннотация.** В работе предложена модель контактного взаимодействия в совместно термомодеформирующихся слоистых композитах с учетом разного температурного линейного расширения как индикатора качества сцепления слоев при нагреве-охлаждении в соединении разнородных материалов или материалов деформирующихся в условиях неравномерного распределения температур.

**Abstract.** The paper proposes a model of contact interaction in jointly thermally deforming layered composites, taking into account different temperature linear expansion as an indicator of the quality of adhesion of layers during heating and cooling in the connection of dissimilar materials or materials deforming under conditions of uneven temperature distribution.

**Ключевые слова:** термонапряженное состояние, контактная задача, соосные цилиндрические системы, слоистые композиционные материалы, деформация.

**Keywords:** thermally stressed state, contact problem, coaxial cylindrical systems, layered composite materials, deformation.

### Основная часть

Температурные напряжения в сопряженных системах, выполненных из разных материалов и в слоистых конструкционных материалах, даже при условии равномерного распределения температуры являются в первую очередь следствием разных механических свойств материалов, из которых выполнены сопряженные элементы или слои [1-3]. В тоже время существенное влияние на общую картину температурных напряжений оказывают свойства сопряжения разнородных материалов и тип полученного соединения: склейка, сварка, или горячая посадка; идеальный контакт, свободное или частичное проскальзывание в разных направлениях [4, 5].

Напряженно-деформируемое состояние при контактирующих материалах в условиях нагрева, является следствием в первую очередь

- 1) неравномерного распределения температуры;
- 2) разницы механических свойств материалов и их зависимости от температуры;
- 3) качества сцепления на границе контакта.

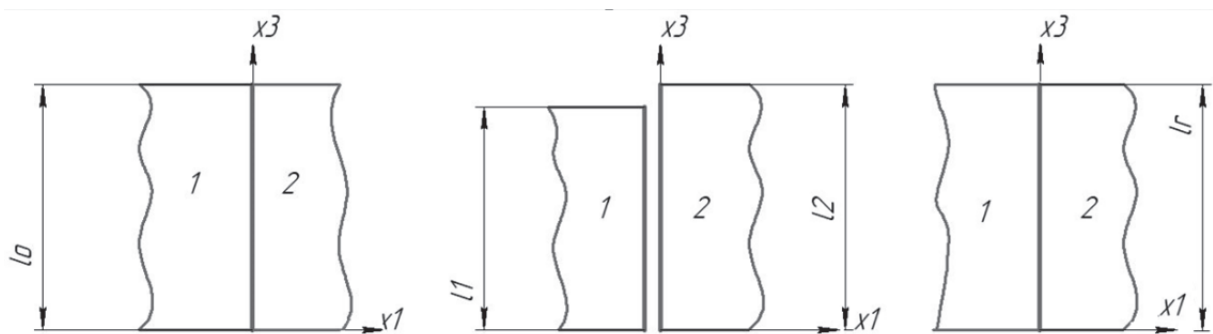


Рисунок 2– Схема изменения линейного температурного удлинения

При моделировании контактного взаимодействия, предполагаем, что в окрестности контакта реализуется два идеальных крайних состояния-свободного проскальзывания и идеального контакта. При этом очевидно, что разница в линейном удлинении элементов достигает своего максимального значения при свободном проскальзывании

$$\Delta \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(2)} \neq 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{33}^{(1)}$  на  $(\Gamma - \varepsilon \leq x_1 \leq \Gamma)$  и  $\varepsilon_{33}^{(2)}$  на  $(\Gamma \leq x_1 \leq \Gamma + \varepsilon)$ ,  $\Delta T = T - T_0$  температура.

При условии идеального контакта (1) примет вид

$$\Delta \varepsilon_{33} = 0 \text{ или } \varepsilon_{33}^{(1)} = \varepsilon_{33}^{(2)}. \quad (2)$$

Тогда условие контакта, можно рассматривать, как условие частичного проскальзывания, в виде

$$\varepsilon_{33}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(2)} = \aleph \Delta \varepsilon_{33}, \text{ при } 0 \leq \aleph \leq 1, \quad (3)$$

где  $\aleph$ - феноменологический параметр (коэффициент сцепления, безразмерная величина), который характеризовать сцепление, как линейное отклонения от максимальных  $\Delta \varepsilon_{33}$  при свободном проскальзывании ( $\aleph = 1$ ).

Заметим, при условии зависимости перемещений от  $x_1$  в каждом слое  $\varepsilon_{13}^{(1)} = const$ , можно предположить, что в условиях неравномерного температурного расширения условие (1)-(3) является деформационным условием контакта по типу сухого трения, т.е.

$$\varepsilon_{13}|_{\Gamma} = \aleph \Delta \varepsilon_{33}.$$

При решении плоской краевой задачи с условиями (1)-(3) краевые условия дополняются условиями отсутствия перерезывающих сил по площади сечения при свободном проскальзывании в каждом  $\aleph = 1$

$$\int_{\Gamma-\varepsilon} \sigma_3 x_1 dx_1 = 0$$

$$\int_{\Gamma+\varepsilon} \sigma_3 x_1 dx_1 = 0,$$

И в условий сцепления  $0 \leq \aleph < 1$

$$\int_{\Gamma-\varepsilon} \sigma_3 x_1 dx_1 + \int_{\Gamma+\varepsilon} \sigma_3 x_1 dx_1 = 0.$$

Предложенное условие и метод совместного деформирования соосных цилиндров при разных условиях сопряжения по боковым поверхностям при неоднородных термомеханических характеристиках с учетом стесненного перемещения вдоль образующей для разных качественных условий взаимодействия на границе сопряжения. Метод позволяет существенно упростить задачу при условии термоупругого деформирования слоев, а в случае вязкоупругого поведения с простыми ядрами релаксации позволяет получить аналитическое решение. Практическая значимость метода заключается в возможности моделирования технологических и остаточных напряжений в слоистых конструкционных цилиндрических системах, работающих в условиях циклического нагрева - охлаждения до высоких температур.

В работах [2, 3] решены задачи термдеформирования соосного цилиндрического двухслойного композиционного элемента для различных условий деформирования слоев в новой постановке граничных условий на границе контактирующих тел. Продолжение исследования связано с решением двумерной задачи, разработкой экспериментальной методики измерения совместного деформирования цилиндрического двухслойного композиционного элемента в широком диапазоне температур.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Князева А. Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий : учебное пособие [электронный ресурс] / А. Г. Князева; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). — 1 компьютерный файл (pdf; 2.91 МВ). — Томск: Изд-во ТПУ, 2009.

2. Любимова О.Н. Стеклометаллокомпозит: механические свойства, структурные механизмы деформации при повышенных температурах, моделирование процессов формирования структуры и свойств: диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.02.04 / Любимова Ольга Николаевна; ФГБОУ ВО Комсомольский-на-Амуре государственный университет. - Комсомольск-на-Амуре, 2020. – 337 с.

3. Зайко Н.Ю., Любимова О.Н. Температурные напряжения в соосных сопряженных цилиндрических системах и композиционных материалах с разной степенью проскальзывания по границе контакта // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 5-13.

4. Попов В. Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нано-трибологии до динамики землетрясений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.

5. Галин Л. А. Развитие теории контактных задач // Наука. 1976. 494с.

УДК 004.3, 004.4, 004.052.32

**Зинченко Юрий Евгеньевич**, доцент, Донецкий национальный технический университет

**Zinchenko Yuriy Evgenievich**, associate professor of the Donetsk National Technical University

**Зинченко Татьяна Анатольевна**, старший преподаватель, Донецкий национальный технический университет»

**Zinchenko Tatyana Anatolyevna**, senior lecturer, Donetsk National Technical University

## **СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА, ПРЕДСТАВЛЕННОГО СЕТЬЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ**

## **STRUCTURAL AND FUNCTIONAL MODEL OF A CONTROL DEVICE REPRESENTED BY A NETWORK OF FINITE-STATE MACHINES**

**Аннотация.** Предлагается СФ-модель цифрового сильнопоследовательностного управляющего устройства (УУ), построенного на базе описания УУ в виде сети конечных автоматов, ориентированное на компактное тестирование цифровых устройств (ЦУ) со сложной управляющей частью. Достоинством предлагаемой модели является то, что она оптимально сочетает в себе структурные и функциональные особенности тестируемого УУ, позволяя при этом достаточно легко строить тест УУ как комбинацию детерминированной и псевдослучайной составляющих теста объекта диагностики (ОД).

**Abstract.** The proposed SF-model of a digital strongly sequential control device (CD), built on the basis of the original description of the CD in the form of

a network of finite automata, is oriented towards compact testing of digital devices with a complex control part. The advantage of the proposed model is that it optimally combines the structural and functional features of the tested CD, while allowing for fairly easy construction of deterministic and pseudo-random components of the test of the diagnostic object.

**Ключевые слова:** цифровое устройство, управляющее устройство, конечный автомат, граф состояний и переходов, сеть конечных автоматов, детерминированный тест, псевдослучайный тест

**Keywords:** digital device, control device, finite state machine, state and transition graph of a finite state machine, network of finite state machines, deterministic test, pseudo-random test

## **Введение**

Встроенное тестовое диагностирование цифрового устройства (ЦУ) обычно реализуется с применением методов и средств компактной генерации и анализа тестов, при этом в качестве тестов обычно используются псевдослучайные последовательности (ПСТ), что не эффективно для сильнопоследовательностных ЦУ [1-3]. Повышение эффективности тестирования ПСТ можно добиться примерно на 15-20% за счет адаптивного подхода ПСТ, разработанного в FPGA-лаборатории ДонНТУ [4-8], однако этого часто недостаточно. Добиться 100-% покрытия неисправностей можно за счет детерминированного тестирования ОД, однако построение детерминированного теста (ДТ), во-первых, является чрезвычайно сложной и дорогостоящей задачей и, во-вторых, к настоящему времени не предложены компактные генераторы ДТ большой длины, что требуется для сложных ЦУ. Наибольшего эффекта при построении теста для сильнопоследовательностных ЦУ по мнению авторов можно добиться за счет сочетания ДТ и ПСТ.

В данной работе результаты, полученные ранее для тестирования отдельного ЦА на базе сочетания ДТ и ПСТ, распространяются на случай УУ, представленного СФ- моделью ЦА [9].

### **Модель управляющего ЦУ как сеть КА**

Тестированию УУ должна предшествовать разработка модели, адекватно и достаточно просто описывающая структуру и функционирование объекта диагностики (ОД). Построение такой модели выполняется в данной работе в следующей последовательности.

Вначале описывается представление УУ сетью КА. Далее на основании анализа специфических свойств УУ производится ряд преобразований сети, после чего осуществляется переход непосредственно к СФ-модели.

Как известно любое УУ, каким бы сложным оно не было, можно представить абстрактным или структурным КА. Как любое сложное УУ его можно представить как совокупность взаимосвязанных КА  $\{A_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , каждый из которых можно задать  $A = (S_i, X_i, Y_i, \Omega_i, \Psi_i, S^i_0)$ , где  $S_i, X_i, Y_i, \Omega_i, \Psi_i$ ,

$S^i_0$  – алфавиты или множества состояний, входов, выходов, функций переходов и выходов и начальное состояние КА соответственно. Абстрактный КА используется на теоретическом уровне, а структурный - на практике в ходе проектирования и тестирования ЦУ. Представление УУ одним КА является сложным процессом, на практике сложное УУ легче представить композицией взаимосвязанных КА, каждый из которых описывает отдельные компоненты УУ, например его узлы (платы).

В качестве модели, описывающей совместную работу совокупности взаимодействующих цифровых управляющих узлов, в алгебраической теории автоматов используется сеть автоматов. Воспользуемся формализмом сети автоматов и представим УУ сетью  $A$ , как композицию КА  $\{A_i\}$ ,

$A = (Z, W, \{A_i\}, \{f_i\}, \{\Psi_i\}, g)$ , где  $W, \{A_i\}, \{f_i\}, \{\Psi_i\}, g$  – алфавиты (множества) состояний, входов, выходов, функций переходов и выходов, начальное состояния автомата  $A_i$  для абстрактного и структурного автомата соответственно. На практике используются структурные автоматы, которые могут иметься в технической документации, или их можно построить путем моделирования электрических схем ЦУ в САПР Active-HDL, ORCAD и др.

Сеть  $A$  с исчерпывающей степенью детализации описывает структуру и функционирование УУ, однако даже при незначительной мощности множеств КА она является сложной и трудной обзримой из-за чрезмерной детализации. Для упрощения приведенной модели УУ можно воспользоваться механизмом «тайм-аутов», который в сетевых устройствах используется в алгоритмах обмена канального и физического уровней сети. Сущность механизма *тайм-аута* состоит в том, что при обмене информацией каждое устройство в определенные алгоритмом моменты времени организует временные задержки, в течении которых ожидается ответная реакция от взаимодействующего с ним устройства. По истечении этой задержки производятся определенные действия, например, продолжение обмена в случае "нормальной" реакции или аварийное завершение сеанса в случае "ненормальной" реакции абрента.

Механизм работы тайм-аута можно также представить в виде КА изолированных таймеров  $\{A^t_i\}$ , реализующих дискретные временные задержки УУ. Каждый таймер  $A^t_i$  как любой КА можно описать тройкой:  $A^t_i = \{x^t_i, y^t_i, \tau_i\}$ , где  $x^t_i, y^t_i, \tau_i$  - вход, выход и задержка таймера соответственно. Запуск таймера  $A^t_i$  осуществляется сигналом  $x^t_i = 1$  независимо от состояний и входных сигналов других таймеров, после чего потактно наращивается параметр времени и устанавливается выходной сигнал таймера.

Выделим множество  $\{\tilde{A}_i\}$  КА из сети  $A^t$  и построим из них результирующий автомат. Получим автомат  $A_R = (X, Y, S, \sigma, \lambda)$ , где  $X, Y, S, \sigma, \lambda$  - входной, выходной алфавиты; алфавит состояний, функции переходов и выходов соответственно.

С учетом механизмов тайм-аутов УУ как сеть КА можно привести к сети:  $A^t_R = (Z, W, A_R, \{A^t_v\}, f, \{f^t_v\}, \Psi, g)$ , где  $f, f^t_v, \Psi, g$  – функции соединения КА, соединения таймеров, входная и выходная функции КА  $A_R$ .



В результате проведенных преобразований получается модель УУ, в которой множество КА заменено одним, эквивалентным ему, результирующим автоматом, взаимодействующим с выделенными автоматами-таймерами. Так как мощности алфавитов автомата равны произведению соответствующих мощностей алфавитов КА, то сеть  $A_R^t$  имеет очень сложное описание. Однако, представление УЧ сетью  $A_R^t$  позволяет формализовать дальнейшее преобразование автоматной модели УУ, цель которых состоит в упрощении модели путем выделения "основных" состояний автомата  $A_R^t$  и введения обобщающих описателей между этими состояниями.

### **Переход от сети КА к СФ-модели УУ**

Дальнейшие шаги на пути к переходу от сети КА к СФ-модели УУ состоят в следующем. Вначале выполняется выделение  $t$ -устойчивых состояний автомата  $A_R$ , т.е. таких для которого существует переход в самое себя, зависящий от входных сигналов УУ, либо от состояний таймера, вырабатывающего задержку длительностью не менее  $t$  тактов.  $t$ -устойчивое состояние  $s_\mu \in S_R$  автомата  $A_R$  будем обозначать как  $S_\mu^t$ , а множество всех таких состояний - как  $S^t = \{S_\mu^t\}$ .

Опишем граф, с помощью которого будет определена СФ-модель УУ. Будем говорить, что задан помеченный орграф  $G = (U, R, F, M)$ , если определены два непересекающихся множества  $U = \{u_{ij}\}$  и  $R = \{r_{ij}\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , называемых соответственно множеством вершин и ребер, отображение  $F: U \times U \rightarrow U$ , называемое инцидентором, а также задано множество меток  $M = \{m_{ij}\}$  как функции переходов между состояниями.

**Определение.** Помеченный орграф  $G$  называется СФ-моделью УУ, если  $U = S^t$ , пара  $(s_i^t, s_j^t) \in F(\forall i, j)$ , если возможен переход автомата  $A_R$  сети  $A_R^t$  из состояния  $S_i^t$  в состояние  $S_j^t$ , не более, чем за  $t$  элементарных тактов, а метка  $m_{ij}$  означает множество условий такого перехода.

Процедуру перехода от сети  $A_R^t$  к СФ-модели УУ можно представить двумя пунктами: образование множества  $S^t$  и построение входных последовательностей, обеспечивающих переходы между состояниями  $S^t$ .

Условие перехода между состояниями множества  $S^t$  есть функция от входной последовательности  $Z$ , состояний таймера и текущего времени  $t'$ . Учитывая динамику работы таймеров, эту функцию можно выразить как функцию, зависящую только через  $Z$  и  $t'$ .

### **Заключение**

В данной работе была предложена СФ-модель, с помощью которой могут быть описаны сложные сильнопоследовательностные управляющие части ЦУ компьютерных систем. Модель может быть использована для построения тестов и компактных генераторов тестов ЦУ на базе сочетания ДТ и ПСТ. На базе модели разработана структура устройства встроенного тестирования ЦУ, которое оформлено как авторское свидетельство на изобретение [10].

На практике СФ-модель использовалась в лаборатории ««FPGA-технологии проектирования и диагностика КС» ДонНТУ [8] при проектировании подсистемы встроенного тестирования специализированной сети передачи данных реального времени. В настоящее время в лаборатории ведутся исследования по использованию СФ-модели для тестирования FPGA-устройств на базе RTL-модели объекта диагностики [11,12].

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Bushnell, M. L. Essentials of electronic testing for digital, memory and mixed-signal VLSI circuits / M. L. Bushnell, V. D. Agrawal. – Kluwer academic publishers, 2001. – 690 p.
2. Rene David. Random testing of digital circuits. – CRC Press, 1998. – 496 p.
3. Ярмолик, В. Н. Генерирование и применение псевдослучайных сигналов в системах испытаний и контроля / В. Н. Ярмолик, С. Н. Демиденко. - Минск, 1986.
4. Зинченко Ю.Е., Корченко А.А. Адаптивный подход к генерации псевдослучайных тестов цифровых устройств // Научн. тр. ДонНТУ. Сер. «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования» (МАП-2011). Вып. 9 (179): – Донецк: ДонНТУ. – 2011. – С. 360-365.
5. Корченко, А.А., Зинченко, Ю.Е. Оптимизация адаптивного подхода генерации псевдослучайных тестов // Научн. тр. ДонНТУ. «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования» (МАП-2012). Вып. 10. Донецк: ДонНТУ. – 2012.– с. 60-68.
6. Нестеренко, Д.О., Зинченко, Ю.Е.. Тестирование аналоговых и аналогово-цифровых схем методами цифровой обработки сигналов // Информатика и кибернетика.-Донецк: ДонНТУ, 2020.-№ 4(22). – С.77–59.
7. Т.А. Зинченко, Ю.Е. Зинченко. Разработка архитектуры интегрированной система генерации псевдослучайных тестов цифровых устройств // Информатика и кибернетика, № 4 (26), 2021, Донецк: ДонНТУ.
8. Сайт лаборатории ДонНТУ «FPGA-технологии проектирования и диагностика КС». – Донецк: ДонНТУ URL: <http://fpga.donntu.ru>
9. Зинченко Ю. Е. Модель специализированного устройства, ориентированная на задачу генерации тестов // Автоматизация контроля вычислительных устройств и систем: Тез. докл. Республ. наун. техн. конф. - Винница, 19-21 октября 1988. - К: УкрНИИТИ, 1988. - С 149-150.
10. Устройство для встроенного контроля логических блоков Зинченко Ю.Е., Тарасенко А.Н., Журавель А.П. и др.. Авторское свидетельство SU 1392569 A1, 30.04.1988. Заявка № 4128851 от 03.10.1986
11. FPGA-технологии проектирования и диагностика компьютерных систем /Зинченко Ю.Е., Калашников В.И., Хайдук С., Зинченко Т.А. и др. // Сборник научных трудов VI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование». – Москва: МГУ, 2011. – Т. 1. 787 С. 422-429.

12. Современные проекты FPGA-лаборатории ДонНТУ / Ю.Е. Зинченко, В.И. Калашников, О.Н. Дяченко, Т.А. Зинченко //Инновационные перспективы Донбасса: сборник трудов Международной научно-практической конференции в рамках I-го Международного научного форума ДНР «Донбасс-2015», 20-22 мая 2015 / Донецк: ДонНТУ. – 2015. – С.4.

УДК 669:539.381.296

**Исхакова Полина Валентиновна**, аспирант, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН

**Iskhakova Polina Valentinovna**, Petrov Petr Petrovich, postgraduate student, Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS

**Баранникова Светлана Александровна**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории физики прочности, Институт физики прочности и материаловедения СО РАН

**Barannikova Svetlana Aleksandrovna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher of the Laboratory of Strength Physics, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS

## **ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ АЛЮМИНИЯ**

### **TEMPERATURE EFFECTS OF PLASTIC DEFORMATION LOCALIZATION DURING TENSILE ALUMINUM**

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию макроскопической локализации пластической деформации поликристаллических образцов алюминия при одноосном растяжении с использованием метода спекл-фотографии. Показано, что на разных стадиях деформационного упрочнения распределения локальных удлинений, сдвигов и поворотов имеют пространственно-временную упорядоченность в виде макроскопических зон локализованной деформации. Установлено, что изменение температуры испытаний усиливает эффект локализации пластического течения, что отражается на механических характеристиках и параметрах распределений локальных деформаций.

**Abstract.** The work is devoted to the study of macroscopic localization of plastic deformation of polycrystalline aluminum samples under uniaxial tension using the speckle photography method. It is shown that at different stages of strain hardening, the distributions of local elongations, shears and rotations have a spatiotemporal order in the form of macroscopic zones of localized deformation. It has been established that variation the test temperature enhances the effect of plastic flow localization, which is reflected in the mechanical characteristics and parameters of local deformation distributions.

**Ключевые слова:** пластическая деформация, локализация, механические испытания, металлы

**Keywords:** plastic deformation, localization, mechanical tests, metals

### **Введение**

Существующие подходы к проблеме пластической деформации металлов различаются структурой используемых моделей [1, 2], которые чаще всего имеют прагматическое обоснование и призваны обеспечить решение конкретных задач, связанных с пластическим формоизменением. Такой путь в большинстве случаев не способствует пониманию природы феномена пластичности в целом.

Пластическое течение часто начинается как пространственно локализованный процесс, примером которого может служить деформация на площадке текучести, локализованная в полосе Людерса. Заканчивается деформационный процесс обычно также в локализованной форме - зарождением макроскопической шейки. Вероятно, на промежуточных стадиях деформация также протекает локализованным образом, а отсутствие соответствующих данных вызвано особенностями применяемых для исследования экспериментальных методик. Основы новых представлений, учитывающих роль и вклад крупномасштабных эффектов пластического течения в общую деформацию, формируются в настоящее время на основе автоволновой концепции пластического течения [3].

При локализации деформации первоначально однородная среда самопроизвольно сепарируется на деформируемые и недеформируемые объемы, границы которых могут быть подвижными или неподвижными [3]. Очевидно, что в зонах локализации и между ними пластическая деформация развивается по-разному. Однако традиционная физика прочности использует в этих случаях металлографический и электронно-микроскопический анализ, ориентированный на изучение малого объема деформируемого кристалла [1].

Большую важность для развития автоволновой теории пластичности представляет природа температурного воздействия на характер деформации [4]. С целью выяснения основных закономерностей температурного эффекта было исследовано влияние температуры на автоволновой механизм пластического течения на поликристаллах технически чистого алюминия с размером зерна ~10 мкм.

### **Основная часть**

Плоские образцы Al с размерами рабочей части 50·5·1,5 мм растягивались на жесткой испытательной машине Instron с постоянной скоростью перемещения подвижного захвата 0,2 мм/мин при температурах испытаний от 143 до 420 К. Для наблюдения картин локализации пластической деформации использовалась методика спекл-фотографии [3], которая обеспечивает точность при оценке компонент тензора пластической дисторсии на уровне 0,0001.

Автоволновая мода, возникающая на стадии параболического деформационного упрочнения (стационарная диссипативная структура) устойчива при пластической деформации, так что при анализе результатов внимание было обращено на автоволновые характеристики деформационного процесса на этой стадии. Для выделения параболических стадий записанные первоначально в координатах «напряжение  $\sigma$  - деформация  $\epsilon$ » индикаторные кривые преобразовывались в зависимости истинных напряжений  $s$  от истинных деформаций  $e$  [5]. Далее выделялись линейные участки, соответствующие стадиям параболического деформационного упрочнения, в координатах  $s - e^{1/2}$ .

Особый интерес представляет также температурная зависимость длина автоволны локализованной пластичности  $\lambda$ . Экспериментально полученная температурная зависимость  $\lambda(T)$  показывает, что длина автоволны в исследуемом интервале в пределах точности эксперимента от температуры изменяется в пределах  $3 \pm 1 \leq \lambda \leq 8 \pm 1$  мм. Как установлено, на стадиях параболического деформационного упрочнения зависимость длины автоволны локализованной пластичности от температуры имеет вид функции Аррениуса.

### **Заключение**

Таким образом, в настоящей работе на примере поликристаллических образцов технически чистого алюминия с использованием техники двухэкспозиционной спекл-фотографии подтверждено, что пластическая деформация в широком температурном интервале развивается в форме автоволновых процессов локализованной пластичности. При этом тип реализующейся автоволновой моды определяется действующим на анализируемой стадии процесса законом деформационного упрочнения. Установлено влияние температуры на пространственный масштаб макроскопической локализованной деформации.

### **Благодарности**

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема № FWRW-2021-0011.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Малыгин, Г. А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов / Г. А. Малыгин // Успехи физический наук. – 1999. – Т. 169. – С. 979-1010. – DOI: 10.3367/UFNr.0169.199909c.0979
2. Asharia, A. New Perspectives in Plasticity Theory: Dislocation Nucleation, Waves, and Partial Continuity of Plastic Strain Rate / A. Asharia, A. Beaudoin, R. Miller // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2008. – Vol. 13. – № 2. – P. 292-315. – DOI: 10.1177/1081286507086903
3. Зуев, Л. Б. От макро к микро. Масштабы пластической деформации / Л. Б. Зуев, С. А. Баранникова, А. Г. Лунев. – Новосибирск: Наука, 2018. – 143 с. – ISBN 978-5-02-038760-7.

4. Исаев, Н. В. Локализация пластической деформации в ультрамелкозернистых Al и Al-Li при температурах 4,2-350 К / Н. В. Исаев, П. А. Забродин, А. В. Русакова // Физика низких температур. – 2012. – Т. 38. – № 10. – С. 1230–1239.

5. Трефилов, В. И. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов, 2-е изд., перераб. и доп. / В. И. Трефилов, В. Ф. Моисеев, Э. П. Печковский и др.– Киев: Наукова думка, 1989. – 256 с.

УДК 517.968-7: 51-73: 004.942

**Казак** Евгений Анатольевич, младший научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН  
**Kazakov Evgeny Anatolevich**, junior researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka

## **ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В ЭРЕДИТАРНОЙ ДВУМОДОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМО**

## **DYNAMIC MODES IN THE HEREDITARY TWO-MODE DYNAMO MODEL**

**Аннотация.** Доклад посвящен обсуждению результатов вычислительных экспериментов с эредитарной динамической системой являющейся моделью двумодового гидромагнитного динамо. Численно исследованы динамические режимы, возникающие при варьировании управляющих параметров. С помощью расчета аппроксимационной энтропии выделены области соответствующие регулярной и хаотической динамике. Рассматривались случаи когда эредитарная обратная связь с системе возникала мгновенно или с задержкой. Результаты моделирования показали, что исследуемая модель воспроизводит ряд динамических режимов характерных для реальных космических динамо систем.

**Abstract.** The report is devoted to a discussion of the results of computational experiments with a hereditary dynamic system, which is a model of a union hydromagnetic dynamo. The dynamic modes that arise during the development of control parameters are purely investigated. Using the calculation of approximation entropy, regions corresponding to regular and chaotic dynamics are identified. Cases were considered when hereditary feedback to the system occurred instantly or with a delay. The simulation results show that the additional model reproduces a number of characteristic dynamic modes necessary for the placement of dynamo systems.

**Ключевые слова:** Эредитарность, аппроксимационная энтропия, карта динамических режимов, хаотический режим, регулярный режим.

**Keywords:** Heredity, approximation entropy, dynamic regime map, chaotic regime, regular regime.

### Введение

Теория гидромагнитного динамо успешно описывает существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) [1]. Реальные космические динамо-системы демонстрируют большое разнообразие сложных динамических режимов: квазистационарные, квазирегулярные и хаотические колебания, всплески, васциляции (колебания вокруг ненулевого уровня), инверсии и т.п.[1,2]. Одним из направлений работ по динамо-системам является учет в моделях памяти (эредитарности). Установлено, что эффекты памяти оказывают значительное влияние на результаты моделирования (см., например [3,4]). Для воспроизведения в моделях реализаций поля, сравнимых по длительности со временем существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Предельно возможное усечение числа мод приводит к двумодовыми моделям.

### Основная часть

Двумодовая эредитарная модель динамо в виде следующей интегро-дифференциальной системы была разработана и описана [5-7]:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \left( \eta^T - \phi \int_0^t K(t-\tau) Q(x_1(\tau)x_2(\tau)) d\tau \right) x_2 - \eta^T x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left( D - \int_0^t K(t-\tau) Q(x_1(\tau)x_2(\tau)) d\tau \right) x_1 - x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

здесь  $x_1$  и  $x_2$  представляют собой амплитуды тороидальной и полоидальной компонент поля, положительные коэффициенты  $\eta^T, \phi, D, b$  являются управляющими параметрами модели. Доказательство существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях приведено в работе [7]. Физический смысл интегрального члена – это память в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля обеспечивается взвешенной по прошлым состояниям функцией  $Q(x_1, x_2)$  от компонент поля. В реальной физической динамо-системе обратная связь обеспечивается силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому функция  $Q(x_1, x_2)$  будем считать некоторой квадратичной формой своих аргументов, т.е.  $Q(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Cx_1x_2 + Bx_2^2$  где  $A$  и  $B$  - некоторые постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно.

Интегральный член является признаком эредитарности модели (1). В то же время его можно исключить для некоторых типов ядер с

экспоненциальной асимптотикой за счет расширения размерности фазового пространства модели. Точнее говоря, если ядро является решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то система (1) равносильна некоторой дифференциальной системе [8].

Особый интерес представляет исследование динамики для ядер вида  $K(t) = t^n e^{-bt}$  и  $\frac{t^n}{(1+t)^{b+n}}$ . В этом случае можно говорить о задержке в обратной связи, так как ядро нулевой в начале координат, причем с ростом показателя степени подавление мало зависит от значения компонент поля в моменты близкие к настоящему времени.

В представляемой работе исследовались типы динамических режимов в модели для вышеуказанных видов ядер на предмет регулярных и хаотических режимов. В качестве метода исследования была выбрана аппроксимационная энтропия (ApEn) [9].

Алгоритм построения карт динамических режимов состоит из следующих шагов:

1. Подготовка исходных данных. Для этого проводится усреднение в окне длиной  $N$ , Это обеспечивает подавление высокочастотных компонент, но не влияет на тип динамики — регулярный или хаотический, поскольку хаотический режим обладает наполненными спектрами Фурье, в том числе, и в низкочастотной области.

2. Проводится стандартная предобработка в виде центрирование и нормирование данных на среднеквадратическое отклонение входной последовательности данных.

3. Поиск (ApEn) для временного ряда  $\{x_1\}$  полученного в результате решения системы уравнения (1). На основе значений энтропии определяется динамический режим характерный для системы (1) при заданных значениях управляющих параметров.

4. Шаги 1, 2 и 3 повторяются для временного ряда  $\{x_2\}$ .

5. Сравниваются получившиеся динамические режимы для  $\{x_1\}$  и  $\{x_2\}$ . Если режимы совпадают, то на карте ставится отметка этого режимы. Если же режимы не совпадают, то ставится отметка о неопределенности режима.

На основе представленного выше алгоритма, были построены следующие карты динамических режимов системы (1) рис. 1., для следующих значений управляющих параметров:  $\eta^T = 10$ ,  $\phi = 0$ , в качестве ядра интегрального оператора  $K(t) = e^{-bt}$ . Параметр  $D$  изменяется от 2 до 220 с шагом 1, параметр ядра  $b$  изменяется от 2 до 5 с шагом 0.1.



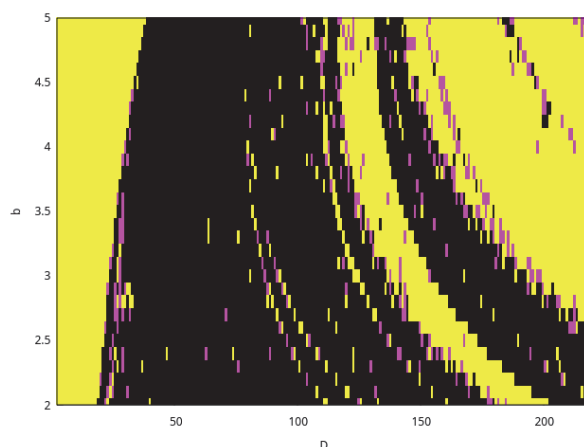


Рисунок 3-Карта динамических режимов системы (1)

Черным цветом на карты показаны зоны хаотического режима, желтым – регулярные режимы (стационарный режим и периодический режим), фиолетовым цветом, обозначен режим неопределенности.

### **Заключение**

В представляемой работе исследовались типы динамических режимов в модели для вышеуказанных видов ядер на предмет регулярных и хаотических режимов. Для этого мы провели расчет аппроксимационной энтропии. По характеристикам временного ряда определили тип поведения системы, а именно хаотическое или регулярное поведение. Результаты моделирования представлены картами динамических режимов. В рассматриваемых моделях наблюдаются динамические режимы характерные для реальных космических динамо систем.

### **Благодарности**

Исследования выполнены в рамках гранта РФФИ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Зельдович Я. Б. Магнитные поля в астрофизике/ Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов - М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.
2. Merrill R.T. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle/ R.T. Merrill, M.W. McElhinny, P.L. McFadden : London:Academic Press, 1996.
3. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport/ A. Brandenburg //Astrophysical Journal 2009 Vol. 706. 712-726.
4. Hori K. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity/ K. Hori, S. Yoshida //Geophysical and Astrophysical fluid Dynamics 2008 Vol 102, 601-632.
5. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale  $\alpha\omega$ -Dynamo/ G. Vodinchar // Mathematics, 2020. Т. 8(11), С. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.

6. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо/ Е. А. Казаков // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки., 2021. Т. 35(2), С. 40-47 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.

7. Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью/ Е. А. Казаков // Вычислительные технологии, 2022. Т. 27(6), С. 19-32 DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003

8. Водинчар Г. М. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо/ Г. М. Водинчар, Е. А. Казаков // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. № 1. С. 180-190. EDN: BRDBZK. <https://doi.org/10.26117>

9. Pincus S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity/ S. M. Pincus //Proceedings of the national academy of sciences. – 1991. – Т. 88. – №. 6. – С. 2297-2301.

УДК 517.968-7, 51-73, 004.942, 519.21

**Казаков Евгений Анатольевич**, младший научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН.

**Kazakov Evgeny Anatolevich**, junior researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka

**Водинчар Глеб Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

**Vodinchar Gleb Mikhailovich** – PhD (Math. & Phys.), Leading Researcher, Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka

## **СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДВУМОДОВЫЕ ЭРЕДИТАРНЫЕ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОГО ДИНАМО**

### **STOCHASTIC TWO-MODE HEREDITARY MODELS OF SPACE DYNAMO**

**Аннотация.** Работа посвящена классу стохастических двумодовых эредитарных моделей космического динамо. Модели включают в себя два генератора магнитного поля — крупномасштабный и турбулентный ( $\alpha$  - эффект). Влияние магнитного поля на движения среды представлено через подавление -эффекта функционалом от компонент поля, что вводит в модель память (эредитарность). Модель описывает динамику только крупномасштабных компонент, однако учитывает возможное воздействие мелкомасштабных мод с помощью стохастического члена. Это член моделирует влияние возможной спонтанной синхронизации мелкомасштабных мод. Учет такого фактора существенно разнообразит динамические режимы в модели.

**Abstract.** The work is devoted to the class of stochastic radius hereditary models of external dynamo. The models include two magnetic field generators -

large-scale and turbulent ( $\alpha$ -effect). The observation of magnetic fields in a motion environment is presented through the functional suppression of the  $\alpha$ -effect from component fields, which leads to a memory model (heredity). The model describes the dynamics of only large-scale components, but it is possible to influence small-scale modes using a stochastic term. This term models the possible influence of spontaneous synchronization of small-scale modes. Taking this factor into account will diversify the dynamic regimes in the models.

**Ключевые слова:** Эредитарность, стохастический член, когерентная структура, маломодовая модель, полоидальная компонента поля, тороидальная компонента поля.

**Keywords:** Heredity, stochastic term, coherent structure, low-mode model, poloidal field component, toroidal field component

Идея крупномасштабных приближений в динамо основана на пренебрежении влиянием магнитных мод, пространственные масштабы которых, меньше учитываемых, но больше масштабов мелких турбулентных пульсаций работающих в  $\alpha$ -эффекте. Это пренебрежение неявно основано на допуске, что суммарное влияние этих промежуточных мод нулевое. Это принятый подход в теории турбулентности [1]. Однако, известно, что в турбулентных системах за счет синхронизаций мод могут возникать когерентные структуры, влиянием которых уже нельзя пренебречь. Эти структуры спонтанно возникают и спонтанно разрушаются [2].

Ранее была разработана и исследована модель эредитарного двумодового динамо [3-5]. В представляемой работе в модель включен стохастический член, описывающий случайное влияние промежуточных мод.

Стохастическая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left( \eta^T - \frac{p}{s^2} (\xi_1 + \int_0^t K(t-\tau)Q(x_1(\tau)x_2(\tau))d\tau) \right) x_2 - \eta^T x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left( D - \xi_2 - \int_0^t K(t-\tau)Q(x_1(\tau)x_2(\tau))d\tau \right) x_1 - x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $x_1$  и  $x_2$  представляют собой амплитуды тороидальной и полоидальной компонент поля, положительные коэффициенты  $\eta^T, p, s, D, b$  являются управляющими параметрами модели, а  $\xi_1$  и  $\xi_2$  импульсные случайные процессы, описывающие влияние промежуточных мод на генерацию  $\alpha$ -эффектом тороидальной и полоидальной компонент.

Предполагается, что  $k$ -я когерентная структура спонтанно образуется в случайный момент  $\phi_k$  и существует случайное время  $\Theta_k$ . Мы пренебрегаем возможностью одновременного существования двух и более когерентных структур. Следовательно, мы имеем стохастическую возрастающую последовательность моментов времени:

$$0 < \phi_1 < \Theta_1 < \phi_2 < \Theta_2 < \dots < \phi_k < \Theta_k.$$

Тогда  $\tau_k^W = \phi_k - \Theta_{k-1}$  — случайное время ожидания формирования  $k$ -ой структуры, а  $\tau_k^E = \Theta_k - \phi_k$  — случайное время ее существования.

Пусть случайные величины  $\xi_{1k}$  и  $\xi_{2k}$  описывают интенсивность влияния  $k$ -ой структуры на генерацию тороидальной и полоидальной

компонент. Эти интенсивности предполагаются независимыми и одинаково распределенными гауссовскими случайными величинами:  $N(0, \sigma^2)$  [6].

Определим процессы  $\xi_i(t)$  следующим образом:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k [H(t - \tau_k) - H(t - \theta_k)]$$

где  $H(\cdot)$  – ступенчатая функция Хевисайда.

Синхронизация мод происходит довольно редко и существуют они недолго. Поэтому мы будем предполагать, что переменные  $\tau_k^w$  имеют степенное распределение с медианным значением  $T_w$ , а переменные  $\tau_k^E$  имеют показательное распределение с медианным значением  $T_E$ . Одна из реализаций процессов  $\xi_i(t)$  при значениях параметров  $T_E = 1$  и  $T_w = 1$  приведена на рис. 1.

Реальные динамо-системы демонстрируют большое разнообразие динамических режимов. В маломодовых моделях при фиксированных значениях управляющих параметров невозможно получать смены режимов. Процессы  $\xi_i$  в стохастическом варианте двумодовой модели (1) являются случайными возмущениями этих параметров. Поэтому, если выбрать значения параметров модели вблизи критических (соответствующих смене режимов), то в модели можно воспроизводить разнообразие динамики, присущее реальным системам.

Была проведена серия вычислительных экспериментов в модели, их результаты и интерпретация обсуждаются в докладе. Ниже на рисунках представлены некоторые результаты моделирования.

Например, в результате моделирования системы (1) с параметрами  $\eta^T = 10$ ,  $p = 0$ ,  $D = 20$ ,  $b = 2.67$  и при отсутствии случайного воздействия на систему получаем следующий результат, рис 2.

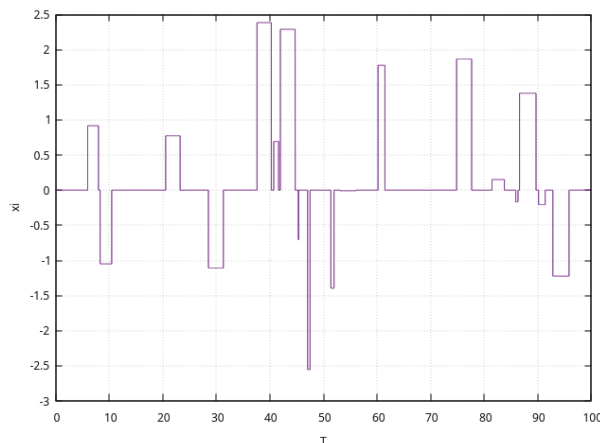


Рисунок 1- Шумовое воздействие на систему

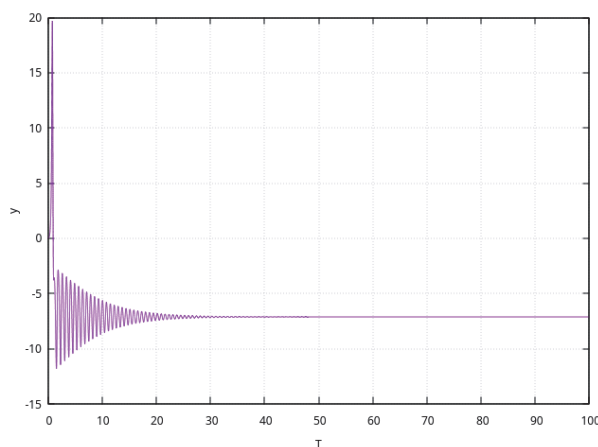


Рисунок 2- Компонента  $x_2$  системы (1) с параметрами  $\eta^T = 10, p = 0, D = 20, b = 2.67$  без шумового воздействия

Теперь внесем случайное возмущение в систему и при управляющих параметрах системы, используемых, в предыдущем примере, получим следующий результат рис. 3.

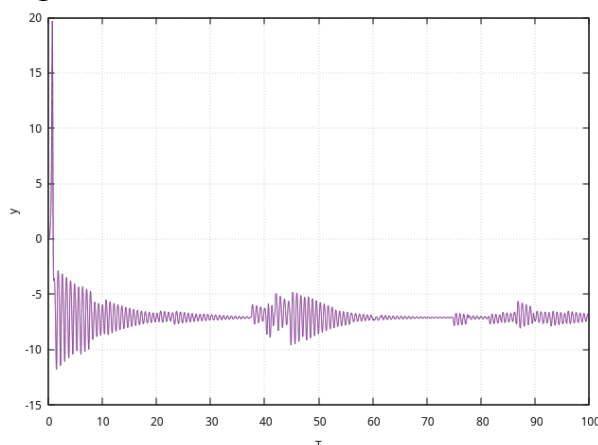


Рисунок 3- Компонента  $x_2$  системы (1) с параметрами  $\eta^T = 10, p = 0, D = 20, b = 2.67$  с шумовым воздействием

В докладе представлены результаты вычислительных экспериментов в стохастической модели.

### Благодарности

Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса/ Г. М. Заславский , Р. З Сагдеев. — М.: Наука, 1988.
2. Колесниченко А. В. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред/ А. В. Колесниченко, М. Я. Маров— М.: БИНОМ, 2009.

3. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale  $\alpha\omega$ -Dynamo/ G. Vodinchar// Mathematics, 2020. Т. 8(11), С. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.

4. Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью/Е.А. Казаков // Вычислительные технологии, 2022. Т. 27(6), С. 19-32 DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003

5. Водинчар Г. М. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо/ Г. М. Водинчар, Е. А. Казаков // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. № 1. С. 180-190. <https://doi.org/10.26117>

6. Vodinchar G. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary  $\alpha\omega$ -Dynamo Model/G. Vodinchar, L. Feshchenko //Fractal and Fractional. – 2022. – Т. 6. – №. 6. – С. 328.

УДК 621.9:519.8

**Канашин Илья Валерьевич**, ассистент кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Kanashin Ilya Valeryevich**, assistant of the Department «Applied Mathematics», Komsomolsk-na-Amure State University

**Григорьева Анна Леонидовна**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Grigorieva Anna Leonidovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department «Applied Mathematics», Komsomolsk-na-Amure State University

**Хромов Александр Игоревич**, доктор физико-математических наук, профессор-консультант УНИД, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Khromov Aleksandr Igorevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor-consultant at UNID, Komsomolsk-na-Amure State University

## **ЗАДАЧА О СЖАТИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ПЛОСКИМ ШТАМПОМ**

### **THE PROBLEM OF COMPRESSION OF A CONVEX BODY BY A FLAT STAMP**

Аннотация. В данной работе рассматривается решение задачи о сжатии плоским штампом выпуклой заготовки криволинейной формы. Решение состоит в определении в каждый момент времени: формы деформированной границы материала; координат точек, лежащих на пересечении деформированной поверхности и штампа, а также недеформированной и деформированной поверхностей; угла раскрытия

веера характеристик. В работе получены системы уравнений для определения перечисленных параметров по схемам Хилла и Прандтля с учётом трения, также получены условия совместности этих систем.

Abstract. This paper deals with the solution of the problem of compression of a convex billet with a curvilinear shape by a flat stamp. The solution consists in determining at each instant: the shape of the deformed boundary of the material; the coordinates of the points at the intersection of the deformed surface and the stamp, as well as the undeformed and deformed surfaces; and the angle of opening of the fan of characteristics. The systems of equations for the determination of the above parameters according to the Hill and Prandtl schemes, taking into account the friction, are obtained, as well as the conditions of cooperativity of these systems.

Ключевые слова: математическая модель, жесткопластическое тело, плоская деформация, штамп, выпуклая заготовка.

Key words: mathematical model, rigid-plastic body, plane deformation, stamp, convex surface.

### **Введение**

Актуальность рассматриваемого в работе решения заключается в возможности использования полученных в ходе исследования результатов при построении математических моделей поведения реальных элементов конструкций и оценке их прочности.

Целью работы является решение задачи о сжатии плоским штампом выпуклой заготовки криволинейной формы.

Для достижения указанной цели поставлены следующие задачи:

- вывод системы уравнений, позволяющей определить координаты точек, лежащих на пересечении деформированной поверхности и штампа (точка А), а также недеформированной и деформированной поверхностей (точка С); угла раскрытия веера  $\psi(t)$ ; формы деформированной границы материала по схеме Хилла;

- вывод системы уравнений, позволяющей определить координаты точек, лежащих на пересечении деформированной поверхности и штампа (точка А), а также недеформированной и деформированной поверхностей (точка С); угла раскрытия веера  $\psi(t)$ ; формы деформированной границы материала по схеме Прандтля;

- вывод условий совместности полученных систем.

Решение задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом, полученное Р. Хиллом описано в работе [3]. Решение задачи о вдавливании жесткого штампа в полупространство даётся в работе [5]. Обобщения решений Хилла и Прандтля задачи о сжатии выпуклого тела плоским штампом рассматривалась в работах [1, 2]. Основные соотношения теории пластичности приведены в работе [4].

### Основная часть

Задача о сжатии выпуклого тела плоским штампом решается аналогично задаче о вдавливании клина в выпуклое тело. Схемы сеток линий скольжения, соответствующие решениям данной задачи, полученных Хиллом и Прандтлем представлены на рисунке 1.

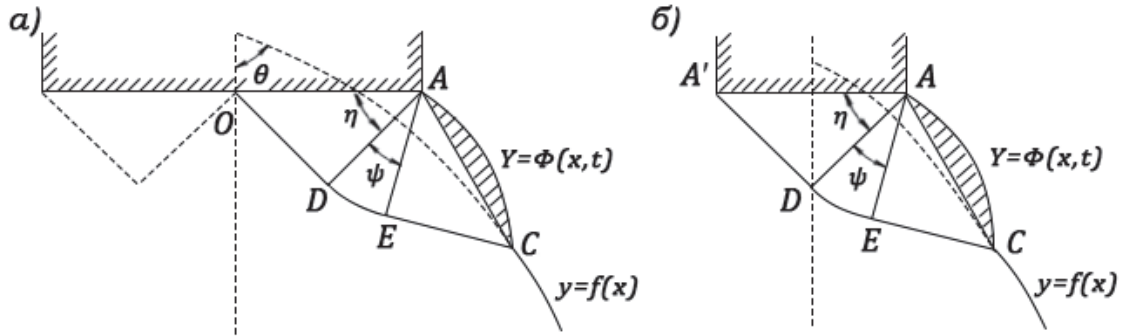


Рисунок 1 – Схемы сеток линий скольжения: а) в решении Хилла, б) в решении Прандтля

Пусть штамп движется со скоростью  $V_y = -1$ , тогда  $y_A = -t$ . В решении по схеме Р. Хилла поле скоростей имеет вид:

$$v_\alpha = -\frac{V_y}{\cos \eta}, v_\beta = 0.$$

Проекции скорости  $v_\alpha$  на оси координат равны

$$v_x = \frac{\cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \eta}, v_y = \frac{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \eta}.$$

Координаты точек  $x_A$  и  $x_C$  связаны соотношениями:

$$x_C = x_A \left[ 1 - \sqrt{2} \cos \eta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \eta - \psi\right) \right],$$

$$y_C = y_A - \sqrt{2} x_A \cos \eta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta - \psi\right).$$

Тогда система уравнений для решения задачи по схеме Хилла:

$$y_C(t) = f(x_C(t)), \quad (1)$$

$$(y_C + t) \left( 1 - \sqrt{2} \cos \eta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \eta - \psi\right) \right) + x_C \sqrt{2} \cos \eta \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta - \psi\right) = 0,$$

$$x_C = \left[ 1 - \sqrt{2} \cos \eta \sin\left(\frac{\pi}{4} - \eta - \psi\right) \right] \left( \frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) dt + x_C(\tau_A) \right),$$

$$\frac{1}{\cos \eta} \int_{\tau_A}^t \sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) dt + y_C(\tau_A) + t = 0.$$

Условие совместности системы (1) при  $t = 0$ :

$$tg(\theta) = \frac{[\cos(\eta + \psi_0) - \sin(\eta + \psi_0) - \sqrt{2}][1 - \cos \eta (\cos(\eta + \psi_0) - \sin(\eta + \psi_0))]}{[\cos \eta (\cos(\eta + \psi_0) - \sin(\eta + \psi_0) - \sqrt{2}) - 1][\cos(\eta + \psi_0) + \sin(\eta + \psi_0)]}$$



В решении по схеме Л. Прандтля треугольная область  $AA'D$  движется вместе со штампом как жёсткое целое. Поле скоростей в пластической области  $ADEC$  определяется в виде:

$$v_\alpha = -V_y \cos \eta, v_\beta = 0.$$

Проекция скорости  $v_\alpha$  на оси координат равны

$$v_x = \cos \eta \cos \left( \psi - \frac{\pi}{4} \right), v_y = \cos \eta \sin \left( \psi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Соотношения, связывающие координаты точек  $x_A$  и  $x_C$  имеют вид:

$$x_C = x_A \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\cos \eta} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right],$$

$$y_C = y_A - \frac{\sqrt{2}x_A}{\cos \eta} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \eta - \psi \right).$$

Система уравнений для решения задачи по схеме Прандтля:

$$\begin{aligned} y_C(t) &= f(x_C(t)), & (2) \\ (y_C + t) \left( \cos \eta - \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right) + x_C \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \eta - \psi \right) &= 0, \\ x_C &= \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\cos \eta} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \eta - \psi \right) \right] \left( \cos \eta \int_{\tau_A}^t \cos \left( \psi - \frac{\pi}{4} \right) dt + x_C(\tau_A) \right), \\ \cos \eta \int_{\tau_A}^t \sin \left( \psi - \frac{\pi}{4} \right) dt + y_C(\tau_A) + t &= 0. \end{aligned}$$

Условие совместности системы (2) при  $t = 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} &tg(\theta) = \\ &= \frac{[\cos(\eta + \psi_0) - \sin(\eta + \psi_0) - \sqrt{2}(\cos \eta)^2][\cos \eta - \cos(\eta + \psi_0) + \sin(\eta + \psi_0)]}{[\cos(\eta + \psi_0) - \sin(\eta + \psi_0) - \sqrt{2}(\cos \eta)^2 - \cos \eta][\cos(\eta + \psi_0) + \sin(\eta + \psi_0)]} \end{aligned}$$

Усилие, необходимое для вдавливания штампа не зависит от выбора сетки линий скольжения и вычисляется по формуле

$$p = 4kx_A(1 + \psi).$$

Системы (1) и (2), полученные в ходе решения задачи описывают пластическое течение при  $\psi > 0$ . Продолжение решения при  $\psi = 0$  возможно только по схеме Хилла, решение по схеме Прандтля без центрированного веера линий скольжения в точке  $A$  невозможно.

### Заключение

В соответствии с поставленной целью было получено решение задачи о сжатии плоским штампом выпуклой заготовки криволинейной формы. Выведены:

- система уравнений, позволяющая определить координаты точек  $A$ , и  $C$ , угол раскрытия веера  $\psi(t)$ , форму деформированной границы материала по схеме Хилла;

- система уравнений, позволяющая определить координаты точек  $A$ , и  $C$ , угол раскрытия веера  $\psi(t)$ , форму деформированной границы материала по схеме Прандтля;

- условия совместности полученных систем уравнений.

При решении задачи было учтено влияние трения между материалами.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
2. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел / А. И. Хромов. – Владивосток : Дальнаука, 1996. – 183 с.
3. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 407 с.
4. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – Москва : Наука, 1974. – 311 с.
5. Быковцев, Г. И. Плоская задача о вдавлении жесткого штампа в идеальное жесткопластическое полупространство / Г. И. Быковцев, А. И. Хромов // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 6. – С. 47–52

УДК 519.622.2:531.32

**Клюшин Максим Александрович**, студент, Санкт-Петербургский государственный университет

**Klyushin Maksim Aleksandrovich**, graduate student, Saint Petersburg State University

**Тихонов Алексей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры Теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербургский государственный университет

**Tikhonov Alexey Aleksandrovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Saint Petersburg State University

## **ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ**

## **ON CHANGING THE SHAPE OF THE ORBIT OF A SPACECRAFT MOVING IN NEAR-EARTH PLASMA**

Аннотация. В работе рассматривается орбитальное движение космического аппарата (КА), взаимодействующего с околоземной плазмой. Ставится задача об исследовании влияния магнитного поля Земли (МПЗ) на динамику наэлектризованного КА. На этапе математического моделирования выводится нелинейная неавтономная система дифференциальных уравнений движения. В рамках построенной математической модели выполняется численное моделирование движения КА в гравитационном и магнитном полях Земли. В результате обнаруживается периодическое изменение формы орбиты КА в процессе

движения. На основе анализа уравнений движения дается объяснение наблюдаемому явлению.

Abstract. The orbital motion of a spacecraft interacting with near-Earth plasma is considered. The problem of influence of the Earth's magnetic field on the dynamics of an electrified spacecraft is studied. At the stage of mathematical modeling, the nonlinear non-autonomous system of differential equations of motion is derived. Numerical simulation of spacecraft motion in the gravitational and magnetic fields of the Earth is performed. As a result, the periodic change in the shape of the spacecraft's orbit is detected. Based on the analysis of the equations of motion, an explanation of the observed phenomenon is given.

Ключевые слова: космический аппарат, орбитальное движение, переменный электрический заряд, сила Лоренца, численное моделирование

Key words: spacecraft, orbital motion, variable electrical charge, Lorentz force, numerical modelling

### **Введение**

В процессе своего движения КА подвергается возмущающим воздействиям различного происхождения и природы. В частности, происходит его взаимодействие с околоземной плазмой, состоящей из разноименно заряженных микрочастиц. В результате поверхность КА приобретает электрический заряд. Исследования показывают, что электрический заряд КА меняется со временем, причем изначально корпус КА заряжается отрицательно, а затем – положительно, после чего процесс повторяется [1].

Исследование влияния МПЗ на электрически заряженный КА приводит к весьма актуальным задачам современной механики. В частности, вопросы динамики тел с переменным электрическим зарядом в околоземном космическом пространстве обсуждаются в работах [2 – 5].

Данная работа посвящена математическому и компьютерному моделированию влияния МПЗ на орбитальное движение КА, выведенного на низкую наклонную круговую орбиту и взаимодействующего с околоземной плазмой. Целью данного исследования является выявление особенностей изменения формы орбиты наэлектризованного КА.

### **Математическое моделирование**

Рассмотрим движение центра масс КА в гравитационном и магнитном полях Земли. Введем декартову систему координат  $Oxyz$ , с началом в центре Земли. Ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости невозмущенной орбиты, ось  $x$  лежит в экваториальной плоскости и направлена в восходящий узел орбиты, ось  $y$  дополняет систему до правой. Будем считать, что в процессе движения электрический заряд на поверхности КА меняется по следующему закону:

$$q(t) = -q_0 \cos((\omega_0 - \omega_e)t), \quad (1)$$

где  $q_0 = \text{const}$  – амплитуда изменения заряда,  $\omega_0 = \text{const}$  – орбитальная угловая скорость, соответствующая кеплерову движению КА по круговой

орбите,  $\omega_e = 7.292$  рад/с – угловая скорость суточного вращения Земли. В качестве модели МПЗ рассмотрим модель «прямого магнитного диполя» с вектором магнитной индукции [6]  $\mathbf{B} = (B_0/r^5)(3(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{N})$ , где  $\mathbf{N}$  – единичный вектор, направленный от географического северного полюса к южному,  $B_0 = 7.812 \cdot 10^{15}$  м<sup>3</sup> · Тл – магнитный дипольный момент,  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  – радиус-вектор центра масс КА. Обозначим  $m$  – массу КА,  $i$  – наклонение невозмущенной кеплеровой орбиты,  $\mu = 398600.442$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup> – гравитационный параметр Земли.

В данной постановке задачи на КА действует гравитационная сила  $\mathbf{F}_g = -(\mu m/r^3)\mathbf{r}$  и сила Лоренца  $\mathbf{F}_L = q(t)(\mathbf{v}_r \times \mathbf{B})$ , где  $\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}$  – скорость КА относительно Земли. В проекциях на оси системы координат  $Oxyz$  дифференциальные уравнения движения КА примут вид:

$$\ddot{x} = -\mu x/r^3 + a_{Lx}, \quad \ddot{y} = -\mu y/r^3 + a_{Ly}, \quad \ddot{z} = -\mu z/r^3 + a_{Lz}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_{Lx} &= -(q(t)B_0)/(mr^5) \cdot ((3z^2 - r^2)\dot{y} \cos i - (3y^2 - r^2)\dot{z} \sin i + \\ &\quad + 3yz(\dot{y} \sin i - \dot{z} \cos i) - \omega_e x(3(y \sin i + z \cos i)^2 - r^2)), \\ a_{Ly} &= -(q(t)B_0)/(mr^5) \cdot (3(y \sin i + z \cos i)(x\dot{z} - z\dot{x}) + r^2\dot{x} \cos i + \\ &\quad + 3\omega_e y(z^2 + x^2 \sin^2 i) + \omega_e(r^2(y \cos i + 2z \sin i) \cos i - 6yz(y \sin i + \\ &\quad + z \cos i) \cos i)), \\ a_{Lz} &= -(q(t)B_0)/(mr^5) \cdot (3(y \sin i + z \cos i)(y\dot{x} - x\dot{y}) - r^2\dot{x} \sin i + 3\omega_e z \times \\ &\quad \times (x^2 \cos^2 i - y^2) + \omega_e(r^2(2y \cos i + z \sin i) \sin i + 6yz(y \cos i - \\ &\quad - z \sin i) \cos i)). \end{aligned}$$

### Компьютерное моделирование

Исследуем влияние возмущающей силы Лоренца на динамику малого КА, выведенного на низкую наклонную круговую орбиту. Обозначим  $\Delta r = r - r_0$  – отклонение радиуса возмущенной орбиты от радиуса первоначальной круговой кеплеровой орбиты ( $r_0 = const$ ). Проведем численное моделирование орбитального движения КА в рамках построенной математической модели (2) с помощью программы, написанной на языке C++. В основе расчетного модуля данной программы лежит метод Рунге-Кутты 4-го порядка [7].

Таблица 1 – Величины, выбранные для численного интегрирования

Величина	$m$ , кг	$q_0$ , Кл	$r_0$ , км	$\omega_0$ , рад/с	$i$ , °
Значение	20	0.001	6700	0,0011512	53

Анализ графика на рис. 1 показывает, что под влиянием МПЗ происходит периодическое изменение формы орбиты наэлектризованного КА. В процессе движения КА орбита становится эллиптической, а затем возвращается к исходной, круговой, форме, после чего процесс повторяется. Для объяснения выявленного процесса был проведен анализ системы (2), записанной в сферических координатах. Оказывается, что частота изменения

заряда близка к собственной частоте системы, что приводит к наблюдаемому резонансному эффекту.

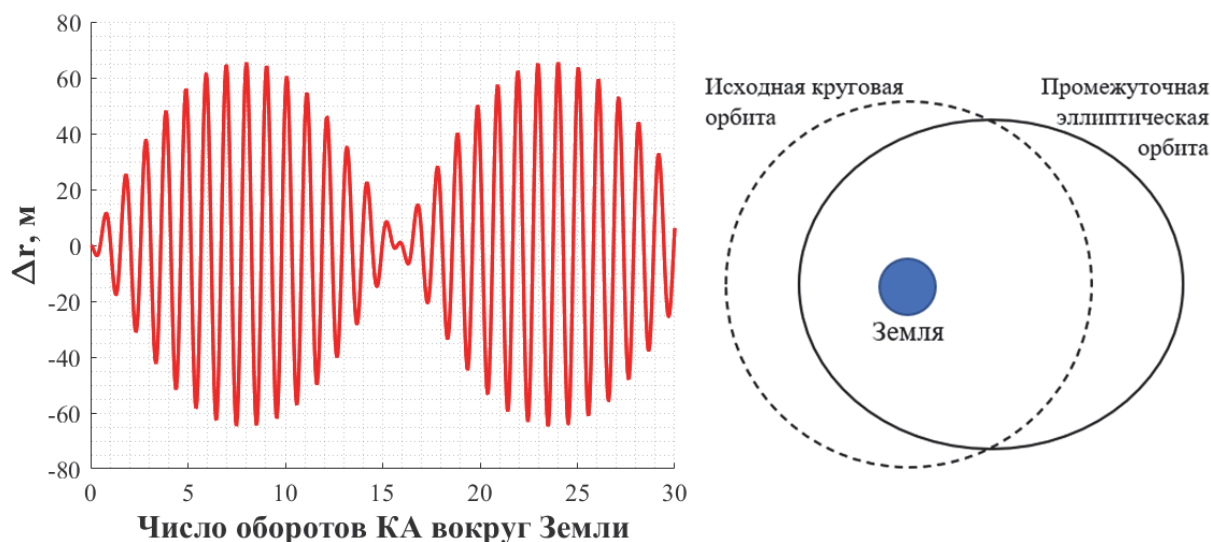


Рисунок 1 – Изменение формы орбиты КА.

### Заключение

Таким образом, в ходе выполненной работы было проведено математическое и компьютерное моделирование орбитального движения наэлектризованного КА в гравитационном и магнитном полях Земли. В ходе численных экспериментов было обнаружено изменение формы орбиты КА в результате его взаимодействия с МПЗ и околоземной плазмой. На основе анализа системы дифференциальных уравнений движения дано объяснение наблюдаемому явлению. В продолжение данной работы планируется проведение качественного аналитического исследования рассматриваемой задачи.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031>.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Акишин, А. И. Электризация космических аппаратов / А. И. Акишин, Л. С. Новиков // Новое в жизни, науке и технике. Сер. «Космонавтика, астрономия». – Москва : Знание, 1985. – 64 с.
2. Колесников, Е. К. Аналитические исследования движения тел с переменным электрическим зарядом / Е. К. Колесников, А. Б. Яковлев // Сильно неравновесные процессы в механике неоднородных сред : Межвузовский сборник. К 50-летию кафедры физической механики СПбГУ / Под редакцией В.А. Морозова, А.Б. Яковлева. – Санкт-Петербург : ООО "Издательство ВВМ", 2018. – С. 227-240. – EDN QKDJIT.
3. Тихонов, А. А. Об электродинамическом управлении космической тросовой системой / А. А. Тихонов, А. П. Дериглазов, Л. Ф. Щербакова, А. Б.

Яковлев // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : Сборник трудов. В 4-х томах, Уфа, 19–24 августа 2019 года. Том 1. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 737-739. – EDN QCUKVY.

4. Tikhonov, A. A. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters / A. A. Tikhonov, A. V. Yakovlev // International Journal of Plasma Environmental Science and Technology. – 2019. – Vol. 13, No. 1. – P. 49-52. – EDN NCPGHB.

5. Тихонов, А. А. Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы / А. А. Тихонов // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 2. – С. 91-114. – DOI 10.31857/S0005231020020075. – EDN OGWFHT.

6. Белецкий, В. В. Вращательное движение намагниченного спутника / В. В. Белецкий, А. А. Хентов. – Москва : Наука, 1985. – 287 с.

7. Иванов, Д. С., Трофимов, С. П., Широбоков, М. Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов // под общ. ред. М.Ю. Овчинникова. – Москва : ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. – 118 с. – ISBN: 978-5-98354- 023-1.

УДК 539.3+536.46

**Князева Анна Георгиевна**, доктор-физико-математических наук, профессор, гнс Лаборатории нелинейной механики материалов и многоуровневых систем (НММиМС) ИФПМ СО РАН, Томск

**Knyazeva Anna Georgievna**, doctor of Physical-mathematical science, professor, principal researcher of Laboratory of Nonlinear mechanics of materials and multilevel systems, ISPMS SB RAS, Tomsk

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОЕВОГО КОМПОЗИТА В ПРОЦЕССЕ ЕГО СОЗДАНИЯ**

### **STRESS-STRAIN STATE OF LAYERED COMPOSITE AT THE CONDITIONS OF CREATION**

**Аннотация.** В работе представлен вывод уравнения теплопроводности и уравнения для прогибов многослойной пластины с использованием приближения Кирхгофа, учитывающий взаимовлияние разных процессов. Объемные деформации в пластине представляются в виде суммы двух слагаемых, что позволяет учесть неоднородный прогрев объекта. Далее требуется численное решение.

**Abstract.** The paper presents the derivation of the heat conduction equation and the equation for the deflections of a multilayer plate using the Kirchhoff approximation, which takes into account the mutual influence of different processes. The volumetric strains in the plate are represented as a sum of two

summands to account for the inhomogeneous heating of the object. Next, a numerical solution is required.

**Ключевые слова:** термоупругий изгиб, математическая модель, связанные уравнения

**Keywords:** thermoelastic bending, mathematical model, coupled equations

### **Введение**

Для развития современных комбинированных технологий синтеза композитов требуется изучение взаимодействия процессов разной физической природы. Благодаря этому взаимодействию и возможно управление сложными процессами по разным каналам. Это относится, например, к синтезу композитов в современных 3D-технологиях, при моделировании которых необходимо учитывать разнообразные сопутствующие процессы. Для некоторых проблем можно использовать термомеханические теории пластин. Однако в чистом виде применимость их к проблемам создания новых материалов не очевидна. Во всех известных публикациях стационарное распределение температуры задано, либо находится из решения стационарной задачи, либо задается как аппроксимация некоторого трехмерного распределения. О связанности процессов разной природы в таких моделях говорить не приходится. О невозможности построения единой теории пластин и оболочек, одинаково хорошо применимой ко всем материалам и видам напряженно-деформированного состояния, говорится, например, в довольно старом обзоре [1,2]. В монографиях [3,4] в определяющие соотношения, кроме термических, вводятся дополнительные деформации, которые автором связываются с фазовыми и структурными превращениями. Обзор некоторых подходов представлен, например, в [5]. В современных технологиях синтеза покрытий или поверхностной обработки материалов распределение температуры неоднородно и зависит от вида источника тепла, скорости и траектории его перемещения вдоль обрабатываемой поверхности. С одной стороны, нужно переходить к численному решению трехмерных задач, что влечет за собой новые проблемы. С другой стороны, как для качественного, так и для количественного анализа, можно использовать упрощения, основанные на физических соображениях. Продолжением исследований [6,7] является настоящая работа.

### **Описание модели**

Ограничимся приближением Кирхгофа. В этой теории перемещения точек, отстоящих от срединной плоскости на расстояние  $z$ , при учете ее смещений представляются в виде

$$u_z(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x; \quad v_z(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y; \quad w(x, y) = w_0(x, y), \quad (1)$$

где  $\varphi_x = -\partial w_0 / \partial x$ ;  $\varphi_y = -\partial w_0 / \partial y$ .

В теории тонких пластин используется приближение плоского напряженного состояния. При учете (1) и с использованием упругих соотношений, условия совместности деформаций и уравнений равновесия

выводятся уравнения для функции усилий и для прогиба. Далее определяем компоненты тензора деформаций.

Осредненные по толщине слоевого объекта обобщенные соотношения Дюамеля-Неймана для плоского напряженного состояния для точки, отстоящей на расстояние  $z$  от срединной плоскости, примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \langle K\omega \rangle_z \\ \sigma_{yy} &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \langle K\omega \rangle_z \\ \sigma_{xy} &= -\frac{E}{(1+\nu)^2} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (2)$$

где функция  $\omega = \omega(x, y, z, t)$  включает в себя информацию об эволюции поля температуры и состава композита.

Находим первый инвариант тензора деформаций  $\varepsilon_{kk}$ , а затем определяем его среднюю по толщине пластины величину

$$\langle \varepsilon_{kk} \rangle = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{h} \int_0^h \langle K\omega \rangle_z dz. \quad (3)$$

Соотношение (3) требуется при выводе уравнения теплопроводности, осредненного по толщине слоевого объекта. В этом случае логично принять  $\langle K\omega \rangle_z = \langle K\omega \rangle$ .

В результате уравнение теплопроводности примет вид

$$\begin{aligned}(c_{\varepsilon\rho})_{eff} \frac{dT}{dt} &= \lambda_{T,eff} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{h_R}{h_S + h_R} W_{ch} + \frac{W_{ext,eff}}{h_S + h_R} - \\ &- 3(K\alpha_T)_{eff} T \frac{d}{dt} \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1-2\nu}{E} \langle K\omega \rangle - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{h_S + h_R}{2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right].\end{aligned}$$

В подзадаче о прогибе пластины имеется особенность.

Уравнение равновесия для пластины Кирхгофа, следующее из принципа виртуальных перемещений, включает моменты, в формулы для которых входят слагаемые вида

$$I = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \langle K\omega \rangle_z z dz. \quad (4)$$

Если, как и в тепловой задаче, примем  $\langle K\omega \rangle_z = \langle K\omega \rangle$ , то интеграл (4) окажется равным нулю. В статических условиях для тонких пластин, между температурами поверхностей которых есть различие, распределение всегда можно аппроксимировать отрезком прямой линии, что и используется во многих теориях термоупругих пластин. Представим объемные деформации в



определяющих соотношениях в виде суммы двух слагаемых, где вид первого слагаемого (зависящего только от  $x, y$ ) для данного приближения значения не имеет. Второе слагаемое зависит от третьей координаты. Например, при синтезе покрытия на подложке имеем

$$\langle K\omega \rangle_z \approx \langle K\omega \rangle_0 + \frac{z}{h} \cdot \frac{K_S h_S \omega_S + K_R h_R \omega_R}{h_S + h_R},$$

где  $\omega_S$  включает только термические деформации в подложке, а  $\omega_R = \omega_T + \omega_{ch}$  зависит от физико-химических процессов, происходящих при синтезе покрытия.

В результате уравнение для прогибов примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( (1-\nu) D \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) = \\ = q - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A(T - T_0) + B\omega_{ch}] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [A(T - T_0) + B\omega_{ch}], \end{aligned}$$

где параметры зависят от эффективных свойств объекта

$$D = \frac{E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} \frac{h^3}{12}; \quad h = h_S + h_R,$$

$$A = \frac{1 - 2\nu_{eff}}{1 - \nu_{eff}} \frac{h^3}{12} (K_T \alpha_T)_{eff}, \quad B = \frac{1 - 2\nu_{eff}}{1 - \nu_{eff}} \frac{h^3}{12} \frac{K_R h_R}{h_S + h_R}.$$

Подобный подход использован для вывода связанных уравнений теплопроводности и прогибов для синтеза слоевого композита.

### **Заключение**

Таким образом, представлен вывод связанных уравнений теплопроводности и прогибов. Поскольку термическая задача, учитывающая физико-химические превращения, является нелинейной, далее требуется численное решение. Теория обобщается на другие условия управляемого синтеза, и на иные подходы к определению связей между смещениями в плоскости и прогибами.

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К. Галиныш // Исследования по теориям пластин и оболочек. – 1970. – вып. 5. – С. 23–64.
2. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – вып. 5. – 66–92.
3. Биргер, И.А. Стержни, пластинки и оболочки. – М.: Наука. – 1992. – 392 С. ISBN 978-5-9710-6500-5.

4. Алфутов, Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов / М.: Машиностроение, 1984. – 264 С.

5. Development and applications of shear deformation theories for laminated composite plates: An overview. / A. Maji, P.K. Mahato // Journal of Thermoplastic Composite Materials. – 2022. – V. 35. - №. 12. – P. 2576-2619. – DOI: 10.1177/0892705720930765

6. Knyazeva, A.G., Modes of adhesive bonding layer formation during roll motion in the process of laminated object creation / A. Knyazeva, N. Travitzky // High Temperature Material Processes: An International Quarterly of High-Temperature Plasma Processes – 2023. – V. 27. – № 1. – P.67-96. – DOI: 10.1615/HighTempMatProc.2022044916.

7. Термомеханическая связанная модель синтеза покрытия на подложке / А.Г. Князева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 1. – С. 58–74. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.1.06.

УДК 622.8: 622.23.05:65.012.12

**Ковалев Максим Александрович**, аспирант Красноярского филиала Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий

**Maxim A. Kovalev**, graduate student, Krasnoyarsk Branch of the Federal Research Center for Information and Computing Technologies

**Москвичев Владимир Викторович**, доктор технических наук, главный научный сотрудник Красноярского филиала Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий

**Vladimir V. Moskvichev**, doctor of Technical Sciences, scientific supervisor, chief researcher of the Krasnoyarsk branch of the Federal Research Center for Information and Computing Technologies

## **ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РИСКИ ТЕХНОЛОГИИ ВСКРЫШНЫХ РАБОТ НА УГОЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ**

### **SIMULATION MODELING AND RISKS OF OVERBURDEN TECHNOLOGY AT COAL OPEN PIT**

**Аннотация.** Повышение уровня комплексной безопасности, снижение показателей аварийности и травматизма, минимизация риска отказов, определяют актуальность исследований взаимосвязи элементов системы «человек – машина – среда» («Ч-М-С») при проведении технологических работ по добыче угля открытым способом. Одним из наиболее эффективных механизмов исследования является технология имитационного моделирования. Цель исследования – адаптация технологий имитационного

моделирования для решения проблемы комплексной безопасности при проведении открытых горных работ. Разработан метод трансляции формальной модели бизнес-процесса вскрышных работ в нотации ARIS eEPC (extended Event Driven Process Chain) в комбинированную имитационную модель AnyLogic. На основе данного метода проведена серия машинных экспериментов, определены элементы, оказывающие влияние на реализацию риска аварий в системе «Ч-М-С».

**Abstract.** Enhancing comprehensive safety, reducing accident and injury rates, and minimizing the risk of failures underscore the relevance of researching the interrelationship between elements of the "human-machine-environment" (H-M-E) system during technological operations in open-pit coal mining. One of the most effective mechanisms for this research is the technology of simulation modeling. The aim of the study is to adapt simulation modeling technologies to address the issue of comprehensive safety during open-pit mining operations. A method has been developed for translating a formal model of the overburden removal business process in the ARIS eEPC (extended Event Driven Process Chain) notation into a combined simulation model in AnyLogic. Based on this method, a series of machine experiments was conducted, and elements influencing the realization of accident risks within the H-M-E system were identified.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, система «человек-машина-среда», AnyLogic.

**Keywords:** simulation modeling, "human-machine-environment" system, AnyLogic

### **Введение**

В рамках исследования выполнена адаптация технологий имитационного моделирования для решения проблемы комплексной безопасности при проведении открытых горных работ. Формирование предпосылок риска аварий на угольном разрезе рассмотрено в формате системы «Ч-М-С» [1, 2]. Система включает в себя оператора-машиниста экскаватора (человек); карьерный экскаватор (машина); вскрышной забой (рабочая среда). Данные подсистемы взаимодействуют между собой по заданной технологии и установленной организации работ в рамках технологического процесса вскрышных работ.

Процесс проведения вскрышных работ рассмотрен в методологии ARIS eEPC (extended Event Driven Process Chain – расширенная нотация описания цепочки процесса) как описание потока последовательно выполняемых работ, расположенных в порядке их выполнения [3,4,5]. Бизнес-процесс проведения вскрышных работ в нотации eEPC описан графом:  $G=\{X,V\}$ , где  $X$  и  $V$  являются основными компонентами модели.  $X$  (вершина графа) =  $\{S, F, D, I\}$  и состоит из четырех типов объектов:  $S$  (события),  $F$  (функция),  $D$  (операция),  $I$  (правило XOR/OR).  $V_n$  (дуги) - связи между объектами указывают на последовательность событий или операций.

$\forall r$  (ребра) - соединяют вершины с правилами XOR/OR, что определяет, какие альтернативные пути ветвления могут возникнуть в процессе.

Агентная составляющая модели в AnyLogic реализуется с помощью активного объекта, имеющего параметры, переменные, которые выражают состояния объекта и изменение состояний под воздействием событий и условий. Дискретно-событийная составляющая реализуется с помощью функций распределения вероятностей  $ALM = \{Oper, Var\}$ , где Oper — множество объектов перехода события между выполняемыми операциями, Var — множество переменных, используемых для хранения данных процесса.

На первом этапе процесса моделирования модель вскрышного забоя из нотации eEPC транслируется в комбинированную модель программной среды AnyLogic, определяются вероятности наступления событий в правилах ветвления «исключающее ИЛИ» (XOR) и «ИЛИ» (OR).

После получения структуры комбинированной имитационной модели, определяются численные характеристики объектов модели: время выполнения работ; количество исполнителей; вероятности наступления событий в правилах ветвления. В качестве прототипа агентов используются комбинации операций eEPC, которые выполняются в каждой из подсистем «человек», «машина», «среда». Поведение агентов реализовано модулями «операция», «функция», «событие».

Имитационные исследования в системе AnyLogic проводились за одинаковый модельный промежуток времени (11 модельных часов — длительность смены) и с одинаковыми входными данными (с проведением 10-ти экспериментальных одинаковых прогонов модели).

На основе результатов имитационных экспериментов по моделированию процесса возникновения риска и его перерастания в причинную цепь катастрофической аварии и травмирования персонала в системе «Ч-М-С» угольного разреза сделан вывод, что наиболее существенный вклад вносит подсистема «человек».

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Махутов Н.А., Баришполец В.А., Беккер А.Д., Бобров Ю.В., Власов Ю.В., Гаденин М.М. и др. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Безопасность сложных «человеко-машинных систем». -Москва: МГОФ «Знание», 2021. 432 с.

2. Махутов Н.А., Абрамова Е.А., Ахметханов Р.С., Белов П.Г., Бобров А.Ф. и др. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Человеческий фактор и проблемы безопасности. - Москва: МГФ «Знание», 2008. 688 с.

3. Шеер А.В. ARIS – моделирование бизнес-процессов. 3-е изд. Москва: Вильямс, 2009. 223 с.

4. Доррер М.Г., Ланцев Е.А., Шаргаева А.И. Событийный анализ бизнес-процессов в нотации eEPC. Тр.XV Междунар. конф. по

эвентологической математике и смежным вопросам. -Красноярск: Издательство СФУ, 2011. С. 89–96. URL: <https://sciup.org/140277916> (дата обращения: 09.10.2023).

5. Ланцев Е.А., Дорпер М.Г. Получение агентной имитационной модели из дискретно-событийного описания бизнес-процесса. Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. 3(174): С.44–52. URL: [https://infocom.spbstu.ru/userfiles/files/articles/2013/3/05\\_lantsev.pdf](https://infocom.spbstu.ru/userfiles/files/articles/2013/3/05_lantsev.pdf) (дата обращения: 09.10.2023).

УДК: 539.37+539.214

**Ковтаныук Лариса Валентиновна**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Kovtanyuk Larisa Valentinovna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Панченко Галина Леонидовна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Panchenko Galina Leonidovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Попова Елена Олеговна**, аспирант, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

**Popova Elena Olegovna**, Postgraduate Student, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **ПОЛЗУЧЕСТЬ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**

## **CREEP AND VISCOPLASTIC FLOW OF PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE UNDER THE INFLUENCE OF CHANGING PRESSURE DROP**

**Аннотация.** В рамках модели больших деформаций рассматривается краевая задача о неизотермических процессах ползучести и вязкопластического течения материала, образующего пробку в круглой недеформируемой трубе. Деформирование несжимаемого материала пробки, обладающего упругими, вязкими и пластическими свойствами, происходит

вследствие действия изменяющегося со временем перепада давления. Разогрев материала происходит из-за необратимого деформирования, а также из-за трения материала о граничную шероховатую поверхность трубы. Рассмотрены процессы ползучести и развития вязкопластического течения при возрастающем и постоянном перепаде давления, вязкопластическое течение и его торможение при убывающем перепаде давления, разгрузка и остывание материала после полного снятия нагрузки. Рассчитаны все параметры напряженно-деформированного состояния, установлены закономерности продвижения упругопластических границ, определены остаточные деформации и напряжения.

**Abstract.** The paper considers a boundary value problem on non-isothermal processes of creep and viscoplastic flow of a material forming a plug in a round non-deformable pipe within the framework of a model of large strains. Deformation of the incompressible material of the plug, which has elastic, viscous and plastic properties, occurs due to the action of a pressure drop that changes over time. Heating of the material occurs due to irreversible deformation, as well as due to friction of the material against the boundary rough surface of the pipe. The processes of creep and development of viscoplastic flow with an increasing and constant pressure drop, viscoplastic flow and its deceleration with a decreasing pressure drop, unloading and cooling of the material after complete removal of the load are considered. All parameters of the stress-strain state were calculated, the patterns of movement of elastoplastic boundaries were established, and residual deformations and stresses were determined.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, ползучесть, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

**Keywords:** viscoelasticity, creep, viscoplastic flow, large strains, deformation heat production, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

### **Введение**

Целью работы является решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о продвижении пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием изменяющегося со временем перепада давления, приложенного к поперечным граничным поверхностям пробки. Перепад давления сначала возрастает, затем становится постоянным и далее равномерно падает до нуля. На боковой граничной поверхности пробки задается условие проскальзывания, которое вызывает разогрев материала. Также происходит изменение температуры материала вследствие необратимого деформирования.

Известно, что до настоящего времени нет общепризнанной теории, описывающей конечное деформирование, поэтому актуальность данной работы заключается в развитии модели больших деформаций, предложенной в [1, 2]. Эта модель предлагает определять обратимые и необратимые деформации дифференциальными уравнениями их изменения. В работе [3]

сделано обобщение модели на случай последовательного накопления больших необратимых деформаций в условиях ползучести и затем пластического течения.

В статье [4] представлено решение подобной задачи в изотермическом случае и без учета вязкости на стадии деформирования, предшествующей пластическому течению. Следовательно, данная работа является обобщением полученного ранее решения на случай учета температуры и ползучести материала.

### Постановка краевой задачи

Пусть имеется круглая недеформируемая труба радиуса  $R$ . В ней расположена пробка длины  $l$ , состоящая из несжимаемого материала с упругими, реологическими и пластическими свойствами. Решение этой краевой задачи в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  ищется в классе функций  $u = u_z(r, t)$ ,  $v = v_z(r, t)$ , где  $u$  и  $v$  – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости. На граничных поверхностях пробки  $z = u(r, t)$  и  $z = l + u(r, t)$  задаются условия:

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t)) = -p(t) = -\alpha t, \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t)) = 0, \quad (1)$$

в которых  $r = 0$  – координата максимального перемещения граничных точек пробки,  $\sigma_{zz}$  – диагональная компонента тензора напряжений.

Пока перепад давления  $p(t)$  невелик, материал пробки удерживается в состоянии прилипания к стенке трубы

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} < s_0, \quad (2)$$

где  $s_0$  – задаваемая постоянная сухого трения.

Необратимые деформации в материале накапливаются с начала процесса деформирования в форме деформаций ползучести. Для их описания применяется степенной закон ползучести Нортона [5]

$$\gamma = \epsilon^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma}, \quad V(\Sigma) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (3)$$

В зависимостях (3)  $\gamma = \epsilon^v$  – тензор скоростей деформаций ползучести,  $\sigma_i$  – главные напряжения,  $B$  и  $n$  – зависящие от температуры параметры ползучести материала.

Необратимое деформирование материала вызывает изменение его температуры, для которой примем начальное и граничные условия:

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \theta(R, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

В условиях (4)  $\theta = T_0^{-1}(T - T_0)$ ,  $T$ ,  $T_0$  – текущая температура и комнатная температура.

При дальнейшем увеличении перепада давления наступает момент, когда неравенство (2) перестает выполняться и материал начинает

проскальзывать в окрестности стенки трубы. Поэтому условие (2) заменяется условием проскальзывания

$$(\sigma_{rz} + s_0 + \xi v)|_{r=R} = 0, \quad (5)$$

в котором  $\xi$  – постоянная вязкого трения. При трении о стенку трубы материал нагревается, поэтому вместо второго условия (4) для температуры примем следующее

$$\theta(R, t) = \gamma_1 u(R, t). \quad (6)$$

Здесь  $\gamma_1$  – задаваемая постоянная.

В момент времени  $t_1$  напряженное состояние выходит на поверхность текучести [6]

$$f(\sigma_i, y_k, k) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max|y_k|. \quad (7)$$

В соотношении (7)  $y_k$  – главные значения тензора  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ ,  $k$  – предел текучести,  $\eta$  – коэффициент вязкости ( $k$  и  $\eta$  зависят от температуры),  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  – тензор скоростей пластических деформаций. С момента времени  $t_1$  в материале начинается вязкопластическое течение.

### **Заключение**

В работе получено решение связанной краевой задачи о продавливании пробки в круглой недеформируемой трубе под действием переменного перепада давления. Рассмотрены неизотермические процессы ползучести, возникновения и развития вязкопластического течения в материале пробки при возрастающем перепаде давления. Далее изучен процесс дальнейшего развития вязкопластического течения в материале при постоянном и убывающем перепаде давления. Исследованы процессы торможения течения в материале при дальнейшем уменьшении перепада давления, разгрузки материала после остановки течения и остывания материала после полного снятия нагружающих усилий.

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFW-2021-0005, FFW-2022-0002).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201. – EDN YVCTGS.
2. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с. – ISBN 978-5-8044-1423-9.
3. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк //



Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278. – DOI: 10.7868/S0869565216270086. – EDN WKDEDR.

4. Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764-766. – EDN OOOIPJ.

5. Norton, F. H. The Creep of Steel at High Temperatures / F. H. Norton – New York: McGraw Hill Book Company, 1929. – 110 p.

6. Знаменский, В. А. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах / В. А. Знаменский, Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 114-118.

УДК 004.8

**Кожевникова Татьяна Владимировна**, научный сотрудник, ВЦ ДВО РАН  
**Kozhevnikova Tatyana Vladimirovna**, Researcher, CC FEB RAS

**Шамурина Анна Игоревна**, кандидат технических наук, научный сотрудник, ВЦ ДВО РАН

**Shamurina Anna Igorevna**, Candidate of Engineering Sciences, Researcher, CC FEB RAS

**Беспятчук Евгений Евгеньевич**, бакалавр, ХИИК СибГУТИ

**Bespyatchuk Evgeny Evgenievich**, Bachelor, KII SibSUTI

**Окладников Владимир Евгеньевич**, бакалавр, ДВГУПС

**Okladnikov Vladimir Evgenievich**, Bachelor, FESTU

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ С ДАННЫМИ ДЗЗ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РАСТИТЕЛЬНОГО ПОКРОВА ТЕРРИТОРИИ**

## **MATHEMATICAL METHODS AND INFORMATION TECHNOLOGIES FOR WORKING WITH REMOTE SENSING DATA TO ASSESS THE STATE OF THE VEGETATION COVER OF THE TERRITORY**

**Аннотация.** В работе рассматриваются информационные технологии и математические методы анализа данных ДЗЗ для мониторинга экологического состояния территории горнопромышленных работ зоны вокруг п.г.т. Солнечный. Описываются технологии получения данных из сервиса BEGA-Science на изучаемую территорию, формирование рабочих таблиц с восполнением недостающих данных, первичная обработка данных и их визуализации, проверяется предположение о сходствах и различиях состояния растительного покрова полигонов территории на основе индекса растительности и водного индекса.

**Abstract.** The paper considers information technologies and mathematical methods of remote sensing data analysis for monitoring the environmental condition of the mining area around the Solnechny town. The technologies of obtaining data from the VEGA-Science service to the studied territory are described, the formation of work tables with the completion of missing data, the primary processing of data and their visualization, hypotheses about the similarities and differences of polygons of the territory based on vegetation and water index indices are tested.

**Ключевые слова:** информационные технологии, дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ), спутниковые снимки, статистический анализ.

**Keywords:** information technologies, remote sensing of the Earth (remote sensing), satellite images, statistical data analysis.

### **Введение**

В настоящее время информационные технологии обработки данных и математические методы анализа информации являются одними из инструментариев осуществления мониторинга за состоянием природной среды, в частности, территории промышленной деятельности горных предприятий. Данные спутниковых систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) практически незаменимы при решении широкого спектра различных задач, связанных с мониторингом природной среды и антропогенных факторов. Широко используются данные из сервиса VEGA-Science, в котором хранятся многолетние архивы спутниковых данных и получаемые на их основе информационные продукты [1].

В статье рассматривается комплекс математических методов и информационных технологий, позволяющих получить информацию о состоянии и динамике состояния растительного покрова территории в зоне промышленных работ на примере зоны вокруг п.г.т. Солнечный. На основе методов и информационных технологий делается вывод о влиянии техногенных объектов на состояние растительного покрова территории.

### **Исходные данные и методы**

Исходными данными для поставленной задачи являются данные ДЗЗ для территории п.г.т. Солнечный, а также данные, полученные из сервиса VEGA-Science, входящего в состав информационных систем дистанционного мониторинга Созвездие–Вега.

Анализ данных включает: описание и визуализация данных, предобработка и восполнение недостающих данных, диагностический и предсказательный анализ.

Основная информация, получаемая зондированием Земли это значение цветовых каналов, температурных, а также средне инфракрасных спектров. На основе значений каналов можно проводить вычисление показателей индексов. Среди основных индексов выделяют NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) и NDWI (Normalized Difference Water Index) являющимися растительным и водным индексом соответственно. Вычисление индексов

помогает интерпретировать спутниковые данные, позволяя выделить различные типы поверхности, оценить состояние растительности и водоёмов [2].

Для получения информации о состоянии и динамике состояния растительного покрова территории в зоне промышленных работ вокруг п.г.т. Солнечный предлагается:

- 1) Составить алгоритм для извлечения данных получаемых при использовании спутниковых снимков.
- 2) Провести первичный анализа данных.
- 3) Разработать алгоритм кластерного анализа данных.
- 4) Реализовать программное обеспечение для поставленных задач.

Первым этапом решения поставленной задачи является получение данных индексов NDVI и NDWI по исследуемой территории за период с 2001 по 2023 гг. Следует отметить, что данные берутся по 54 объектам вблизи п.г.т. Солнечный на 128 день года. Данные о состоянии территории были получены из сервиса BEGA-Science или рассчитаны с использованием инструментов Google Earth Engine [3].

Для систематизации данных о состоянии растительного покрова исследуемой территории проведен кластерный анализ данных на основе индексов NDVI и NDWI. В качестве метода кластеризации был выбран метод k-средних (k-means). Этот метод разбивает исследуемые объекты в векторном пространстве на заранее поставленное количество кластеров. Идея заключается в том, чтобы выбрать k начальных центроид, после чего на каждой следующей итерации проводить расчёт центра масс (средние значения всех объектов, принадлежащих конкретному кластеру) центроиды. Затем присваиваются новые значения центроидам, полученные из расчёта центра масс. Эти шаги повторяются до тех пор, пока центроиды не перестанут изменяться. В качестве параметры масс были выбраны средние значения индексов NDVI и NDWI, для каждого объекта рассчитанные за все года выборки.

### **Результаты и обсуждение**

Проведенное исследование позволило выявить территории, схожие по состоянию растительного покрова. Проводилось разбиение на пять и три кластера. Оптимальным является разбиение на три кластера. Разбиение на пять кластеров признано излишней детализацией. Применение метода кластерного анализа k-средних позволило выделить репрезентативные группы объектов, что упростило процесс мониторинга, так как вместо отслеживания всех объектов, стало возможным фокусироваться на ключевых представителях каждого кластера [4].

Графическое представление результатов кластерного анализа по индексам NDVI для трёх кластеров приведён на рисунке 1.

Для прогноза значений индексов выбран алгоритм «пророк» (prophet). Алгоритм позволяет спрогнозировать тенденцию изменений данных (рисунок 2).

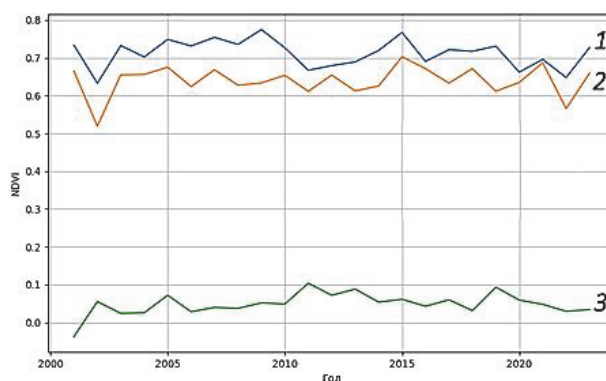


Рисунок 1 – Изменение NDVI по годам  
(номер линии на графике соответствует номеру кластера)

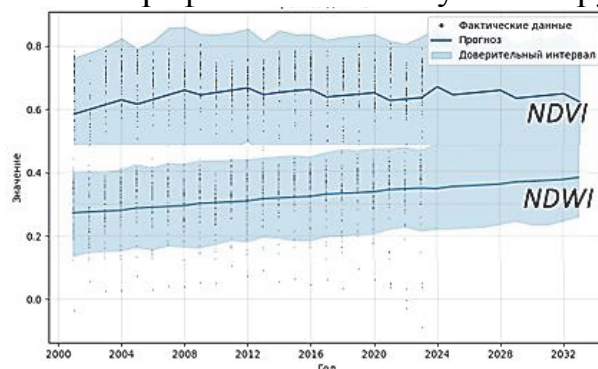


Рисунок 2 – Прогноз значений индексов NDVI и NDWI

По полученным графикам можно сделать выводы о росте каждого индекса, что позволяет предположить тенденцию к постепенному восстановлению растительного покрова территории.

### Заключение

Рассмотрена возможность использования вегетационного и водного индексов (NDVI и NDWI) для оценки состояния растительного покрова на примере территории вблизи п.г.т. Солнечный, на которой расположены объекты горной промышленности (хвостохранилища). Выдвинута гипотеза о том, что наличие техногенных объектов влияет на состояние растительного покрова территории. В процессе исследования не удалось подтвердить гипотезу о негативном влиянии хвостохранилища на состояние растительности. Данные переданы экологами для дальнейших исследований.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Галченко, Ю. П. Методика геоинформационного мониторинга природно-технических систем на основе данных дистанционного зондирования / Ю. П. Галченко, Г. В. Калабин, Ю. А. Озарян // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2020. – № 1. – С. 68-78. – DOI 10.46689/2218-5194-2020-1-1-68-78. – EDN TRYLOC.

2. Агуров, Л. П., Огнева, М. В. Анализ эффективности и оптимизация алгоритма k-средних / Л. П. Агуров, М. В. Огнева // КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. — Саратов:ИЦ "Наука" (Саратов), 2018. — С. 11-14.

3. Павлова К.Т., Кожевникова Т.В. Разработка алгоритма исследования техногенного объекта в районе п.г.т. Солнечный по данным ДЗЗ. В сборнике: Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления. Материалы VII Международной научно- практической конференции. 2023. С. 155-158.

4. Бордаков, А. С., Кожевникова, Т. В. Статистические методы обработки данных экологического состояния территории корфовского каменного карьера / А. С. Бордаков, Т. В. Кожевникова // FAR EAST MATH - 2023. — Хабаровск:Тихоокеанский государственный университет, 2024. — С. 59-63.

УДК 629.124.791.2.039

**Козин Виктор Михайлович**, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий ФГБУН Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре

**Kozin Victor Mikhailovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Laboratory of Problems of Creation and Processing of Materials and Products, Institute of Machine Science and Metallurgy, Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences, Komsomolsk-na-Amure

**Верещагин Владислав Юрьевич**, ст. преподаватель кафедры «Технология машиностроения» Новосибирского государственного технического университета

**Vereshchagin Vladislav Yu.**, assistant professor Department of Technology of Mechanical Engineering, Novosibirsk State Technical University

## **ВЛИЯНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СНЕГА НА УРОВЕНЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ, ДЕФОРМИРУЕМОМ РЕЗОНАНСНЫМИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ**

## **INFLUENCE OF PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF SNOW ON THE STRESS LEVEL IN ICE COVER DEFORMED BY RESONANT FLEXURAL-GRAVITY WAVES**

**Аннотация.** Приведены зависимости для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова со слоем снега, рассматриваемого как слой вязкой жидкости. Представлены результаты расчетов напряжений, возникающих в заснеженном ледяном покрове при различных физико-механических свойствах снежного покрова под действием нагрузки, движущейся с резонансной скоростью.

**Abstract.** Dependencies are presented for analyzing the stress-strain state of an ice cover with a layer of snow, considered as a layer of viscous liquid. The results of calculations of stresses arising in a snow-covered ice cover for various

physical and mechanical properties of the snow cover under the influence of a load moving at a resonant speed are presented.

**Ключевые слова:** резонансный метод разрушения льда, снежный и ледяной покровы, напряжения.

**Keywords:** resonant method of ice destruction, snow and ice cover, stress.

### **Введение**

Ограниченные невозможности использования для разрушения ледяного покрова традиционных технологий с применением ледоколов в сложных ледовых условиях обуславливают необходимость поиска новых средств и методов решения различных ледотехнических задач. К ним можно отнести: разрушение ледяного покрова на мелководье, когда глубина акватории оказывается не доступной для ледоколов из-за их осадки; разрушение заторов и зажоров во время весенних ледоходов с целью предотвращения разрушительных наводнений из-за их низкой эффективности; разрушение льда на больших площадях при обслуживании ГЭС и вскрытии ледяного покрова водохранилищ и заливов рек с целью более раннего открытия навигации из-за их низкой производительности; околка маломерных судов, вмерзших в ледяной покров, т.к. при использовании в таких случаях ледоколов возникают опасные для обеспечения прочности судов силы бокового сжатия и пр.

Расширить их возможности можно с помощью судов на воздушной подушке (СВП) при их движении по льду со скоростью резонансных ИГВ [1], т.е. резонансным методом (РМРЛ). На его эффективность (толщину разрушаемого льда) влияют различные ледовые условия ледовой обстановки: ледовое растяжение–сжатие; подледное течение; физико–механические свойства льда; ширина акватории; близость береговой кромки к месту выполнения ледокольных работ и ее форма; наличие во льду локальных неоднородностей в виде майн, свободных кромок льда или сквозных раскрытых трещин и разводий; заторошенность льда и ориентация гряды торосов по отношению к направлению движения судна; наличие подводных островов, приводящих к возникновению гидроударов при разрушении льда ИГВ; трансформация параметров ИГВ, возбуждаемых движущимися нагрузками с их выходом со льда на берег и последующим сходом с него; гидрология русла водоема; история ледостава и пр. Как показали выполненные исследования [1], основными из них, т.е. в большей степени влияющие на эффективность РМРЛ являются наличие снежного покрова. При этом, физические свойства снежного покрова могут меняться в достаточно широких пределах. Особенно влияют такие характеристики как вязкость и плотность снежного покрова. В связи с этим данная работа посвящена исследованиям влиянию этих ледовых условий на НДС ледяного покрова от действия движущейся нагрузки.

### **Математическая постановка**

Для теоретического решения дифференциального уравнения деформирования бесконечной флотирующей ледяной пластины плотностью

$\rho_1$  рассмотрена задача о движении по ней системы поверхностных давлений. Предполагается, что вода – идеальная несжимаемая жидкость плотностью  $\rho_2$ , а ледяной покров моделируется вязко – упругой, изначально ненапряженной изотропной пластиной. Тогда:

Уравнение малых колебаний плавающей вязко – упругой ледяной пластины можно записать в виде [2]:

$$\frac{G_m h^3}{3} Q \left( 3P + \frac{GQ}{K} \right) \nabla^4 w = P \left( 3P + \frac{2GQ}{K} \right) \times \left( -q - \rho_2 g w - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \right) \quad (1)$$

где  $G_m$  – модуль упругости при сдвиге;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\nabla$  – оператор Набла;  $G = E/2(1 + \nu)$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент

Пуассона;  $K$  – модуль всестороннего сжатия;  $P$  и  $Q$  – линейные дифференциальные операторы [2], выбираемые в зависимости от принятой для льда реологической модели;  $h$  – толщина льда;  $w$  – вертикальное перемещение льда и воды;  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  – функция потенциала скорости жидкости, удовлетворяющая уравнению Лапласа  $\Delta \phi = 0$ . В качестве линейной вязко – упругой среды, имитирующей лед, принята среда, полученная из тел Максвелла и Кельвина, соединенных последовательно,  $K \rightarrow \infty$ . Снежный покров на льду моделируется в виде слоя вязкой жидкости с коэффициентом внутреннего трения  $\eta_c$ . Добавляя в дифференциальное уравнение изгиба ледяной пластины инерционные силы  $\rho_c h_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , и силы вязкости снежного покрова  $\eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w$ , получим уравнение малых колебаний плавающей вязко - упругой ледяной пластины с учетом влияния слоя снег и глубины воды [3]:

$$\frac{G_m h^3}{3} Q \nabla^4 w = P \left( -q - \rho_2 g w - (\rho_1 h + \rho_c h_c) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta_c h_c \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - \rho_2 w - \rho_2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \right), \quad (2)$$

Снежный покров, согласно работам [5, 6] моделируется вязким слоем толщиной  $h_c$  с плотностью  $\rho_c$  и коэффициентом вязкости  $\eta_c$ .

Для изучения влияния исследуемых физико-механических свойств снега на напряженное состояние ледяного покрова примем следующий известный диапазон их изменений в условиях поставленной задачи [7, 8]:  $\rho_c = 100 \div 600 \text{ кг/м}^3$ ,  $\eta_c = 10^4 \div 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Результаты расчетов этого влияния, полученные на основании решения уравнения (2), приведенного в работе [9], представлены на рис. 1, 2. В частности, на рис. 1 для разных значений вязкости снежного покрова при  $H = 5 \text{ м}$ ,  $h_c = 0,5 \text{ м}$  приведены зависимости  $\bar{\sigma}_x = \sigma_{x0}/\sigma_{xв}$ , ( $\sigma_{x0}$  – максимальные напряжения при  $\eta_c = 0$ ;  $\sigma_{xв}$  – максимальные напряжения при  $\eta_c \neq 0$ ).

Анализ кривых 1-3 на рис. 1 показывает, что уменьшение вязкости снежного покрова до  $\eta_c = 10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , как и следовало ожидать, ослабляет влияние снежного покрова на уровень изгибных напряжений, возникающих в ледяном покрове при изгибно-гравитационном резонансе [1]. С

увеличением вязкости снежного покрова до  $\eta_c = 10^8 \text{ Па} \cdot \text{с}$  влияние снежного покрова на уровень изгибных напряжений в ледяной пластине существенно возрастает. Таким образом, при использовании РМРЛ следует учитывать значительное влияние на его ледоразрушающую способность вязкостных свойств снега, т.е. существенно увеличивать нагрузку на лед.

Из зависимостей на рис. 2 следует, что плотность снежного покрова при ее изменении в рассмотренных пределах, практически не влияет на уровень изгибных напряжений, возникающих в ледяном покрове при изгибно-гравитационном резонансе [1], так как при наиболее вероятной плотности [7]  $\rho_c = 200 \div 400 \text{ кг/м}^3$ , видно, что ее влияние на изменение напряжений составляет не более 1,5 - 2%.

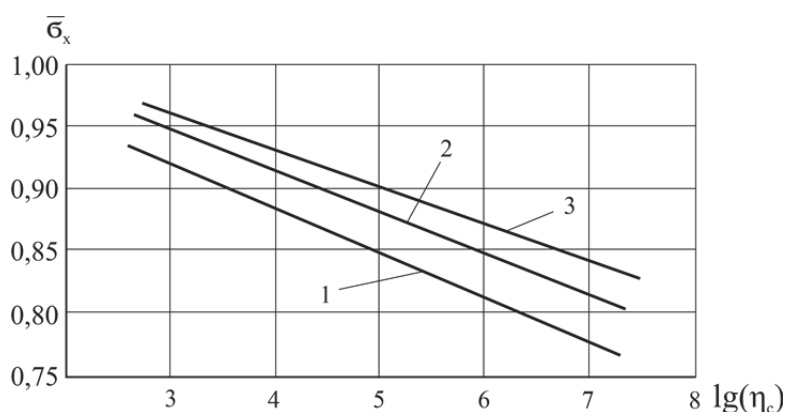


Рисунок - 1. Зависимость относительных максимальных напряжений от вязкости снежного покрова 1 –  $h = 0,25 \text{ м}$ ; 2 –  $h = 0,5 \text{ м}$ ; 3 –  $h = 0,75 \text{ м}$

Также при  $H = 5 \text{ м}$ ,  $h_c = 0,5 \text{ м}$  приведены зависимости относительных максимальных напряжений от плотности снежного покрова (рис.2).;  $\bar{\sigma}_x = \sigma_{x0}/\sigma_{xp}$ , ( $\sigma_{x0}$  – максимальные напряжения при  $\rho_c = 0$ ;  $\sigma_{xp}$  – максимальные напряжения при  $\rho_c \neq 0$ ).

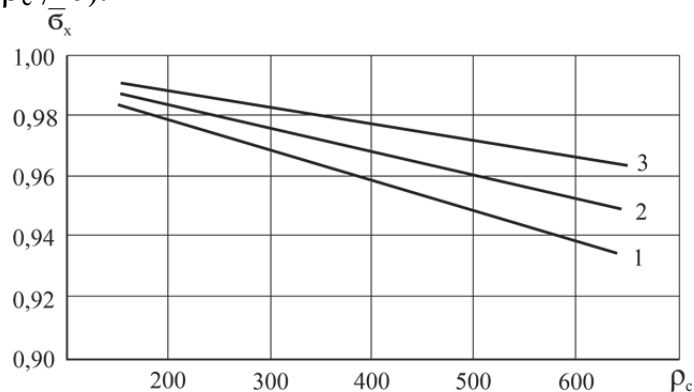


Рисунок - 2. Зависимость относительных максимальных напряжений от плотности снежного покрова 1 –  $h = 0,25 \text{ м}$ ; 2 –  $h = 0,5 \text{ м}$ ; 3 –  $h = 0,75 \text{ м}$

### Заключение

На основании выполненных расчетов для реальных ледовых условий, при которых могут эксплуатироваться существующие и перспективные СВП при реализации РМРЛ с целью решения различных ледотехнических задач, возникает необходимость существенно корректировать известные



зависимости [4] для определения их ледоразрушающей способности. Так, отсутствие снежного покрова и выход с глубокой воды на мелководье ледоразрушающую способность судов можно существенно увеличить. Из этого следует, что, если на акватории, где планируется выполнение ледокольных работ с использованием РМРЛ, имеются мелководные участки чистые от снега, то работы по разрушению льда следует начинать с них. После образования на этих участках свободной кромки льда область разрушения ледяного покрова значительно проще расширить с меньшими энергозатратами, т.к. несущая способность ледяного покрова при наличии в нем раскрытых трещин, майн или открытых участков воды существенно, а иногда и в несколько раз, снижают его несущую способность [1].

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия естествознания 2007 – 355 С.
2. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические модели неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962 – 432 С.
3. Козин В.М., Земляк В.Л., Верещагин В.Ю. Влияние снежного покрова на параметры изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове. // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 3. С. 134–140.
4. Козин В.М. Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова // Изв. РАН. МТТ. 2023, № 3. с. 3–20.
5. Pogorelova A.V., Kozin V.M., Zemlyak V.L. The Effect of Snow on Ice Plate Deflections Generated by Moving Body under an Ice Plate // Proc 27th Int Offshore and Polar Eng Conf, San-Francisco, ISOPE. 2017. V.1. P. 1311–1318.
6. Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M. Body motion in liquid under ice plate with snow cover // Applied Ocean Research. 2019. V. 84. P. 32-37. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2018.12.014>
7. Лавиноведение: Учеб. пособие» К. Ф. Войтковского. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
8. Механические свойства снега / К.Ф. Войтковский ; АН СССР, Науч. совет по криологии Земли, Сиб. отд-ние, Ин-т мерзлотоведения. - Москва : Наука, 1977. - 126 с.
9. Козин В.М., Верещагин В.Ю. Зависимость напряженно-деформированного состояния заснеженного ледяного покрова от глубины воды в условиях изгибно-гравитационного резонанса. Морские интеллектуальные технологии. 2023. № 3, часть 1., с. 26–35.

УДК УДК 51-76:630\*232.43

**Колобов Алексей Николаевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Математического моделирования популяционных и экологических систем», Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН

**Kolobov Alexey Nikolaevich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of Laboratory «Mathematical modeling of population and ecological systems», Institute for Comprehensive Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Фрисман Ефим Яковлевич**, доктор биологических наук, профессор, член-корр., научный руководитель Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН

**Frisman Efim Yakovlevich**, Doctor of Biological Sciences, Professor, Corresponding Member, Scientific Director of the Institute for Comprehensive Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМОИЗРЕЖИВАНИЯ В ОДНОВОЗРАСТНЫХ НАСАЖДЕНИЯХ ПРИ РАЗНЫХ СХЕМАХ ПОСАДКИ ДЕРЕВЬЕВ**

### **STUDY OF SELF-THINNING PROCESSES IN EVEN-AGED STANDS UNDER DIFFERENT TREE PLANTING SCHEME**

**Аннотация.** В работе приводятся результаты исследования процессов самоизреживания в одновозрастных насаждениях при разных схемах посадки. Показано, что для разных схем посадки критическое значение коэффициента конкуренции, при котором возникает самоизреживание, соответствует разному возрасту насаждения. Наибольший возраст насаждения, при котором достигается критическое значение коэффициента конкуренции, соответствует равноудаленному расположению деревьев, то есть шестигранной схеме посадки.

**Abstract.** The paper presents the results of a study of self-thinning processes in even-aged plantings under different planting schemes. It has been shown that for different planting schemes, the critical value of the competition coefficient at which self-thinning occurs corresponds to different ages of the planting. The greatest age of the planting at which the critical value of the competition coefficient is achieved corresponds to an equidistant arrangement of trees, that is, a hexagonal planting pattern.

**Ключевые слова:** Имитационная модель, процесс самоизреживания, одновозрастной древостой, схема посадки, коэффициент конкуренции.

**Keywords:** Simulation model, self-thinning process, even-aged forest stand, planting scheme, competition coefficient.

## **Введение**

Процессы самоизреживания древостоя определяются напряженностью конкурентных отношений и зависят от густоты насаждения и взаимного расположения деревьев. Чем выше начальная густота насаждения, тем раньше возникает процесс изреживания в силу того, что раньше происходит смыкание крон, усиливая напряженность конкурентных отношений. При этом одинаковое число деревьев можно расположить разными способами, что также влияет на распределение ресурсов и, соответственно, отмирание деревьев в результате внутривидовой конкуренции.

Процессы самоизреживания являются важным фактором при создании искусственных лесонасаждений, возникновение которых приводит к уменьшению общего запаса древесины. В этом случае для получения максимального запаса древесины, необходимо подобрать такую оптимальную схему посадки деревьев при которой процессы самоизреживания возникают после того как древостой достиг определенного класса крупности или возраста технической спелости. В связи с этим возникают задачи, направленные на исследование процессов самоизреживания в зависимости от взаимного расположения деревьев и начальной густоты древостоя.

## **Материалы и методы**

Для решения поставленных задач использовали разработанную имитационную модель динамики древесных сообществ [1]. Моделирование динамики древостоя складывается из описания роста каждого дерева на участке с учетом его видовых характеристик и локально доступных ресурсов. Деревья размещены на площадке с заданными пространственными координатами и оказывают взаимное влияние друг на друга через конкуренцию за световые ресурсы. Такой подход позволяет легко имитировать различные схемы лесопосадок, а также удалять часть деревьев на любом шаге моделирования.

Настройка параметров модели осуществляется на основе стандартных данных лесной таксации, большинство из которых можно найти в существующих лесотаксационных справочниках для различных видов насаждений. В качестве исследуемого вида рассматривали ель аянскую, которая по степени распространения и хозяйственному значению является одной из преобладающих древесных пород на территории Дальневосточного региона. Оценка параметров модели производилась на основе данных таблиц хода роста нормальных еловых насаждений 2 класса бонитета [2]. При этом рассматривая пространственную структуру насаждения, учитывался тот факт, что саженцы не являются одинаковыми, имея различную степень конкурентоспособности в зависимости от индивидуальных свойств особи.

## **Обсуждение результатов моделирования**

На рисунке 1 показаны результаты моделирования динамика численности древостоя для прямоугольной и шахматной схем посадки. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что в случае

одинаковой начальной густоты насаждения процесс самоизреживания древостоя при прямоугольной схеме посадки возникает раньше, чем при шахматной схеме посадки (рис. 1 а). Напряженность конкурентных отношений в первом случае оказывается выше. Если уменьшить начальную густоту древостоя для прямоугольной схемы посадки, уменьшая, таким образом, напряженность конкурентных отношений, изреживание в обоих случаях происходит одновременно. Таким образом, показано, что шахматная схема посадки позволяет получить больший запас древесины определенного класса крупности (рис. 1 б).

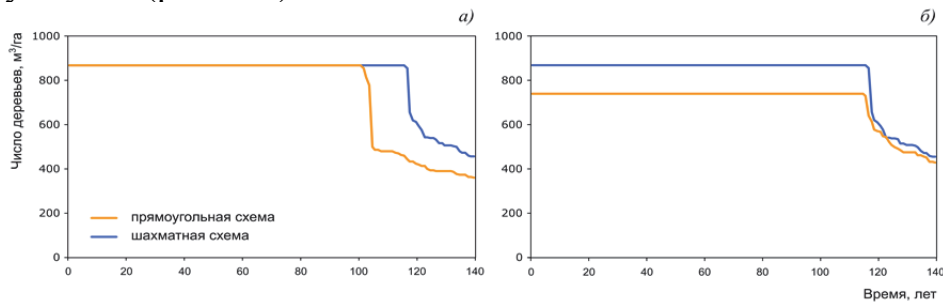


Рисунок 1 – Динамика численности древостоя для прямоугольной и шахматной схем посадки при одинаковой (а) и разной (б) начальной густоте насаждения

Далее исследовали напряженность конкурентных отношений в зависимости от пространственного расположения деревьев. Для этого использовали коэффициент конкуренции, который выражается следующей формулой, предложенной в работе [3]:

$$R_i = \prod_{i \neq j} R_{ij}, \quad R_{ij} = e^{-b_{ij}}, \quad b_{ij} = \begin{cases} d_j \cdot \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{r_0} \right), & r_{ij} < r_0 \\ 0, & r_{ij} \geq r_0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $R_{ij}$  - конкурентное воздействие  $j$ -го дерева на  $i$ ;  $d_j$  - диаметр  $j$ -го дерева;  $r_{ij}$  - расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м деревом;  $r_0$  - максимальное расстояние конкурентного взаимодействия. При записи коэффициента конкуренции предполагается, что влияние одного дерева на другое является функцией их размеров и расстояния между ними. Совместное влияние соседних деревьев учитывается в мультипликативной форме.

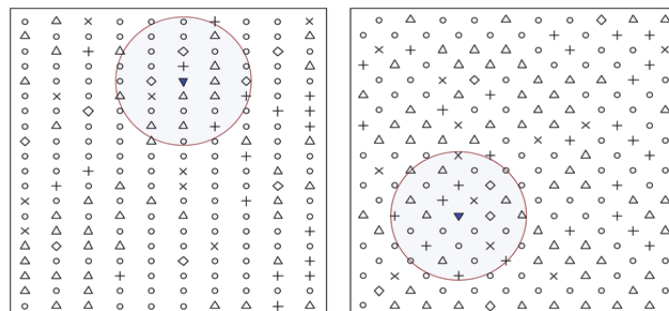


Рисунок 2 – Вычисление коэффициента конкуренции для шахматной и прямоугольной схемы посадки. Значки - деревья разного размера

На рисунке 2 показана шахматная и прямоугольная схема посадки при одинаковой начальной численности деревьев за один шаг до возникновения процесса изреживания. Возраст насаждения в первом случае составил 101 год, во втором 116 лет. Сплошной заливкой обозначены наименьшие по размеру деревья (наиболее угнетенные), которые отпадают на следующем шаге моделирования. Коэффициент конкуренции для этих деревьев при радиусе взаимодействия  $r_0=10$  м, составил:  $R_i=0.64$  - прямоугольная схема,  $R_i=0.63$  - шахматная схема.

### **Заключение**

Результаты исследования показали что для разных схем посадки критическое значение коэффициента конкуренции соответствует разному возрасту насаждения. Наибольший возраст насаждения, при котором достигается критическое значение коэффициента конкуренции  $R_i$ , соответствует равноудаленному расположению деревьев, то есть шестигранной схеме посадки. Следовательно, такая схема посадки является оптимальной для получения максимального запаса древесины.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Kolobov A.N., Frisman E.Ya. Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands / A.N. Kolobov, E.Ya. Frisman // Ecological Complexity. – 2016. – V. 27. – P. 29–39. – DOI: 10.1016/j.ecocom.2015.10.002
2. Общесоюзные нормативы для таксации лесов / В.В. Загребов, В.И. Сухих, А.З. Швиденко, Н.Н. Гусев, А.Г. Мошкалев. – М.: Колос, 1992. – 195 с.
3. Борисов А.Н., Иванов В.В. Имитационное моделирование динамики темнохвойных древостоев при выборочных рубках / А.Н. Борисов, В.В. Иванов // Хвойные бореальной зоны. – 2008. – Т. XXV. – С. 135–140.

УДК 004.94

**Костиков Сергей Александрович**, студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

Kostikov Sergei Alexandrovich, student, Komsomolsk-na-Amure State University

### **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕНЫ ТРОМБА В КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

### **FORECASTING THERMAL CHARACTERISTICS OF A TROMBE WALL IN A COMBINED HEAT SUPPLY SYSTEM USING MATHEMATICAL MODELING**

**Аннотация.** На сегодняшний день в мировом секторе теплоснабжения малоэтажной застройки растет доля использования таких солнечных пассивных систем отопления как Стена Тромба. Очень часто возникают ситуации, когда на одной широте местности солнечная активность и средняя

температура наружного воздуха в отопительный период могут значительно отличаться друг от друга. В одном случае количество падающего солнечного излучения будет достаточно для обеспечения требуемым количеством тепловой энергией, а в другом случае стена Тромба будет использоваться только как дополнительный источник тепла. В связи с чем, возникает острая необходимость в прогнозировании и оценке возможностей применения стены Тромба в комбинированной системе теплоснабжения. В данной статье предложена математическая модель комбинированной системы теплоснабжения, которая позволяет спрогнозировать тепловые характеристики стены Тромба при совместной работе с основным источником тепла. Результатами решения в разработанной математической модели являются тепловая эффективность работы стены Тромба и количество сэкономленного энергоносителя за расчетный период.

**Abstract.** Today, in the global sector of heat supply for low-rise buildings, the share of using such solar passive heating systems as the Trombe Wall is growing. Very often, there are situations when at the same latitude of a location, solar activity and the average outdoor air temperature during the heating season can differ significantly from each other. In one case, the amount of incident solar radiation will be sufficient to provide the required amount of thermal energy, and in another case, the Trombe Wall will be used only as an additional heat source. In this regard, there is an urgent need to predict and evaluate the possibilities of using the Trombe Wall in a combined heat supply system. This article proposes a mathematical model of a combined heat supply system that allows predicting the thermal characteristics of the Trombe Wall when working together with the main heat source. The results of the solution in the developed mathematical model are the thermal efficiency of the Trombe Wall and the amount of fuel saved during the calculation period.

**Ключевые слова:** математическая модель, стена Тромба, компьютерное моделирование.

**Keywords:** mathematical model, Trombe wall, computer modeling.

### **Введение**

На сегодняшний день широко распространено использование пассивных солнечных систем отопления для обогрева помещений в малоэтажном строительстве. Среди таких пассивных солнечных систем отопления наиболее известным является стена Тромба. Эффективность и целесообразность использования стены Тромба зависит от множества факторов: местоположение, климатические условия, особенности рельефа и т.д. В связи с чем, возникает проблема прогнозирования тепловых характеристик для проектируемой стены Тромба. Анализ существующей литературы показывает [1], что данная проблема особенно остро стоит в холодных климатических условиях, где интенсивность падающего солнечного излучения будет недостаточной для полного обеспечения требуемым объемом тепловой энергии для обогрева помещений. В таком

случае необходимо использовать отопительный котел как основной источник тепла, а стену Тромба как дополнительный источник тепла.

Таким образом, возникает острая необходимость в прогнозировании тепловых характеристик стены Тромба в комбинированной системе теплоснабжения. Для решения данной проблемы наиболее целесообразно применять методы математического моделирования. В данной работе представлена математическая модель комбинированной системы теплоснабжения, которая позволяет спрогнозировать тепловые характеристики стены Тромба при совместной работе с основным источником тепла.

### Основная часть

На рисунке 1 представлена разработанная физическая модель процессов теплообмена, наблюдаемые в изучаемой стене Тромба со стеклоблоком [2].

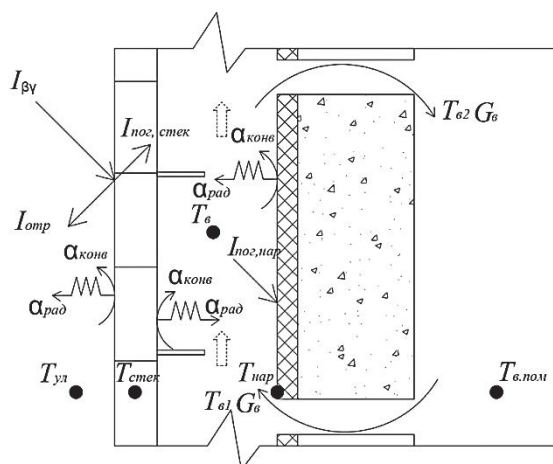


Рисунок 1 – Физическая модель стены Тромба со стеклоблоком

$I_{\beta\gamma}$  – суммарное падающее солнечное излучение на стену Тромба ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ),  $I_{\text{пог,стек}}$  – тепловой поток солнечной радиации, поглощаемый стеклоблоком ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ),  $I_{\text{отр}}$  – отраженный тепловой поток солнечной радиации от стеклоблока ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ),  $I_{\text{пог,нар}}$  – тепловой поток солнечной радиации, поглощаемый массивной стеной ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ),  $\alpha_{\text{конв}}$  – коэффициент конвективного теплообмена ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ),  $\alpha_{\text{рад}}$  – коэффициент лучистого теплообмена ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ),  $T_{\text{ул}}$  – температура наружного воздуха (К),  $T_{\text{стек}}$  – температура стеклоблока (К),  $T_{\text{в}}$  – средняя температура воздуха в воздушной прослойке (К),  $T_{\text{нар}}$  – температура наружной поверхности массивной стены (К),  $T_{\text{в.пом.}}$  – температура воздуха в помещении (К),  $T_{\text{в1}}$  – температура воздуха, поступающего в воздушную прослойку, где  $T_{\text{в1}} = T_{\text{в.пом.}}$  (К),  $T_{\text{в2}}$  – температура воздуха, выходящего из воздушной прослойки (К),  $G_{\text{в}}$  – производительность вентилятора (кг/с).

Тепловой баланс стеклоблока рассчитывается следующим образом [2,3]:

А) если  $I_{\beta\gamma} > 0$ :

$$I_{\text{пог,стек}} + \varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T_{\text{нар}}^4 - T'_{\text{стек}}{}^4) - \varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T'_{\text{стек}}{}^4 - T_{\text{ул}}^4) - \alpha_{\text{стек-ул}} (T'_{\text{стек}} - T_{\text{ул}}) + \alpha_{\text{в-стек}} (T_{\text{в}} - T'_{\text{стек}}) \quad (1)$$

Б) если  $I_{\beta\gamma} = 0$ :

$$Q_{\text{стек}} = \alpha_{\text{в-стек}} (T_{\text{в}} - T'_{\text{стек}}) + \varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T_{\text{нар}}^4 - T'_{\text{стек}}{}^4) - \alpha_{\text{стек-ул}} (T'_{\text{стек}} - T_{\text{ул}}) - \varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T'_{\text{стек}}{}^4 - T_{\text{ул}}^4) \quad (2)$$

где  $c_{\text{стек}}$  – удельная теплоемкость стеклоблока (Дж/кг·К),  $m_{\text{стек}}$  – масса стеклоблока (кг),  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенный коэффициент теплового излучения,  $C_0$  – излучательная способность серого тела (Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>),  $\alpha_{\text{стек-в}}$  и  $\alpha_{\text{в-стек}}$  – коэффициент теплоотдачи между воздухом в воздушной прослойке и внутренней поверхностью стеклоблока (Вт/(м<sup>2</sup>·К)),  $\alpha_{\text{ул-стек}}$  и  $\alpha_{\text{стек-ул}}$  – коэффициент теплоотдачи между наружным воздухом и наружной поверхностью стеклоблока (Вт/(м<sup>2</sup>·К)),  $T'_{\text{стек}}$  – исходная температура стеклоблока (К).

Уравнение теплового баланса воздуха в воздушной прослойке выглядит следующим образом [2,3]:

$$\left( \rho_{\text{в}} \delta_{\text{пр}} c_{\text{в}} + \frac{\alpha_{\text{нар-в}} \cdot t}{2} + \frac{\alpha_{\text{в-стек}} \cdot t}{2} \right) T_{\text{в2}} = \alpha_{\text{нар-в}} \left( T_{\text{нар}} - \frac{T_{\text{в1}}}{2} \right) t - \alpha_{\text{в-стек}} \left( \frac{T_{\text{в1}}}{2} - T_{\text{стек}} \right) t + \rho_{\text{в}} \delta_{\text{пр}} c_{\text{в}} T_{\text{в1}} \quad (3)$$

где  $\rho_{\text{в}}$  – плотность воздуха (кг/м<sup>3</sup>),  $c_{\text{в}}$  – удельная теплоемкость воздуха (Дж/кг·К),  $S$  – площадь (м<sup>2</sup>) ( $S = S_{\text{нар}} = S_{\text{стек}}$ ),  $\alpha_{\text{нар-в}}$  – коэффициент теплоотдачи между воздухом в воздушной прослойке и наружной поверхностью массивной стены (Вт/(м<sup>2</sup>·К)).

Для определения температуры  $T_{\text{в2}}$  необходимо воспользоваться следующим уравнением [2,3]:

$$T_{\text{в2}} = \frac{\alpha_{\text{нар-в}} \left( T_{\text{нар}} - \frac{T_{\text{в1}}}{2} \right) t - \alpha_{\text{в-стек}} \left( \frac{T_{\text{в1}}}{2} - T_{\text{стек}} \right) t + \rho_{\text{в}} \delta_{\text{пр}} c_{\text{в}} T_{\text{в1}}}{\left( \rho_{\text{в}} \delta_{\text{пр}} c_{\text{в}} + \frac{\alpha_{\text{нар-в}} \cdot t}{2} + \frac{\alpha_{\text{в-стек}} \cdot t}{2} \right)} \quad (4)$$

Для определения накопленной тепловой энергии материала при фазовом переходе необходимо использовать следующие уравнения:

А) если  $T_{\text{нар}} = T_{\text{плав}}$ :

$$Q_{\text{нагр}} = \lambda_{\text{нар}} m_{\text{плав}} \quad (5)$$

Б) если  $T_{\text{нар}} < T_{\text{тв}}$ :

$$Q_{\text{нагр}} = c_{\text{тв}} m_{\text{тв}} \Delta T_{\text{тв}} \quad (6)$$

В) если  $T_{\text{нар}} > T_{\text{жидк}}$ :

$$Q_{\text{нагр}} = c_{\text{жидк}} m_{\text{жидк}} \Delta T_{\text{жидк}} \quad (7)$$

где  $Q_{\text{нагр}}$  – аккумулированная тепловая энергия в массивной стене (Дж),  $T_{\text{плав}}$  – температура плавления (К),  $\lambda_{\text{нар}}$  – удельная теплота плавления материала с фазовым переходом (Дж/кг),  $m_{\text{плав}}$  – масса расплавленного материала с фазовым переходом (кг),  $c_{\text{тв}}$  и  $c_{\text{жидк}}$  – удельная теплоемкость



твердой и жидкой фазы материала ( Дж/кг · К),  $m_{\text{ТВ}}$  и  $m_{\text{жид}}$  – масса твердой и жидкой фазы материала (кг),  $\Delta T_{\text{ТВ}}$  и  $\Delta T_{\text{жидк}}$  – величина нагрева твердой и жидкой фазы материала (К).

$Q_{\text{нагр}}$  при различных эксплуатационных условиях определяется следующим образом [2]:

1) при  $I_{\text{пог,нагр}} > 0$ :

$$I_{\text{пог,нагр}} St - \varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T_{\text{нар}}^4 - T_{\text{стек}}^4) St + \alpha_{\text{в-нар}} (T_{\text{в}} - T_{\text{нар}}) St = Q_{\text{нагр}} \quad (8)$$

2) при  $I_{\text{пог,нагр}} = 0$ :

$$-\varepsilon_{\text{пр}} C_0 (T_{\text{нар}}^4 - T_{\text{стек}}^4) St - \alpha_{\text{нар-в}} (T_{\text{нар}} - T_{\text{в}}) St = -Q_{\text{нагр}} \quad (9)$$

где  $\alpha_{\text{в-нар}}$  и  $\alpha_{\text{нар-в}}$  – коэффициент теплоотдачи между воздухом в воздушной прослойке и наружной поверхностью массивной стены (Вт/(м<sup>2</sup> · К)),  $t$  – время (с).

Тепловой баланс воздуха в помещении можно представить следующим образом [3]:

$$\rho_{\text{в}} c_{\text{в}} L_{\text{пом}} S dT_{\text{в.пом.}}/dt = P_{\text{осн}} + G_{\text{в}} c_{\text{в}} (T_{\text{в2}} - T_{\text{в1}}) \quad (10)$$

где  $L$  – длина помещения (м),  $S$  – площадь стены Тромба (м<sup>2</sup>),  $P_{\text{осн}}$  – средняя тепловая мощность основного источника тепла для расчетного дня месяца (Вт),  $G_{\text{в}}$  – производительность вентилятора (кг/с).

Средняя тепловая мощность основного источника тепла с учетом тепловых поступлений от стены Тромба для расчетного месяца определялась следующим образом:

$$P_{\text{осн}} = Q_0^{\text{р}} - Q_{\text{солн}} k_{\text{пот}} \quad (11)$$

где  $Q_0^{\text{р}}$  – суммарные расчетные тепловые потери за расчетный месяц (Вт),  $Q_{\text{солн}}$  – суммарное количество падающего солнечного излучения на стену Тромба (Вт),  $k_{\text{пот}}$  – коэффициент, учитывающий потери солнечного излучения, падающего на массивную стену.

### Заключение

Разработанная математическая модель позволяет спрогнозировать динамику температурных изменений для каждого элемента стены Тромба и воздуха внутри обогреваемого помещения, а также определить мощность основного отопительного источника в установленный расчетный период. Результатами решения в данной математической модели являются тепловая эффективность работы стены Тромба и количество сэкономленного энерготоплива за расчетный период.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Kostikov S., Chao S., Yiqiang J. A review of the current work potential of a Trombe wall // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2020. V. 130. September. С. 1-15.
2. Zhongting H., Wei H., Jie J., Dengyun H., Song L., Hongbing C., Zhihe S. Comparative study on the annual performance of three types of building

integrated photovoltaic (BIPV) Trombe wall system // *Applied Energy*. 2017. V. 194. May. С. 81-93.

3. Yan L., Liqiang H., Yidong Y., Yinping F., Liu Y., Qinglong G. Effects of external insulation component on thermal performance of a Trombe wall with phase change materials // *Solar Energy*. 2020. V. 204. July. С. 115-133.

4. Simões N., Manaia M., Simões I. Energy Performance of Solar and Trombe Walls in Mediterranean Climates // *Energy*. 2021. V. 234. November. С. 1-12.

УДК 539.3

**Крылова Екатерина Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

**Krylova Ekaterina Yurievna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Saratov State University

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

**Murashkin Evgeniy Valerievich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

**Радаев Юрий Николаевич**, доктор физико-математических наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

**Radaev Yuri Nikolaevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

## ПЕРЕХОДНЫЕ МИКРОПОЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

## TRANSITIONAL MICROPOLAR MODELS OF ANISOTROPIC ELASTICITY

**Аннотация.** В работе на основании метода представления тензоров 4-го ранга посредством блоков двумерных матриц построены фигуры Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

**Abstract.** In this study, based on the method of the 4th ranks tensors representations by using blocks of two-dimensional matrices, Nye figures for an ultrasotropic microplastic elastic solid are composed. It is shown that only 4 independent constitutive constants enter ultrasotropic material: shear modulus of elasticity, Poisson's ratio, characteristic nano/microlength and single dimensionless constant.

**Ключевые слова:** ультраизотропный микрополярный континуум, потенциал напряжений, определяющие постоянные, фигуры Ная.

**Keywords:** ultraisotropic micropolar continuum, stress state potential, constitutive tensor, Nye's figure, Nye's cell, nano/microlength, nano/microscale.

### Введение

С развитием аддитивных технологий, производства новейших биоматериалов, усложнением хирургических вмешательств медицинское сообщество все чаще обращается к механикам (биомеханикам) с задачей выбора и обоснования вариантов лечения конкретных клинических случаев посредством математического моделирования. Таким образом, перед механикой континуума возникает проблема построения адекватных математических моделей деформирования биоматериалов, как материалов со сложной внутренней микроструктурой. В этом случае могут использоваться модели микрополярной упругости. Для классификации микрополярных моделей удобен метод матричного представления определяющих тензоров посредством фигур Ная [1]. Указанный метод был использован в цикле статей [2-4], где исследовались модели общего анизотропного, гемитропного и изотропного микрополярного упругого континуума. Показано, что определяющие тензоры для анизотропного случая содержат 171 независимую константу, гемитропного — 9, изотропного — 6. Для завершения классификации в данной работе отдельно рассмотрен случай ультраизотропного тела, компоненты определяющих тензоров которого инвариантны относительно любых мыслимых преобразований трехмерного пространства.

### Анизотропные микрополярные модели

Рассмотрим анизотропный микрополярный упругий потенциал напряжений  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i)$ , в расчете на единицу инвариантного элемента объема  $d\tau$ , который в декартовой системе координат можно представить в виде:

$$2\mathcal{U} = E_I \epsilon_{(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + E_{II} \epsilon_{(is)(lm)} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + E_{III} \epsilon_{(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + E_{IV} \epsilon_{(is)} \phi_i \phi_s + E_V \epsilon_{(is)} \kappa_i \kappa_s + E_{VI} \epsilon_{(is)} \phi_i \kappa_s + E_{VII} \epsilon_{(is)k} \epsilon_{(is)} \varphi_k + E_{VIII} \epsilon_{(is)k} \kappa_{(is)} \kappa_k + E_{IX} \kappa_{(lm)} \kappa_{(lm)} \varphi_k + E_X \epsilon_{(is)j} \epsilon_{(is)} \kappa_j, \quad (1)$$

где  $E_c$  ( $c = I, \dots, X$ ) — определяющие тензоры анизотропного микрополярного упругого тела;  $\epsilon_{(ij)}$  и  $\kappa_{(ij)}$  — симметричные составляющие тензоров деформаций и изгиба–кручения, соответственно;  $\phi_i$  и  $\kappa_i$  — векторы, ассоциированные с антисимметричными тензорами  $\epsilon_{[ij]}$  и  $\kappa_{[ij]}$  согласно:

$$\varphi_k = -1/2 \epsilon_{kis} \epsilon_{[is]}, \quad \kappa_k = \epsilon_{kis} \kappa_{[is]}, \quad (2)$$

$\epsilon_{kis}$  — символы перестановок.

Изотропное микрополярное упругое тело назовем ультраизотропным, если компоненты двух его определяющих тензоров инвариантны относительно любых изменений трехмерного Евклидова пространства

(можно также вести речь о преобразовании системы координат), т.е. являются тензорами с постоянными компонентами. Упругий потенциал напряжений  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \phi_i, \kappa_i)$ , в этом случае, представим в форме:

$$2\mathcal{U} = E_I^{(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + E_{II}^{(is)(lm)} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + E_{IV}^{(is)} \phi_i \phi_s + E_V^{(is)} \kappa_i \kappa_s, \quad (3)$$

Определяющие тензоры  $E_I^{(is)(lm)}$ ,  $E_{II}^{(is)(lm)}$ ,  $E_{IV}^{(is)(lm)}$ ,  $E_V^{(is)(lm)}$  в декартовой системе можно представить в виде [5, стр. 164–176]:

$$\begin{aligned} E_I^{(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + 1/2 c (\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), & E_{IV}^{(kj)} &= -c \delta_{kj}, \\ E_{II}^{(is)(lm)} &= a \delta_{is} \delta_{lm} + 1/2 c (\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), & E_V^{(kj)} &= -c \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, определяющие тензоры в (3) содержат 4 независимые определяющие постоянные  $a$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $c$ , связанные с материальными соотношениями:

$$a = 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad a = 2GL^2 c, \quad c = 2G, \quad c = 2GL^2, \quad (4)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $L$  — характерная нано/микродлина,  $c$  — постоянная, не имеющая физической размерности. Используем для матричного представления определяющих тензоров (3) метод Ная, подробно изложенный в [1, стр. 113–115]. Тогда тензоры 4-ого ранга  $E_a^{(is)(lm)}$  ( $a = I, II$ ) в матричной форме будут иметь следующий вид:

$$E_a^{KN} = \begin{bmatrix} a+c & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a+c & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}, \quad (6)$$

тензоры 2-ого ранга —  $E_b^{is} = \text{diag}(-c, -c, -c)$ , где  $a = b$  — III. Фигура Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела представлена на рисунке 1, где жирными отрезками соединены равные компоненты; Z означает симметрию числовых значений элементов фигуры относительно главной диагонали; • — отличные от нуля компоненты; ⊗ — компоненты, вычисляемые по правилу  $1/2(E_a^{(11)(11)} - E_a^{(11)(12)})$ ; ⊙ — компоненты, вычисляемые по правилу  $(E_a^{(11)(22)} - E_a^{(11)(11)})$ ; ◦ — нулевые компоненты.

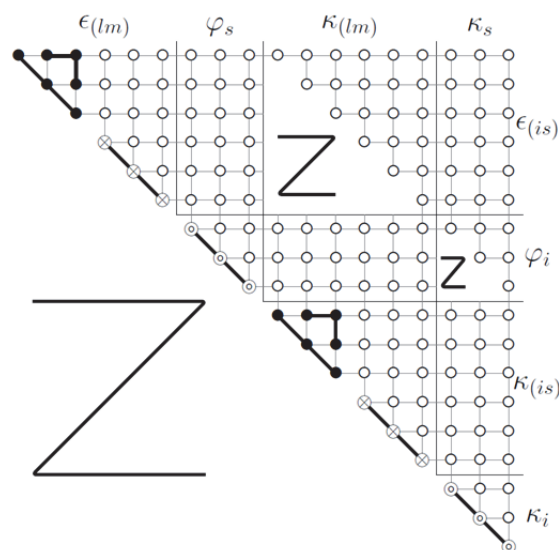


Рисунок 1 – Фигура Ная ультраизотропного микрополярного тела

### Заключение

В настоящей работе схема представления тензоров 4-го ранга посредством блоков двумерных матриц, предложенная Наем, применяется для определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого тела, что позволяет наиболее простым образом выяснить количество независимых определяющих констант для данного материала и установить возможное наличие/отсутствие связей между ними. Показано, что определяющие тензоры ультраизотропного микрополярного континуума содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности постоянная).

### Благодарности

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Nye, J. F. Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices /J. F. Nye Oxford: Clarendon Press, 1957. – 322+xv p. – ISBN 0198511655, 9780198511656.

2. Murashkin, E. V. Two-Dimensional Nye Figures for Some Micropolar Elastic Solids / E. V. Murashkin, Y. N. Radayev // Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58, No. 6. – P. 2254-2268. – DOI 10.3103/s0025654423700243. – EDN AIRHVE

3. Мурашкин, Е. В. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 109-122. – DOI 10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122. – EDN FKFRHA.

4. Мурашкин, Е. В. Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости/Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. – 2023. – № 3(57). – С. 100-111.– DOI 10.37972/chgpu.2023.57.3.009.

5. Гуревич, Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов / Г.Б. Гуревич. – М. Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.– 408 с. – ISBN 2100013541618.

УДК 330.4

**Кузора Станислав Сергеевич**, ассистент Департамента инноваций Политехнического института, Дальневосточный федеральный университет  
**Kuzora Stanislav**, PhD student of Department of Innovation, Far Eastern Federal University

## **ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИЙ ИННОВАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ**

## **SIMULATION MODELING OF THE METHODOLOGY FOR ASSESSING THE EFFICIENCY OF INNOVATION INFRASTRUCTURE**

**Аннотация.** Исследование посвящено реализации разработанной методики оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры современными средствами обработки информации. В качестве компьютерной программы выступает интерактивная среда MATLAB, пакеты расширения Fuzzy Logic Toolbox и Simulink. Результатом исследования является имитационная модель методики оценки.

**Abstract.** The research is devoted to the implementation of the developed methodology for assessing the performance of innovation infrastructure organizations by modern means of information processing. The computer program is an interactive environment MATLAB, extension packages Fuzzy Logic Toolbox and Simulink. The result of the study is a simulation model of the evaluation methodology.

**Ключевые слова:** математическое моделирование в экономике, имитационное моделирование, инновационное развитие, теория нечетких множеств, оценка эффективности.

**Keywords:** mathematical modeling in economics, simulation modeling, innovative development, fuzzy set theory, efficiency assessment.

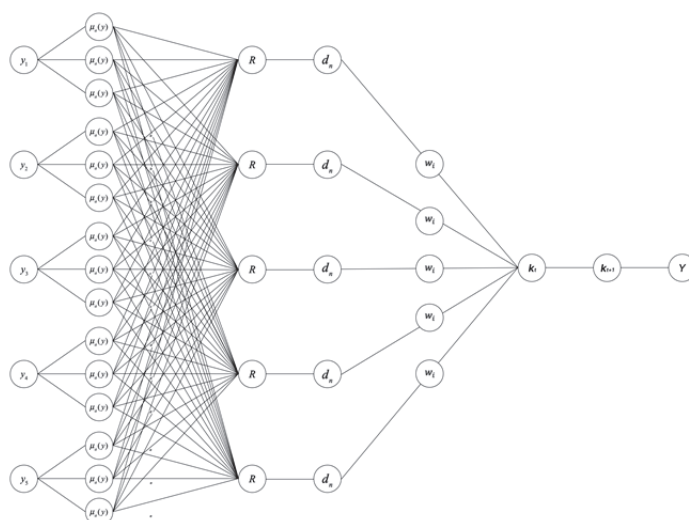
### **Введение**

В продолжении разработки методического подхода к оценке эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры в данной работе предлагается обратиться к составной его части, а именно к

имитационному моделированию. Напомним, что необходимость оценки упомянутого объекта исследования рассматривается с точки зрения определения стратегических целей инновационной модели развития [1].

### Основная часть

Одно из ранних исследований было посвящено использованию методов математического моделирования для оценки эффективности деятельности рассматриваемого типа организаций [2]. В результате дополнительного исследования был обоснован выбор инструментария оценки, позволяющего учитывать количественные и качественные показатели, весовые коэффициенты, а также факторы влияния [3]. Таким образом математический инструментарий оценки включает совокупное использование теории нечетких множеств и нечеткой логики, метода анализа иерархий, анализа временных рядов. Предложенный способ оценки представим в виде алгоритма на рисунке 1.



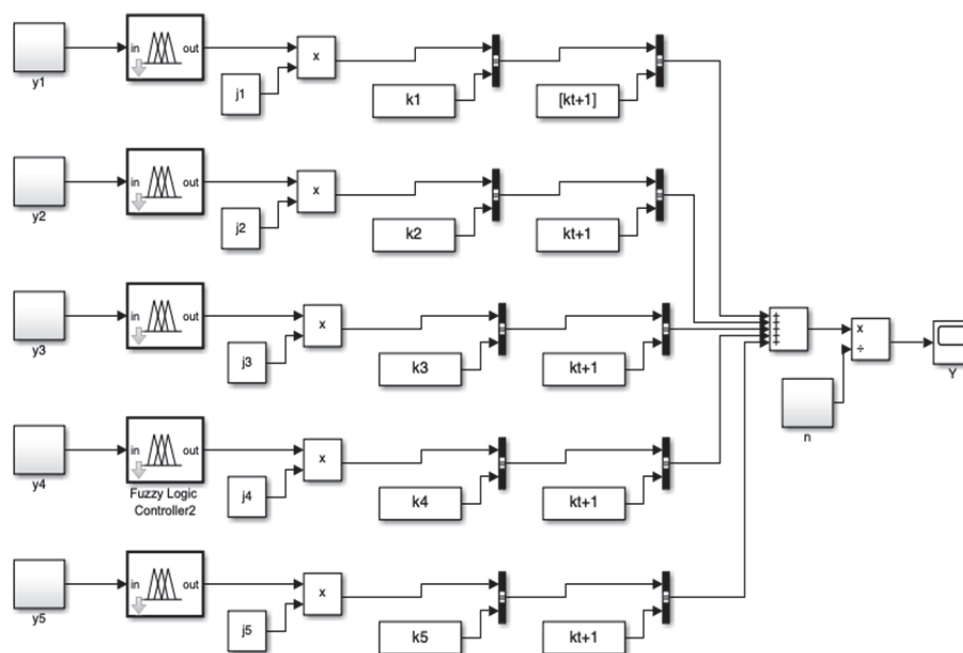
$y_n$  – показатель оценки;  $\mu_n(y)$  – функция принадлежности,  $R$  – правило,  
 $d_n$  – выходная переменная (показатель),  $w_i$  – вес показателя,  
 $k_t$  – внешний фактор влияния,  $k_{t+1}$  – прогнозное значение фактора влияния,  
 $Y$  – результат оценки.

Рисунок 1 – Смежный алгоритм нечеткого вывода оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры

Таким образом, представленный на рисунке 1 способ позволяет комплексно оценить эффективность деятельности интересующей организации. Однако применение данного способа является не самым оптимальным с точки зрения трудозатрат.

На сегодняшний день компьютерное моделирование является неотъемлемой частью широкого спектра исследований. Специализированные программы, фреймворки, библиотеки дают возможности по ускорению обработки и передачи информации, визуализации данных, гибкому использованию разных методов и подходов [4]. В связи с перечисленными преимуществами компьютеризации

воспользуемся интерактивной средой MATLAB, пакетами расширения Fuzzy Logic Toolbox и Simulink, для имитационного моделирования разработанной методики оценки [5]. Результат моделирования представим в виде рисунка 2.



$Y_n$  – показатель оценки; FLC – система нечеткого вывода,  $j_i$  – вес показателя,  $k_t$  – внешний фактор влияния,  $k_{t+1}$  – прогнозное значение фактора влияния,  $Y$  – результат оценки.

Рисунок 2 – Имитационная модель методики оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры

Принцип работы имитационной модели описывается следующим образом: 1) входные переменные от  $y_1$  до  $y_5$  принимают числовые значения; 2) вводное значение каждой переменной проходит через алгоритм нечеткого вывода; 3) переменным присваиваются весовые коэффициенты; 4) переменные учитывают факторы влияния; 5) присваиваются результаты прогнозных значений факторов влияния, 6) результат оценки выводится в виде графика.

### Заключение

На основании полученных результатов отметим целесообразность использования среды MATLAB, а именно таких пакетов расширения как Fuzzy Logic Toolbox и Simulink, в контексте реализации методики оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры.

### Благодарность

Благодарю Олейник Елену Борисовну, д.э.н., профессора Дальневосточного федерального университета за непрерывную поддержку при выполнении диссертационного исследования.



## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Соловьев, Д. Б. Методика оценки инновационной деятельности посредством гибких алгоритмов / Д. Б. Соловьев, С. С. Кузора // *Инновации*. – 2019. – № 6(248). – С. 78-87. – DOI 10.26310/2071-3010.2019.248.6.012.
2. Кузора, С. С. Использование методов математического моделирования для оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры / С. С. Кузора, Е. Б. Олейник // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки*. – 2023. – № 4(72). – С. 44-53. – DOI 10.52452/18115942\_2023\_4\_44.
3. Кузора, С. С. Методика оценки эффективности деятельности организаций инновационной инфраструктуры / С. С. Кузора, Е. Б. Олейник. // *Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences*. – 2024. – № 2.
4. Кузора, С. С. Современный инструментарий оценки организаций инновационной инфраструктуры / С. С. Кузора, Е. Б. Олейник // *Трансграничные рынки товаров и услуг: проблемы исследования : Сборник материалов V Международной научно-практической конференции, Владивосток, 09–10 ноября 2023 года. – Владивосток: Дальневосточный федеральный университет, 2023. – С. 226-228.*
5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021610649 Российская Федерация. Методика расчета оценки объектов инновационной деятельности : № 2020667657 : заявл. 22.12.2020 : опубли. 15.01.2021 / С. С. Кузора.

УДК 51-72, 517.972, 539.371

**Лазарев Нюргун Петрович**, д.ф.-м.н., г.н.с. НИИ математики СВФУ  
**Lazarev Niurgun Petrovich**, doctor of Physical and Mathematical Sciences, chief researcher, Research institute of mathematics, NEFU

## **ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С НАКЛОННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ**

## **THE PROBLEM OF CONTACT OF A TIMOSHENKO PLATE WITH AN INCLINED OBSTACLE**

**Аннотация.** Предложена новая математическая модель, описывающая контакт неоднородной пластины Тимошенко с наклонным препятствием. Пластина содержит жесткое включение. Предполагается, что в начальном состоянии заданная часть границы нижней поверхности пластины касается недеформируемого препятствия. Кроме того, предполагается, что поверхность препятствия составлена из прямолинейных отрезков (образующих), каждый из которых образует угол с плоскостью пластины,

соответствующей ее лицевой поверхности. Накладывается граничное условие типа Синьорини в виде неравенства, зависящего от коэффициента наклона или угла наклона препятствия. Соответствующая вариационная задача формулируется в виде минимизации функционала энергии над выпуклым множеством, учитывающим нелинейное условие непроникания типа неравенства. Показано, что задача имеет единственное решение.

**Abstract.** A new mathematical model describing a contact of a Timoshenko plate with an inclined obstacle is proposed. The plate contains a rigid inclusion. We assume that in the initial state a given part of the boundary of the plate bottom surface touches a non-deformable obstacle. Furthermore, we assume that the obstacle shape composed by rectilinear segments and each segment (generatrix) forms an angle with the plane of the plate corresponding to its front surface. A boundary condition of Signorini's type is imposed in the form of inequality, which depends on a slope coefficient or the obstacle inclination angle. A corresponding variational problem is formulated as a minimization of an energy functional over a convex set subject to a nonlinear non-penetration condition of inequality type. It is shown that the problem has a unique solution.

**Ключевые слова:** контактная задача, условие непроникания, вариационное неравенство, пластина Тимошенко.

**Keywords:** contact problem, non-penetration condition, variational inequality, Timoshenko plate

## Введение

Краевые задачи теории упругости с условиями типа неравенств, описывающие равновесие тел, успешно изучаются на основе вариационных неравенств [1-5]. Рассматриваемая задача относится к направлению исследований, в которых изучается контакт пластин по боковой грани [2,3], а также при моделировании адаптирован подход для пластин с наклонными трещинами [4,5].

## Основная часть

Для простоты предположим, что пластина имеет постоянную толщину  $2h$ . Предположим, что для недеформированного состояния пластины ее срединная плоскость совпадает с плоскостью  $Ox_1x_2$ . А именно, проекция пластины на срединную плоскость занимает ограниченную односвязную область  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma$ , которая состоит из двух непрерывных кривых  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma$ . Поэтому для трехмерного декартова пространства  $\{x_1, x_2, z\}$  множество  $\Omega \times [-h, h] \subset R^3$  соответствует пластине. Обозначим  $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$  обобщенные перемещения в точках срединной поверхности ( $x \in \Omega$ ), где  $W$  – горизонтальные (вдоль плоскости  $Ox_1x_2$ ) перемещения,  $w$  – вертикальные перемещения (прогибы) вдоль оси  $z$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  – углы поворота нормальных волокон.

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением случая возможного контакта по нижней лицевой поверхности, то для нижней поверхности имеем следующие значения

$$W^h(x, h) = W(x) - h\psi(x). \#(1)$$

Перейдем к основным соотношениям для упругой трансверсально-изотропной пластины Тимошенко (см. [6]). Выпишем выражения для следующих тензоров  $\{\varepsilon_{ij}(W)\}, \{\varepsilon_{ij}(\psi)\}$ :

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

Тензоры напряжений  $\{\sigma_{ij}(W)\}$  и моментов  $\{m_{ij}(\psi)\}$  выражаются (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам) следующим образом:

$$\sigma_{ij}(W) = \frac{3}{h^2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(W), \quad m_{ij}(\psi) = a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\psi), \quad i, j = 1, 2,$$

где ненулевые компоненты тензора упругих модулей  $A = \{a_{ijkl}\}$  равны

$$a_{iiii} = D, \quad a_{iijj} = D\kappa, \quad a_{ijij} = D \frac{1 - \kappa}{2} \quad (i \leq j) \quad i, j = 1, 2,$$

где  $D, \kappa$  – постоянные. Поперечные силы  $q = q(x) = (q_1, q_2)(x)$  определяются выражением

$$q_i(w, \psi) = \Lambda \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} + \psi_i \right), \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\Lambda$  – постоянная. Для заданных объемных сил  $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega)^5$  потенциальная энергия пластины Тимошенко, занимающей область  $\Omega$ , имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} B(\eta, \eta) - \int_{\Omega} F\eta,$$

значение  $B(\eta, \eta)$  определяется следующим выражением

$$B(\xi, \eta) = \sigma_{ij}(U) \varepsilon_{ij}(W) + q_i(u, \varphi) \left( \frac{\partial w}{\partial x_j} + \psi_i \right) + m_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\psi)$$

для  $\xi = (U, u, \varphi), \eta = (W, w, \psi)$ .

Введем пространства Соболева

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad H(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^5.$$

Условие возможного контакта части кромки пластины, соответствующей  $\gamma$ , с жестким препятствием введем по аналогии с подходом для пластины Кирхгофа-Лява [7], с учетом (1) выпишем:

$$Wv - h\psi v \leq kw \text{ на } \gamma, \quad Wv = w_i v_i, \quad \psi v = \psi_i v_i, \quad (2)$$

где  $k \in L^\infty(\gamma)$  – коэффициент, определяющий наклон препятствия. Следует отметить, что [8] рассматривает более общий случай для произвольных значений перемещений. В отличие от указанной работы, в данной работе предполагается, что искомые перемещения бесконечно малы, поэтому ограничения накладываются только в точках пластины ( $z = -h, x \in \gamma$ ), касающихся препятствия в исходном состоянии.

Жесткое включение будем задавать с помощью множества  $\omega \times [-h, h]$ , где  $\omega$  – подобласть, лежащая строго внутри  $\Omega$ . Перемещения для

точек жесткого включения зададим с помощью пространства  $R(\omega)$ , состоящего из функций  $\eta = (W, w, \psi)$ , удовлетворяющих в области  $\omega$

$$W = (c_1 + bx_2, c_2 - bx_1), \quad w = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \\ \psi = (-a_1, -a_2), \quad x \in \omega,$$

для некоторых вещественных постоянных  $c_1, c_2, b, a_0, a_1, a_2$ . С учетом условия непроникания и ограничений на перемещения, множество допустимых функций записывается в следующем виде

$$K = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega): \eta|_{\omega} \in R(\omega), \eta \text{ удовлетворяет (2)}\}.$$

Контактную задачу можно сформулировать как следующую задачу минимизации

$$\min_{\eta \in K} \Pi(\eta). \quad (3)$$

**Теорема.** Задача (3) имеет единственное решение.

При доказательстве теоремы (3) используется теорема Вейерштрасса, а также свойства положительной определенности билинейной формы  $\int_{\Omega} B(\eta, \eta)$ .

#### **Заключение**

В рамках данной работы было доказано существование решения контактной задачи для пластины Тимошенко с жестким включением.

#### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках Якутского отделения Регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований», соглашение № 075-02-2024-1441 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

#### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Khludnev, A.M, Analysis of Cracks in Solids /A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenکو. /WIT-Press, Southampton, Boston, - 2000.

2. Nikolaeva, N.A, Method of fictitious domains for Signorini's problem in Kirchhoff-Love theory of plates./ N.A. Nikolaeva.// J. Math. Sci. – 2017. - V. 221. – P. 872–882.

3. Lazarev, N.P, Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle./ N.P. Lazarev, H. Itou, N.V. Neustroeva // Jpn. J. Ind. Appl. Math. – 2016. – V.33(1) – P. 63–80.

4. Kovtunenکو, V.A, Equilibrium problem of a plate with an oblique cut./ V.A. Kovtunenکو, A.N. Leont'ev, A.M. Khludnev.// J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1998. – V. 39(2) – P. 302–311.

5. Lazarev, N.P, Equilibrium problem for a Timoshenko plate with an oblique crack./ N.P. Lazarev.// J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2013. –V. 54. – P. 662–671

6. Пелех Б.Л., Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью./Б.Л. Пелех.// Киев: Наук. думка, 1973.

7. Lazarev, N.P., An equilibrium problem for a Kirchhoff–Love Plate, contacting an obstacle by top and bottom edges./ N.P. Lazarev, G.M. Semenova, E.D. Fedotov.// Lobachevskii J. Math. – 2023. V. 44. – P. 614–619.

8. Kovtunenکو, V.A., Variational inequality for a Timoshenko plate contacting at the boundary with an inclined obstacle./ V.A. Kovtunenکو, N.P. Lazarev.// Phil. Trans. R. Soc. A. – 2024. – V. 382. P. 20230298.

УДК 538.913

**Лобанова Элиза Александровна**, студент, Дальневосточный федеральный университет, лаборант, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Lobanova Eliza Alexandrovna**, student, Far Eastern Federal University, laboratory assistant, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

**Стронгин Владислав Сергеевич**, аспирант, Дальневосточный федеральный университет, инженер-исследователь, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Strongin Vladislav Sergeevich**, graduate student, Far Eastern Federal University, research engineer, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

**Черкасов Михаил Дмитриевич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Cherkasov Michail Dmitrievich**, student, Far Eastern Federal University

**Терновой Никита Константинович**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Ternovoi Nikita Konstantinovich**, student, Far Eastern Federal University

**Анисич Александр Игоревич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Anisich Alexandr Igorevich**, student, Far Eastern Federal University

**Шевченко Юрий Андреевич**, доцент департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий, Дальневосточный федеральный университет, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной информатики, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Shevchenko Yuriy**, Associate Professor, Department of Theoretical Physics and Intelligent Technologies, Far Eastern Federal University, Senior Researcher at the Laboratory of Computational Informatics, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

## МАГНИТНЫЕ МОНОПОЛИ НА РЕШЁТКЕ АРАМЕА

## MAGNETIC MONOPOLES ON THE ARAMEA LATTICE

**Аннотация.** Ранее магнитные монополи в спиновом льду наблюдались в виде треугольных [1] и квадратных вершин [2]. Нами был разработан алгоритм оцифровки экспериментальных ХМСД-снимков, который позволил

оценить, какие из этих вершин оказывают решающее влияние, сосуществуя в одной решётке. Получен магнитно-структурный фактор, определяющийся геометрией решётки. Целью работы стало оцифровать экспериментальные снимки и связать популяции вершин с магнитно-структурным фактором.

**Abstract.** Previously, magnetic monopoles in spin ice have been observed as triangular [1] and cross vertices [2]. We have developed an algorithm for digitizing experimental XMCD images, which allowed us to estimate which of these vertices have a decisive influence coexisting in the same lattice. A magnetic-structural factor determined by the lattice geometry was obtained. The aim of the work was to digitize the experimental images and to relate the vertex populations to the magnetic structure factor.

**Ключевые слова:** спиновый лёд, магнитно-структурный фактор, статистическая термодинамика.

**Keywords:** spin ice, magnetic-structural factor, statistical thermodynamics.

### Введение

В спиновых льдах из-за фрустрации возникают магнитные монополи, представляющие собой топологические дефекты в спиновой конфигурации [3]. Фрустрация — это локализованное нарушение правила льда [4]. Ранее монополи в спиновом льду наблюдались как вершины решетки с тремя соседними частицами [1] (далее - треугольные вершины) и четырьмя соседними частицами [2] (далее - квадратные вершины).

Магнитно-структурный фактор показывает распределение интенсивности проходящих через материал нейтронов, падающих перпендикулярно плоскости, на которой расположены nanoостровки спинового льда. В нашей работе интенсивность пропорциональна корреляции магнитных моментов параллельных частиц системы в проекции на направление радиус-вектора рассматриваемой точки распределения (1).

$$I(\vec{q}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{S}_i^\perp \cdot \vec{S}_j^\perp \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}_{ij}), \quad (1)$$

где  $\vec{S}_i^\perp = \vec{S}_i + (\hat{q} \cdot \vec{S}_i)\hat{q}$  - компонента спинового вектора каждого спина  $\vec{S}_i$ , перпендикулярный взаимному пространственному вектору  $\vec{q}$ ,  $\hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$  [5].

Цель работы: оцифровать экспериментальные снимки и связать популяции вершин с магнитно-структурным фактором.

### Основная часть

С помощью библиотеки cv2 python каждое изображение решётки (рисунок 1), полученное с помощью XMCD [6], было подвергнуто перспективному преобразованию, для чего 4 точки на изображении были выбраны вручную как точки, которые должны образовывать прямоугольник, подобный разрешению изображения. Затем поверх него накладывалась идеальная решетка, изображенная с помощью plt.quiver, каждая стрелка окрашивалась в красный или синий оттенок в зависимости от того, какой тон имеет фон под ней. Зная координаты центров наночастиц мы записали все

близлежащие точки, соответствующие вершинам и выбрали уникальные и разделены по типам (рисунок 1с).

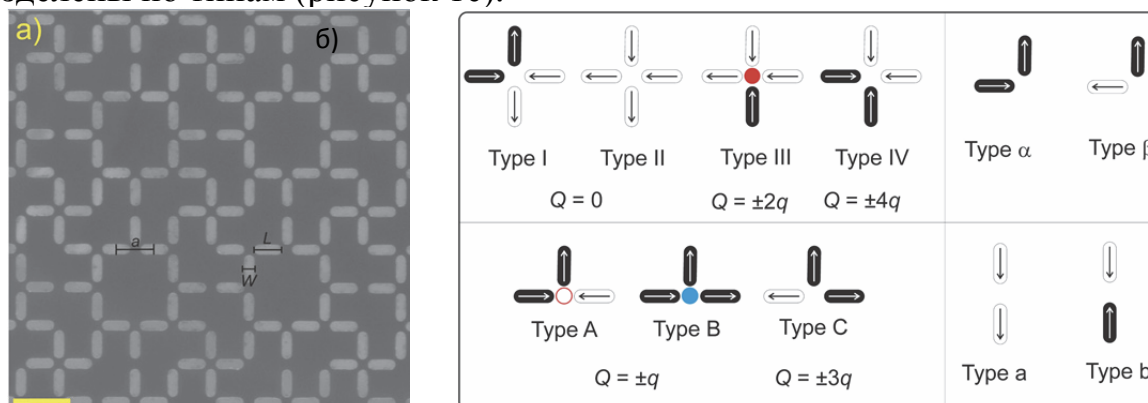


Рисунок 1 – Вершины решётки Апамея.

а) Изображение сканирующей электронной микроскопии решетки Апамея, состоящей из наномангнитов с длиной  $L = 360$  нм, шириной  $W = 120$  нм и толщиной  $d = 2,6$  нм с параметром решетки  $a = 500$  нм. Желтая масштабная линейка указывает на длину 600 нм;

б) Типы вершин при двух-, трех- и четырех наномангнитных рёбрах

Построив графики популяций (рисунок 2) для наблюдаемых температур и для основного состояния, мы обнаружили, что все вершины, кроме треугольных, близки по распределениям к основному состоянию (т.к. в нём вырождаются все типы, кроме одного преобладающего на рисунках типа). Тип А и Б относятся как 60%:40%, а в основном состоянии как 75%:25%. Значит монополями, влияющими на магнитно-структурный фактор, являются треугольные вершины, ведь именно их распределение наиболее сильно отличается от распределения основного состояния.

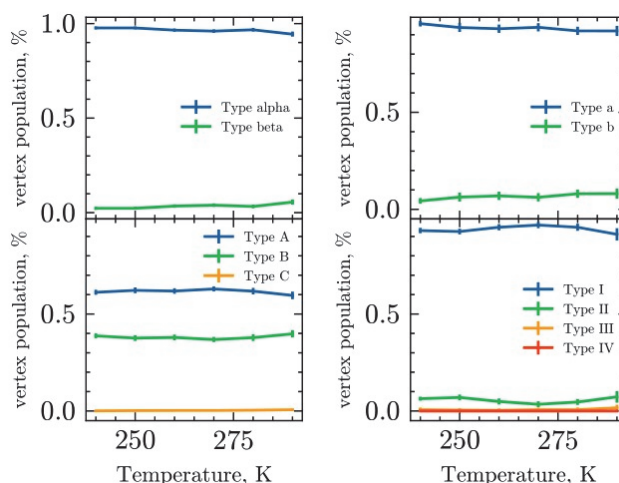


Рисунок 2 – Популяции типов вершин в зависимости от температуры. На каждую из пяти температур приходится по 100 XMCD-снимков

## Заклучение

Поскольку наш материал является антиферромагнитным, коррелированные направления магнитных моментов будут чаще всего возникать вдоль тех направлений, вдоль которых расположено больше треугольных вершин. Именно это отражает построенный магнитно-структурный фактор (рисунок 3).

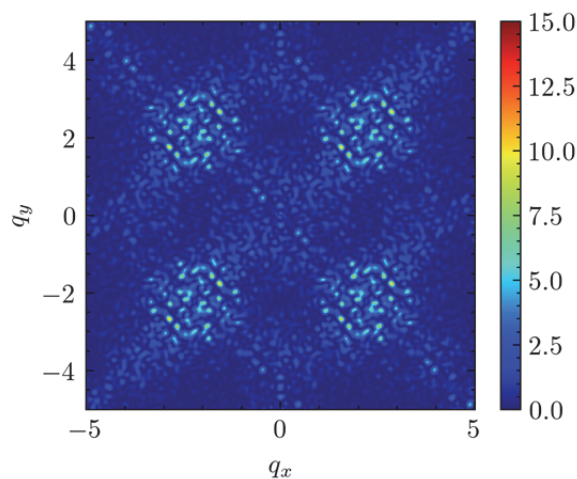


Рисунок 3 – Магнитно-структурный фактор для 240К

## Благодарности

Представленные в работе результаты были получены на суперкомпьютерном вычислительном кластере Института прикладной математики ДВО РАН. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23-22- 00328, <https://rscf.ru/project/23-22-00328/>

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Mengotti E. et al. Real-space observation of emergent magnetic monopoles and associated Dirac strings in artificial kagome spin ice //Nature Physics. – 2011. – Т. 7. – №. 1. – С. 68-74.
2. Perrin Y., Canals B., Rougemaille N. Extensive degeneracy, Coulomb phase and magnetic monopoles in artificial square ice //Nature. – 2016. – Т. 540. – №. 7633. – С. 410-413.
3. Castelnovo C., Moessner R., Sondhi S. L. Magnetic monopoles in spin ice //Nature. – 2008. – Т. 451. – №. 7174. – С. 42-45.
4. Bramwell S. T., Gingras M. J. P. Spin ice state in frustrated magnetic pyrochlore materials //Science. – 2001. – Т. 294. – №. 5546. – С. 1495-1501.
5. Farhan A. et al. Emergent magnetic monopole dynamics in macroscopically degenerate artificial spin ice //Science advances. – 2019. – Т. 5. – №. 2. – С. eaav6380.
6. Saccone M. et al. Real-space observation of ergodicity transitions in artificial spin ice //nature communications. – 2023. – Т. 14. – №. 1. – С. 5674.



УДК 531.36

**Любимова Ольга Николаевна**, профессор, Дальневосточный федеральный университет

**Lyubimova Olga Nikolayevna**, Professor, Far Eastern Federal University

**Стрельцов Алексей Александрович**, аспирант, Дальневосточный федеральный университет

**Aleksey Aleksandrovich Streltsov**, post-graduate student, Far Eastern Federal University

**Шелковников Константин Константинович**, аспирант, Дальневосточный федеральный университет

**Konstantin Konstantinovich Shelkovnikov**, post-graduate student, Far Eastern Federal University

## **К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОСЫ СТЕКЛОВАНИЯ**

### **GLASS TRANSITION ZONE DETERMINATION**

**Аннотация.** Представлены результаты экспериментальных dilatометрических измерений линейного расширения в неорганическом стекле, используемом при получении стеклометаллокомпозитных оболочек. Целью проводимых измерений является разработка метода экспериментальной оценки полосы стеклования, одного из основных определяющих стеклование параметров.

**Abstract.** The results of experimental dilatometric measurements of linear expansion in inorganic glass used in the process of producing glass-metal composite shells are presented. The purpose of the measurements is to develop a method for experimental evaluation of the glass transition zone, one of the main parameters determining glass transition.

**Ключевые слова:** стеклование, температура стеклования, полоса стеклования.

**Keywords:** glass transition, glass transition temperature, glass transition zone.

#### **Основная часть**

При проектирование технологических основ получения стеклометаллокомпозитных оболочек критически важным являются требования малых растягивающих напряжений в стеклянной составляющей в зоне стеклования при температурной обработке. Причиной этих напряжений является в первую очередь, разница в коэффициентах линейного расширения в интервале стеклования между соединяемыми материалами [1,2]. При теоретических расчетах термомеханического поведения стеклометаллических соединений с учетом неоднородной структуры, разной реологии и структурных изменений, выявлено, что в интервале стеклования структурные изменения стеклующегося слоя приводят к формирования растягивающих напряжений даже в геометрии подразумевающей при

проектировании соединения только сжимающие напряжения, что по-видимому является одной из главных причин развития дефектов и понижения прочности соединения [2]. Контроль и снижение технологических напряжений реализуются посредством изотермической выдержки (отжига) при определенных температурах в интервале стеклования. Для определения технологических параметров отжига необходимо иметь представления о параметрах стеклования. В виду отсутствия общих теоретических представлений о переходных процессах в стеклующихся материалах и изменении их структуры и свойств при стекловании актуальными представляется накопление экспериментальных данных с целью выделения параметров и корреляционных зависимостей в интервале стеклования. Авторы разных модельных представлений вводят разные параметры, которые при продолжении исследований оказываются функционально связаны и приводят к универсальным критериальным соотношениям в теории стеклования, так, например, постоянный анализ и поиск экспериментально определяемых параметров в соотношении Бартенева  $(|q|\tau_R)|_{T=T_g} = const$  [3-4], более известном в теории стеклования как уравнение Бартенева-Ритланда [5-6]

$$q\tau_g = C, \quad (1)$$

здесь  $q$  – скорость изменения температуры,  $\tau_g$  – время релаксации при  $T_g$  – температуре стеклования,  $C$  – эмпирическая константа, позволил Немилову С.В. [7] из обобщения теории Волькенштейна-Птицына и Мандельштама-Леонтовича определить эмпирическую константу  $C$  в уравнении (1) как ширину полосы температур  $\delta T_g$  при которой происходит замораживание структуры жидкости при охлаждении

$$C = \delta T_g. \quad (2)$$

Для термомеханических свойств стеклующегося материала определяющим является температурный интервал стеклования ( $\Delta T_g > \delta T_g$ ) в котором изменяется структура и свойства стекла. Со стороны высоких температур интервал стеклования ограничен температурой текучести ( $T_f$ ), а низких - температурой стеклования ( $T_g$ ). Полоса стеклования определена в [3-4] как  $\delta T_g = T_{12} - T_{13}$ ,  $T_{12}$  и  $T_{13}$  – температуры соответствующие вязкости  $\eta(T) = 10^{12}$  и  $10^{13}$  (Па · с), соответственно.

Поиски корректных методов расчета  $\delta T_g$  проведенные Сандитовым Д.С. [5-6,9] позволили выстроить алгоритм его определения и связать параметры в уравнении Вильямса-Ландела-Ферри с функцией доли флуктуационного объема в двухуровневой модели делокализованных атомов. В работе [5] показана линейная корреляция между температурой и полосой стеклования стекол одного класса.

По этому алгоритму и экспериментальной кривой линейного расширения были получены оценки полосы стеклования для неорганического стекла С52-1 и образцов стеклометаллокомпозита (СМК) со скоростями нагрева 10 и 15 °С/мин, для СМК рассчитанные значения

$\delta T_g$  оказались сильно завышенными 19 и 24 °С, в то время как для стекла С52-1 составили 11 и 13 °С [1], ожидаемые в теории согласно [5-6] значения должны принадлежать интервалу 5- 10 °С. Возможной причиной завышенных значений являлась погрешность в определении скачка коэффициента термического расширения при температуре стеклования, с помощью которого из последовательного решения нелинейных уравнений [9], сначала определяется функция доли флуктуационного объема, а затем величина полосы стеклования.

Возникает вопрос, возможно ли получить значение полосы стеклования из анализа экспериментальных данных по измерению линейного расширения и скорости изменения линейного расширения при нагреве?

С целью ответа на поставленный вопрос и накопления данных по стеклованию стекол применяемых для получения стеклометаллокомпозитных оболочек проводились экспериментальные исследования и моделирование термомеханических свойств стеклянной составляющей при нагреве со скоростью 10 °С/мин на экспериментальной лабораторной установке [1, 8]. В работе представлены результаты проведенных исследований для разных вариантов определения полосы стеклования: по алгоритму Сандитова, регрессионным анализом скорости изменения линейного расширения и вероятностной моделью оценки расширения.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Барботько М. А., Любимова О. Н., Стрельцов А. А. Экспериментальные измерения температурных параметров стеклования в конструктивном элементе стеклометаллокомпозита // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 52–62
2. Гончарук В. К., Зайко Н.Ю., Ратников А. А., Шелковников К. К. Экспериментальные исследования адгезионного взаимодействия в зоне контакта стекла и алюминия в стеклометаллокомпозитном элементе // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 4 (58). С. 26–35
3. Бартнев, Г.М. О зависимости между температурой стеклования силикатного стекла и скоростью охлаждения или нагревания // Доклады АН СССР. – 1951. – Т.76. – №2. – С. 227-230.
4. Бартнев, Г.М. Зависимость температуры стеклования аморфных веществ от скорости нагревания и связь температуры стеклования с энергией активации / Г.М. Бартнев, И.А. Лукьянов // Журнал физической химии. – 1955. – Т.29. – вып.8. – С. 1486-1498.
5. Сандитов Д. С. О релаксационной природе стеклования аморфных полимеров низкомолекулярных аморфных веществ / Д.С. Сандитов, М.В. Дармаев, Б.Д. Сандитов // Физика твердого тела – 2015. – Т 57. – вып.8. – С. 1629-1634.

6. Сандитов Д. С. Релаксационные аспекты перехода жидкость-стекло / Д.С. Сандитов, М.И. Ожован // Успехи физических наук. – 2019. – Т 189. – №.2. – С. 113-133.

7. Немиллов С. В. Оптическое материаловедение: Термодинамические и релаксационные свойства стеклообразующих расплавов и стекол : уч.пособие. – Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2014. – 120 с.

8. Varbotko M.A. Experimental investigations of varying the temperature parameters in the glass-transition range for glass-metal composites when heated / O.N. Lyubimova, M. A. Varbotko, A.A. Streltsov // Materials Physics and Mechanics. – 2023.–№ 51 (3).

9. Сандитов Б.Д. Флуктуационный объем и параметр Грюнайзена в области перехода жидкость-стекло// Вестник Бурятского Государственного Университета. – 2012.–№ 3- с.148-151.

УДК 519.63

**Мороз Любовь Игоревна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Moroz Lubov Igorevna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher at the Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University

**Масловская Анна Геннадьевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский федеральный университет

**Maslovskaya Anna Gennadievna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

## **АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЭРЕДИТАРНОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ ПОЛЯРНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ: УЧЕТ ПОЛЕВЫХ ЭФФЕКТОВ**

### **ALGORITHM FOR NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE HEREDITARY MODEL OF CHARGING POLAR DIELECTRICS IN VIEW OF THE FIELD EFFECTS**

**Аннотация.** Работа посвящена построению численного алгоритма для эредитарной модели процесса зарядки полярных диэлектриков под действием сфокусированного пучка электронов с динамически изменяющимся радиусом. В основе математической постановки задачи лежит начально-краевая задача для диффузионно-дрейфового уравнения с дробной производной по времени. Вычислительная схема строится с

использованием модифицированной неявной схемы и конечно-разностной аппроксимации дробной производной Капуто.

**Abstract.** The study is devoted to the construction of a numerical algorithm for the hereditary model of the process of charging polar dielectrics under the influence of a focused electron beam with dynamically changing radius. The mathematical formulation of the problem is based on an initial boundary value problem for the time-fractional drift-diffusion equation. The computational scheme is constructed using a modified implicit scheme and a finite-difference approximation of the Caputo fractional derivative.

**Ключевые слова:** зарядка диэлектриков, электронное облучение, диффузионно-дрейфовое уравнение с дробной производной по времени, производная Капуто, вычислительная схема

**Keywords:** dielectric charging, electron beam, time-fractional drift-diffusion equation, Caputo derivative, numerical scheme

### **Введение**

В настоящее время математическое моделирование нашло широкое применение в таких сложных системах, как воздействие внешних потоков энергии на твердотельные материалы. Важную роль в этом направлении играют исследования процессов зарядки и поляризации диэлектриков, индуцированных электронным облучением. Это связано с эффектами, производимыми на электрические и структурные свойства материалов. В частности, рассматриваемые процессы имеют большое значение для микроэлектроники, электронно-зондовых методов исследований, космической техники, электронно-лучевой литографии и т.д. В качестве объекта исследования рассмотрим класс диэлектрических материалов – сегнетоэлектрики, обладающих спонтанной поляризацией, вектор которой может быть реориентирован при воздействии внешнего электрического поля.

Среди методов, позволяющих моделировать динамику взаимодействия электронов с твердыми телами, наиболее часто используемым является метод Монте-Карло. Основными преимуществами такого подхода являются строгое описание микроскопической физики и возможность учета неравновесной динамики. Однако известно, что для метода Монте-Карло характерно увеличение вычислительной сложности в случае далекодействующих потенциалов, таких как потенциалов электростатического поля [1]. Другой подход – континуальный, основан на том, что основными характеристиками процесса являются плотность распределения зарядов, потенциал и поле, которые описываются системой уравнений дрейфа-диффузии-реакции. Например, в работах [1, 2] на основе детерминированного подхода представлены результаты физико-математического моделирования динамических процессов зарядки в диэлектрических материалах.

Кроме того, многие полярные диэлектрики обладают специфическими свойствами, связанными с направлением дипольного момента внутри материала. Они могут обнаруживать эффекты памяти (или эрелитарность), что означает, что прошлое состояние материала оказывает влияние на его текущее поведение. Этот эффект математически можно описать с помощью дробно-дифференциального подхода. Дробно-дифференциальная модификация математической модели процесса нестационарной зарядки полярных диэлектрических материалов в условиях облучения электронными пучками средних энергий предложена в [3]. Настоящая работа направлена на дальнейшее развитие численных подходов к реализации эрелитарной модели процесса зарядки полярных диэлектриков, в частности, в условиях динамического увеличения радиуса воздействия пучка электронов, создающего источник зарядов в объекте.

### Математическая постановка задачи и вычислительная схема

В рамках первого приближения будем считать, что характеристики процесса зарядки зависят от времени и одной пространственной координаты – радиуса. Дробно-дифференциальная модификация модели зарядки полярных диэлектриков [3] формализуется в виде уравнения непрерывности и локально-мгновенного уравнения Пуассона, а также выражения, определяющего связь между потенциалом и напряженностью поля инжектированных электронов:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha \rho}{t^* \partial \tau^\alpha} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \left( \frac{2D}{r} - \mu_n E \right) \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho^2 + G, \\ \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \\ E = - \frac{d\varphi}{dr}, \quad \tau > 0, \quad 0 < r < L, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда, Кл/м<sup>3</sup>;  $D$  – коэффициент диффузии электронов, м<sup>2</sup>/с;  $\mu_n$  – дрейфовая подвижность электронов, м<sup>2</sup>/(В·с);  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная, Ф/м;  $G(r)$  – генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте, Кл/(м<sup>3</sup>·с);  $\tau = t/t^*$ ,  $t^*$  – некоторое характерное время процесса, с,  $\frac{\partial^\alpha \rho}{\partial \tau^\alpha}$  – левосторонняя производная Капуто,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Отметим, что в модели (1), в силу невысокой дырочной проводимости, в качестве носителей заряда рассмотрены только электроны. Генерационное слагаемое в первом уравнении системы (1) зададим с помощью функции Гаусса  $G(r) = G_0 \exp(-r^2/(2\sigma^2))$ . Наряду с этим, будем рассматривать источник зарядов, который последовательно увеличивает свой радиус воздействия по линейному закону  $\sigma = \sigma_d(\tau) = \sigma_0 + v\tau$ .

Дополним систему уравнений (1) начальным и краевыми условиями:

$$\rho|_{\tau=0} = \rho^0(r), \quad \varphi|_{\tau=0} = \varphi^0(r), \quad E|_{\tau=0} = E^0(r), \quad 0 < r < L, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \rho|_{r=L} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad \varphi|_{r=L} = 0, \quad \tau > 0. \quad (3)$$

Для получения численного решения задачи (1)–(3) введем в рассмотрение пространственно-временную сетку  $\Omega_{\Delta r}^{\Delta \tau} = \{r_i = i\Delta r, i = \overline{0, M}, \tau^j = j\Delta \tau, j = \overline{0, N}\}$ , где  $\Delta r$  – шаг по координате,  $\Delta \tau$  – шаг по времени. На основе модифицированной неявной схемы, конечно-разностной аппроксимации дробной производной Капуто, описанной в [4], и формулы Роберта – Вейсса для дискретизации первой производной по координате построим следующую вычислительную схему

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{D}{(\Delta r)^2} + \frac{D}{(\Delta r)r_i} - \frac{\mu_n E_i^j}{2(\Delta r)} \right) \rho_{i-1}^{j+1} + \\ & + \left( \frac{(\Delta \tau)^{-\alpha} b_0}{t^* \Gamma(2-\alpha)} + \frac{2D}{(\Delta r)^2} - \frac{D}{(\Delta r)r_i} + \frac{\mu_n E_i^j}{2(\Delta r)} + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_i^j \right) \rho_{i-1}^{j+1} - \frac{D}{(\Delta r)^2} \rho_{i+1}^{j+1} = \\ & = \frac{(\Delta \tau)^{-\alpha}}{t^* \Gamma(2-\alpha)} \left( b_0 \rho_i^j - \sum_{k=1}^j b_k (\rho_i^{j+1-k} - \rho_i^{j-k}) \right) + \\ & + \left( \frac{D}{(\Delta r)r_i} - \frac{\mu_n E_i^j}{2(\Delta r)} \right) (\rho_{i+1}^j - \rho_i^j) + G_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – Гамма-функция Эйлера,  $i = 1, \dots, M-1$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ , весовые функции принимают значения  $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Вычисление распределения потенциала основывается на решении краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго рода методом конечных разностей. Для аппроксимации граничных условий второго рода можно воспользоваться несимметричными конечно-разностными формулами второго порядка точности.

### Заключение

В работе представлен алгоритм численной реализации эрдитарной модели процесса зарядки полярных диэлектриков с учетом динамического увеличения зоны воздействия источника. Варьирование порядков дробных производных позволяет произвести обобщение модели на случай различных режимов. Результат может быть применен при моделировании процессов зарядки диэлектриков в условиях электронного облучения.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 122082400001-8)

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Raftari, B. Self-consistent drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples / B. Raftari, N. V. Budko, C. Vuik // Journal of Applied Physics. – 2015. – V. 118. – P. 204101. – DOI: 10.1063/1.4936201.

2. Павельчук, А. В. Подход к численной реализации диффузионно-дрейфовой модели полевых эффектов, индуцированных движущимся

источником физического эксперимента / А. В. Павельчук, А. Г. Масловская // Известия вузов. Физика. – 2020. – Т. 63. – № 1 (745). – С. 94-100. – DOI: 10.17223/00213411/63/1/94.

3. Мороз, Л. И. Дробно-дифференциальный подход для численного моделирования электронно-индуцированной зарядки сегнетоэлектриков / Л.И. Мороз, А.Г. Масловская // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27. – № 1(97). – С. 55–71. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.105.

4. Liu, F. Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation / F. Liu, M.M. Meerschaert, R.J. McGough, P. Zhuang, Q. Liu // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – V.16. – P.9–25. – DOI: 10.2478/s13540-013-0002-2.

УДК 339.3:621.4:624.04

**Москвичев Владимир Викторович**, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, научный руководитель Красноярского филиала ФГБУН «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий»

**Moskvichev Vladimir Viktorovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Honored Scientist of the Russian Federation, Scientific supervisor, Federal Research Center for Information and Computational Technologies Krasnoyarsk branch office

## **НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННО–КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**

## **THE BEARING CAPACITY OF THE ELEMENTS OF AEROSPACE TECHNOLOGY**

**Аннотация.** Представлены результаты прикладных исследований прочности, ресурса, трещиностойкости элементов авиационно–космической техники (лопасти воздушных винтов, ферменные конструкции космических аппаратов и стартового комплекса, металлокомпозитные баки, рефлектора наземных космических систем связи и др.).

**Abstract.** The results of applied research on the strength, resource, and crack resistance of elements of aerospace technology (propeller blades, truss structures of spacecraft and launch complex, metal composite and tanks, reflectors of ground–based space communication systems, etc.) are presented.

### **Основная часть**

Исследования несущей способности элементов конструкций сложных технических систем (СТС), крупногабаритных машин и оборудования



предполагают проведение многокритериального анализа условий конструкционной прочности, ресурсных характеристик, показателей надежности и риска аварийных ситуаций (АС) на основе модельных расчетов напряженно–деформированных состояний (общих, локальных, предельных) для многовариантных расчетных схем с учетом влияния эксплуатационных факторов [1-3]. Особенности исследований несущей способности авиационно–космической техники отражены в соответствующих государственных и отраслевых нормативно–технических документах, относящихся ко всем стадиям жизненного цикла изделий.

Данные представления послужили основой результатов многочисленных исследований, полученных сотрудниками отдела проблем машиностроения ИВМ СО РАН, СКТБ "Наука" КНЦ СО РАН, Красноярского филиала ФИЦ ИВТ, часть которых нашло свое отражение в издательском проекте «Прочность, ресурс, механика разрушения, безопасность технических систем» (2001–2021 гг.) [2-8].

Анализ причинно–следственного комплекса отказов, проведение экспертиз технического состояния и аварийных ситуаций позволили классифицировать типы предельных состояний материалов и элементов конструкций (основные, дополнительные, аварийных ситуаций), разработать блок–схемы и алгоритмы расчетно–экспериментального комплекса конструкционной прочности, расчетов по критериям механики разрушения, расчетов остаточного ресурса и риска АС, включая обоснование выбора конструктивных решений и материалов базовых несущих конструкций.

Исследования элементов авиационно–космической техники проводились по следующим направлениям:

- исследования характеристик механических свойств и трещиностойкости конструкционных материалов;
- механика деформирования и разрушения элементов металлических, металлокомпозитных и композитных конструкций с учетом воздействия эксплуатационных факторов, в том числе, космического пространства;
- прочность и ресурс элементов базовых несущих конструкций и трансформируемых космических систем космических аппаратов (КА);
- надежность и оценка рисков аварий конструкций и механических систем КА.

В рамках расчетно–экспериментального комплекса определены характеристики механических свойств и трещиностойкости (критические значения коэффициентов интенсивности напряжений,  $J$  – интеграла) алюминиевых и титановых сплавов, композиционных материалов с учетом влияния эксплуатационных факторов [4,5,8,9].

Полученные результаты использовались при решении прикладных задач конструкционной прочности, ресурса и безопасности элементов авиационно–космической техники [2,5,8]:

- оценка ресурса лопастей воздушных винтов самолетов типа «Антей»;

– моделирование разрушения и оценка трещиностойкости ферменных бороалюминиевых конструкций КА («Галс», «Экспресс», Sesat») с определением допустимого уровня дефектности;

– анализ несущей способности элементов ферменных конструкций стартового комплекса ракетно–космических систем «Байконур»;

– разработка расчетно–экспериментальных методов и технологий обеспечения качества, надежность и безопасности металлокомпозитных баков высокого давления для перспективных электрореактивных двигателей космических аппаратов;

– исследования напряженно – деформированных состояний и геометрической стабильности композитных рефлекторов антенн наземных систем спутниковой связи диаметром 12м;

– исследования прочности, динамики и кинематики трансформируемого рефлектора зонтичного типа диаметром 5м космического базирования.

Во всех представленных случаях расчетные модели конечно элементных расчетов напряженно–деформированных состояний проходили соответствующую верификацию и, в ряде случаев, экспериментальную проверку. Для предельных состояний определялись коэффициенты запаса по напряжениям, деформациям, размерам трещин, числу циклов нагружения, что позволяло дать объективные оценки показателей прочности, ресурса, надежности и безопасности.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. –М: Машиностроение, 1975. 488с.

2. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Шокин Ю.И., Лепихин А.М. и др. Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. –Новосибирск: Наука, 2021. 796 с.

3. Москвичев В.В. Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений –Новосибирск: Наука, 2002. 106с.

4. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Черняев А.П. и др. Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов технических систем. –Новосибирск: Наука, 2002. 334с.

5. Буров А.Е., Кокшаров И.И., Москвичев В.В. Моделирование разрушения и трещиностойкость волокнистых металлокомпозитов. – Новосибирск: Наука, 2003. 173с.

6. Доронин С.В., Лепихин А.М., Москвичев В.В., Шокин Ю.И. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем. –Новосибирск: Наука, 2005. 250с.

7. Москвичев В.В., Крушенко Г.Г., Буров А.Е., Усков И.В., Федорова Е.Н. Нанопорошковые технологии в машиностроении. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. 186с.

8. Несущая способность и безопасность металлокомпозитных баков космических аппаратов / под ред. Москвичева В.В., Тестоедова Н.А. – Новосибирск: Наука, 2021. 440с.

9. Махутов Н.А., Гаденин М.М., Москвичев В.В. и др. Локальные критерии прочности, ресурса и живучести авиационных конструкций. – Новосибирск: Наука, 2017. 600с.

УДК 531

**Мыльников Владимир Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета

**Mylnikov Vladimir Viktorovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering

**АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ  
ИЗ ДИСПЕРСНО-УПРОЧНЕННОГО АЛЮМОМАТРИЧНОГО  
КОМПОЗИТА В УСЛОВИЯХ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО ИЗГИБА**

**ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF ROTATING  
CYLINDRICAL SAMPLES FROM A DISPERSED-HARDENED  
ALUMINUM MATRIX COMPOSITE UNDER ALTERNATING BENDING  
CONDITIONS**

**Аннотация.** В работе представлены результаты испытаний на усталость образцов из экспериментального дисперсно-упрочненного композиционного материала на основе алюминия по схеме консольного изгиба с вращением. Рассмотрены особенности упругопластического деформирования и её связь с атомно-кристаллическим строением материала. Получены расчетные параметры в виде коэффициентов корреляции и ограниченной выносливости с учетом вида линейной аппроксимации кривой усталости. Произведен сравнительный анализ полученных показателей с машиностроительными сплавами.

**Abstract.** The paper presents the results of fatigue tests of samples from an experimental dispersed-hardened composite material based on aluminum according to the scheme of cantilever bending with rotation. The features of elastoplastic deformation and its relation to the atomic crystal structure of the material are considered. Calculated parameters are obtained in the form of correlation coefficients and limited endurance, taking into account the type of linear approximation of the fatigue curve. A comparative analysis of the obtained indicators with machine-building alloys is carried out.

**Ключевые слова:** упругопластическая деформация, усталостная трещина, деформационный рельеф, прочностные характеристики, композит, алюминий, долговечность

**Keywords:** elastoplastic deformation, fatigue crack, deformation relief, strength characteristics, composite, aluminum, durability

### **Введение**

Процесс усталости металлов и сплавов происходит путем постепенного накопления повреждений [1]. Повреждения возникают за счет прохождения упругопластической деформации [2], которая связана с изменениями атомно-кристаллической решетки материала. Такие изменения происходят под действием прикладываемых знакопеременных циклических нагрузок и сопровождаются перестроением и передвижением атомов и дефектов кристаллического строения, как одномерных точечных, в виде отдельных атомов, так и двумерных линейных – дислокации и дисклинации, которые стремятся занять более равновесное положение в структуре металла. Четкое пространственное расположение атомов в кристаллической решетке и их высокая плотность не позволяет закрепляться в объеме материала дефектам при воздействии различного рода нагрузок, поэтому дислокации выходят на поверхность, образуя выступы и впадины в виде экструзий и энтрुзий в зонах локализации деформации, что в конечном итоге определяет усталостные характеристики. Дислокации в поверхностных слоях двигаются более свободно при низких напряжениях, чем глубинные дислокации. Это связано с тем, что окружение атома или частицы, находящейся на поверхности объекта, имеет значительно более низкую симметрию по сравнению с атомом внутри тела вследствие неуравновешенности со стороны окружающей среды. На характер такого движения существенным образом влияет вид и частота циклического нагружения. При испытаниях материалов по схеме консольного изгиба с вращением наибольшее растяжение-сжатие происходит в слое материала на поверхности образцов, сопровождаемое местной пластической деформацией, а внутренние объемы деформируются упруго в виде сильной кривизны кристаллических решеток, обусловленных силами межатомных связей и оказывающих согласованное влияние на поверхностную локальную деформацию. При знакопеременном циклическом нагружении напряжения возрастают и убывают со скоростью, которая регламентируется частотой нагружения [3]. Совокупность изложенных факторов может принимать любую конфигурацию в реальном материале, что в общем виде можно рассмотреть, как конкуренцию процессов упрочнения-разупрочнения материала, в процессе приложения внешней нагрузки [4].

### **Основная часть**

Результаты эксперимента, схематическое изображение вида прикладываемой нагрузки и деформационные особенности образцов из экспериментального дисперсно-упрочненного композиционного материала

на основе алюминия показаны на рисунке 1. Продвижение магистральной усталостной трещины имеет как линейный, так и ярко выраженный волновой характер (рис. 1,с). При этом участок с трещиной волнового характера сопровождается значительной зоной локальной пластической деформации, которая существенно больше аналогичной зоны на участке линейного характера распространения трещины. Такое различие связано с неравномерностью распределения упрочняющих частиц в объеме материала. Кроме этого, данная неравномерность приводит к гофрированию поверхности материала при циклической деформации в сопряженной с трещиной области (рис. 1,д).

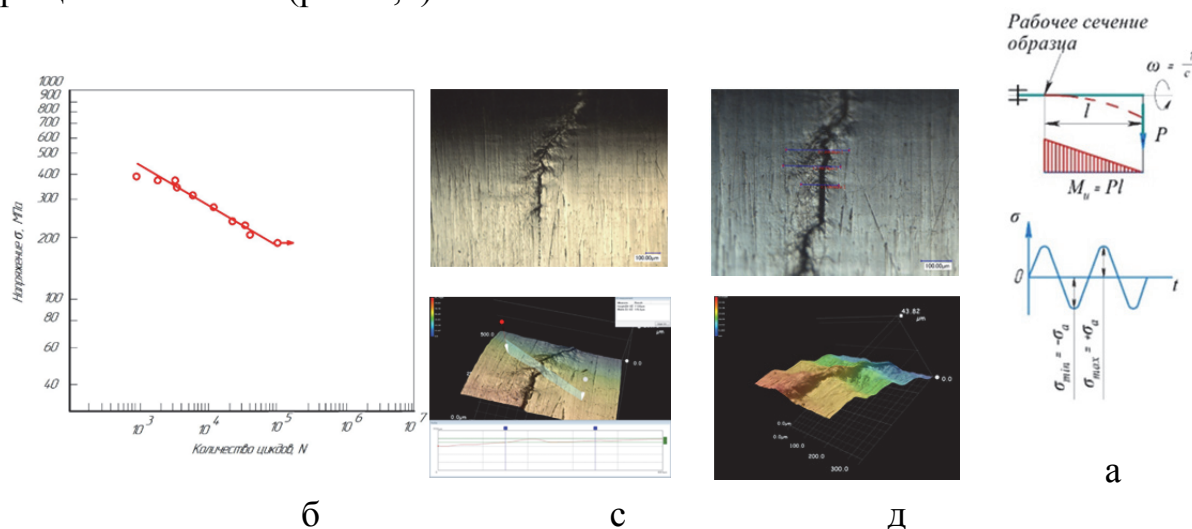


Рисунок 1 – Изображения: а – схема нагружения; б – кривая усталости; с-д – деформационный рельеф и величины зон локализации деформации у границы трещины

### Заключение

По результатам проведенных испытаний цилиндрических образцов построена кривая усталости, которая в логарифмических координатах имеет вид прямой линейной аппроксимации. Полученные экспериментальные значения, достаточно плотно располагаются к линии аппроксимации, наблюдается незначительный разброс данных во всем испытанном диапазоне долговечности, что можно охарактеризовать как достаточно высокую стабильность поведения исследуемого материала под действием знакопеременных нагрузок при осуществляемом виде нагружения, что подтверждается высоким значением коэффициента корреляции  $K_{кор} = -0,975$  и свидетельствует о высокой стабильности структурно-чувствительных свойств данного дисперсно-упрочненного композиционного материала. Сравнительно пологий наклон кривой усталости и соответствующее ему небольшое значение  $\text{tg } \alpha_w = 0,1545$  характеризует высокое сопротивление усталости материала: долговечность увеличивается при незначительном снижении напряжения. Экстраполяция полученных результатов на сравнительной базе  $N = 10^6$  циклов показывает предел ограниченной

выносливости 140 МПа. Принятый в работе коэффициент ограниченной выносливости  $\chi$ , который позволяет производить сравнительную оценку относительно максимальных прочностных характеристик (предела прочности  $\sigma_B$ ) для испытанного материала  $\chi = 0,35$ , что находится в средних значениях даже в сравнении с машиностроительными сплавами.

#### **Благодарности**

«Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-13-20009, <https://rscf.ru/project/22-13-20009/>»

#### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Терентьев, В. Ф. Усталость металлических материалов / В. Ф. Терентьев ; В.Ф. Терентьев ; Рос. акад. наук. Ин-т металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова. – Москва : Наука, 2003. – ISBN 5-02-033062-0. – EDN QMZLPZ.

2. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов : в 2 томах / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин, П. В. Макаров [и др.]. – Новосибирск : Новосибирское отделение издательства "Наука", 1995. – 298 с. – ISBN 5-02-030840-4. – EDN TPMJDB.

3. Мыльников, В. В. Модель соотношения частотно-скоростных характеристик циклического нагружения с релаксацией внутренних напряжений / В. В. Мыльников, Э. А. Дмитриев // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : сборник тезисов докладов : в 4 т., Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года / Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Том 3. – Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2023. – С. 404-407. – EDN CMRHVI.

4. Myl'nikov, V. V. Methods for Studying the Fracture Surface of Materials Using Modern Microscopy and Digital Image Processing / V. V. Myl'nikov, E. A. Dmitriev // Inorganic Materials: Applied Research. – 2024. – Vol. 15, No. 1. – P. 8-16. – DOI 10.1134/S2075113324010192. – EDN ACVKPG.

УДК 539.376

**Назаров Владлен Витальевич**, кандидат технических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова

**Nazarov Vladlen Vitalevich**, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University

## **ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ 304L**

### **EFFECT OF HIGH TEMPERATURE ON THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF CREEP RUPTURE STRENGTH FOR 304L STAINLESS STEEL**

**Аннотация.** Безопасность играет ключевую роль при эксплуатации ядерного реактора на атомной электростанции. В условиях аварийного режима корпус ядерного реактора находится под внутренним давлением и подвергается высокотемпературному нагреву, что приводит к снижению механических характеристик материала, из которого он изготовлен. В качестве такого материала используют нержавеющую сталь 304L, для которой приведены зависимости механических характеристик от высокой температуры. Установлено, что рост температуры выше 700°C приводит к резкому снижению порога ползучести, при котором дальнейшая эксплуатация ядерного реактора становится не безопасной.

**Abstract.** Safety plays a key role when operating a nuclear reactor in a nuclear power plant. Under emergency conditions, the nuclear reactor vessel is under internal pressure and subjected to high-temperature heating, which leads to a decrease in the mechanical characteristics of the material from which it is made. Stainless steel 304L is used as such a material, for which the dependence of mechanical characteristics on high temperature is given. It has been established that an increase in temperature above 700°C leads to a sharp decrease in the creep threshold, at which further operation of a nuclear reactor becomes unsafe.

**Ключевые слова:** сталь, 03X18H11, длительная прочность, высокая температура, порог ползучести, предел кратковременной прочности.

**Keywords:** steel, AISI 304L, creep rupture strength, high temperature, creep threshold, break creep strength.

#### **Основная часть**

304L – коррозионностойкая аустенитная сталь (российский аналог 03X18H11) с температурой плавления 1450°C, которая широко применяется в атомной промышленности, в частности, из нее изготавливают корпуса ядерных реакторов для атомных электростанций. Для случая, когда авария происходит в активной зоне, необходимо удержать содержимое ядерное

реактора от контакта с внешней средой. Несмотря на то, что сталь 304L относится к жаропрочным материалам, с ростом высокой температуры следует ожидать снижение ее механических характеристик из экспериментальной зависимости напряжения от деформации. В силу того, что при аварии ядерный реактор будет находиться под внутренним давлением, то с ростом температуры его корпус станет подвергаться деформациям ползучести, для учета которых следует использовать дробно-степенную зависимость [1]

$$k_1 \dot{\varepsilon}_0 = \left( \frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_b - \sigma} \right)^{n_1}, \quad \sigma_b \geq \sigma \geq \sigma_t, \quad k_1 > 0, \quad n_1 > 0$$

где  $\dot{\varepsilon}_0$  – постоянная скорость деформаций ползучести,  $\sigma$  – напряжение в текущий момент времени,  $\sigma_t$  – порог ползучести,  $\sigma_b$  – предел кратковременной прочности,  $k_1$  и  $n_1$  – материальные параметры.

Рост высокой температуры должен повлиять на  $\sigma_t$  и  $\sigma_b$ , что желательно знать при оценке удерживающей способности корпуса ядерного реактора в условиях аварийного режима. В работе [2] предложено рассматривать  $\sigma_t$  и  $\sigma_b$  как параметры, которые представляется возможным вычислить по экспериментальным данным.

Для определения значений  $\sigma_t$  и  $\sigma_b$  использована экстраполяция [1] в виде связи времени в момент разрушения от напряжения

$$\frac{t_r}{k_2} = \left( \frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_b - \sigma} \right)^{-n_2}, \quad \sigma_b \geq \sigma \geq \sigma_t, \quad k_2 > 0, \quad n_2 > 0$$

где  $t_r$  – время в момент разрушения,  $k_2$  и  $n_2$  – материальные параметры.

В силу того, что сталь 304L применяется на практике, в том числе, при высоких температурах, возникает потребность в определении ее механических характеристик ползучести и длительной прочности. Результаты экспериментальных исследований [4] получены при одноосном растяжении цилиндрических образцов в условиях постоянства осевой силы с номинальными напряжениями, равными 200, 250, 320, 340 и 360 МПа, и высокими температурами, равными 680, 700 и 720°C. Ограниченное число экспериментов не позволяет определить значения  $\sigma_t$  и  $\sigma_b$ . Вместо данных [4] в данной работе рассмотрены результаты [5], где наиболее подробное проведено экспериментальное исследование, в котором получены данные по исследованию механических свойств стали 304L при комнатной температуре, а также при пяти разных высоких температурах: 550, 700, 850, 975 и 1100°C, при этом  $\sigma_y(T)$  и  $\sigma_s(T)$  – не монотонно убывающие зависимости от температуры  $T$ , где при нагреве от 25 до 1100°C предел текучести  $\sigma_s$  и предел прочности  $\sigma_b$  – убывают от 258 до 18 МПа и от 642 до 22 МПа соответственно. В эксперименте при 550°C, в котором  $\sigma=225$  МПа, время в момент разрушения  $t_r=10222$  ч. При самой высокой



температуре, равной  $1100^{\circ}\text{C}$ , при  $\sigma=4$  МПа разрушение произошло за время  $t_r=809$  ч. Сравнение микроструктур поперечных срезов образцов, испытанных на ползучесть при одной и той же высокой температуре, свидетельствует о влиянии времени эксперимента на образование оксидного слоя, в котором сосредоточена высокая плотность микропустот и трещин. Отмечается, что с ростом температуры плотность этих дефектов заметно увеличивается.

По итогам проделанной работы можно сделать заключение, что дробно–степенная зависимость не только удовлетворительно описывает длительную прочность, но и позволяет определить (вычислить) предел ползучести и предел кратковременной прочности материала по экспериментальным данным. Из–за возникших фазовых превращений, происшедших в стали 304L, зависимости  $\sigma_y(T)$  и  $\sigma_s(T)$ ,  $\sigma_t(T)$ , а также  $\sigma_b(T)$  оказались немонотонными. При  $T \geq 700^{\circ}\text{C}$  между  $\sigma_s$  и  $\sigma_b$  наблюдается заметное расхождение. Между тем, уже при  $T \geq 975^{\circ}\text{C}$  для механических характеристик  $\sigma_y$ ,  $\sigma_s$ , а также  $\sigma_b$  наблюдается сходимость в одну линию. Что касается зависимости  $\sigma_t(T)$ , то уже при  $T \geq 700^{\circ}\text{C}$  наблюдается резкое снижение  $\sigma_t$  до нуля, что указывает на то, что сталь 304L при температуре выше  $700^{\circ}\text{C}$  не рекомендуется к применению на практике. Тем не менее, слабонагруженные детали могут работать даже при  $T = 850^{\circ}\text{C}$ , где  $\sigma_t=15$  МПа.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести // Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.
2. Nazarov V.V. / Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength / Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2023. No 3. P. 44–49.
3. Lasdon L.S., Fox R.L., Ratner M.W. / Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method / Operations Research. 1974. Vol. 8. No v3. P. 73–103.
4. Tahami F.V., Daei–Sorkhabi A.H., Biglari F.R. / Creep constitutive equations for cold–drawn 304L stainless steel / Materials Science and Engineering: A. 2010. Vol. 527. No 18–19. P. 4993–4999.
5. Mohta K., Gupta S.K., Cathirvolu S., Jaganathan S., Chattopadhyaya J. / High temperature deformation behavior of Indian PHWR Calandria material SS 304L / Nuclear Engineering and Design. 2020. Vol. 368. 110801.

УДК 539.376

**Назаров Владлен Витальевич**, кандидат технических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова

**Nazarov Vladlen Vitalevich**, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University

## **СРАВНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ КОБАЯШИ С КЛАССИЧЕСКИМИ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

## **COMPARISON OF KOBAYASHI STRESS WITH CLASSICAL EQUIVALENT STRESSES**

**Аннотация.** Рассмотрено напряжение Кобаяши, представляющее собой комбинацию из трех главных напряжений с двумя материальными параметрами. Цель данной работы заключалась в сравнении суммарных погрешностей для напряжения Кобаяши с классическими эквивалентными напряжениями. В качестве экспериментальных данных использованы результаты испытаний на длительную прочность нержавеющей стали X18H10 при 850°C, где трубчатые образцы подвергались одновременному воздействию осевой силы и внутреннего давления. Для связи времени в момент разрушения от эквивалентного напряжения рассмотрена дробно-степенная зависимость, в которой эквивалентное напряжение снизу ограничено пределом ползучести и сверху – пределом кратковременной прочности. В данной работе предел ползучести и предел кратковременной прочности рассмотрены как материальные параметры, что позволило их вычислить по экспериментальным данным, полученным при одноосном растяжении. Сравнение суммарных погрешностей разности между теоретическими и экспериментальными значениями времени в момент разрушения показало, что напряжение Кобаяши более точно описывает длительную прочность при двухосном растяжении.

**Abstract.** The Kobayashi stress is considered, which is a combination of three principal stresses with two material parameters. The purpose of this work was to compare the total errors for the Kobayashi stress with classical equivalent stresses. As experimental data, we used the results of creep rupture strength tests of 304 stainless steel at 850°C, where tubular samples were simultaneously exposed to axial force and internal pressure. To relate the creep rupture life to the equivalent stress, a fractional power-law dependence is considered, in which the equivalent stress is limited from below by the creep threshold and from above by the break creep strength. In this work, the creep threshold and the break creep strength are considered as material parameters, which made it possible to calculate them from experimental data obtained under uniaxial tension. Comparison of the total errors of the difference between theoretical and experimental values of creep

rupture life showed that the Kobayashi stress more accurately describes the creep rupture strength under biaxial tension.

**Ключевые слова:** сталь, X18H10, длительная прочность, время в момент разрушения, порог ползучести, предел кратковременной прочности, двухосное растяжение, эквивалентное напряжение, напряжение Кобаяши.

**Keywords:** steel, AISI 304, creep rupture strength, creep rupture life, creep threshold, break creep strength, biaxial tension, equivalent stress, Kobayashi stress.

### **Основная часть**

Еще на рубеже 20–30-х г. прошлого столетия установлено, что в экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении, прослеживается двухпараметрическая степенная зависимость времени в момент разрушения от номинального напряжения. С появлением данных, полученных при сложном напряженном состоянии, потребовалась некоторая модернизация этой зависимости, заключающаяся в замене номинального напряжения на различные скалярные характеристики тензора напряжений. В качестве таких характеристик могут выступать инварианты тензора напряжений, к которым относят главные напряжения, различные комбинации из главных напряжений, коэффициенты характеристического уравнения для тензора напряжений, а также различные комбинации из этих коэффициентов, где в качестве таковых рассматривают гидростатическое давление и напряжение Мизеса. Такие характеристики тензора напряжений получили название эквивалентных напряжений.

По мере накопления экспериментального материала для длительной прочности при сложном напряженном состоянии возникла потребность в анализе экспериментальных данных с учетом классических, а также других эквивалентных напряжений. Суть данного подхода [1–9] заключается в том, что рассматриваются несколько эквивалентных напряжений, а затем сравниваются для них суммарные погрешности в виде относительной разности между аппроксимирующими и экспериментальными значениями времени в момент разрушения. Среди всех рассматриваемых эквивалентных напряжений выбирается критериальное напряжение, для которого суммарная погрешность принимает наименьшее значение.

В работах [1–6] рассмотрены почти все известные на тот момент времени экспериментальные данные для длительной прочности при сложном напряженном состоянии. Проведенная систематизация для сложного напряженного состояния, где трубчатые образцы подвергались либо растяжению и внутреннему давлению, либо подвергались растяжению и кручению, не смогла выявить однозначного критериального напряжения для аппроксимации всех рассмотренных экспериментальных данных. Между тем в работах [5–9] установлено, что по сравнению с классическими эквивалентными напряжениями линейная комбинация из двух классических

эквивалентных напряжений с материальным параметром почти всегда приводит к снижению суммарной погрешности.

Важно сказать, что кроме банальных испытаний, проводимых на трубчатых образцах, также при высокой температуре проводят испытания на крестообразных плоских и кубических образцах, которые подвергают двухосному и трехосному растяжениям [10–12]. Для описания образования и роста микропор, а также для других длительных процессов при трехосном растяжении, в [11–12] предложено использовать комбинацию из главных напряжений, которая в данной работе получила название напряжения Кобаяши.

При исследовании нового эквивалентного напряжения его предпочитают сравнивать с классическими эквивалентными напряжениями, к которым относят максимальное нормальное напряжение, напряжение Мизеса и удвоенное максимальное касательное напряжение. В качестве связи времени в момент разрушения от эквивалентного напряжения рассмотрена дробно–степенная зависимость [13], в которой предел ползучести и предел кратковременной прочности рассмотрены как материальные параметры [14], которые вычислены из минимизации суммарной погрешности методом наименьших квадратов [15]. Экспериментальные данные [16] получены для нержавеющей стали X18H10 при 850°C на трубчатых образцах, находящихся под воздействием осевой силы и внутреннего давления.

При анализе результатов вычислений рассмотрена относительная суммарная погрешность, равная отношению наименьшей суммарной погрешности среди всех рассматриваемых эквивалентных напряжений к суммарной погрешности эквивалентного напряжения. Относительная суммарная погрешность показала следующие значения: 1 – для напряжения Кобаяши, 0.9 – для максимального нормального напряжения и удвоенного максимального касательного напряжения, 0.7 – для напряжения Мизеса.

Таким образом, напряжение Кобаяши позволяет более точно описать длительную прочность при двухосном растяжении элементарного объема, чем классические эквивалентные напряжения, при этом, важно сказать, что вывод сделан по данным [16].

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Локощенко А.М. / Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии / Проблемы прочности. 1983. № 8. С. 55–59.
2. Локощенко А.М., Шестериков С.А. / Исследование длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / Проблемы прочности. 1986. № 12. С. 3–8.
3. Локощенко А.М. / К выбору критерия длительной прочности при сложном напряженном состоянии / Проблемы прочности. 1989. № 9. С. 3–6.

4. Локощенко А.М., Назаров В.В., Платонов Д.О., Шестериков С.А. / Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / *Механика твердого тела*. 2003. № 2. С. 139–149.
5. Локощенко А.М., Назаров В.В. / Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / *Авиационно-космическая техника и технология*. 2004. № 7. С. 124–128.
6. Локощенко А.М. / Оценка эквивалентных напряжений при анализе длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния / *Механика твердого тела*. 2010. № 4. С. 164–181.
7. Назаров В.В. / Критерий длительной прочности при растяжении и кручении трубчатых образцов / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2014. Т. 80. № 12. С. 57–59.
8. Назаров В.В. / Выбор сложного эквивалентного напряжения для двух различных вариантов плоского напряженного состояния / *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2021. № 2. С. 64–72.
9. Nazarov V. / Choice of complex equivalent stress for two different variants of the plane stress state / *Procedia Structural Integrity: 15th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures*. 2022. Vol. 40, P. 348–353.
10. Itoh R., Hikida T., Ogawa F., Itoh T., Sakane M., Zhang S. / Biaxial tensile creep damage of Mod.9Cr–1Mo steel using cruciform specimen / *Proceedings of 9th China–Japan Bilateral Symposium on High Temperature Strength of Materials*. 2016. P. 60–66.
11. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. / Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 174. P. 30–43.
12. Sakane M., Kobayashi H., Ohki R., Itoh T. / Creep void formation and rupture lifetime in multiaxial stress states / *Key Engineering Materials*. 2019. Vol. 795. P. 159–164.
13. Шестериков С.А., Юмашева М.А. / Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести / *Механика твердого тела*. 1984. № 1. С. 86–92.
14. Nazarov V.V. / Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength / *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2023. No 3. P. 44–49.
15. Lasdon L.S., Fox R.L., Ratner M.W. / Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method / *Operations Research*. 1974. Vol. 8. No v3. P. 73–103.
16. Локощенко А.М., Мякотин Е.А., Шестериков С.А. / Ползучесть и длительная прочность стали X18H10T в условиях сложного напряженного состояния / *Механика твердого тела*. 1979. № 4. С. 87–94.

УДК 539.376

**Назаров Владлен Витальевич**, кандидат технических наук, научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова

**Nazarov Vladlen Vitalevich**, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University

## **ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ РАВНОМ МНОГООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ**

## **EQUIVALENT STRESS FOR DESCRIBING THE CREEP RUPTURE STRENGTH UNDER EQUAL MULTIAXIAL TENSION**

**Аннотация.** Существуют экспериментальные данные, которые свидетельствуют о неоднозначности в отношении времен в момент разрушения при одноосном и равном двухосном растяжениях при одном и том же значении главного напряжения. При 650°C для мартенситной стали Mod.9Cr–1Mo время в момент разрушения при одноосном растяжении оказалось больше, чем при равном двухосном растяжении. Между тем, при той же самой высокой температуре, для аустенитной стали 304, наоборот, время в момент разрушения при равном двухосном растяжении заметно оказалось больше, чем при одноосном растяжении. Важно сказать, что описать относительное различие времен в момент разрушения при одноосном и равном двухосном растяжениях классическими эквивалентными напряжениями, а также различными комбинациями от них, не представляется возможным. Для описания упомянутых эффектов в длительной прочности предложена нелинейная комбинация от главных напряжений с одним материальным параметром.

**Abstract.** There are experimental data that indicate ambiguity regarding the creep rupture lives under uniaxial and equal biaxial tension at the same value of the principal stress. At 650°C for martensitic steel Mod.9Cr–1Mo, the creep rupture life under uniaxial tension turned out to be longer than under equal biaxial tension. Meanwhile, at the same high temperature, for austenitic steel 304, on the contrary, the rupture time under equal biaxial tension turned out to be noticeably longer than under uniaxial tension. It is important to say that it is not possible to describe the relative difference in rupture times under uniaxial and equal biaxial tension by classical equivalent stresses, as well as various combinations of them. To describe the mentioned effects in creep rupture strength, a nonlinear combination of principal stresses with one material parameter is proposed.

**Ключевые слова:** сталь, Mod.9Cr–1Mo, 08X18H10, длительная прочность, время в момент разрушения, многоосное растяжение, эквивалентное напряжение, порог ползучести, предел кратковременной прочности.

**Keywords:** steel, Mod.9Cr–1Mo, AISI 304, creep rupture strength, creep rupture life, multiaxial tension, equivalent stress, creep threshold, break creep strength.

### Основная часть

Еще до недавнего времени равное многоосное растяжение не получалось идентифицировать эквивалентными напряжениями. При равном трехосном растяжении классические эквивалентные напряжения, а также производные от них в виде различных комбинаций с материальными параметрами [1], принимают равные значения, равные номинальному напряжению при одноосном растяжении.

Другой способ описания длительной прочности – кинетические уравнения [2–3], где в качестве величины рассеянных повреждений рассматривается векторная поврежденность, которая для не поврежденного материала принимает ноль, а в момент разрушения достигает своего предельного значения, равного единице. Так как поврежденность – формальная величина, то применение кинетических уравнений позволяет описать лишь главный процесс (длительную прочность) без таковой возможности для сопряженных процессов (накопление рассеянных повреждений, изменение структурного и фазового состояний в материале).

Для идентификации сложного напряженного состояния, реализуемого при равном трехосном растяжении [4], вместо напряжения Мизеса

$$\sigma_m = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

рассмотрена некоторая его модернизация, в которой сумма квадратов от удвоенных касательных напряжений заменена на сумму  $n$ -степеней от главных напряжений

$$\sigma_n = \sqrt[n]{\sigma_1^n + \sigma_2^n + \sigma_3^n}$$

Важно сказать, что кинетические уравнения позволяют описать длительную прочность, когда время в момент разрушения при одноосном растяжении больше, чем при равном двухосном растяжении [5]. Между тем, в экспериментальных данных [6] время в момент разрушения при равном двухосном растяжении больше, чем при одноосном растяжении при одном и том же значении главного напряжения.

Для связи времени в момент разрушения от эквивалентного напряжения рассмотрена дробно–степенная зависимость, для которой предел ползучести и предел кратковременной прочности вычислены из минимизации суммарной погрешности разности в логарифмических координатах между теоретическими и экспериментальными значениями времени в момент разрушения [8]. Для вычисления неизвестных использовался метод [9].

Данная работа посвящена проверке предложенного эквивалентного напряжения над экспериментальными данными [5–6], где результаты механических испытаний на одноосное растяжение получены на

цилиндрических образцах, а на двухосное растяжение, в том числе на равное двухосное растяжение, на миниатюрных плоских образцах [4]. В экспериментальных данных [5], полученных для мартенситной стали Mod.9Cr–1Mo (российского аналога нет) при 650°C, наблюдается превышение времени в момент разрушения при одноосном растяжении над временем в момент разрушения при равном двухосном растяжении, а для аустенитной стали 304 (российский аналог 08X18H10) при той же самой высокой температуре, наблюдается противоположный эффект.

Результаты вычислений показали, что предложенное эквивалентное напряжение удовлетворительно описывает относительное различие значений времени в момент разрушения при одноосном и равном двухосном растяжениях.

Таким образом, экспериментальные данные, полученные коллективом японских ученых при одноосном и двухосном растяжениях при одном и том же главном напряжении, свидетельствуют о двух различных эффектах длительной прочности, где при 650°C для мартенситной стали Mod.9Cr–1Mo равное двухосное растяжение приводит к снижению времени в момент разрушения, а для аустенитной стали 304, при той же самой высокой температуре, наоборот, приводит к росту времени в момент разрушения. В силу того, что описать эти два эффекта классическими эквивалентными напряжениями, а также другими производными от них в виде разных комбинаций с материальными параметрами, не представляется возможным, для описания относительно различия значений времени в момент разрушения при одноосном и равном двухосном растяжениях предложена нелинейная комбинация из трех главных напряжений с одним материальным параметром, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Локощенко А.М. / Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) / Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. № 4–2. С. 128–135.

2. Локощенко А.М. / Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) / Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 4. С. 149–164.

3. Lokoshchenko A.M. / Application of kinetic theory to the analysis of high-temperature creep rupture of metals under complex stress (review) / Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53. No 6. P. 599–610.

4. Hiyoshi N., Itoh T., Sakane M., Tsurui T., Tsurui M., Hisaka C. / Development of miniature cruciform specimen and testing machine for multiaxial creep investigation / Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 108. 102582.



5. Itoh R., Hikida T., Ogawa F., Itoh T., Sakane M., Zhang S. / Biaxial tensile creep damage of Mod.9Cr–1Mo steel using cruciform specimen / Proceedings of 9th China–Japan Bilateral Symposium on High Temperature Strength of Materials. 2016. P. 60–66.

6. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. / Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / Engineering Fracture Mechanics. 2017. Vol. 174. P. 30–43.

7. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести // Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.

8. Nazarov V.V. / Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength / Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2023. No 3. P. 44–49.

9. Lasdon L.S., Fox R.L., Ratner M.W. / Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method / Operations Research. 1974. Vol. 8. No v3. P. 73–103.

УДК 536.24

**Ни Александр Эдуардович**, кандидат физико-математических наук, инженер Исследовательской школы физики высокоэнергетических процессов Национального исследовательского Томского политехнического университета

**Nee Alexander Eduardovich**, candidate of physical and mathematical sciences, engineer of the Research School of High-Energy Physics of the National Research Tomsk Polytechnic University

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА ГИБРИДНЫМ РЕШЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ БОЛЬЦМАНА NUMERICAL STUDY OF CONVECTIVE-RADIATIVE HEAT TRANSFER BY THE HYBRID LATTICE BOLTZMANN METHOD**

**Аннотация.** Разработана гибридная математическая модель для анализа процесса совместного переноса теплоты естественной конвекцией и тепловым поверхностным излучением в двумерной постановке. В рамках сформулированной модели поле скоростей вычислялись мезоскопическим решеточным методом Больцмана. С другой стороны, расчет температурного поля осуществлялся путем конечно-разностного решения макроскопического уравнения энергии. Разработанный гибридный алгоритм, имитирующий метод прямого численного моделирования, тестировался на эталонных экспериментальных данных, полученных другими исследователями. Установлено, что учет теплового поверхностного излучения приводит к снижению числа Рэлея, при котором осуществляется ламинарно-турбулентный переход.

**Abstract.** A hybrid mathematical model has been developed to analyze the combined heat transfer by natural convection and thermal surface radiation in a two-dimensional formulation. Within the framework of the formulated model, the velocity field was calculated by the mesoscopic lattice Boltzmann method. On the other hand, the temperature field was calculated by a finite-difference solution of the macroscopic energy equation. The developed hybrid algorithm, imitating the direct numerical simulation, was tested on benchmark experimental data obtained by other researchers. It was found that thermal surface radiation decreases the value of the Rayleigh number at which the laminar-turbulent transition occurs.

**Ключевые слова:** метод решеточных уравнений Больцмана, метод конечных разностей, естественная конвекция, поверхностное излучение, турбулентность.

**Keywords:** lattice Boltzmann method, finite difference method, natural convection, surface radiation, turbulence.

### Введение

Ламинарно-турбулентный переход является важной областью фундаментальных исследований переноса массы и теплоты. Понимание этого феномена играет ключевую роль при проектировании и создании различного теплообменного оборудования. Более того, точное прогнозирование этого перехода позволяет обеспечить оптимальные параметры при эксплуатации различных теплотехнических систем.

В ходе аналитического обзора литературных источников установлено, что ламинарно-турбулентный переход при естественной конвекции анализируется в условиях пренебрежения тепловым излучением. При этом известно [1], что радиационный теплообмен существенно влияет на характеристики термогравитационных течений. Целью работы является определение критических параметров, при которых ламинарный поток преобразуется в турбулентный в замкнутой прямоугольной полости.

### Постановка задачи

Рассматривается процесс естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с боковым нагревом/охлаждением. Предполагается, что теплообмен излучением осуществляется только между серыми диффузными стенками области анализа. Процесс теплопереноса можно описать следующими дифференциальными уравнениями:

$$f_k(\vec{x} + \vec{c}_k \cdot \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\vec{x}, t) - \Delta t \cdot \omega_s \cdot (f_k^s - f_k^{seq}) - \Delta t \cdot \omega_a \cdot (f_k^a - f_k^{aeq}) + \Delta t \cdot F, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $f^a$  – асимметричная функция распределения,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $f^{aeq}$  – асимметричная равновесная функция распределения,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $f^s$  – симметричная функция распределения,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$f^{seq}$  – симметричная равновесная функция распределения, кг/м<sup>3</sup>;  $F$  – сила, кг/(с·м<sup>3</sup>);  $T$  – температура, К;  $\Delta t_L$  – решеточный шаг по времени, с;  $t$  – время, с;  $u, v$  – компоненты скорости по осям  $x, y$ , соответственно, м/с;  $x, y$  – размерные координаты, м;

Следует отметить, что уравнение (1) является дискретным аналогом кинетического уравнения Больцмана со схемой аппроксимации интеграла столкновения двухвременной релаксацией [2] и двумерной девятискоростной (D2Q9) топологией [3]. При этом симметричные и ассиметричные функции распределения рассчитываются как:

$$\begin{aligned} f_k^s &= \frac{f_k + f_{-k}}{2}, & f_k^{seq} &= \frac{f_k^{eq} + f_{-k}^{eq}}{2}, \\ f_k^a &= \frac{f_k - f_{-k}}{2}, & f_k^{aeq} &= \frac{f_k^{eq} - f_{-k}^{eq}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Следует выделить, что сочетание мезоскопических решеточных уравнений Больцмана с макроскопическим уравнением энергии известно как гибридная модель [4–5].

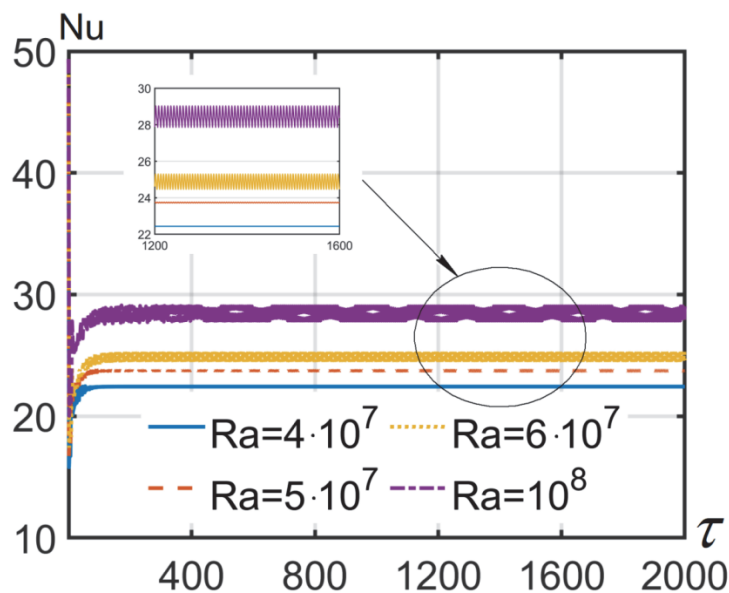


Рисунок 1 – Эволюция средних конвективных чисел Нуссельта

Упрощенный алгоритм решения сформулированной краевой задачи сводится к определению результирующих потоков излучения, конечно-разностного решения уравнения энергии и «столкновение – перемещение» условных частиц. На рисунке 1 приведены средние конвективные числа Нуссельта в динамике.

### Заключение

В ходе численных исследований установлено, что процесс конвективно-радиационного теплопереноса становится нестационарным при  $Ra \geq 6 \cdot 10^7$  и  $N_r \geq 63.95$ . В этом случае тренды средних чисел Нуссельта приобретают осцилляционный характер с постоянной амплитудой колебаний.

## **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00009.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:**

1. Akiyama, M., Chong, Q.P. Numerical analysis of natural convection with surface radiation in a square enclosure // Numerical Heat Transfer: A-Applications. – 1997. – Vol. 32. – P. 419–433.
2. Ginzburg, I., Verhaeghe, F., d'Humières, D. Two-relaxation-time Lattice Boltzmann scheme: About parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions // Communications in Computational Physics. – 2008. – Vol. 3. – P. 427–478.
3. Mohamad, A. A. Lattice Boltzmann Method: London: Springer-Verlag London Limited, 2011.
4. Feng, Y., Boivin, P., Jacob, J., Sagaut, P. Hybrid recursive regularized lattice Boltzmann simulation of humid air with application to meteorological flows // Physical Reviews E. – 2019. – Vol. 1000. – 23304.
5. Benhamou, J., Lahmer, E.B., Jami, M.S. Three-dimensional simulation of conjugate heat transfer using the hybrid lattice Boltzmann-finite difference method // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2022. – Vol. 139. – 106486.

УДК 519.633.6

**Никифоров Дьулустан Яковлевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, ЯО РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований", СВФУ

**Nikiforov Djulustan Yakovlevich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, research assistant, Yakutsk Branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Far Eastern Center for Mathematical Research", NEFU

## **ОНЛАЙН БЕССЕТОЧНЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ**

## **ONLINE MESHFREE GENERALIZED MULTISCALE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR PROBLEMS**

**Аннотация.** Данный доклад посвящается разработке онлайн бессеточного обобщенного многомасштабного метода для решения нелинейных задач с параболическим уравнением. Данный многомасштабный метод разделяется на автономный и онлайн этапы. На автономном этапе вычисляются многомасштабные базисные функции, которые учитывают

только пространственную неоднородность. На втором этапе непосредственно при решении самой нестационарной задачи вычисляются онлайн-многомасштабные базисные функции, учитывающие временные изменения нелинейных параметров уравнения. Таким образом, данный подход уменьшает количество базисных функций, необходимых для достижения высокой точности. Приводятся результаты численных исследований.

**Abstract.** This paper is devoted to the development of an online meshfree generalized multiscale method for solving nonlinear problems with a parabolic equation. This multiscale method is divided into offline and online stages. At the offline stage, multiscale basis functions are calculated taking into account only spatial heterogeneity. At the second stage, online multiscale basis functions are calculated directly when solving the non-stationary problem itself, taking into account time changes in the nonlinear parameters of the equation. Thus, this approach reduces the number of basis functions required to achieve high accuracy. The results of numerical studies are presented.

**Ключевые слова:** обобщенный многомасштабный метод конечных элементов, бессеточный метод, нелинейная задача, параболическое уравнение

**Keywords:** generalized multiscale finite element method, meshfree method, nonlinear problem, parabolic equation

### **Введение**

При моделировании диффузии в неоднородных пористых средах наиболее важным параметром является коэффициент проницаемости, представляющий, насколько быстро жидкость перемещается через пористую среду. Способ описания коэффициента проницаемости и то, как он изменяется в пространстве и времени, определяет реальную вычислительную сложность и проблемы численного анализа всего моделирования.

Пространственное разрешение, необходимое для точной аппроксимации решения, связано с наименьшим масштабом, в котором происходят изменения коэффициента проницаемости. Расчеты на подробных сетках на мелком масштабе приводят к большим матричным системам. Кроме того, разрывы и высокие скачки коэффициента создают дополнительные трудности в численной аппроксимации, влияя на точность и эффективность [1-4].

Классические многомасштабные методы работают эффективно для коэффициентов проницаемости с умеренным и низким контрастом. Однако обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (Generalized Multiscale Finite Element Methods, GMsFEM) был разработан для решения

задач с высококонтрастными коэффициентами. GMsFEM доказал свою эффективность в численном решении задач с многомасштабными высококонтрастными параметрами, находя применение в линейной теплопередаче, течении жидкости, упругости и параболических уравнениях, среди других практических задач [1-7].

В данном исследовании предлагается расширить бессеточный обобщенный многомасштабный метод (Meshfree Generalized Multiscale Finite Element Methods, MFGMsFEM), предложенный в работе [8]. Грубое пространство строится на основе существующей мелкомасштабной вычислительной сетки, которая разрешает неоднородные параметры задачи. Метод основан на GMsFEM, включая многомасштабные базисные функции для учета неоднородных параметров в грубом масштабе. Эти базисные функции вычисляются на автономном этапе с использованием локальных спектральных задач. MFGMsFEM был расширен на несколько задач [9-12].

При решении прикладных задач могут возникнуть дополнительные сложности, если математическая модель является нелинейной. Тогда свойства среды меняются в ходе решения задачи. Разработанный ранее MFGMsFEM не учитывает эти изменения. Поэтому для повышения точности многомасштабного моделирования мы применяем онлайн подход с дополнительными базисными функциями, которые вычисляются во время расчетов нестационарной задачи. Эти базисные функции учитывают изменения решения на основе невязки в каждой локальной подобласти.

### **Заключение**

В рамках данной работы был разработан онлайн бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения задач с нелинейными параметрами. Для подтверждения эффективности предлагаемого подхода, мы сравнили решения, полученные с помощью данного метода, с решениями на подробной расчетной сетке с использованием метода конечных элементов. Результаты численных исследований демонстрируют, что включение дополнительных базисных функций может значительно повысить точность расчетов.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1441.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Efendiev Y. Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM) / Y. Efendiev, J. Galvis, T. Y. Hou // Journal of computational physics. – 2013. – Vol. 251. – P. 116-135. – DOI: 10.1016/j.jcp.2013.04.045.
2. Efendiev Y. Multiscale finite element methods for high-contrast problems using local spectral basis functions / Y. Efendiev, J. Galvis, X. H. Wu. // Journal

of computational physics. – 2011. – Vol. 230. – No 4. – P. 937-955. – DOI: 10.1016/j.jcp.2010.09.026.

3. Abreu E. A convergence analysis of Generalized Multiscale Finite Element Methods / E. Abreu, C. Diaz, J. Galvis // Journal of computational physics. – 2019. – Vol. 396. – P. 303-324. – DOI: 10.1016/j.jcp.2019.06.072.

4. Randomized oversampling for generalized multiscale finite element methods / V. M. Calo, Y. Efendiev, J. Galvis, G. Li. // Multiscale Modeling and Simulation. – 2016. – Vol. 14. – No 1. – P. 482-501. – DOI: 10.1137/140988826.

5. Chung E. T. Generalized multiscale finite element method for elasticity equations / E. T. Chung, Y. Efendiev, S. Fu. // GEM-International Journal on Geomathematics. – 2014. – Vol. 5. – P. 225-254. – DOI: 10.1007/s13137-014-0066-0.

6. Generalized multiscale finite element method for elasticity equations / K. Gao, S. Fu, R. L. Gibson Jr., E. T. Chung, Y. Efendiev. // Journal of Computational Physics. – 2015. – Vol. 295. – P. 161-188. – DOI: 10.1016/j.jcp.2015.03.068.

7. Chung E. T. An adaptive GMsFEM for high-contrast flow problems / E. T. Chung, Y. Efendiev, G. Li. // Journal of Computational Physics. – 2014. – Vol. 273. – P. 54-76. – DOI: 10.1016/j.jcp.2014.05.007.

8. Nikiforov D. Meshfree generalized multiscale finite element method / D. Nikiforov // Journal of Computational Physics. – 2023. – Vol. 474. – P. 111798. – DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111798.

9. Nikiforov D. Y. Modeling of Artificial Ground Freezing Using a Meshfree Multiscale Method / D .Y. Nikiforov, S. P. Stepanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – No. 3. – P. 1206-1214. – DOI: 10.1134/S1995080223030241.

10. Nikiforov D. Y. Meshfree Multiscale Method for Richards' Equation in Fractured Media / D .Y. Nikiforov, Y. Yang // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – No. 10. – P. 4135-4142. – DOI: 10.1134/S1995080223100293.

11. Nikiforov D. Meshfree multiscale method for the infiltration problem in permafrost / D. Nikiforov, S. Stepanov, N. Lazarev // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 449. – P. 115988. – DOI: 10.1016/j.cam.2024.115988.

12. Nikiforov D. Meshfree multiscale method with partially explicit time discretization for nonlinear Stefan problem / D. Nikiforov, S. Stepanov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 451. – P. 116020. – DOI: 10.1016/j.cam.2024.116020.

УДК 669.046

**Николаев Михаил Сергеевич**, аспирант, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Nikolaev Mikhail Sergeevich**, graduate student, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

**Картаев Евгений Владимирович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Kartaev Evgeniy Vladimirovich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

**Ващенко Сергей Петрович**, научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Vashenko Sergey Petrovich**, research associate, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS.

**Ковалев Олег Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией «Физика плазменнодуговых и лазерных процессов», Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Kovalev Oleg Borisovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Scientific Officer, Head of Laboratory “Physics of plasma arc and laser processes”, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАМЕРЕ СМЕШЕНИЯ ТРЕХСТРУЙНОГО ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА**

### **NUMERICAL SIMULATION OF GAS FLOWS IN THE MIXING CHAMBER OF A THREE-JET PLASMACHEMICAL REACTOR**

**Аннотация.** Методами численного моделирования проведено исследование процессов взаимодействия воздушных плазменных струй в камере смешения трёхструйного плазмохимического реактора прямооточного типа. Получены трехмерные распределения скорости и температуры газа внутри камеры смешения, выявлены области циркуляции течений, определены пространственные распределения температуры во внутренней поверхности реактора, блоки которого могут состоять из разных материалов. Получены данные о тепловой нагрузке на внутренние стенки реактора.

**Abstract.** The interaction processes of air plasma jets inside the mixing chamber of a three-jet direct-flow plasma chemical reactor have been studied by numerical modeling methods. Three-dimensional distributions of the gas velocity and temperature inside the mixing chamber have been obtained, flow circulation areas have been identified, and spatial temperature distributions in the inner



surface of the reactor, whose blocks may consist of different materials, have been determined. Heat load data to the inner walls of the reactor has been obtained.

**Ключевые слова:** численное моделирование, плазмохимический реактор, смешение струй, циркуляция течения, тепловые потери

**Keywords:** numerical simulation, plasma chemical reactor, jet mixing, flow circulation, heat losses

## **Введение**

Технологии плазменного синтеза, обработки материалов и утилизации отходов используют многоструйные плазмохимические реакторы проточного типа [1-3]. Важным условием работы является эффективное взаимодействие высокоэнтальпийных потоков газа в камере смешения, что влияет на скорость и полноту протекающих химических реакций. Экспериментальное определение степени перемешивания газа внутри реактора осложнено наличием высоких температур [1, 2]. Численное моделирование позволяет существенно сократить число дорогостоящих экспериментов, и таким образом снизить общие затраты на разработку плазмохимических технологий.

Течение внутри реактора включает в себя образование зон циркуляции, которые могут выносить на внутренние стенки реактора продукты синтеза и химическое сырье, что приводит к загрязнению реактора. Изменение геометрии камеры смешения реактора может привести к уменьшению зон циркуляции, сокращению тепловой нагрузки на внутренние стенки реактора и повышению эффективности смешения плазменных струй. Поэтому численный расчет течения газа внутри реакторов разной геометрии важен для определения их оптимальной компоновки.

Целью работы является определение особенностей пространственных течений газа в камере смешения трёхструйного плазмохимического реактора (ТПХР). Постановка задачи и организация алгоритма должны иметь достаточно высокую скорость реализации вычислений с учетом многообразия физико-химических процессов в реакторах различной компоновки.

## **Постановка задачи**

Расчеты выполняются с использованием CFD кода Ansys Fluent. Плазмообразующим газом задаётся воздух. Воздух считается сплошной средой и подчиняется уравнениям Навье-Стокса и законам сохранения массы и энергии [4]. Свойства воздуха в зависимости от температуры при нормальном давлении задаются согласно [5]. Используется модель турбулентности  $k-\epsilon$  realizable как наиболее подходящая для моделирования вихревых течений, возникающих при столкновении высокоскоростных струй [4].

Моделирование проводится в трехмерной стационарной постановке. Расчетная область (рисунок 1) представляет собой область течения газа

внутри камеры смешения плазменного реактора с тремя симметрично подведенными плазмотронами под углом  $35^\circ$  к центральной оси реактора, а также область стенок реактора (крышка и корпус). На первых расчетах, в целях получения турбулентного профиля скорости и температуры на входе в камеру смешения, в область расчетов также входят сопла плазмотронов, рисунок 1(а). Дальнейшие расчеты проводятся без областей сопел, рисунок 1(б). Расчетная область в плоскости, проходящей через центральную ось реактора и через ось симметрии одного из плазмотронов, показана на рисунке 1(в). Свойства материалов стенок ТПХР, использованных при моделировании, представлены в таблице.

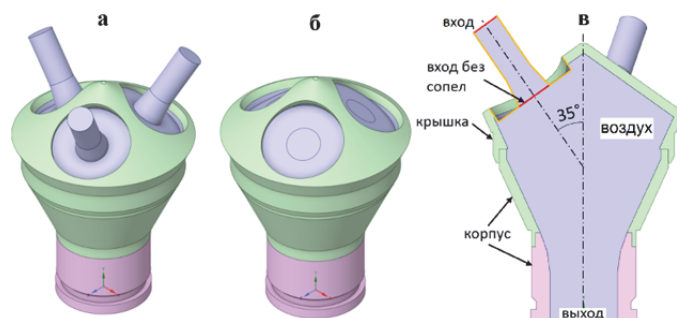


Рисунок 1 – Расчетная область: изометрия с соплами плазмотронов (а), изометрия без сопел (б), область в разрезе (в)

Таблица – свойства используемых в расчетах твердых материалов

Материал	Бронза	Латунь	Медь
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	8800	8560	8900
Удельная теплоемкость, Дж/(кг*К)	393	277	381
Теплопроводность, Вт/(м*К)	70	121	387,6
Области	Крышка, верхняя часть корпуса	Нижняя часть корпуса	Стенки плазмотронов, оранжевый контур на рисунке 1(в)

На внешних стенках расчетной области задается температура окружающей среды 300 К. Между газом внутри камеры смешения и внутренними стенками реактора имеет место сопряженная задача кондуктивно-конвективного теплообмена. На входе в расчетную область задается скорость плазменного потока 630 м/с и температура 5100 К. Таким образом, из каждого сопла в камеру смешения приходит турбулентный профиль скорости и температуры, соответствующий плазмотрону с мощностью 286 кВт, расходом 25 г/с и КПД 75%. Полученный турбулентный профиль задается в качестве входного условия для расчета варианта без сопел (рисунок 1(в)). На выходе из реактора задается давление 1 атм. Используется неструктурированная тетраэдрическая расчетная сетка.

## Результаты

На рисунке 2(а) показано распределение температуры в продольном сечении реактора, а также линии тока. Наблюдается возникновение зоны циркуляции течения и обратного течения в верхней области реактора над центральной областью с высокой температурой. На рисунке 2(б) показаны профили скорости и линии тока, видна эволюция вихревых структур, вызванных слиянием высокоскоростных плазменных струй. Поток на выходе из реактора является ламинарным. Самые теплонагруженные зоны внутренних стенок реактора (рисунок 2(в)) приходятся на область между каналами подвода струй, обусловленные столкновением струй, а также на крышке реактора, что вызвано обратным течением в верхней области, рисунок 2(в).

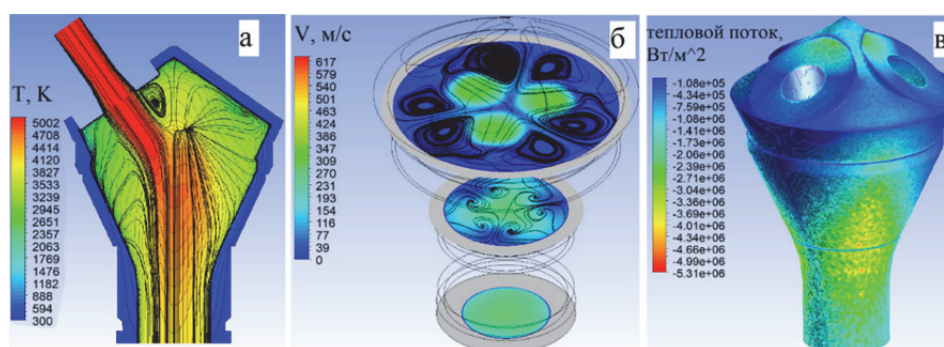


Рисунок 2 – Контуры: температуры в продольной плоскости и линии тока (а), скорости в поперечных плоскостях (б), теплового потока на стенках (в)

Просчитаны несколько вариантов численных сеток. Сетки сравнены по интегральным потерям тепла в стенки. Случай самой мелкой сетки с максимальным размером ячеек 0,5% от длины реактора с числом ячеек 8,2 млн шт. показал потери тепла 138,3 кВт. Наиболее близкое значение потерь тепла (143,6 кВт, отклонение порядка 3,8% относительно случая с 8,2 млн ячеек) показал вариант с применением адаптации сетки. Критерием адаптации задается изменение градиентов температуры, скорости и давления между соседними ячейками. Число ячеек сетки сократилось до 2,9 млн шт.

## Заключение

По итогам исследования проведено численное моделирование газодинамики смешения трёх воздушных плазменных струй внутри камеры смешения ТПХР проточного типа. Получены поля скорости и температуры, показаны рециркуляционные зоны внутри камеры реактора. Определены наиболее теплонагруженные области стенки камеры смешения. Процесс моделирования течения внутри ТПХР оптимизирован с точки зрения скорости вычисления. Разработанный подход предполагается использовать для численного моделирования многоструйных реакторов различной компоновки.

## **Финансирование**

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПИМ СО РАН

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Oh, J. H. Numerical simulation and diagnostic of thermal flow characteristic inside triple DC thermal plasma jet system / J. H. Oh, Y. H. Lee, T. H. Kim // *Int. J. Plasma Environ. Sci. Technol.* – 2021. – Vol. 15, No. 1. – P. e01002.
2. Татыбеков, А. Т. Энергетические характеристики трехплазмотронного реактора / А. Т. Татыбеков // *Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета.* – 2005. – Т. 5, № 1. – С. 29-33.
3. Chen, X. A Novel Multiple Plasma Jet Tangentially Mixed Reactor: Design and Carbon Black Production / X. Chen, Sh. Wang, W. Xia // *Plasma Chemistry and Plasma Processing.* – 2024. – Vol. 44, No. 2. – P. 721-738.
4. *Ansys Fluent Theory Guide*, ANSYS Inc., USA, 2020 – 814 p.
5. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик // Государственное издательство физико-математической литературы. Москва. – 1963. – С. 707

УДК 531.36

**Пестов Константин Николаевич**, доцент, Владивостокский филиал Российской таможенной академии

**Pestov Konstantin Nikolaevich**, Associate Professor, Vladivostok Branch of the Russian Customs Academy

**Гузев Михаил Александрович**, академик РАН, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Guzev Mikhail Alexandrovich**, Academician of the Russian Academy of Sciences, Institute of Applied Mathematics FEB RAS

**Любимова Ольга Николаевна**, профессор, Дальневосточный федеральный университет

**Lyubimova Olga Nikolayevna**, Professor, Far Eastern Federal University

## **УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ-МИТЧЕЛЛА ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

## **BELTRAMI-MITCHELL EQUATIONS FOR INCOMPATIBLE DEFORMATIONS**

**Аннотация** В механике сплошной среды хорошо известно, что шесть компонент тензора деформаций удовлетворяют дополнительным ограничениям, которые называются условиями совместности Сен-Венана. Эти условия сводятся к тому, что тензор Римана, вычисленный для метрического тензора деформированного состояния и соответствующие ему

тензор Риччи и скалярная кривизна обращаются в нуль. Представлена запись уравнений Бельтрами-Митчелла при переходе к неевклидовой модели сплошной среды.

**Abstract.** In continuum mechanics, it is well known that the six components of the deformation tensor satisfy additional constraints, which are called the Saint-Venant compatibility conditions. These conditions are reduced to the fact that the Riemann tensor calculated of the deformed state and the corresponding Ricci tensor and scalar curvature vanish. A record of the Beltrami-Mitchell equations in the transition to a non-Euclidean continuum model is obtained.

**Ключевые слова:** неевклидова модель сплошной среды, тензор Риччи, уравнения Бельтрами-Митчелла.

**Keywords:** the non-Euclidean continuum model, Ricci tensor, the Beltrami-Mitchell equations.

### Введение

В классических моделях континуальное рассмотрение сплошной среды равносильно гипотезе евклидовости материального континуума, что соответствует тривиальности тензора Римана. В линейном приближении по деформациям это совпадает с уравнениями совместности Сен-Венана [1,2]. Следствием совместности деформаций, линейности упругого континуума и уравнений равновесия являются уравнения Бельтрами-Митчелла

$$\Delta \hat{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \text{Tr}(\hat{\sigma}) = -\nabla \vec{F} - (\nabla \vec{F})^T - \frac{\nu}{1-\nu} \hat{g} \nabla \cdot \vec{F} \quad (1)$$

Однако, известно, что упругая деформация в общем случае не является совместной [3,4]. Возникает естественная задача рассмотреть, как изменятся классические уравнения Бельтрами-Митчелла для несовместных упругих деформаций. Так как условия Сен-Венана эквивалентны тривиальности тензора Римана, то соответственно отказ от их выполнения приводит к необходимости анализа его ненулевых компонент.

### Основная часть

Пусть сплошная среда в недеформированном состоянии описывается в некоторой криволинейной системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  с компонентами метрического тензора  $g_{ij}$  и компонентами связности Леви-Чивита  $\Gamma_{kl}^i$ , компоненты тензора Риччи  $R_{ij}$  в данном случае равны нулю. В деформированном состоянии компоненты метрического тензора  $\tilde{g}_{ij}$  и компоненты связности  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ , ассоциированной с этой метрикой, определяют тензор Риччи с компонентами [5]

$$\tilde{R}_{jk} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ji}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^i}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}_{km}^i \tilde{\Gamma}_{ji}^m - \tilde{\Gamma}_{im}^i \tilde{\Gamma}_{jk}^m.$$

Используя связь метрик с тензором деформаций [5]

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij},$$

связность Леви-Чивита в линейном приближении по деформациям приводится к виду

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i + E_{kl}^i,$$

где  $E_{kl}^i = \nabla_l \varepsilon_k^i + \nabla_k \varepsilon_l^i - \nabla^i \varepsilon_{kl}$  – тензор аффинной деформации [6]. Оказывается верной следующая связь

$$\tilde{R} = \Delta \hat{\varepsilon} + \nabla \nabla Tr(\hat{\varepsilon}) - \nabla(\nabla \cdot \hat{\varepsilon}) - (\nabla(\nabla \cdot \hat{\varepsilon}))^T. \quad (1)$$

Используя закон Гука

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left( \hat{\sigma} - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} Tr(\hat{\sigma}) \hat{g} \right)$$

при выполнении уравнений равновесия

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \vec{F} = 0,$$

где  $\vec{F}$  – вектор объемных сил, тензор Риччи (1) преобразуется к виду

$$\tilde{R} = \frac{1}{2\mu} \left[ \Delta \hat{\sigma} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \nabla \nabla Tr(\hat{\sigma}) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \hat{g} \Delta Tr(\hat{\sigma}) + \nabla \vec{F} + (\nabla \vec{F})^T \right]. \quad (2)$$

Используя условие равенства скалярной кривизны нулю

$$R = \tilde{R}_{jk} \tilde{g}^{jk} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \Delta Tr(\hat{\sigma}) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \hat{\sigma}) \right] = 0$$

в компонентах тензора Риччи (2) можно исключить слагаемое с  $\Delta Tr(\hat{\sigma})$ , тогда (2) примет вид

$$\tilde{R} = \frac{1}{2\mu} \left[ \Delta \hat{\sigma} + \left( \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) \nabla \nabla Tr(\hat{\sigma}) + \frac{\lambda(\nabla \cdot \vec{F})}{\lambda + 2\mu} \hat{g} + \nabla \vec{F} + (\nabla \vec{F})^T \right]. \quad (3)$$

Равенство нулю тензора Риччи и есть уравнения Бельтрами-Митчелла.

Наиболее естественным расширением линейной классической модели является представление тензора Риччи в виде

$$\hat{R}^e + \hat{R}^u = 0, \quad (4)$$

где  $\hat{R}^e$  – тензор Риччи построенный на упругих деформациях,  $\hat{R}^u$  – тензор Риччи построенный на необратимых деформациях характеризующих внутреннюю структуру, дефекты или внешнее воздействие.

Тогда (4) можно записать в виде

$$\Delta \hat{\sigma} + \left( \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) \nabla \nabla Tr(\hat{\sigma}) + \frac{\lambda(\nabla \cdot \vec{F})}{\lambda + 2\mu} \hat{g} + \nabla \vec{F} + (\nabla \vec{F})^T + 2\mu \hat{R}^u + \frac{\lambda \mu R^u}{\lambda + 2} \hat{g} = 0 \quad (5)$$

Уравнения (5) являются аналогом уравнений Бельтрами-Митчелла при условии (4).

## **Заключение**

В работе получено расширение классических уравнений Бельтрами-Митчелла на случай неевклидовых моделей и в случае несовместных деформаций, характеризующимися своим тензором Риччи.

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. // М.: Наука, 1988. – 712 с.
2. Елисеев В. В. Механика упругих тел. // СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 341 с.
3. Мясников В. П., Гузев М. А. Геометрическая модель дефектной структуры упругопластической сплошной среды // ПМТФ. –1999. – Т. 40, №2. – С. 163–173.
4. Гузев, М. А. Неевклидова структура поля внутренних напряжений сплошной среды / М. А. Гузев, В. П. Мясников // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 29-44. – EDN EQVLWD.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.
6. Норден А. П. Пространства аффинной связности. // М.: Наука, 1976. – 432 с.

УДК 519.642

**Погорелов Сергей Анатольевич**, научный сотрудник, ВЦ ДВО РАН  
**Pogorelov Sergey Anatolievich**, Researcher, Computing Center FEB RAS

**Каширин Алексей Алексеевич**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ВЦ ДВО РАН

**Kashirin Alexey Alekseevich**, Candidate of Engineering Sciences, Senior Researcher, Computing Center FEB RAS

**Брижик Михаил Андреевич**, техник, ВЦ ДВО РАН

**Brizhik Mihail Andreevich**, technician, Computing Center FEB RAS

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА 3-D УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

## **NUMERICAL SOLUTION OF THE EXTERNAL NEUMANN PROBLEM OF THE 3-D HELMHOLTZ EQUATION**

**Аннотация.** В работе рассматривается численный метод решения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в интегральной постановке. Предложен численный метод решения, позволяющий находить приближенные решения задач описанных в интегральной форме. В качестве расчётного алгоритма, полученных в результате аппроксимации СЛАУ, выбран метод GMRESS, модифицированный для работы с кластером.

**Abstract.** The paper considers a numerical method for solving the Neumann problem for the Helmholtz equation in the integral formulation. A numerical solution method is proposed that allows one to find approximate solutions to problems described in integral form. The GMRESS method, modified to work with a cluster, was chosen as the calculation algorithm obtained as a result of approximation of SLAEs.

**Ключевые слова:** уравнения Гельмгольца, задачи математической физики, GMRES, численные методы.

**Keywords:** Helmholtz equations, problems of mathematical physics, GMRES, numerical methods.

### Введение

Рассматривается задача Неймана для акустических волн на трехмерном однородном включении в классической постановке. Главное преимущество использования метода граничных интегральных уравнений при решении задач 2 рода уравнения Гельмгольца [1, 2] во внешней области заключается в том, что данный подход позволяет свести задачу по неограниченной области, к задаче на компактной границе с меньшей размерностью. Однако данный метод сопровождаются и негативные моменты. Одним из них основных можно выделить, применение теории потенциалов для вывода граничных интегральных уравнений классических краевых задач приводят к уравнениям, которые не имеют единственного решения на собственных значениях внутренних краевых задач.

### Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $R^3$  с ортогональной системой координат  $ox_1x_2x_3$ , заполненное однородной изотропной средой с плотностью  $\rho_e$ , скоростью распространения колебаний  $c_e$  и коэффициентом поглощения  $\gamma_e$ . Области  $R^3$ , занятые включением и вмещающей средой, обозначим через  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$ ,  $\Omega_e = R^3 \setminus \bar{\Omega}_i$ ,  $u_i, u_e$  - комплексная амплитуда давления проходящего и отраженного волнового поля соответственно.

Уравнение Гельмгольца для задачи Неймана во внешней области:

$$\Delta u_e + k_e^2 u_e = 0 \text{ в } \Omega_e.$$

Условие непрерывности полного поля давлений и нормальных составляющих поля смещений при переходе через границу области S

$$\frac{\partial u_e}{\partial n} = f_e(x),$$

где  $n = n(x)$  – единичный вектор нормали к S (направлен в сторону  $\Omega_e$ )

Условие излучения на бесконечности:

$$\frac{\partial u_e}{\partial |x|} - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \text{ при } |x| \rightarrow \infty,$$

т.к. стоит требование отсутствия волн приходящих из бесконечности.



$$k_{i(e)}^2 = \frac{\omega[\omega + i\gamma_{i(e)}]}{c_{i(e)}^2},$$

$$\text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0,$$

где  $\omega$  – круговая частота звуковых колебаний

Теорема 1: Внешняя задача Неймана имеет не более одного решения.

Доказательство данной теоремы приведено в работе [3].

Далее перейдем к интегральной постановке для внешней задачи Неймана.

Интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$-\frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) q(y) d\Gamma_y = f_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad f_0(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n},$$

где  $q(x)$  – искомое решение интегрального уравнения

$G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}$  – фундаментальное решение уравнения

Гельмгольца

$\frac{\partial u(x)}{\partial n}$  – нормальная производная искомого решения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешней области.

**Численный метод.** Рассмотрим численный метод для внешней задачи Неймана (в интегральной постановке):

С каждой точкой на поверхности связываем базисные функции:

$$\sum_{i=1}^M \varphi_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Gamma$$

Будем считать, что  $q(y) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \varphi_i(y)$

Подставив данное выражение в условие задачи Неймана, получим:

$$-\frac{q(x)}{2} + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) \varphi_i(y) d\Gamma_y = f_0(x), \quad x \in \Gamma.$$

Теперь можно приступать к интегрированию  $\varphi_i(y)$ . Действовать можно двумя путями:

а) Подставим вместо  $x$ , известные  $M$  точек (чаще всего применяется для двумерного случая)

б) Используя метод Моментов (домножим и проинтегрируем, используется для трехмерного случая)

Следовательно, получим выражение следующего вида:

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\Gamma} \psi_j(x) \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) \varphi_i(y) d\Gamma_y \right) d\Gamma_x = \int_{\Gamma} f_0(x) \psi_j(x) d\Gamma_x,$$

$$j = \overline{1, M}.$$

Представим части полученного выражения в следующем виде:

$$\int_{\Gamma} f_0(x)\psi_j(x) d\Gamma_x = f_j$$

$$\int_{\Gamma} \psi_j(x) \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x,y)\varphi_i(y) d\Gamma_y \right) d\Gamma_x$$

$$\approx \int_{R^3} \widetilde{\psi}_j(x) \left( \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x,y)\varphi_i(y) dy \right) dx = \alpha_{ij}$$

Полученный интеграл:

$$\int_{R^3} \widetilde{\psi}_j(x) \left( \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x,y)\varphi_i(y) dy \right) dx$$

При правильном выборе  $\widetilde{\psi}_j(x)$  и  $\varphi_i(y)$   $\alpha_{ij}$  можно посчитать аналитически.

Следовательно, в результате преобразований получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=1}^M \alpha_{ij} a_i = f_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Расчёт данной системы проводится с помощью метода решения СЛАУ GMRES [4].

После нахождения  $a_i$ , мы можем определить искомое нами решение в любой точке, используя следующее выражение:

$$u(x) = \sum_{i=1}^M a_i \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x,y)\varphi_i(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Omega_e$$

**Результаты.** Представленные ниже результаты работы программного комплекса позволяют понять, правильно ли проведены расчёты, получить доказательства теоретических предположений, а также дают возможность проанализировать изучаемый объект.

На рисунках 1 и 2 приведены найденные значения относительных погрешностей решений уравнений в норме L2 для внутренних и внешних областей соответственно. Видно, что при достаточно больших  $M$  погрешность решений имеет порядок не хуже  $h^2 \sim M^{-1}$ , где  $M$  – количество точек наблюдения.

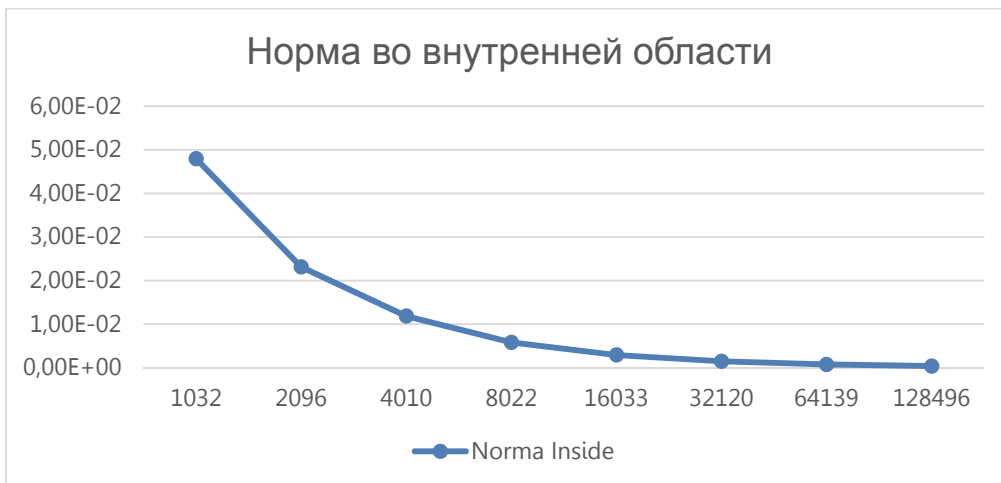


Рисунок 1 – График, иллюстрирующий падение нормы во внутренней области с увеличением количества точек

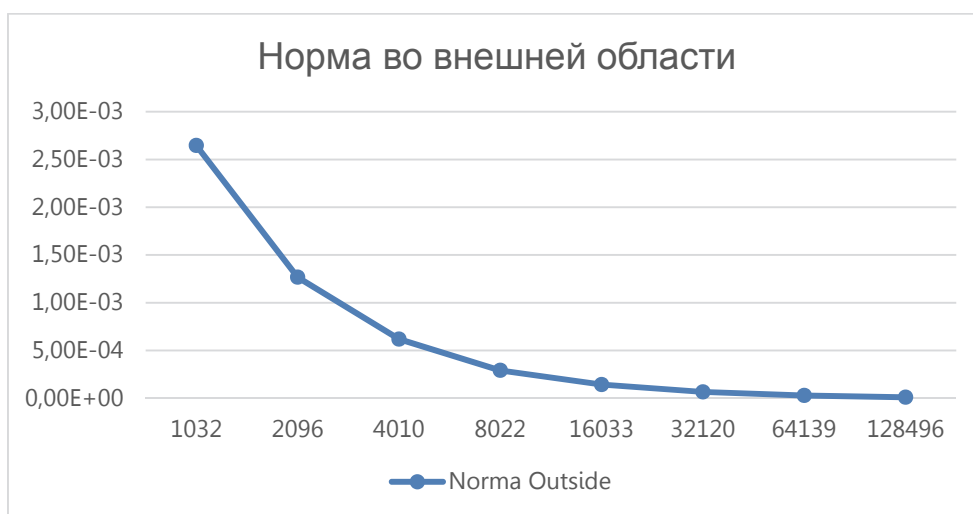


Рисунок 2 – График, иллюстрирующий падение нормы во внешней области с увеличением количества точек

Исходя из результатов наблюдения можно сделать вывод о наличии квадратичной сходимости погрешности решения при двукратном увеличении числа точек, что сходится с теоретическими выводами.

### **Заключение**

Рассмотрен численный метод решения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в интегральной постановке. Показан численный метод решения, с помощью которого возможно находить приближенные решения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца описанных в интегральной форме. В качестве расчётного алгоритма, полученных в результате аппроксимации СЛАУ, выбран метод GMRESS, модифицированный и оптимизированный для работы с кластером ВЦ ДВО РАН [5, 6].

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что предложенный метод решения дает хорошую сходимость и обладает достаточной точностью решения. В дальнейшем возможно Данный метод может быть использован для численного решения задачи Неймана в различных неограниченных областях с гладкими границами.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Каширин А.А., Смагин С.И. Обобщенные решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 79-90.
2. Каширин А.А., Смагин С.И. Численное решение интегральных уравнений трехмерных скалярных задач дифракции // Вычислительные технологии. – 2018. – Т. 23, № 2. – С. 20-36.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. / Перевод с англ. Еремина Ю. А., Захарова Е. В.; Под ред. Свешникова А. Г. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
4. Гаврилов Е.П. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений gmges и amep // Сборник материалов научно-практических конференций, состоявшихся в рамках Дней науки студентов ВлГУ. – Владимир, 2021. – С. 288-294.
5. Центр коллективного пользования "Центр данных ДВО РАН" [Электронный ресурс]: сайт. – Хабаровск: ВЦ ДВО РАН. URL: <http://lits.ccfbras.ru> (дата обращения: 20.05.2024).
6. Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П. Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы. – 2017. – № 12. – С. 14-16.

УДК 004.8

**Поляков Артем Николаевич**, Инженер, ВЦ ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия

**Polyakov Artem Nikolaevich.**, Engineer, CC FEB RAS, Khabarovsk, Russia

**Полякова Кристина Эдуардовна**, студент 1-го курса магистратуры, ДВГУПС, г. Хабаровск, Россия

**Polyakova Kristina Eduardovna.**, 1st year graduate student, FESTU, Khabarovsk, Russia

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ YOLO ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ПАХОТНЫХ ПОЛЕЙ

### USING YOLO MODEL FOR AGRICULTURAL FIELD SEGMENTATION

**Аннотация.** В работе рассматривается применение сверточной нейронной сети YOLOv8-seg для автоматического выделения областей пахотных земель на спутниковых снимках. Используя данные со спутников Sentinel-2, модель показала точность сегментации около 89% по метрике IoU. Однако сложной задачей остаётся учёт разнообразия условий окружающей среды, что может затруднить обобщение результатов. В статье обсуждаются преимущества и ограничения предложенного подхода, а также

подчеркивается необходимость увеличения набора данных для повышения точности моделей.

**Abstract.** This paper explores the application of the YOLOv8-seg convolutional neural network for the automatic segmentation of arable land areas from satellite imagery. Using data from Sentinel-2 satellites, the model achieved a segmentation accuracy of approximately 89% based on the Intersection over Union (IoU) metric. However, accounting for the diversity of environmental conditions remains a challenging task, potentially hindering the generalization of results. The paper discusses the advantages and limitations of the proposed approach and emphasizes the need to expand the dataset to improve model accuracy.

**Ключевые слова:** YOLOv8-seg, сегментация изображений, спутниковые снимки, пахотные земли.

**Keywords:** YOLOv8-seg, image segmentation, satellite imagery, arable land.

### **Введение**

В последние годы достижения в области компьютерного зрения и технологий дистанционного зондирования позволили проводить более эффективный и точный анализ спутниковых изображений для различных применений, включая сельскохозяйственный мониторинг и классификацию землепользования [1]. Одной из известных моделей, используемых для этой цели, является YOLO (You Only Look Once), которая получила широкое распространение для задач обнаружения объектов и сегментации [2].

Интеграция моделей YOLO со снимками Sentinel-2 особенно полезна для сегментации пахотных земель. Эта комбинация позволяет идентифицировать и нанести на карту различные типы растительного покрова, проводя различие между лесами, городскими районами и сельскохозяйственными полями [3].

Используя комбинации спектральных диапазонов, таких как коротковолновый инфракрасный (B11), ближний инфракрасный (B8) и синий (B2) диапазоны, исследователи могут отслеживать состояние сельскохозяйственных культур и обнаруживать аномалии, которые могут указывать на болезни или стрессовые состояния растений [4].

Семейство моделей YOLO представляет собой популярную и быстро развивающуюся серию алгоритмов обнаружения объектов на изображениях. Первоначально разработанный в 2015 году, YOLO претерпел множество модификаций, каждая из которых улучшала свои предшественники с точки зрения скорости, точности и эффективности [2]. Модели YOLO особенно известны своими возможностями обработки данных в режиме реального времени, что делает их подходящими для таких применений, как видеонаблюдение, беспилотные автомобили и точное земледелие. В последней версии YOLOv8 от Ultralytics, представлены новые функции и улучшения для повышения производительности, гибкости и эффективности,

поддерживающие различные задачи искусственного интеллекта vision, такие как обнаружение, сегментация, оценка положения, отслеживание и классификация [5].

В данной работе предлагается способ автоматического выделения областей пахотных полей с использованием модели машинного обучения, в частности, сверточной нейронной сети YOLOv8-seg.

#### **Исходные данные и методы**

Для создания файлов формата SHP, представляющих пахотные земли, использовались данные, полученные с веб-сайта sci-vega.ru. Ресурс предоставляет актуальные и достоверные географические данные, которые использовались для построения пространственных представлений пахотных земель.

Источниками снимков выбраны спутники Sentinel-2 с пространственным разрешением 10 метров, а временной период снимков – с мая по сентябрь. Данный временной интервал был выбран, поскольку он охватывает основной вегетационный период для большинства сельскохозяйственных культур в исследуемом регионе. Таким образом составлен набор данных, из снимков Sentinel-2. Снимки имеют второй уровень обработки, т.е. атмосферную коррекцию. Были выбраны каналы 2-4(RGB), снимки в RGB позволяют эффективно оценивать состояние и развитие растительности благодаря высокому уровню детализации и возможности идентификации ключевых биофизических параметров. Каждый снимок делился на части размерами 640 x 640.

В качестве сверточной нейронной сети для сегментации изображений выбрана модель YOLOv8-seg. Эта модель, являющаяся частью семейства YOLO, предоставляет эффективные возможности для одновременной детекции и сегментации объектов на изображениях. YOLOv8-seg имеет высокую скорость обработки и точность сегментации, что делает её идеальной для задач в реальном времени, связанных с выделением и анализом объектов на изображениях.

#### **Результаты и обсуждение**

На рисунке 1 показан пример разметки, выполненной экспертом. Результаты автоматической сегментации представлены на рисунке 2. Точность сегментации составила ~89% по метрике Intersection over Union (IoU).

Однако оценить, насколько хорошо эта метрика отражает реальный результат, сложно из-за большого количества объектов, что требует тщательного анализа. Для более объективной оценки сравнительный анализ должен провести эксперт, что обеспечит более высокую точность и надежность результатов сегментации.

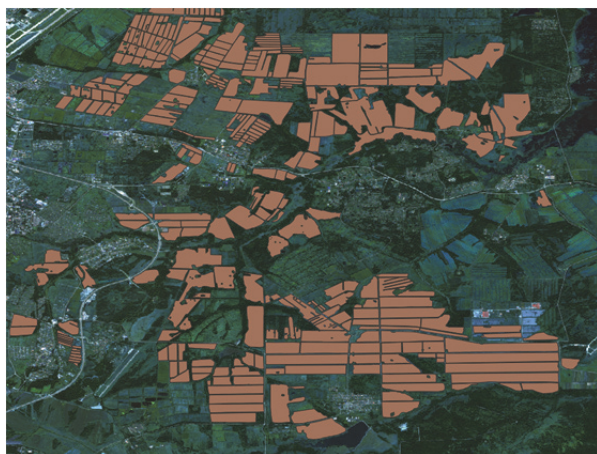


Рисунок 1 – Ручная разметка



Рисунок 2 – Автоматическая разметка

### **Заключение**

Рассмотрена возможность применения сверточной нейронной сети YOLOv8-seg для выделения пахотных земель. Модель, обученная на наборе данных со спутников Sentinel-2, показала точность сегментации ~89% по метрике IoU.

Результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что нейронные сети представляют собой перспективный инструмент для решения задачи выделения пахотных земель. Тем не менее, специфические особенности обучающих наборов данных остаются значительной проблемой. Наборы данных, используемые для обучения, могут недостаточно комплексно отражать разнообразие условий окружающей среды, с которыми приходится сталкиваться в реальных сельскохозяйственных условиях. Это разнообразие включает различия в типах почв, погодных условиях и стадиях созревания урожая, что может повлиять на способность модели эффективно обобщать результаты на новые данные.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Chen, L., et al. (2023). Advances in Remote Sensing for Agriculture: A Review. *Remote Sensing*, 15(3), 750-769.
2. Bochkovskiy, A., Wang, C. Y., & Liao, H. Y. M. (2021). YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection. *Computers & Graphics*, 99, 1-11
3. Xie, Y., et al. (2021). Sentinel-2 Data for Agricultural Land Cover Mapping: A Review. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 175, 276-295.
4. Li, X., et al. (2022). Remote Sensing-Based Monitoring of Crop Health: A Review. *Journal of Applied Remote Sensing*, 16(2), 025003.
5. Guo, X., et al. (2022). YOLOv5: Improving Object Detection and Segmentation Performance with Cross-Stage Feature Pyramid Networks. *Computer Vision and Image Understanding*, 217, 103374.

УДК 51-74:510.22:519.6:539.3

**Полянский Дмитрий Дмитриевич**, аспирант кафедры специализированных информационных технологий и систем Донбасской национальной академии строительства и архитектуры

**Polyansky Dmitry Dmitrievich**, postgraduate of Department of Specialized Information Technologies and Systems Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

## **НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕМПЕРАТУРОЗАВИСИМЫХ ПРЕДЕЛОВ ТЕКУЧЕСТИ И ПРОЧНОСТИ**

## **FUZZY-SET ESTIMATES OF THE INFLUENCE OF THE SCATTER OF PARAMETERS IN CALCULATION MODELS OF TEMPERATURE-DEPENDENT YIELD STRENGTHS AND STRENGTH**

**Аннотация.** Для решения задачи учета разбросов экспериментальных и экспертных значений исходных физико-механических и геометрических характеристик в моделях определения пределов прочности, текучести и параметра надежности для некоторых материалов и конструкций при термомеханическом деформировании предлагается методика перехода в расчетных соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей к неконтрастным аргументам нечетко-множественного типа на основе использования модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения.

**Abstract.** To solve the problem of taking into account the scatter errors of experimental and expert values of the initial physical-mechanical and geometric characteristics in models for determining the strength limits, yield strength and reliability parameters for some materials and structures during thermomechanical deformation, a technique for transitioning in the calculated relationships of the deterministic versions of the models under consideration to non-contrasting fuzzy-set arguments type based on the use of a modified alpha-level version of the heuristic generalization principle is proposed.

**Ключевые слова:** термомеханическое деформирование, пределы текучести и прочности, расчетные модели, погрешности исходных параметров, учет влияния неопределенности, нечетко-множественная методика, эвристический принцип обобщения.

**Keywords:** thermomechanical deformation, yield and strength limits, calculation models, errors of initial parameters, taking into account the influence of uncertainty, fuzzy set technique, heuristic principle of generalization.

Расчетный анализ моделей определения пределов текучести и прочности материалов и конструкций при термомеханическом



деформировании, который является одной из краеугольных задач проектных расчетов для широкого спектра промышленных приложений [1, 2], сталкивается с проблемой высокой степени неконтрастности исходных параметров в расчетных соотношениях рассматриваемых моделей, обусловленной разбросами данных экспериментальных измерений, технологическими допусками в процессе проектирования и изготовления, неоднозначными субъективными экспертными оценками их значений. В этой связи, учет влияния разброса параметров в расчетных моделях температурозависимых пределов текучести и прочности является весьма актуальным научным заданием, с решением которого связано качественное увеличение меры достоверности проектных прочностных оценок. Поскольку массивы экспериментальных данных, данных о разбросах значений параметров в пределах имеющихся допусков, зачастую не отвечают строгим статистическим критериям, а число подлежащих одновременному учету неконтрастных параметров является достаточно большим, то применение методов вероятностно-стохастического анализа для получения соответствующих оценок влияния неопределенности исходной информации во многих случаях весьма затруднено, как и в случаях необходимости учета субъективных экспертных оценок. В этих ситуациях учет факторов неопределенности может быть осуществлен с применением методов теории нечетких множеств в рамках концепции распространения областей определения аргументов в функциональных расчетных соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей на величины нечетко-множественного типа, описывающие исходные параметры с разбросами, с последующим использованием модифицированного варианта эвристического принципа обобщения и аппарата арифметики нечетких величин.

В рамках представляемого исследования рассматриваются отдельные описываемые в работах [1, 2] детерминистические расчетные модели учета влияния параметра температуры на величины пределов текучести  $\sigma_{T(T)}$  и пределов прочности  $\sigma_{B(T)}$  для малоуглеродистых сталей, а также соотношение для расчета температуры хрупкости  $T_{xp}$  для этих материалов, при которой предел текучести становится равным пределу прочности:

$$\sigma_{T(T)} = F_1(\sigma_{T(T_0)}, T, T_0, \beta_T) = \sigma_{T(T_0)} \exp(\beta_T (T^{-1} - T_0^{-1})); \quad (1)$$

$$\sigma_{B(T)} = F_2(\sigma_{B(T_0)}, T, T_0, \beta_B) = \sigma_{B(T_0)} \exp(\beta_B (T^{-1} - T_0^{-1})), \quad (2)$$

$$\beta_B = \beta_T (\ln(S_{omp} / \sigma_{B(T_0)})) (\ln(S_{omp} / \sigma_{T(T_0)}))^{-1};$$

$$T_{xp} = F_3(\sigma_{T(T_0)}, T_0, \beta_T, S_{omp}) = (T_0^{-1} + \ln(S_{omp} / \sigma_{T(T_0)}) / (0.43 \beta_T))^{-1}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{T(T_0)}$ ,  $\sigma_{B(T_0)}$  – соответственно значения экспериментально определяемых параметров пределов текучести и прочности малоуглеродистых сталей при нормальной температуре;  $\beta_T$ ,  $\beta_B$  – физические характеристики рассматриваемых металлов;  $S_{omp}$  – экспериментально определяемая при нормальной температуре

характеристика истинного сопротивление отрыву. В качестве анализируемых расчетных соотношений рассматривается также формула для температурозависимого параметра долговечности  $\tau$  металлов, сплавов и ряда иных конструкционных материалов [2], имеющая общий вид

$$\tau_1 = \Phi_1(\sigma, T, \tau_0, R, c, \alpha_T, E, \varepsilon_*, k_*) = \tau_0 \cdot \exp((RT)^{-1}(c/\alpha_T)(\varepsilon_* - k_*\sigma/E)), \quad (4)$$

и специальные модификации

$$\tau_2 = \Phi_2(\sigma, T, T_{m*}, \tau_0, R, c, \alpha_T, E, \varepsilon_*, k_*) = \tau_0 \cdot \exp((RT)^{-1}(c/\alpha_T)(\varepsilon_* - k_*\sigma/E)(1 - T/T_{m*})), \quad (5)$$

$$\tau_3 = \Phi_3(\sigma, T, T_m, \tau_0, R, c, \alpha_T, E, \varepsilon_*, k_*) = \tau_0 \cdot \exp((RT)^{-1}(c/\alpha_T)(\varepsilon_* - k_*\sigma/E)(1 - T/T_m)), \quad (6)$$

соответственно отвечающие описанию процессов хрупкого разрушения, либо достижения состояния текучести и объемного вязкого разрушения. Исходными параметрами расчетных соотношений (4)–(6) являются интенсивность действующих напряжений  $\sigma$ ; температура  $T$ ; предэкспоненциальный множитель  $\tau_0$ , характеризующий, в частности, минимальное время пребывания материала под нагрузкой перед хрупким разрушением [2]; коэффициент локальной перегрузки связей  $k_*$ ; относительная величина приводящего к разрыву предельного изменения межатомного расстояния  $\varepsilon_*$ ; модуль Юнга материала  $E$ ; коэффициент теплового расширения  $\alpha_T$ ; удельная теплоемкость  $c$ . Параметр  $R$  имеет выражение  $R = bN_A$ , где  $b = 1.38 \cdot 10^{23}$  Дж/К – постоянная Больцмана,  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$  – число Авогадро.

Особенностью применения представленных соотношений являются высокие уровни разбросов основных исходных параметров расчетных моделей. Рассматриваемый вариант нечетко-множественного учета их параметрической неопределенности базируется [3, 4] на введении описаний неконтрастных исходных параметров треугольными нечеткими числами с соответствующими кортежами реперных значений и разложениями по множествам  $\alpha$  – уровней:

$$\tilde{\sigma}_{T(T_0)} = (\sigma_{1T_0}, \sigma_{2T_0}, \sigma_{3T_0}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{T_0\alpha}, \bar{\sigma}_{T_0\alpha}], \quad (7)$$

$$\underline{\sigma}_{T_0\alpha} = (1 - \alpha)\sigma_{1T_0} + \alpha\sigma_{2T_0}, \quad \bar{\sigma}_{T_0\alpha} = \alpha\sigma_{2T_0} + (1 - \alpha)\sigma_{3T_0}; \quad \tilde{\sigma}_{B(T_0)} = (\sigma_{1B_0}, \sigma_{2B_0}, \sigma_{3B_0}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{B_0\alpha}, \bar{\sigma}_{B_0\alpha}], \quad \underline{\sigma}_{B_0\alpha} = (1 - \alpha)\sigma_{1B_0} + \alpha\sigma_{2B_0}, \quad \bar{\sigma}_{B_0\alpha} = \alpha\sigma_{2B_0} + (1 - \alpha)\sigma_{3B_0};$$

$$\tilde{\beta}_T = (\beta_{1T}, \beta_{2T}, \beta_{3T}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_{T\alpha}, \bar{\beta}_{T\alpha}], \quad \underline{\beta}_{T\alpha} = (1 - \alpha)\beta_{1T} + \alpha\beta_{2T}, \quad \bar{\beta}_{T\alpha} = \alpha\beta_{2T} + (1 - \alpha)\beta_{3T}; \dots;$$

$$\tilde{\alpha}_T = (\alpha_{1T}, \alpha_{2T}, \alpha_{3T}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{T\alpha}, \bar{\alpha}_{T\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{T\alpha} = (1 - \alpha)\alpha_{1T} + \alpha\alpha_{2T}, \quad \bar{\alpha}_{T\alpha} = \alpha\alpha_{2T} + (1 - \alpha)\alpha_{3T};$$

$$\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_\alpha, \bar{c}_\alpha], \quad \underline{c}_\alpha = (1 - \alpha)c_1 + \alpha c_2, \quad \bar{c}_\alpha = \alpha c_2 + (1 - \alpha)c_3.$$

Для нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемых моделей также вводятся разложения по множествам  $\alpha$  – уровней:

$$\tilde{\sigma}_{T(T)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{T\alpha}, \overline{\sigma}_{T\alpha}], \tilde{\sigma}_{B(T)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{B\alpha}, \overline{\sigma}_{B\alpha}], \dots, \tilde{\tau}_3 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tau}_{3\alpha}, \overline{\tau}_{3\alpha}]. \quad (8)$$

Применение модифицированного эвристического принципа обобщения при распространении областей определения расчетных соотношений (1)–(6) на нечетко-множественные аргументы реализуется с учетом анализа свойств знакоопределенности частных производных по аргументам в области их совокупного изменения [5]. В частности, с учетом

$$\begin{aligned} \partial \Phi_j / \partial \tau_0 > 0, \quad \partial \Phi_j / \partial T < 0, \quad \partial \Phi_j / \partial c > 0, \quad \partial \Phi_j / \partial \alpha_T < 0, \quad \partial \Phi_j / \partial \varepsilon_* > 0, \quad (9) \\ \partial \Phi_j / \partial k_* < 0, \quad \partial \Phi_j / \partial \sigma < 0, \quad \partial \Phi_j / \partial E > 0, \quad \partial \Phi_2 / \partial T > 0, \quad \partial \Phi_j / \partial T_m > 0, \end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_{1\alpha} &= \Phi_1(\overline{\sigma}_\alpha, \overline{T}_\alpha, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \underline{c}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_\alpha, \underline{\varepsilon}_{*\alpha}, \overline{k}_{*\alpha}), & (10) \\ \overline{\tau}_{1\alpha} &= \Phi_1(\underline{\sigma}_\alpha, \underline{T}_\alpha, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \overline{c}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{E}_\alpha, \overline{\varepsilon}_{*\alpha}, \underline{k}_{*\alpha}); \\ \underline{\tau}_{2\alpha} &= \Phi_2(\overline{\sigma}_\alpha, \overline{T}_\alpha, \underline{T}_{m*\alpha}, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \underline{c}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_\alpha, \underline{\varepsilon}_{*\alpha}, \overline{k}_{*\alpha}), & \overline{\tau}_{2\alpha} = \\ \Phi_2(\underline{\sigma}_\alpha, \underline{T}_\alpha, \overline{T}_{m*\alpha}, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \overline{c}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{E}_\alpha, \overline{\varepsilon}_{*\alpha}, \underline{k}_{*\alpha}); \\ \underline{\tau}_{3\alpha} &= \Phi_3(\overline{\sigma}_\alpha, \overline{T}_\alpha, \underline{T}_{m\alpha}, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \underline{c}_\alpha, \overline{\alpha}_{T\alpha}, \underline{E}_\alpha, \underline{\varepsilon}_{*\alpha}, \overline{k}_{*\alpha}), & \overline{\tau}_{3\alpha} = \\ \Phi_3(\underline{\sigma}_\alpha, \underline{T}_\alpha, \overline{T}_{m\alpha}, \overline{\tau}_{0\alpha}, R, \overline{c}_\alpha, \underline{\alpha}_{T\alpha}, \overline{E}_\alpha, \overline{\varepsilon}_{*\alpha}, \underline{k}_{*\alpha}). \end{aligned}$$

Аналогично, с учетом  $\partial F_1 / \partial \sigma_{T(T_0)} > 0, \quad \partial F_1 / \partial \beta_T < 0, \quad \partial F_1 / \partial T < 0, \quad \partial F_1 / \partial T_0 > 0;$   
 $\partial F_2 / \partial \sigma_{B(T_0)} > 0, \quad \partial F_2 / \partial \beta_B < 0, \quad \partial F_2 / \partial T < 0, \quad \partial F_2 / \partial T_0 > 0;$   
 $\partial F_3 / \partial \sigma_{T(T_0)} < 0, \quad \partial F_3 / \partial S_{omp} > 0, \quad \partial F_3 / \partial T_0 < 0, \quad \partial F_3 / \partial \beta_T < 0,$  находятся представления

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{T(T)\alpha} &= F_1(\underline{\sigma}_{T(T_0)\alpha}, \overline{T}_\alpha, \underline{T}_{0\alpha}, \overline{\beta}_{T\alpha}), \quad \overline{\sigma}_{T(T)\alpha} = F_1(\overline{\sigma}_{T(T_0)\alpha}, \underline{T}_\alpha, \overline{T}_{0\alpha}, \underline{\beta}_{T\alpha}); & (11) \\ \underline{\sigma}_{B(T)\alpha} &= F_1(\underline{\sigma}_{B(T_0)\alpha}, \overline{T}_\alpha, \underline{T}_{0\alpha}, \overline{\beta}_{B\alpha}), \quad \overline{\sigma}_{B(T)\alpha} = F_1(\overline{\sigma}_{B(T_0)\alpha}, \underline{T}_\alpha, \overline{T}_{0\alpha}, \underline{\beta}_{T\alpha}); \\ \underline{T}_{xp,\alpha} &= F_3(\overline{\sigma}_{T(T_0)\alpha}, \overline{T}_{0\alpha}, \underline{\beta}_{T\alpha}, \underline{S}_{omp,\alpha}), \quad \overline{T}_{xp,\alpha} = F_3(\underline{\sigma}_{T(T_0)\alpha}, \underline{T}_{0\alpha}, \overline{\beta}_{T\alpha}, \overline{S}_{omp,\alpha}). \end{aligned}$$

Соотношения (8), (10), (11) и определяют расчетный алгоритм для анализа разбросов в значениях температурозависимых пределов текучести и прочности, определяемых с учетом неконтрастности исходных параметров используемых моделей.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Махутов, Н. Н. Сопротивление элементов конструкций хрупкому разрушению / Н. Н. Махутов. – М.: Машиностроение, 1973. – 203 с.
2. Потапова, Л. Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? / Л.Б. Потапова. – М.: «Издательство Машиностроение – 1», 2005. – 244 с.
3. Hanss, M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 253 p.
4. Нгуен, Куок Ши. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, С. В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.

5. Ротштейн, А. П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А. П. Ротштейн, С. Д. Штовба, А. Н. Козачко – Винница: Универсум, 2007. – 215 с.

УДК 004.9:621.7

**Потянихин Дмитрий Андреевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Авиастроение», Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Potianikhin Dmitrii Andreevich**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Aircraft Construction Department, Komsomolsk-na-Amure State University

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МЕТАЛЛА В УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЛИТЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЗАГОТОВОК**

### **SIMULATION OF THE PROCESS OF DEFORMATION OF THERMOVISCOPLASTIC METAL IN A DEVICE FOR PRODUCING CONTINUOUSLY CAST DEFORMABLE WORKPIECES**

**Аннотация.** В работе рассматривается новая кинематическая схема литейно-ковочного модуля. Разработан численный метод решения задач деформирования вязкопластического металла со свойствами, зависящими от температуры. Представлены результаты вычислительных экспериментов в задаче об изготовлении полосы из алюминиевого сплава АД0 на литейно-ковочном модуле. Получены поля температуры и параметров напряженно-деформированного состояния.

**Abstract.** The paper considers a new kinematic scheme of the casting and forging module. The numerical method has been developed for solving problems of deformation of a viscoplastic metal with temperature-dependent properties. The results of computational experiments in the problem of manufacturing a strip of aluminum alloy AD0 on a casting and forging module are presented. The fields of temperature and parameters of the stress-strain state were obtained.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численный метод, кристаллизатор, литейно-ковочный модуль, деформация заготовки, тепловые процессы.

**Keywords:** mathematical modeling, numerical method, crystallizer, casting and forging module, workpiece deformation, thermal processes.

#### **Введение**

Литейно-ковочный модуль (ЛКМ) представляет собой конструктивное решение для получения непрерывно-литых деформированных заготовок (НЛДЗ). Идея совмещения в одном устройстве процессов литья и

деформации посредством применения кристаллизатора с подвижными стенками принадлежит профессору В.И. Одинокону [1]. Впоследствии самим В.И. Одиноконим и его многочисленными учениками было предложено большое количество модификаций ЛКМ. В настоящей работе представлены результаты моделирования процесса изготовления алюминиевой полосы на устройстве [2], кинематическая схема которого имеет отличия от основополагающего устройства [1].

### Математическая модель и алгоритм численного решения

Модель деформируемого тела строится в переменных Эйлера в соответствии с теорией течения. Поведение материала полагается вязкопластическим с изотропным упрочнением. Инерционные силы не учитываются. Для твердой фазы система модельных соотношений имеет вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \xi_{ij} = 0,5(v_{i,j} + v_{j,i}); \lambda^* = \frac{T}{H}; \quad (1)$$

$$T = T(H, \bar{\varepsilon}, \theta); H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}; \xi_{ii} = 0; c\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad} \theta);$$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\lambda^* \xi_{ij}. \quad (2)$$

По повторяющимся индексам производится суммирование. Индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3. В соотношениях (1), и (2)  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $v_i$  – компоненты скоростей перемещений,  $\lambda = \lambda(\theta)$  – коэффициент теплопроводности,  $\theta$  – температура;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\rho$  – плотность,  $\tau$  – время. Интенсивность касательных напряжений  $T = T(H, \bar{\varepsilon}, \theta)$  определяется с помощью аппроксимации экспериментальных данных [3, 4]. Для жидкой фазы вместо уравнения (2) справедливо определяющее соотношение

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\mu \xi_{ij}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкости. Агрегатное состояние металла определяются по температуре кристаллизации: при её превышении металл считается жидким, в противном случае – твердым. На рисунке 1 представлена расчетная схема процесса деформирования заготовки с учетом симметрии в плоскости  $x_3=0$ . В начальный момент времени  $\tau = 0$  начальный угол поворота эксцентрикового вала  $\alpha_0 = 0^\circ$ , начальная деформация металла  $\bar{\varepsilon}_0 = 0$ , начальная температура в исследуемой области при полном раскрытии бойков  $\theta_0$ . Краевые условия сформулированы на системе ортогональных поверхностей:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_1} = \sigma_{12}|_{S_1} = \sigma_{13}|_{S_1} = 0 (i = 2, 7); \sigma_{22}|_{S_2} = \sigma_{23}|_{S_2} = 0; \sigma_{23}|_{S_1} = 0 (i = 1, 4, 5, 6); \\ \sigma_{21}|_{S_1} = -\psi_4 \tau_s \frac{(v_{ck})_i}{v} \cos(n, x_2) (i = 1, 4, 5, 6); \sigma_{31}|_{S_8} = \sigma_{32}|_{S_8} = 0; \sigma_{31}|_{S_9} = -\psi_9 \tau_s \frac{(v_{ck})_9}{v}; \\ v_2|_{S_1} = 0; v_2|_{S_1} = -(v_n)_i, (i = 4, 5, 6); v_3|_{S_1} = 0 (i = 8, 9); \theta|_{S_i} = \theta_i (i = 1, \dots, 7); q|_{S_8} = 0. \end{aligned}$$

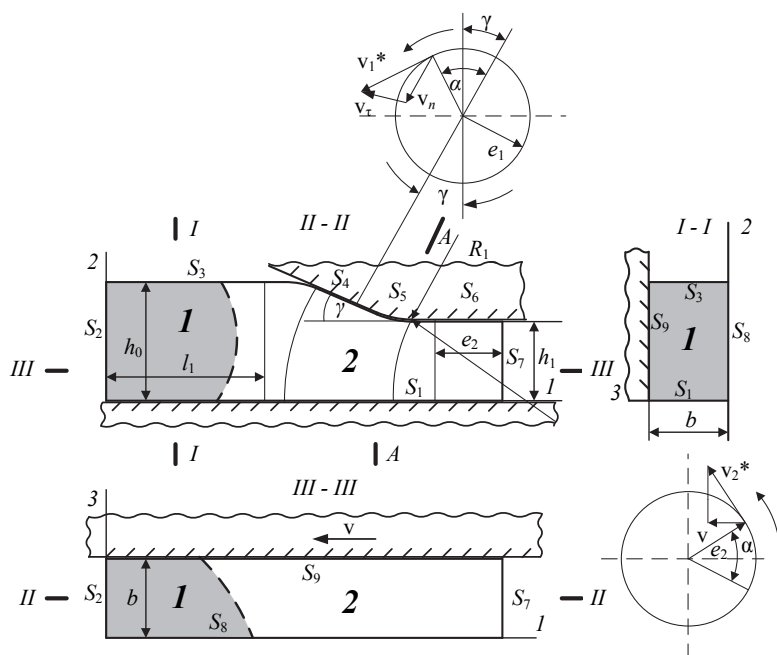


Рисунок 1 – Расчетная схема процесса деформирования

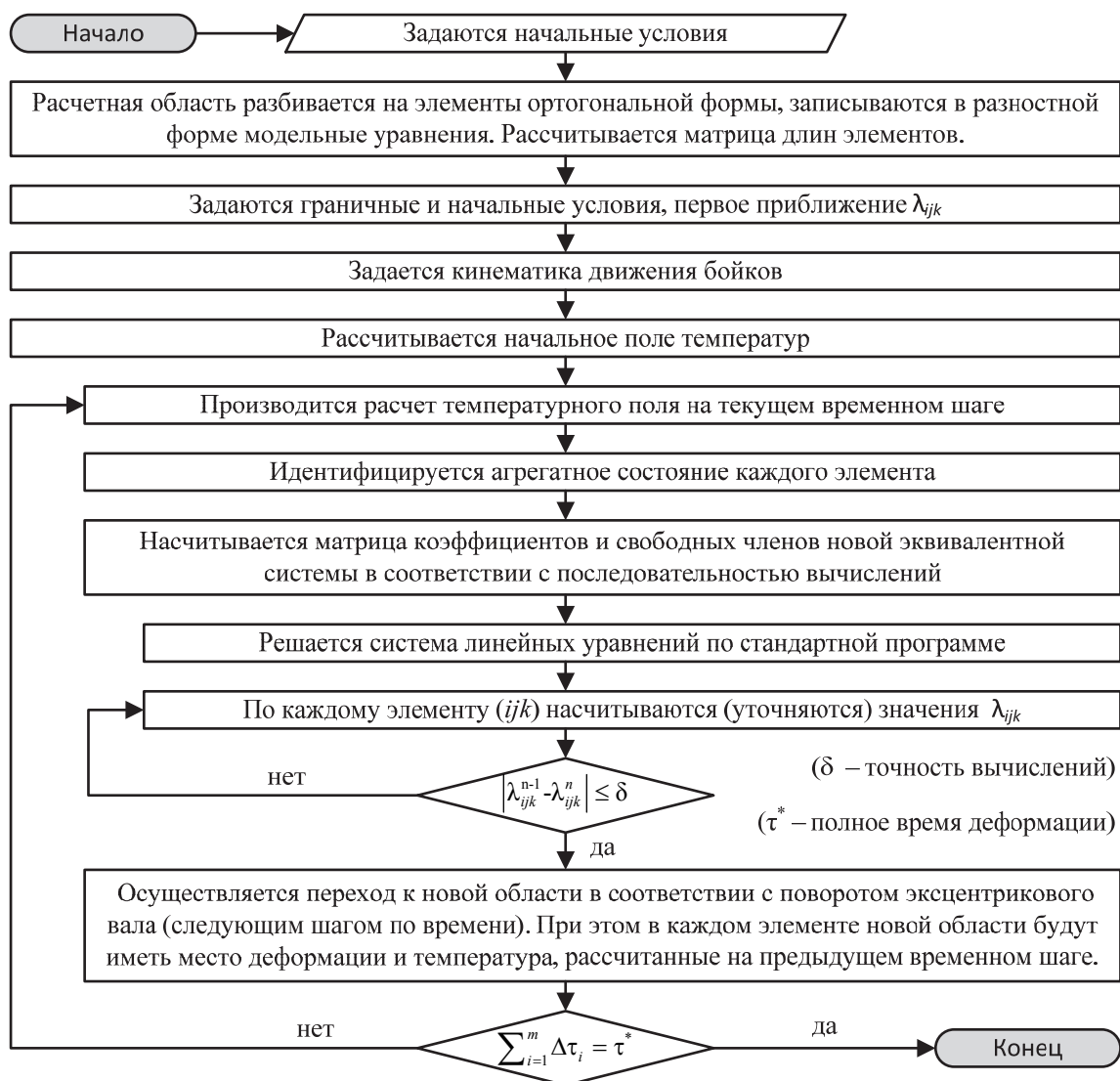


Рисунок 2 – Блок-схема вычислительного алгоритма

В граничных условиях  $\tau_s$  – предел текучести деформируемого материала при сдвиге;  $(v_{ск})_i$  – скорость скольжения металла относительно инструмента деформации на  $i$ -й поверхности контакта;  $(v_n)_i$  – компоненты нормальной скорости перемещения стенок кристаллизатора на  $i$ -й поверхности контакта, которые определяются из уравнения их движения;  $q|_{S_i}$  – тепловые потоки через поверхности  $S_i$ ;  $\psi_i$  – коэффициенты трения на соответствующих поверхностях  $S_i$ ;  $\theta_i$  – температура на гранях  $S_i$ .

Решение начально-краевой задачи осуществляется по алгоритму, представленному на рисунке 2. Результатом являются поля температуры и параметров напряженно-деформированного состояния в заготовке [5].

### **Заключение**

1. Сформулирована модель технологического процесса работы новой модификации литейно-ковочного модуля.

2. Разработан алгоритм и его компьютерная реализация для решения задачи деформирования заготовки на литейно-ковочном модуле на основе разностного численного метода.

3. Решена пространственная задача по определению температурных полей, параметров напряженно-деформированного состояния и движения в изменяющейся области деформирования на примере получения непрерывно-деформированной полосы из алюминиевого сплава АД0 [5].

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Патент № 2041011 С1 Российская Федерация, МПК В22D 11/051, В22D 11/04. устройство для непрерывного литья заготовок : № 92007791/02 : заявл. 24.11.1992 : опубл. 09.08.1995 / В. И. Одинокоев ; заявитель ИМиМ ДВО РАН.

2. Патент № 2769679 С1 Российская Федерация, МПК В22D 11/051. Устройство для получения непрерывнолитых деформированных заготовок : № 2021123605 : заявл. 05.08.2021 : опубл. 05.04.2022 / В. И. Одинокоев, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев [и др.] ; заявитель ФГБОУ ВО КнАГУ.

3. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокоев, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. В. Баков. – Москва: Наука, 2008. – 176 с.

4. Кроха, В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации. Справочник / В. А. Кроха. – Москва: Машиностроение, 1980. – 160 с.

5. Моделирование технологического процесса получения непрерывных металлоизделий на литейно-ковочном модуле новой модификации / В. И. Одинокоев, Э. А. Дмитриев, Д. А. Потянихин [и др.] // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 2. – С. 15-29. – DOI 10.20948/mm-2023-02-02.

УДК 517.54

**Прилепкина Елена Гумаровна**, РНОМЦ "Дальневосточный центр математических исследований", ДВФУ, б. Аякс, 10, Владивосток, Россия; старший научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН, ИПМ ДВО РАН

**Prilepkina Elena Gumarovna**, administrative director, Russian Scientific Research Center "Far Eastern Center for Mathematical Research", FEFU, Ajax b., 10, Vladivostok, Russia; senior researcher, Institute of Applied Mathematics, IAM FEBRAS

## О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЕМКОСТЯМИ КОНДЕНСАТОРОВ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

## ON THE SPECIAL FUNCTIONS ASSOCIATED WITH CONDENSERS IN AN ANNULUS

**Аннотация.** В докладе рассматриваются свойства специальных функций, возникающих в теоремах искажения для квазирегулярных отображений кругового кольца. Обсуждается их связь с конформной (емкостной) метрикой кругового кольца, приводятся формулы вычисления в плоском случае.

**Abstract.** The paper discusses the properties of special functions that arise in distortion theorems for quasiregular mappings of an annulus. Their connection with the conformal (capacitive) metric of the annulus is given. Calculation formulas in the plane case are obtained.

**Ключевые слова:** квазирегулярное отображение, емкостная метрика, кольцо

**Keywords:** quasiregular mapping, capacitive metric, annulus

При решении экстремальных задач геометрической теории функций возникает необходимость изучения некоторых специальных функций, связанных с емкостями конденсаторов. В частности, в теоремах искажения для квазиконформных отображений шара в евклидовом  $n$ -пространстве большую роль играет конформная емкость кольца Греча. Напомним, что кольцом Греча в евклидовом пространстве размерности  $n$  называется конденсатор, одна пластина которого есть единичный шар, а вторая пластина – отрезок от  $s$  до бесконечности. Конформная емкость кольца Греча представляет собой функцию от  $s$  и обозначается  $\gamma_n(s)$ ,  $s > 1$ . Искажающая функция  $\varphi_{K,n}(r)$ , зависящая от  $K > 0$  и  $0 < r < 1$ , определяется по формуле 
$$\varphi_{K,n}(r) = \frac{1}{\gamma_n^{-1}\left(K\gamma_n\left(\frac{1}{r}\right)\right)}.$$
 Исследованию свойств функций  $\gamma_n(s)$  и  $\varphi_{K,n}(r)$  посвящены работы G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen



(см. например, [1] и библиографию в ней). В частности, в [1, Теорема 1.21] показано, что функция  $m_n(r) = \left(\gamma_n\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{1/(n-1)}$  удовлетворяет неравенству

$$m_n(a) + m_n(b) \leq 2m_n(\sqrt{ab}).$$

Функции, удовлетворяющие приведенному выше неравенству, мы будем называть мультипликативно выпуклыми.

Чтобы подчеркнуть роль искажающей функции  $\varphi_{K,n}(r)$  в теории квазирегулярных отображений евклидова пространства, приведем аналог леммы Шварца [2, следствие 11.3]. Пусть  $f$   $K$ - квазирегулярное отображение единичного шара в себя,  $f(0) = 0$ . Тогда справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \varphi_{K,n}(|x|).$$

При доказательстве данного результата используются следующие факты: информация об изменении конформной (емкостной) метрики при квазирегулярном отображении, сферическая симметризация [3] и построение конформного отображения шара в себя, переводящего произвольные точки в точки, симметричные относительно нуля.

В данном докладе обсуждаются квазирегулярные отображения концентрического кольца  $K_r = \left\{r < |x| < \frac{1}{r}\right\}$  в кольцо  $K_\rho = \left\{\rho < |x| < \frac{1}{\rho}\right\}$ . Следуя логике получения аналога леммы Шварца для шара, мы будем применять наряду со сферической симметризацией симметризацию относительно гиперсферы [4]. На этом пути возникает необходимость рассмотрения двух специальных функций  $u_n(r, \alpha)$ ,  $v_n(r, s)$ , являющихся в некотором смысле аналогами функции  $\gamma_n(s)$ . Дадим их определение. Пусть  $CK_r$  дополнение до кольца  $K_r$ ,  $l_\alpha$  дуга раствора  $\alpha$  единичной окружности, лежащей в двумерной плоскости  $Ox_1x_2$ ,  $I_s$  отрезок  $\{se_1, s^{-1}e_1\}$ ,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < s < 1$ ,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Определим функцию  $u_n(r, \alpha)$  как конформную емкость конденсатора с пластинами  $CK_r$  и  $l_\alpha$ ,  $v_n(r, s)$  как конформную емкость конденсатора с пластинами  $CK_r$  и  $I_s$ . При фиксированном  $r$  функции  $u_n(r, \alpha)$ ,  $v_n(r, s)$  мы будем обозначать  $u_{n,r}(\alpha)$ ,  $v_{n,r}(s)$ .

В докладе обсуждается связь  $u_n(r, \alpha)$ ,  $v_n(r, s)$  с конформной (емкостной) метрикой кругового кольца, приводятся формулы их вычисления в плоском случае. В работе [5] показано, что  $u_n(r, \alpha)$ ,  $v_n(r, s)$  являются мультипликативно выпуклыми функциями от  $r$ . Следуя методике работы [6], мы получаем следующую теорему искажения для квазирегулярного отображения кольца.

Пусть  $f$   $K$ -квазирегулярное, не постоянное отображение концентрического кольца  $K_r = \left\{r < |x| < \frac{1}{r}\right\}$  в кольцо  $K_\rho = \left\{\rho < |x| < \frac{1}{\rho}\right\}$ .

Тогда

$$\sqrt{\frac{|f(x)|}{|f(x^*)|}} \leq v_{n,\rho}^{-1}\left(K v_{n,r}(|x|)\right).$$

Если, дополнительно,  $|x| = |y| = 1$ , то

$$\alpha(f(x), f(y)) \leq u_{n,\rho}^{-1} \left( K u_{n,r}(\alpha(x, y)) \right).$$

Здесь  $x^*$  означает точку, симметричную  $x$  относительно единичной гиперсферы,  $\alpha(x, y)$  угол между точками  $x$  и  $y$ .

Работы по изучению свойств квазирегулярных отображений выполнены в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года. Исследование специальных функций поддержано РФФИ, проект № 23-21-00056, <https://rscf.ru/project/23-21-00056/>

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Anderson, G.D. Special functions of quasiconformal theory/ G.D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen // Exposition. Math. -1989- V.7. С. 97–138.
2. Vuorinen, M. Conformal geometry and quasiregular mapping/M. Vuorinen // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
3. Sarvas, J. Symmetrization of condensers in  $n$  - space. // Ann. Acad. Sci. Fenn, Ser AI. 1972. V. 522. P. 1-44.
4. Ахмедзянова, Е. Г. Симметризация относительно гиперсферы / // Дальневосточный математический сборник. 1995. № 1. С. 40—50.
5. Прилепкина, Е.Г. О конформной емкости конденсатора с шаровыми пластинами/ Е.Г. Прилепкина // Дальневосточный математический журнал – 2022. – Т. 22. №1. – С. 76-83.
6. Прилепкина, Е.Г., Афанасьева-Григорьева, А.С. О конформной метрике кругового кольца в  $n$ -мерном евклидовом пространстве / Е.Г. Прилепкина, А.С. Афанасьева-Григорьева // . Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 233-241.

УДК 621.165+536.27

**Пятков Михаил Игоревич**, магистрант, Брянский государственный технический университет

**Ryatkov Mikhail Igorevich**, Master's student, Bryansk State Technical University

#### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СРОКОВ ЧИСТКИ ОТ НАКИПИ**

#### **MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAT EXCHANGER OPERATION TO OPTIMIZE THE DESCALING TIME**

**Аннотация.** Целью данной работы является разработка модели работы теплообменного аппарата паротурбинной установки для процесса

образования внутритрубных отложений (накипи). Установлено, что с увеличением времени работы конденсатора в значительной степени снижается температура жидкости по длине трубы. Выполнено сравнение эмпирических данных о кинетике процесса образования накипи с результатами, полученными расчетом по динамической модели процесса.

**Abstract.** The purpose of this work is to develop a model of the operation of the heat exchanger of a steam turbine installation for the formation of in-pipe deposits (scale). It was found that with an increase in the operating time of the condenser, the temperature of the liquid along the length of the pipe significantly decreases. Empirical data on the kinetics of the scale formation process are compared with the results obtained by calculating the dynamic model of the process.

**Ключевые слова:** математическая модель, теплообменный аппарат, образование накипи.

**Keywords:** mathematical model, heat exchanger, scale formation.

### **Введение**

Одним из важнейших показателей надежной и эффективной работы электрической станции является энергетическое оборудование. Увеличение единичных мощностей паротурбинных установок (ПТУ) ведет к росту металлоемкости теплообменных аппаратов. В связи с этим актуальным является проектирование на базе всесторонних исследований закономерностей теплообмена высокоэффективных теплообменников [1, 2], состояние поверхности теплообмена которых значительно меняется в процессе эксплуатации из-за накипеобразования [3].

### **Основная часть**

В данной работе предложено аналитическое представление изменения в эксплуатации динамических характеристик теплообмена применительно к теплообменному аппарату (конденсатору) паротурбинной установки (ПТУ). На практике не всегда существует возможность иметь большое количество эмпирических данных для полноценного расчета периодов чистки конденсаторов. В связи с этим проанализируем математическую модель теплообменного аппарата в виде некоторого объема, в котором движутся теплоносители. При создании математической модели были приняты следующие допущения:

- 1) значения температур по сечению теплоносителей усреднены;
- 2) пренебрегаем влиянием свободной конвекции жидкости на коэффициент теплоотдачи, учитывается только вынужденная конвекция;
- 3) пренебрегаем количеством тепла, проходящим в направлении потока за счет теплопроводности как в жидкости, так и в стенке трубы;

- 4) учитываем в локальных коэффициентах теплоотдачи эффекты излучения в радиальном направлении;
- 5) принимаем теплоемкости и плотности теплоносителей постоянными;
- 6) учитываем теплоемкость стенки;
- 7) принимаем теплопроводность материала стенки бесконечной;
- 8) пренебрегаем потерями в окружающую среду.

Выделим по длине теплообменника участок  $dx$  (рис. 1). Пусть в элементарном объеме движутся два теплоносителя, разделенные многослойной стенкой, которая состоит из металлической трубки и отложений накипи с внутренней и наружной сторон трубы. Площадь сечения  $A$ , определяется в зависимости от толщины слоя накипи  $\delta$  следующим образом:

$$A_1 = A_1[\delta_1(\tau)] = A_1(\tau), \text{ соответственно } A_2 = A_2[\delta_2(\tau)] = A_2(\tau).$$

Среднее значение за время  $d\tau$  определится как

$$A_{cp} = \frac{A(\tau) + A(\tau + d\tau)}{2} = A(\tau) + \frac{1}{2} \frac{dA}{d\tau} \cdot d\tau.$$

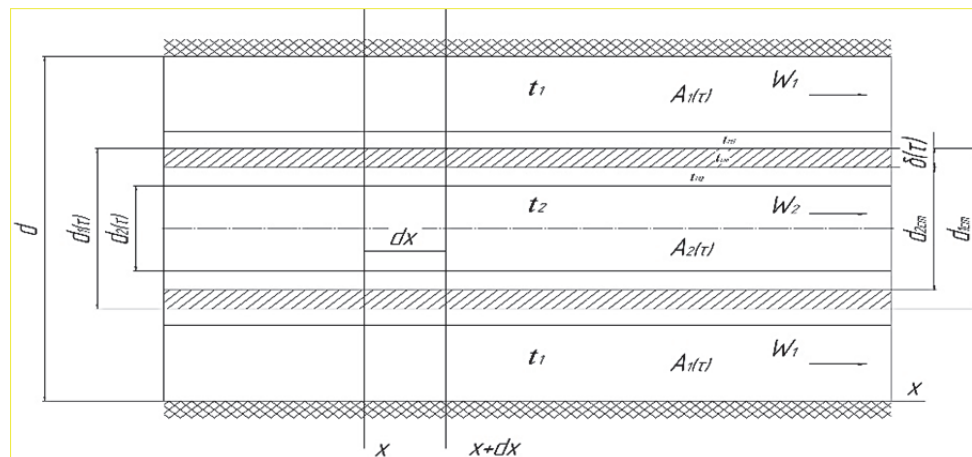


Рисунок 1 – Расчетная схема

К элементарному объему, ограниченному сечениями  $x$  и  $x+dx$ , может быть применен общий закон сохранения энергии для непрерывных тепловых процессов: накопление равно поступлению за минусом потерь в окружающую среду. В момент времени  $\tau$  количество тепла  $dQ_1$ , накопленное греющим теплоносителем в объеме  $A_1(\tau)dx$  составит

$$dQ_1 = \rho_1 \cdot C_{p1} \cdot t_1(x, \tau) \cdot A_1(\tau) dx.$$

При условии постоянства плотности и теплоемкости жидкости накопленное количество тепла  $dQ_2$  в момент времени  $\tau + d\tau$  определяется как

$$dQ_2 = \rho_1 \cdot C_{p1} \cdot [t_1(x, \tau) + \frac{\partial t_1}{\partial \tau}] \cdot (A_1 + \frac{dA_1}{d\tau} \cdot d\tau) dx.$$

Таким образом, количество тепла, накопленное на участке  $dx$  за промежуток времени  $d\tau$  представляет собой разность  $dQ = dQ_2 - dQ_1$ , то есть

$$dQ = \rho_1 \cdot C_{p1} \cdot (A_1 \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + t_1 \frac{dA_1}{d\tau}) \cdot d\tau \cdot dx.$$

В качестве количественных параметров для расчетов по разработанным моделям принимались значения, полученные в исследованиях [3, 4, 5]. Результаты расчета представлены аппроксимированными зависимостями изменение толщины накипи во времени  $\delta(\tau)$  и коэффициент теплопередачи во времени  $k(\tau)$ , с погрешностью менее 3 %, следующим образом:

$$\delta(\tau) = 0,000964 - \tau^{0,658},$$

$$k(\tau) = 2829 - 7,178\tau^{0,561},$$

а также диаметра трубы на просвет  $d(\tau) = d_{ст} - 2 \delta(\tau)$ .

Для вычисления  $t_2(x, \tau)$  в различных временных слоях при возможных изменениях  $x$  и  $\tau$ , применялась компьютерная программа. Температуры в определенном временном интервале по длине трубы отличаются между собой незначительно, а на выходе из трубы разница в температурах становится более ощутимой и составляет в зависимости от положения фронта тепловой волны для  $T = 100$  ч –  $\Delta t = 0,3$  °C, а для  $T = 4000$  ч –  $\Delta t = 1,1$  °C. На рисунке 2 показано изменение температуры жидкости по длине трубы в зависимости от временного интервала  $T$ , т.е. от времени работы оборудования.

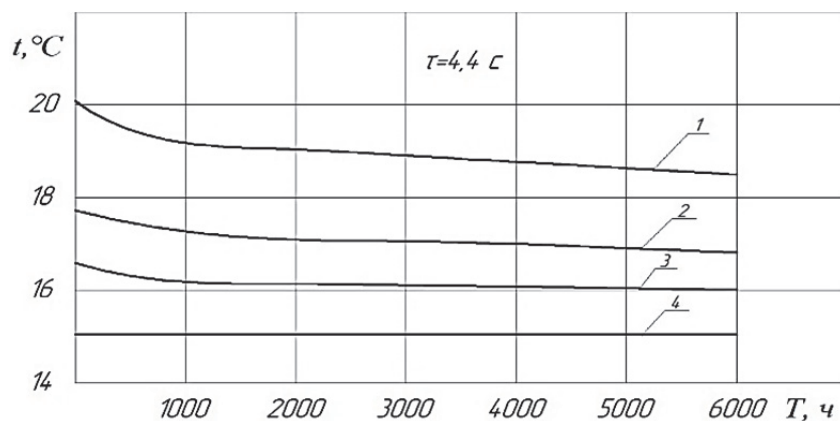


Рисунок 2 – Снижение температуры жидкости вдоль трубы в зависимости от временного интервала:

1 –  $x = 8$  м; 2 –  $x = 4$  м; 3 –  $x = 2$  м; 4 –  $x = 0$

Анализом результатов расчетов по предложенной модели установлено, что, чем больше работает конденсатор, тем больше снижаются температуры

жидкости по длине трубы. Это происходит из-за нарастания слоя накипи, причем по мере прохождения жидкостью трубы этот процесс усиливается. Например, если рассмотреть параметры установившегося режима, т.е. полученные в том случае, когда тепловая волна прошла весь участок ( $\tau = 4,4$  с;  $x = 8$  м), то для  $T = 6000$  ч температура жидкости понизится на  $1,4$  °С, а для того же времени, но в начале трубы этот параметр составит  $0,4$  °С.

### **Заключение**

1. Установлено, что чем больше работает конденсатор, тем больше снижаются температуры жидкости по длине трубы из-за нарастания слоя накипи, причем по мере прохождения жидкостью трубы этот процесс усиливается.

2. Показано, что для определения оптимальных сроков чистки теплообменного оборудования на станциях, можно пользоваться математической моделью процесса с погрешностью расчетов менее 17 %.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Лаптева, Е. А. Математические модели и расчет теплообменных характеристик аппаратов / Е. А. Лаптева, Т. М. Фарахов: под. ред. А. Г. Лаптева. – Казань: Отечество, – 2013. – 182 с. – EDN: VIQSDD.

2. Amjad, Z. Mineral Scales and Deposits [Минеральные соли и отложения] / Z. Amjad, K. D. Demadis // Scientific and Technological Approaches. Elsevier Science. – 2015. – 340 с.

3. Ковальчук, В. И. Повышение эффективности котлов и теплообменников за счет уменьшения отложений накипи/ В. И. Ковальчук, Д. Н. Михалев // Труды Одесского политехнического университета. – 2006. – Вып. 1 (25). – С. 56-58. – EDN: NUOFHZ.

4. Татаринцев, В. А. Повышение эффективности работы теплообменных аппаратов с внутритрубными отложениями / В. А. Татаринцев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. 2021. – Т. 21. – № 3. – С. 5-13. – DOI: 10.14529/power210301 – EDN: FGGBGU.

5. Давидзон, М. И. Образование накипи внутри трубок теплообменных устройств в условиях постоянной температуры стенки / М. И. Давидзон // Теплоэнергетика. – 2007. – №9. – С. 61-64. – EDN: ИВОКМТ.

6. Татаринцев, В. А. Особенности накипеобразования в трубах теплообменных аппаратов / В. А. Татаринцев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. – 2022. – Т. 22. – № 1. – С. 97-105. – DOI: 10.14529/power220111. – EDN: MRZDPD.

УДК 004.93'12

**Салмиянов Владислав Олегович**, аспирант, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет.

**Salmiyanov Vladislav Oltgovich**, PhD student, Junior Researcher at the Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University

**Масловская Анна Геннадьевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский федеральный университет

**Maslovskaya Anna Gennadievna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

## **СИСТЕМА АНАЛИЗА СНИМКОВ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ЛЕГКИХ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО ОБУЧЕНИЯ**

### **A SYSTEM FOR ANALYZING COMPUTED TOMOGRAPHY (CT) IMAGES OF LUNGS BASED ON NEURAL NETWORK TRAINING.**

**Аннотация.** Последние достижения в области анализа данных открыли большие возможности для диагностики респираторных заболеваний. Данная работа посвящена развитию программных средств для решения задач анализа и классификации снимков компьютерной томографии (КТ) легких. Основной функциональными компонентами системы интеллектуального анализа являются спроектированная нейронная сеть, которая позволяет классифицировать снимки легких с точностью 98,7%.

**Abstract.** Recent developments in data analysis have presented significant opportunities for the identification of respiratory illnesses. This study focuses on the development of software solutions for addressing issues related to the analysis and categorization of computed tomography (CT) scans of the lungs. The primary functional components of this intelligent analysis system include a customized neural network that enables the accurate classification of lung images at a rate of 98.7%.

**Ключевые слова:** Нейронная сеть, растровое изображение, классификация, компьютерная томография, сверточная сеть.

**Keywords:** Neural network, bitmap image, classification, computed tomography, convolutional neural network.

#### **Введение**

Современный этап информатизации позволяет создавать сложные приборы неинвазивной диагностики человеческого организма. Но, несмотря на появление мощных устройств для быстрого и точного получения данных,

во многих случаях сохраняется так называемых «человеческий фактор», который может привести к неверной интерпретации данных и неправильной постановке диагноза. В связи с чем, актуальной является потребность в создании новых алгоритмов и автоматизированных интеллектуальных программных комплексов, дополняющих работу врача-диагноста при постановке диагноза. При создании комплексов программ автоматизированной диагностики широко используют как средства интеллектуального анализа данных, так и применение результатов обучения нейронных сетей, либо совокупность вышеперечисленных подходов. Нейронные сети являются достаточно точным инструментом для решения задач классификации изображений, но для достижения безошибочной классификации медицинских изображений требуют тонкой настройки и предсказания на этапе проектирования возможных проблем, связанных с обучением и строением сети.

Создание и обучение нейронных сетей является мощным инструментом для решения задач различной направленности. Например, в работе [1] авторы использовали нейронные сети для создания реконструкции изображений компьютерной томографии легких. В [2] использовали нейронную сеть для фильтрации шумов на изображении магнитно-резонансной томографии, вследствие чего удалось сократить время формирования снимков с 35 до 6 минут. А в работе [3] использован функционал двух нейронных сетей совместно с алгоритмами сегментации для классификации изображений, что позволило увеличить точность распознавания патологий до 98,8%. В [4] авторы использовали две различных среды программирования для классификации доброкачественных и злокачественных опухолей мозга. В серии авторских работ [5, 6] мы развиваем поход, основанный на сочетании методик фрактального и мультифрактального анализа для выявления особенностей изображений биообъектов, алгоритмов сегментации и использования нейронных сетей для задач классификации цифровых изображений. В настоящей работе целью исследования является создание и обучения нейронной сети для решения задач классификации человеческих легких по снимкам компьютерной томографии.

### **Основная часть**

За основу проектировки нейронной сети была взята концепция глубокоуровневых сверточных нейронных сетей с блоками остаточного обучения. Блоки остаточного обучения призваны предотвращать проблему затухающего градиента, который используется для обновления весов во время обучения сети.

В качестве решателя нейронной сети был установлен оптимизатор Adam, так как в процессе обучения сети данный оптимизатор показал наибольшую точность классификации снимков. Обучение производилось на протяжении 40 эпох. Особенностью архитектуры является первый сверточный слой, фильтр которого имеет размер  $7 \times 7$  пикселей. Это решение



обусловлено тем, что в начале этапов свертки фильтр захватывает больше деталей на изображении, что положительно влияет на точность классификации. Последующие сверточные слои имеют фильтр размером 2×2 пикселя. Пример спроектированной сети, используемой для обучения, представлен на рисунке 1.

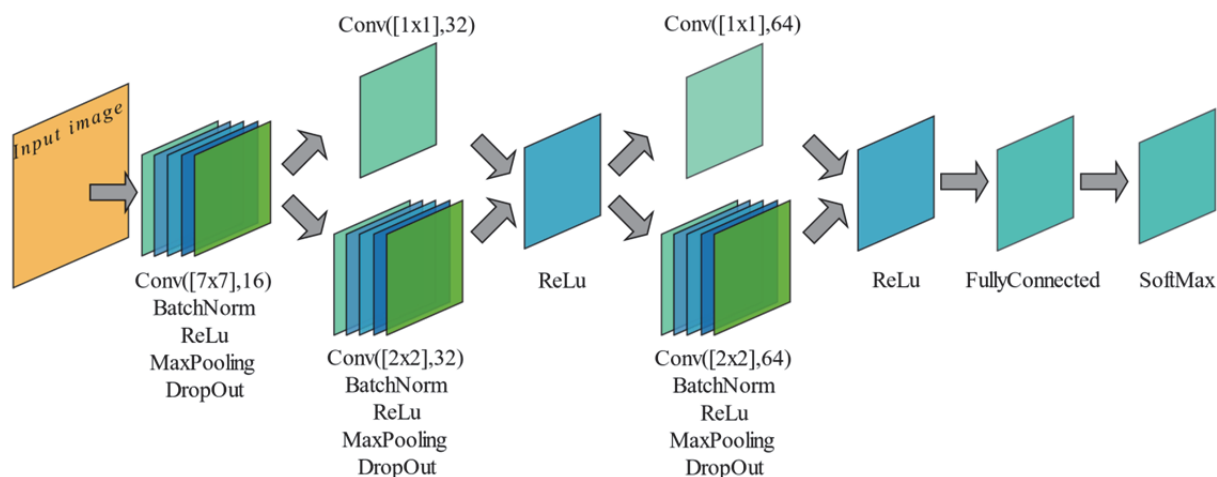


Рисунок 1 – Строение нейронной сети

Для обучения использовались снимки компьютерной томографии, взятые из открытого источника [7]. Количество снимков составляло 6793, соответствующих норме, и 7493, соответствующих патологии. Для обучения было выбрано 75 % данных, а для тестирования – 25 % от общего числа снимков. Предпроцессорные алгоритмы были направлены на преобразование в монохромный формат отображения и изменение размера на 224×224 пикселя.

В качестве метрик точности обучения снимков используются сформированная матрица ошибок и кривая ROC (рисунок 2).

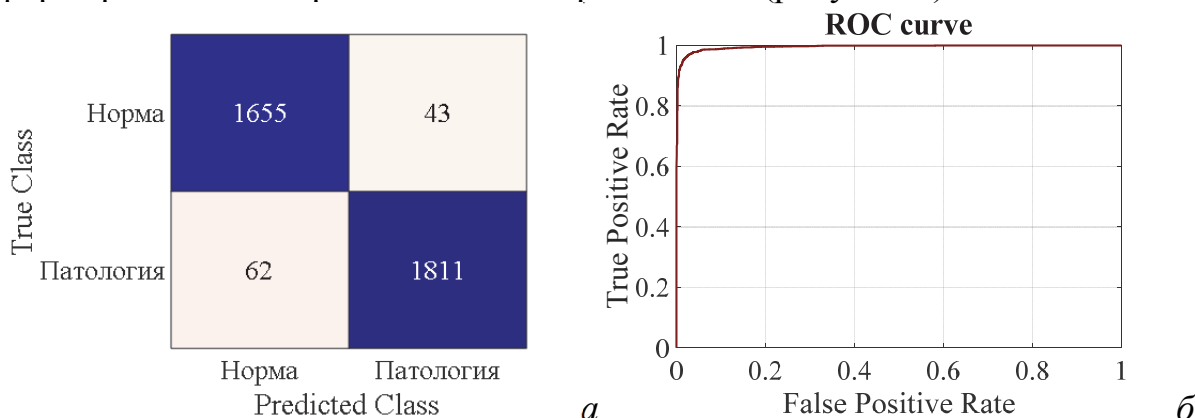


Рисунок 2 – Метрики качества обучения нейронной сети:  
а) матрица ошибок, б) кривая ROC

Матрица ошибок позволяет установить общую точность обучения снимков, которая остановилась на 98.7%. Кривая ROC является более наглядной характеристикой для оценки качества обучения, в этом случае

вычисляется площадь, под прямой, которая соответствует 0,9953, что говорит о высокой точности классификации снимков.

### **Заключение**

Таким образом, нейронные сети выступают мощным инструментом для решения задач классификации, но при этом они требуют тонкой настройки слоев сети. Помимо этого, результаты работы нейронной сети сложно интерпретировать, вследствие чего для решения других задач классификации на иных наборах данных необходимо новое обучение сети, содержащих большое количество данных.

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 122082400001-8).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Image Reconstruction Using Supervised Learning in Wearable Electrical Impedance Tomography of the Thorax / M. Ivanenko, W. T. Smolik, D. Wanta, M. Midura, P. Wróblewski, X. Hou, X Yan // *Sensors*. – 2023. – Vol. 23. – No. 18. – DOI 10.3390/s23187774.

2. Neural Network in the Analysis of the MR Signal as an Image Segmentation Tool for the Determination of T1 and T2 Relaxation Times with Application to Cancer Cell Culture / A. Truskiewicz, D. Bartusik-Aebisher, Ł Wojtas, G. Cieślak, A. Kawczyk-Krupka, D. Aebisher // *Int. J. Mol. Sci.* – 2023. – Vol. 24. – No. 2. – DOI 10.3390/ijms24021554.

3. Image Reconstruction Using Supervised Learning in Wearable Electrical Impedance Tomography of the Thorax / A. A. Alsheikhy, Y. Said, T. Shawly, A. K. Alzahrani, H. Lahza // *Diagnostics*. – 2023. – Vol. 24. – No. 2. – DOI 10.3390/diagnostics13061174.

4. Image Reconstruction Using Supervised Learning in Wearable Electrical Impedance Tomography of the Thorax / V. S. Yilmaz, M. Akdag, Y. Dalveren, R. O Doruk, A. Kara, A. Soylu // *Diagnostics*. – 2023. – Vol. 13. – No. 4 – DOI 10.3390/diagnostics13040651.

5. Программный комплекс системы сегментации и мультифрактальной диагностики цифровых изображений компьютерной томографии легких / В. О. Салмиянов, А. Г. Масловская // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2023. – No. 65 – DOI: 10.17223/19988605/65/11.

6. Система нейросетевой диагностики морфологических характеристик рентгеновских снимков легких: реализация на платформе Matlab / В. О. Салмиянов, А. А. Синагатулин, А. Г. Масловская // *Информатика и системы управления. Интеллектуальные системы*. – 2024. – No. 2(80) – DOI: 10.22250/18142400\_2024\_80\_2\_97

7. Kaggle (2024) <https://www.kaggle.com/datasets/tawsifurrahman/covid19-radiography-database>. Accessed 1 March 2024.

УДК 517.95

**Сарицкая Жанна Юрьевна**, младший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН

**Saritskaia Zhanna Yurievna**, junior researcher of Institute of Applied Mathematics FEB RAS

**Бризицкий Роман Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент департамента математического и компьютерного моделирования, Дальневосточный федеральный университет,

**Brizitskii Roman Viktorovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, Far Eastern Federal University

## **АНАЛИЗ КРАЕВЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

### **ANALYSIS OF BOUNDARY VALUE AND EXTREMUM PROBLEMS FOR THE MASS TRANSFER MODEL WITH VARIABLE COEFFICIENTS**

**Аннотация.** Исследуются краевые и экстремальные задачи для уравнения реакции-диффузии-конвекции с переменными коэффициентами. Доказано глобальное существование слабого решения краевой задачи, для которого установлен принцип максимума. Доказано локальное существование сильного решения краевой задачи и получена его априорная оценка. На слабых решениях краевой задачи доказана разрешимость задачи управления. На сильном решении краевой задачи для задачи управления выводится система оптимальности. На основе анализа данной системы устанавливается свойство релейности распределенного управления.

**Abstract.** Boundary value and extremum problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients are studied. The global existence of a weak solution to the boundary value problem is proved, for which the maximum principle is established. The local existence of a strong solution to the boundary value problem is proved and its a priori estimate is obtained. The solvability of the control problem is proved using weak solutions of the boundary value problem. Using a strong solution of a boundary value problem for a control problem, an optimality system is derived. Based on the analysis of this system, the bang-bang principle for distributed control is established.

**Ключевые слова:** модель реакции-диффузии, переменные коэффициенты, слабое решение, сильное решение, априорные оценки, принцип максимума, задачу управления, система оптимальности, свойство релейности.

**Keywords:** reaction-diffusion model, variable coefficients, weak solution, strong solution, a priory estimates, maximum principle, control problem, optimality system, bang-bang principle.

## **Введение**

На протяжении длительного периода задача поиска эффективных механизмов управления физическими полями не теряет своей актуальности. Существенный вклад в ее решение вносят исследования краевых и экстремальных задач для моделей сплошной среды. Здесь отметим работы [1-3], посвященные теоретическому анализу краевых задач и задач управления для моделей массопереноса с переменными коэффициентами, в том числе для моделей, обобщающих приближение Обербека-Буссинеска. Отказ от упрощающих предположений, в рамках которых коэффициенты рассматриваемых моделей считались постоянными, позволяет работать с более реалистичными моделями массопереноса. В частности, зависимость коэффициентов диффузии, кинематической вязкости и реакции от концентрации вещества является вполне естественной с физической точки зрения. В свою очередь, исследование задач управления на моделях, учитывающих подобные зависимости, способствуют более правдоподобной проверке эффективности предлагаемых механизмов управления.

В [1] доказано глобальное существование слабых решений краевой задачи для уравнения реакции-диффузии-конвекции, в котором старший коэффициент диффузии и младший коэффициент реакции нелинейно зависят от концентрации вещества, а также зависят от пространственных переменных. Для концентрации вещества установлен принцип максимума и минимума. Доказано локальное существование сильного решения и получена его априорная оценка. Как на слабых, так и на сильных решениях краевой задачи доказана разрешимость задач управления при различных условиях на зависимые от решения коэффициенты. На слабых решениях краевой задачи доказано существование управления с обратной связью.

В работах [2,3] доказана глобальная разрешимость и локальная единственность слабых решений неоднородных краевых задач для моделей массопереноса, обобщающих приближение Обербека-Буссинеска. В [2,3] предполагалось, что от концентрации веществ зависит только младший коэффициент реакции.

В настоящей работе с использованием методов [1] доказано локальное существование сильного решения краевой задачи для уравнения реакции-диффузии-конвекции с переменными коэффициентами и получена его априорная оценка.

Далее на слабых решениях рассматриваемой краевой задачи формулируется задача распределенного управления, разрешимость которой так же вытекает из результатов [1]. В свою очередь, на сильных решениях краевой задачи для задачи управления при конкретных коэффициентах диффузии и реакции выводятся системы оптимальности. С использованием локальной оценки сильного решения краевой устанавливается регулярность

системы оптимальности, с использованием которой обосновывается релейность распределенного управления.

### Постановка и разрешимость краевой задачи

В ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  рассматривается следующая краевая задача:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\varphi, \mathbf{x})\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi = f \quad \text{в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация (загрязняющего) вещества,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $\lambda(\varphi, \mathbf{x}) > 0$  – коэффициент диффузии,  $k(\varphi, \mathbf{x}) > 0$  – коэффициент реакции,  $f$  – объемная плотность источников вещества.

Глобальное существование слабого решения задачи (1) доказано в [1]. В цитируемой работе так же установлен принцип максимума для концентрации вещества, доказана локальное существование сильного решения задачи (1) с выводом соответствующей априорной оценки. Используя технику [1], в настоящей выводятся локальные оценки сильного решения задачи (1) при коэффициентов реакции, так же, как в [1], не ограниченных по  $L^p$ -норме. Так же для коэффициентов реакции определенного вида доказываются единственность малого по  $H^2$ -норме сильного решения краевой задачи и устанавливается принцип максимума и минимума для концентрации вещества.

### Формулировка и исследование задачи управления

В данном разделе исследуется задача управления для задачи (1), роль управления в которой играет функции  $f$ :

$$\begin{aligned} J(\varphi, f) &\equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|f\|_{\Omega}^2 \rightarrow \inf, \\ F(\varphi, f) &= 0, \quad (\varphi, f) \in X \times K. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагается, что управление  $f$  может изменяться в замкнутом выпуклом множестве  $K \subset L^2(\Omega)$ ,  $\mu_0$  – положительное, а  $\mu_1$  – неотрицательное число, оператор  $F: H_0^1(\Omega) \times K \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  определен по формуле:

$$\begin{aligned} \langle F(\varphi, f), h \rangle &= (\lambda(\varphi, \mathbf{x})\nabla\varphi, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, h) + (k(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h) - (f, h) \\ &\quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

и уравнение  $F(\mathbf{x}, f) = 0$  является операторной формой записи слабой формулировки задачи (1).

Примерами функционала качества  $I(\varphi)$  являются функционалы:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,\Omega}^2.$$

Здесь  $\varphi^d \in L^2(Q)$  (или  $\varphi^d \in H^1(\Omega)$ ) обозначает заданное поле концентрации в подобласти  $Q \subset \Omega$  (или в  $\Omega$ ).

Разрешимость задачи управления (2) на слабых решениях задачи (1) вытекает из результатов [1]. В настоящей работе для экстремальной задачи (1) для конкретных коэффициентах диффузии и реакции на сильных решениях задачи (1) выводятся системы оптимальности. Используя полученные оценки сильного решения, устанавливаются достаточные

условия локальной регулярности систем оптимальности. Далее, на основе анализа данных систем устанавливается свойство релейности распределенного управления для конкретной экстремальной задачи без регуляризации, т.е. при  $\mu_1=0$ .

### **Заключение**

В настоящей работе доказано локальное существование сильного решения задачи (1) и получена соответствующая априорная оценка. Отметим, что в отличие от ряда близких работ, данная оценка получена без условий ограниченности по норме младшего коэффициента. Последнее позволяет устанавливать регулярность систем оптимальности для интересных с прикладной точки зрения степенных коэффициентов реакции. Далее на слабых решениях краевой задачи формулируется задача управления, разрешимость которой вытекает из результатов [1]. Далее для конкретных коэффициентов диффузии и реакции в случае дифференцируемых по Фреше функционалов для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. С использованием полученных в работе априорных оценок сильного решения краевой задачи, устанавливается регулярность системы оптимальности. На основе анализа данной системы устанавливается свойство релейности (или принцип bang-bang) для распределенного управления.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2024-1440 и № 122082400001-8).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Baranovskii, E.S. Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients / E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia // *Nonlinear Analysis: Real World Appl.* – 2024. – V. 75. – 103979. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103979>.
2. Сарицкая, Ж.Ю. Краевая задача для нелинейных уравнений массопереноса с условием Дирихле / Ж.Ю. Сарицкая // *Сиб. электрон. матем. изв.* – 2022. – Т. 19, № 1. – С. 360-370.
3. Brizitskii, R.V. Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer / R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia // *Journal Dynamical and Control Systems.* – 2023. – V. 29 (4). – P. 1809-1828. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10883-023-09663-z>.

УДК 51-76:004.942

**Саруханян Самвел Каджикович**, аспирант, младший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Sarukhanian Samvel**, PhD student, junior scientist, Laboratory of mathematical modeling of complex physical and biological systems, Amur State University

**Масловская Анна Геннадьевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский федеральный университет.

**Maslovskaya Anna Gennadiyevna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University.

## **ДИСКРЕТНО-ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ БИОПЛЕНКИ С УЧЕТОМ МЕХАНИЗМА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ**

### **DISCRETE-DYNAMIC MODEL OF BIOFILM FORMATION WITH DEVELOPED SURFACE SPREADING MECHANISM**

**Аннотация.** Исследование сосредоточено на разработке гибридной трехмерной имитационной модели формирования бактериальной биопленки с учетом механизма поверхностного распространения. Модификация модели основана на клеточно-автоматном алгоритме роста структуры, дискретной аналогии диффузионной модели потребления питательных веществ и дополнительном механизме инокуляции. Проведена серия вычислительных экспериментов по имитации формирования биопленки с точки зрения оптимизации – максимального заполнения пространства при минимальном потреблении ресурсов.

**Abstract.** The study focuses on developing a hybrid 3D simulation model of bacterial biofilm formation by considering the surface spreading mechanism. The modification of the model is based on a cellular automata algorithm for structure growth, a discrete analogy of the diffusion model of nutrient consumption. A series of computational experiments were conducted to simulate biofilm formation from the point of view of optimization – maximum space filling with minimal resource consumption.

**Ключевые слова:** биопленка, инокуляция, гибридная модель, клеточно-автоматный алгоритм, моделирование роста бактерий.

**Keywords:** biofilm, inoculation, hybrid model, cellular automata algorithm, simulation of bacterial growth.

#### **Введение**

Многоаспектное изучение основных групп микроорганизмов приобрело большое значение в связи с современными вызовами, связанными

с влиянием вирусов и патогенных бактерий на жизнедеятельность человека. Этот интерес обусловлен ростом заболеваемости и появлением новых штаммов микроорганизмов. Фокус особого внимания сосредоточен на биопленках, так как они представляют собой наиболее распространенную форму жизни бактерий. Биопленки представляют собой сложные структуры, которые обеспечивают выживание бактерий в неблагоприятных условиях и способствуют формированию факторов устойчивости к антимикробным агентам. Это делает их изучение крайне важным для разработки новых стратегий борьбы с бактериальными инфекциями [1-3].

Важным компонентом в контексте изучения биопленок является разработка и внедрение имитационных моделей, которые позволяют проводить *in silico* исследования и прогнозировать поведение биосистем в различных условиях, что значительно ускоряет научные исследования и снижает затраты на проведение реальных экспериментов. Настоящее исследование направлено на развитие гибридной 3D имитационной модели формирования биопленки для бактериального сообщества с учетом механизма поверхностного распространения. В предлагаемой модификации используется клеточный автоматный алгоритм эволюции биопленки [4], который позволяет описывать сложные пространственные структуры на основе простых локальных правил. Дополнительно, модель включает дискретную аналогию диффузионной модели [5] потребления питательных веществ, что позволяет учитывать динамику распределения ресурсов в биопленке. Также предусмотрен механизм инокуляции, регулируемый чувством кворума. Этот механизм учитывает взаимодействие между бактериальными клетками и их способность реагировать на изменение плотности популяции. Возможность управления механизмом инокуляции в модели позволяет более адекватно имитировать процесс колонизации и рост биопленки.

### Формализация гибридной модели

Формализуем клеточно-автоматную модель тройкой объектов:  $\langle X, A, \Theta \rangle$ , где  $X = \{[0,0,0], [1,0,0], \dots, [l, w, h]\}$  – множество ячеек пространства, индексируемых по базисным осям;  $l, w, h$  – глубина, ширина и высота рассматриваемой области;  $A$  – набор параметров, определяемых вещественными числами, характеризующими каждую ячейку плоскости:

$$A = \{C_n, C_b\}, C_n, C_b \in [0,1],$$

где  $C_n, C_b$  – концентрации питания и бактериальной биомассы.

$\Theta$  – определяет набор операторов перехода между дискретными состояниями системы. Всего рассмотрено три основных правила перехода:

$$\theta([i, j, k]) = (\theta_{dif} [i, j, k], \theta_{cons} [i, j, k], \theta_{div} [i, j, k]),$$

где  $\theta_{dif} [i, j, k]$  задает правило диффузии питательного вещества;  $\theta_{cons} [i, j, k]$  – правило потребления бактериальными клетками питательного вещества;  $\theta_{div} [i, j, k]$  – правило деления клеток.



## Алгоритм, программная реализация и результаты симуляций

На рис. 1 представлена блок-схема алгоритма. На начальном этапе работы проводится инициализация основных параметров. Далее происходит генерация сетки в соответствии с заданными пользователями параметрами: размер сетки, начальный уровень питания, коэффициент диффузии питания, коэффициент роста бактериальной массы.

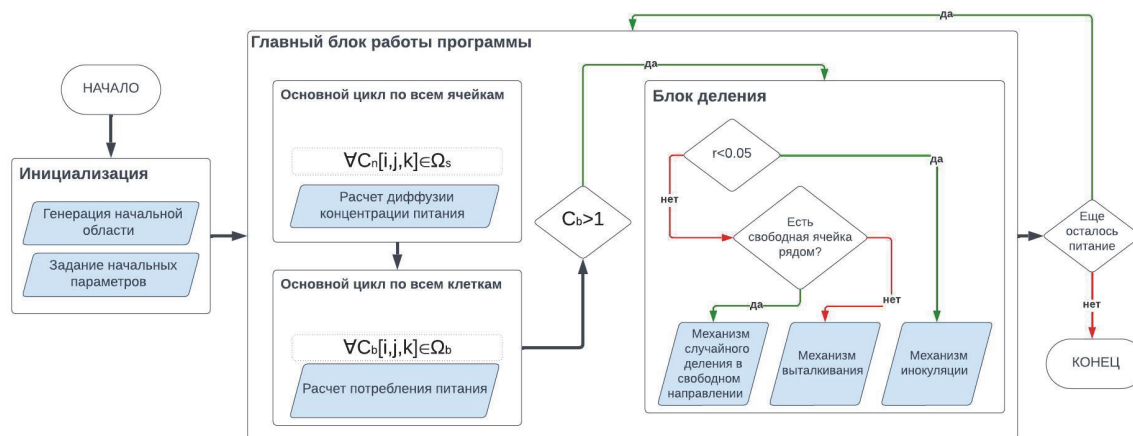


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма

В главном цикле происходит расчет, состоящий из трех этапов. Первый этап определяет распределение концентрации питательного вещества для каждой из ячеек автомата. На втором этапе определяется поглощаемая бактериальной массой концентрация питания и имитируется соответствующий рост в каждой из заселенных ячеек автомата (клеток). На третьем этапе происходит проверка условия достижения концентрации бактериальной массы достаточного для деления уровня, после чего выбирается один из трех реализованных механизмов деления. В 5% случаев происходит механизм инокуляции (при достижении определенного уровня кворума), когда клетка делится в случайную ячейку на поверхности в некоторой области, окружающей рассматриваемую клетку. Иначе происходит проверка наличия свободных ячеек рядом. При их наличии случайным образом выбирается одно свободное направление, в противном случае – реализуется механизм выталкивания: клетка делится в случайном направлении, соответствующем одной из клеток на поверхности биопленки.

Пример результата симуляции представлен на рис. 2 для двух типов решеток клеточного автомата. Проведена серия вычислительных экспериментов, которые позволили определить оптимальные условия для образования биопленки с точки зрения факторов максимального заполнения пространства и минимального потребления ресурсов. В частности, варьированию подлежали ключевые параметры модели – начальный уровень питательных веществ, вероятность дополнительной инокуляции и радиус случайного переноса инокуляции.

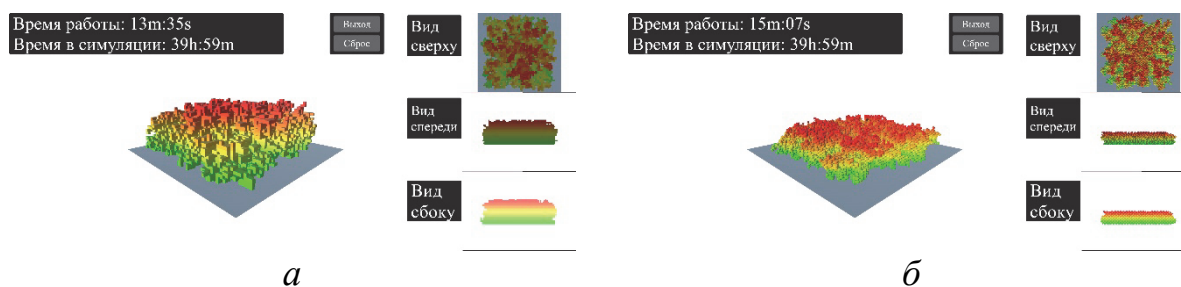


Рисунок 2 – Пример работы программы для кубической (а) и октаэдральной (б) решеток

Результаты экспериментов показали, что модель способна адекватно воспроизводить основные характеристики роста биопленки.

### Заключение

Таким образом, разработанная 3D гибридная имитационная модель биопленки позволяет на основе введенных механизмов прогнозировать основные характеристики эволюции бактериального сообщества с учетом процессов колонизации доступного пространства.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Enzymatic degradation of phenazines can generate energy and protect sensitive organisms from toxicity / K. C. Costa, M. Bergkessel, S. Saunders, et al. // The ISME Journal. – 2010. – P. 1011–1019.

2. Challenges of biofilm control and utilization: lessons from mathematical modelling / P. A. Dzianach, G. A. Dykes, N. J. C. Strachan, et al. // Journal of the Royal Society Interface. – 2019. – V. 16(155). – P. 20190042. – DOI: 10.1098/rsif.2019.0042.

3. Biofilms: survival mechanisms of clinically relevant microorganisms / R. M. Donlan, J. W. Costerton // Clin. Microbiol. Rev. – 2002. – V. 15. – P. 167–193. – DOI: 10.1128/CMR.15.2.167-193.2002.

4. Алгоритм клеточно-автоматного моделирования 2D эволюции бактериальных пленок в процессе непрерывного культивирования / С. К. Саруханян, А. Г. Масловская // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – № 4. – С. 19–30. – DOI: 10.17308/sait/1995-5499/2023/4/19-30.

5. Концепция верификации работы клеточных автоматов при вариации геометрических решёток для модели диффузионного процесса / С. К. Саруханян, А. Г. Масловская // Математические структуры и моделирование. – 2024. – № 2 (70). – С. 63–79. – DOI: 10.24147/2222-8772.2024.2.63-79.

УДК 004.8

**Секриеру Р.А.**, аспирант, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Sekrieru R.A.**, graduate student, Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Цыгулёв К.С.**, аспирант, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Tsygulev K.S.**, graduate student, Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Орлов С.А.**, аспирант, Хабаровский Федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Orlov S.A.**, graduate student, Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Смагин С.И.**, член-корреспондент Российской академии наук, доктор физико-математических наук, Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Smagin S.I.**, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **СВЕРТОЧНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ РАЙОНА ДРАЖНЫХ РАБОТ**

### **CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS FOR SEGMENTATION THE AREA OF DREDGING WORKS**

**Аннотация.** В работе рассматривается возможность применения сверточных нейронных сетей для выделения области добычи полезных ископаемых дражным способом по спутниковым снимкам, в частности: спутников Sentinel-2 и Landsat 8-9. В качестве исследуемой территории выбраны области (реки) субъектов Дальневосточного федерального округа. Основное внимание уделено процессу создания обучающей выборки для выбранных моделей. Приводятся данные о точности выделения области интереса при использовании моделей сверточной нейронной сети.

**Abstract.** This study explores the potential application of convolutional neural networks for delineating areas of mineral extraction using dredging techniques from satellite images, specifically from Sentinel-2 and Landsat 8-9 satellites. The regions (rivers) within the Far Eastern Federal District were selected as the study area. The primary focus is on the process of creating the training dataset for the chosen models. Data on the accuracy of identifying the area of interest using convolutional neural network models are presented.

**Ключевые слова:** добыча полезных ископаемых, дражный способ, дистанционное зондирование, сегментация.

**Keywords:** mining, dredging method, remote sensing, segmentation.

## **Введение**

Добыча полезных ископаемых является основополагающим процессом всей промышленности. Скопления пород и металлов разрабатывают с помощью специального оборудования и техники. Когда месторождения истощаются, или их добыча становится невыгодной, работы в этом месте прекращаются. Но со временем технологии развиваются и появляется возможность повторного освоения уже отработанных месторождений, перед началом которого проводится оценка потенциального количества имеющихся там ископаемых. Особое внимание в этом вопросе уделяется дражным выработкам, на которых добывались различные металлы.

Оценку ресурсного потенциала проводят при повторной разведке выработанного месторождения, что является трудоемкой задачей, требующей значительных финансовых и временных затрат. В связи с этим, актуальным вопросом является предварительная оценка ресурсного потенциала, используя данные дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ).

Современные спутники предоставляют данные ДЗЗ высокого разрешения, достаточного для проведения исследования интересующих объектов. В частности, это применимо для дражных выработок, которые на снимках более низкого разрешения являлись неклассифицируемыми.

Для предварительной оценки существуют методы, которые опираются на объем дражной выработки. Чтобы рассчитать объем, необходимо определить границы исследуемого объекта. Если объект имеет сложную границу или является отработанным достаточно давно, из-за чего его границы размываются, то ручной процесс выделения границ может быть слишком затратным. Для облегчения процесса выделения границ, а также его частичной автоматизации, можно воспользоваться методами машинного обучения.

В зарубежной литературе часто встречаются работы с использованием моделей машинного обучения в исследованиях, так или иначе касающихся землепользования и горной промышленности [1-3]. Их применение позволяет ускорить решение не сложных, но затратных по времени задач. В отечественной литературе также рассматривается применение нейронных сетей, но чаще в задачах, не связанных непосредственно с данными ДЗЗ [4]. Когда анализируется поверхность Земли, то, как правило, применяются вегетационные и другие индексы. Например, в работе [5] выполнен анализ отработанных золотороссыпных площадей с помощью нормализованного разностного индекса растительности (NDVI). Примеры использования сегментации разных типов поверхности по спутниковым снимкам с помощью нейронных сетей встречаются в отечественной литературе также встречаются (см. [6]), но заметно реже, чем в зарубежной.

В данной работе предлагается способ автоматического выделения области добычи полезных ископаемых дражным способом с помощью модели машинного обучения, в частности, сверточной нейронной сети.

## **Исходные данные и методы**

Данные о местах проведения горных работ взяты из «Государственного реестра участков недр, предоставленных в пользование,

и лицензий на пользование недрами» для всех субъектов РФ Дальневосточного федерального округа.

Источниками снимков выбраны спутники Sentinel-2 и Landsat 8-9 с пространственным разрешением 10 и 30 метров соответственно, а сезон снимков – летний (с мая по сентябрь), т.к. в это время исследуемая область больше всего контрастирует с окружающей средой. Разное разрешение необходимо для сравнения и выбора предпочтительного спутника. Таким образом составлено два набора данных, первый – из снимков Sentinel-2 и второй – из снимков Landsat 8-9. Снимки имеют второй уровень обработки, т.е. атмосферную коррекцию. В случае Sentinel-2 выбраны каналы 2-12, у Landsat 8-9 выбраны каналы 2-7. Далее каждый снимок делился на части размерами 384 x 384 пикселя для данных Sentinel-2 и 256x256 пикселя для данных Landsat 8-9.

В качестве сверточной нейронной сети выбрана DeepLabV3 [7]. При обучении использовалась функция ошибки Boundary Loss.

### Результаты и обсуждение

На рисунке 1 представлены результаты сегментации 2 моделями сверточной нейронной сети, где первая обучалась на наборе данных со спутников Sentinel-2, а вторая – на данных со спутников Landsat 8-9. Точность сегментации первой составила ~93% по метрике Intersection over Union (IoU), точность второй составила ~78% по той же метрике.

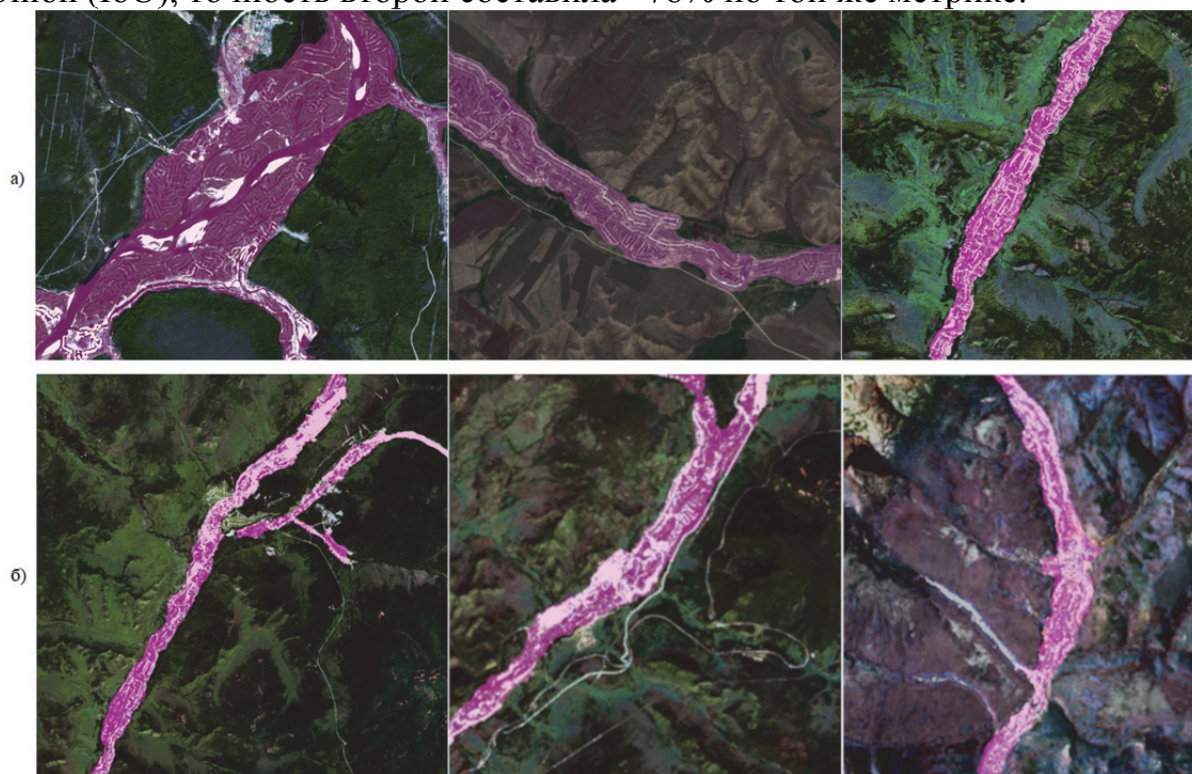


Рисунок 1 – Результат сегментации DeepLabV3 снимков:

а) Sentinel-2; б) Landsat 8-9

Однако судить о том, насколько хорошо эта метрика отражает реальный результат трудно, потому что сложно выделить исходные области с высокой точностью. На снимках с Landsat 8-9 некоторые области и вовсе являются неклассифицируемыми. Поэтому по результатам выполненной

сегментации без помощи специалиста в предметной сфере нельзя однозначно сказать, что нужная область выделена правильно.

### **Заключение**

Рассмотрена возможность применения свёрточной нейронной сети для выделения области дражных работ. Модель, обученная на наборе данных со спутников Sentinel-2, показала точность сегментации ~93% по метрике IoU, в то время как модель, обученная на данных Landsat 8-9 продемонстрировала точность сегментации ~78%.

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что сверточные нейронные сети являются перспективным инструментом для решения задачи выделения области добычи полезных ископаемых дражным способом. Однако, в зависимости от степени зарастания области, точность выделения значительно снижается, поэтому на данный момент нельзя говорить о полной автоматизации. Использование моделей машинного обучения позволяет сократить временные затраты на выполнение этой задачи и для зарастающих областей требуется ручная корректировка полученного контура.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Xie H. et al. Open-pit mining area segmentation of remote sensing images based on DUsegNet //Journal of the Indian Society of Remote Sensing. – 2021. – Т. 49. – С. 1257-1270.

2. Werner T. T. et al. Global-scale remote sensing of mine areas and analysis of factors explaining their extent. Global Environmental Change, 2020, vol. 60, p. 102007.

3. Malik K. et al. U-Net convolutional neural network models for detecting and quantifying placer mining disturbances at watershed scales. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2021, vol. 104, p. 102510.

4. Мешалкин В. П., Панарин В. М., Маслова А. А. Нейронные сети в автоматизированной системе мониторинга состояния окружающей среды //Sciences of Europe. – 2020. – №. 50-2 (50). – С. 14-20.

5. Леоненко А. В., Усиков В. И., Крупская Л. Т. Методика дистанционного анализа отработанных золотороссыпных площадей (на примере Кербинского района) //Известия Тульского государственного университета. Науки о земле. – 2022. – №. 1. – С. 98-113.

6. Багаев С. М., Медведева Е. В. Экспериментальная оценка точности мультиклассовой сегментации объектов на спутниковых снимках на основе модифицированной свёрточной нейронной сети U-net //СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ ИЗ КОСМОСА Учредители: Институт космических исследований Российской академии наук. – 2021. – Т. 18. – №. 6. – С. 35-45.

7. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2015: 18th International Conference, Munich, Germany, October 5-9, 2015, Proceedings, Part III 18, Springer International Publishing, 2015, pp. 234-241.

УДК 004.9:519.85

**Спешилов Евгений Алексеевич**, аспирант, Оренбургский государственный университет

**Speshilov Evgenij Alekseyevich**, Postgraduate student, Orenburg State University

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО  
СОПРОВОЖДЕНИЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ  
ПО ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТИРОВОК И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
РЕСУРСОВ АГРОПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ**

**DEVELOPMENT OF ALGORITHMS AND SOFTWARE SUPPORT  
FOR DECISION-MAKING SUPPORT FOR OPTIMIZING  
TRANSPORTATION AND RESOURCE ALLOCATION  
OF AN AGRO-INDUSTRIAL ENTERPRISE**

**Аннотация.** Эффективное функционирование предприятий агропромышленного комплекса (АПК) не возможно в современных экономических и геополитических условиях без использования отечественных цифровых технологий поддержки принятия управленческих решений. Цель работы – разработка программного продукта, интегрируемого в процессы управления агропромышленным предприятием, позволяющего рассчитывать альтернативные варианты решения задач оптимизации транспортировок и распределения ресурсов. Предмет исследования – методы и алгоритмы поддержки принятия решений для обеспечения эффективной работы предприятий АПК. В статье приведены базовые алгоритмы программы и математический инструментарий, описаны функциональные особенности, в числе которых связь с актуальными ресурсами 2ГИС (или Яндекс Карт) посредством настройки API-соединения. Отмечено, что созданный программный продукт является составной частью одного из модулей разрабатываемой системы поддержки принятия решений при управлении на предприятиях АПК.

**Abstract.** The effective functioning of enterprises of the agro-industrial complex (AIC) is impossible in today's economic and geo-political conditions without the use of domestic digital technologies to support management decision-making. The purpose of the work is to develop a software product that is integrated into the management processes of an agro-industrial enterprise, allowing to calculate alternative solutions to the problems of optimizing transportation and resource allocation. The subject of the research is methods and algorithms for decision support to ensure the efficient operation of agricultural enterprises. The article presents the basic algorithms of the program and mathematical tools, describes the functional features, including communication with the current resources of 2GIS (or Yandex Maps) by configuring the API connection. It is noted that the created software product is an integral part of one

of the modules of the developed decision support system for management at agricultural enterprises.

**Ключевые слова:** управление, система поддержки принятия решений, алгоритм, программа, математическая модель, агропромышленное предприятие, грузоперевозки, распределение ресурсов, оптимизация, эффективность.

**Keywords:** management, decision support system, algorithm, program, mathematical model, agro-industrial enterprise, freight transportation, resource allocation, optimization, efficiency.

### **Введение**

При влиянии геополитических факторов, способствующих разработке отечественных программных продуктов, остро встает вопрос обеспечения поддержки принятия управленческих решений специализированными цифровыми информационно-аналитическими системами. Данная проблема тесно коррелирует с Указом Президента РФ «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы» (№ 203 от 09.05.2017 г.) [1] и актуализируемой национальной программой «Цифровая экономика Российской Федерации» (утв. президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол № 7 от 04.06.2019 г.) [2].

На сегодняшний день вопросам цифровизации и информатизации агропромышленного комплекса (АПК) уделяется большое внимание [3, 4, 5]. Рассматривая АПК, состоящий из совокупности отраслей, отметим, что ведущую роль в его структуре занимает сельскохозяйственное производство, отвечающее за обеспечение продовольственной безопасности страны, включающее организации, деятельность которых сопряжена с работой с биологическими организмами, сопровождается случайными событиями и трудно-прогнозируемыми погодными условиями. Агропромышленные предприятия занимаются не только производством и переработкой сельскохозяйственной продукции, но и транспортировкой. Существуют различные классы задач, связанные с оптимизацией использования ресурсного потенциала предприятий АПК [6, 7, 8], однако все они требуют знания определенных математических, статистических и инструментальных средств [9, 10, 11]. В свою очередь лицо принимающее решение (ЛПР) по повышению эффективности функционирования того или иного отраслевого предприятия сталкивается с проблемой соответствия своих профессиональных компетенций результатам цифровой трансформации управленческих процессов [12]. В связи с этим неоспорима актуальность вопросов разработки и применения различных систем поддержки принятия решений (СППР), включающих автоматизацию широкого спектра задач оптимизации использования ресурсного потенциала агропромышленного предприятия, позволяющих их применение при минимальном обучении пользователя, занимающих небольшой объем информационно-технических



ресурсов и обладающих гибкостью относительно поиска альтернативных вариантов решения с учетом быстро меняющихся условий.

В соответствии с последним и ставилась цель исследования – разработка алгоритмов и программного сопровождения поддержки принятия решений по оптимизации транспортировок и распределения ресурсов агропромышленного предприятия для формирования одного из модулей СППР.

### Основная часть

Нами была разработана программа «Management-Resources-Logistics» [13], позволяющая оптимизировать процессы транспортировок (грузоперевозок) с учетом возникающих управленческих задач для ЛПР в зависимости от: приоритетного выбора поставщиков-потребителей; построения маршрута с возможностью использования активных GIS-карт с учетом актуальной дорожной ситуации; поставленных целей (например, минимизации расстояния, материальных или временных затрат). Главное меню программы представлено на рисунке 1.

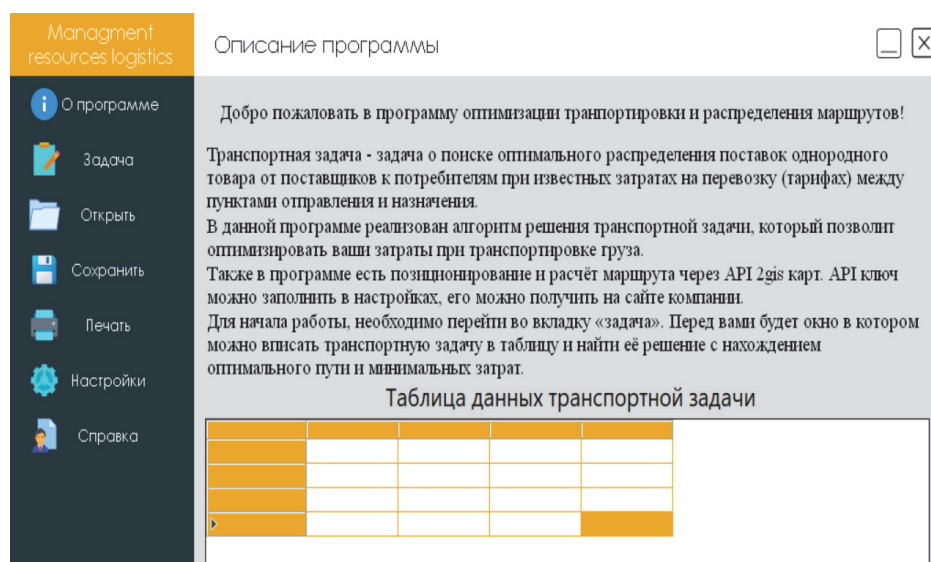


Рисунок 1 – Вид главного окна программы «Management-Resources-Logistics» с описанием

В качестве математической основы для формирования программного продукта выбрана постановка классической модели транспортной задачи [14], в которой введена следующая система переменных: пункты назначения –  $a_j$ , где  $j = \overline{1, n}$ ; пункты отправления –  $b_i$ , где  $i = \overline{1, m}$ . Матрица цен (тарифов, также говорят о матрице издержек или транспортных расходов)  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  задается пользователем самостоятельно исходя из имеющейся в распоряжении информации. Требуется найти план транспортной задачи – матрицу грузоперевозок  $X = (x_{ij})_{m \times n}$ , где каждое число  $x_{ij}$  обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения. Математическая модель в структурной форме имеет вид:

I. Целевая функция описывает затраты на перевозку грузов при организации грузопотоков:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (1)$$

II. Система ограничений описывает требования для  $x_{ij}$ :

1 группа: условие полного вывоза грузов от поставщиков:

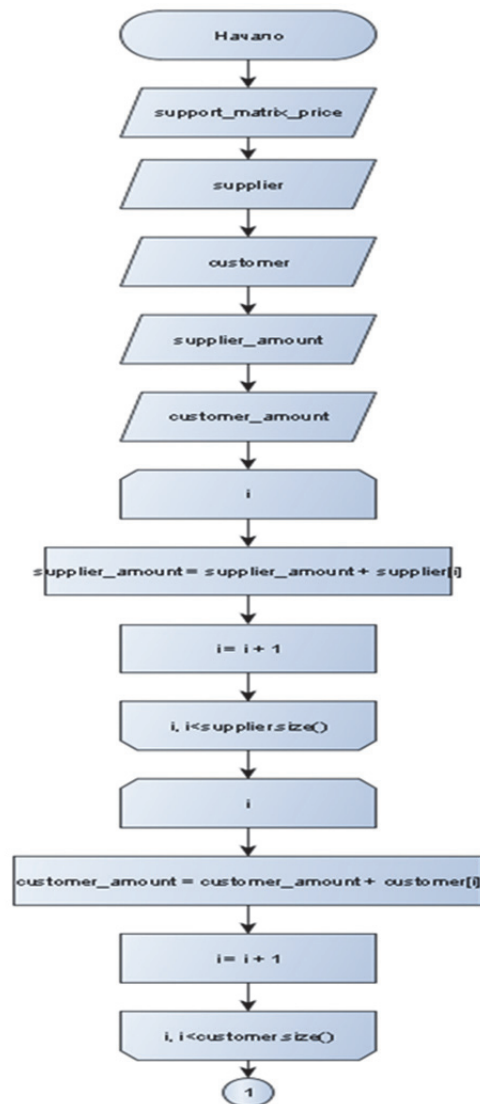
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

2 группа: условие удовлетворения потребителя:

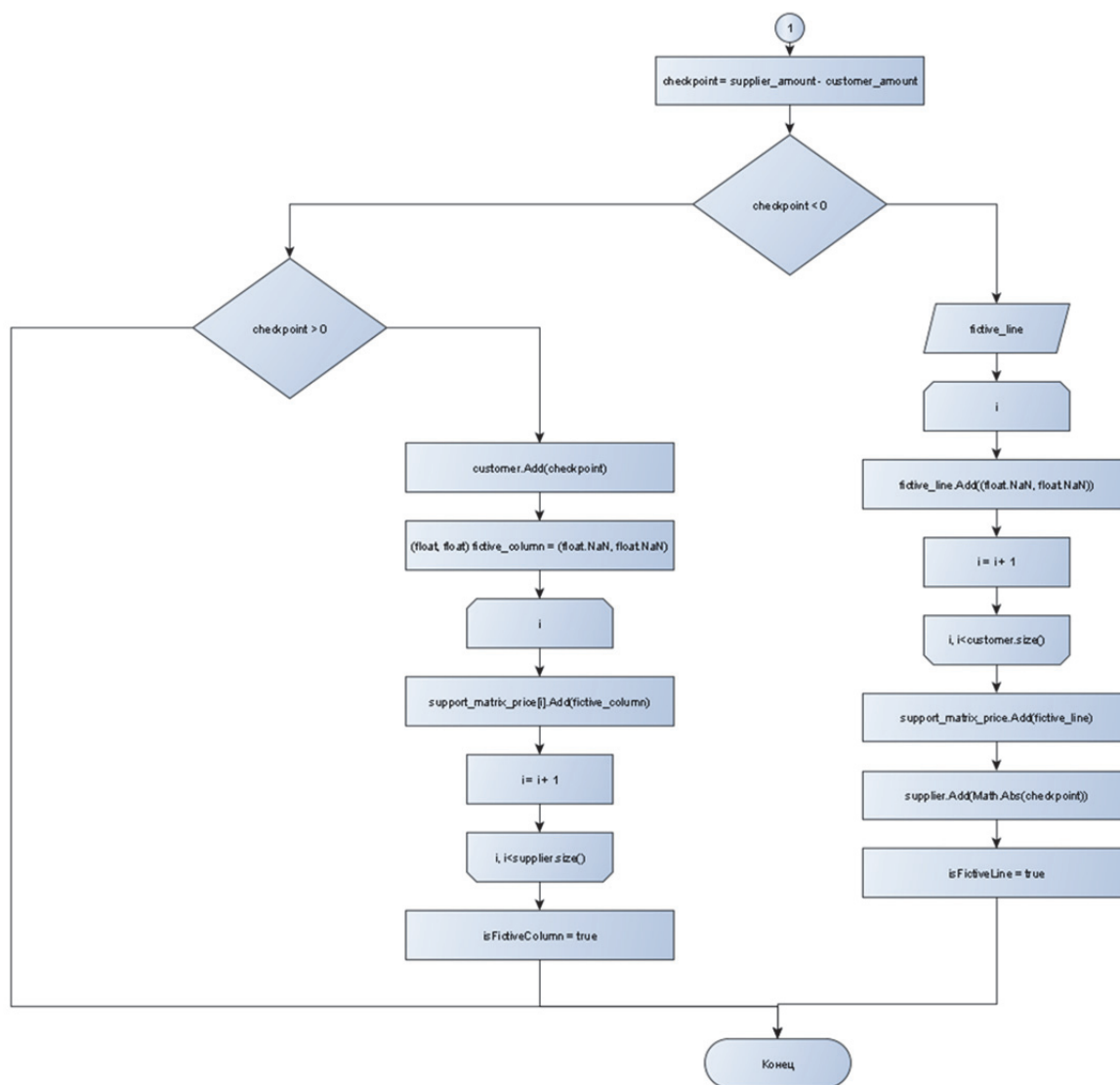
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

III. Условие неотрицательности переменных величин:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$



а) первая часть



б) вторая часть

Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма добавления фиктивной строки или столбца

Существуют особенности, выраженные в модификации модели из-за некоторых усложнений в постановке задачи, например не во все пункты поездки могут быть осуществлены, по некоторым маршрутам можно перевезти только определенное количество груза и пр. Кроме того, одно из необходимых условий решения задачи – ее «закрытость», то есть формально количество потребностей и возможностей объема грузоперевозок должно совпадать, что требует введения фиктивных переменных. Данная процедура реализована в виде алгоритма, представленного на рисунке 2.

Что касается интерфейса программы, то при помощи нижних панелей «добавить поставщика» и «добавить потребителя» заполняется таблица данных (рисунок 3).

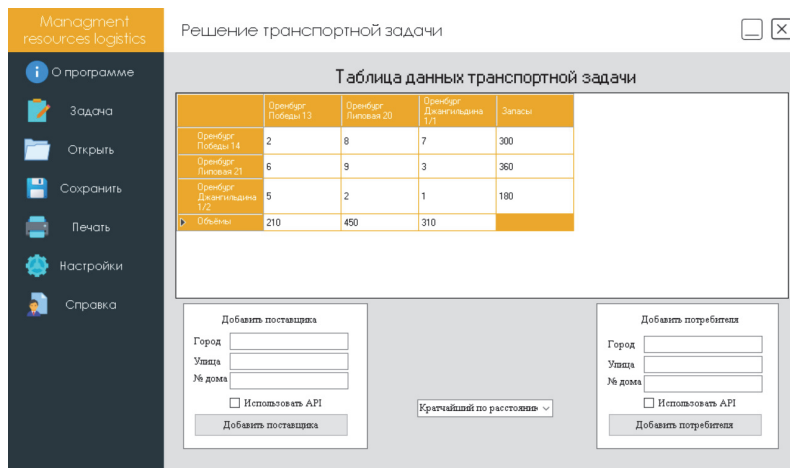


Рисунок 3 – Окно заполнения данных для решения задачи

С помощью контекстного меню можно добавить столбцы и строки вручную и также заполнить таблицу данных. Помимо этого, можно очистить таблицу, включить режим удаления отдельных строк или столбцов, проверить задачу на верность заполнения «закрытости», переключить таблицы на поиск решения.

Программа направлена на оптимизацию выбора маршрута при транспортировке груза. Позволяет определить ряд минимальных параметров (время, расстояние, затраты) в соотношении с объемом распределяемых ресурсов. Так как одновременное достижение минимальных значений всех трех критериев не возможно, программа предоставляет пользователю интерфейсный инструментарий реализации имитационного процесса подбора сочетания наиболее приемлемого варианта с точки зрения текущих задач управления.

Программа обладает следующими возможностями: определение кратчайшего пути через 2GIS-карты по расстоянию и времени (с настройкой API-соединения для актуализации данных (рисунок 4)); обработка данных задачи с оптимизацией транспортировки и распределением маршрутов; сохранение условий задачи в файл; открытие данных задачи из файла; вывод оптимизированного плана на печать.

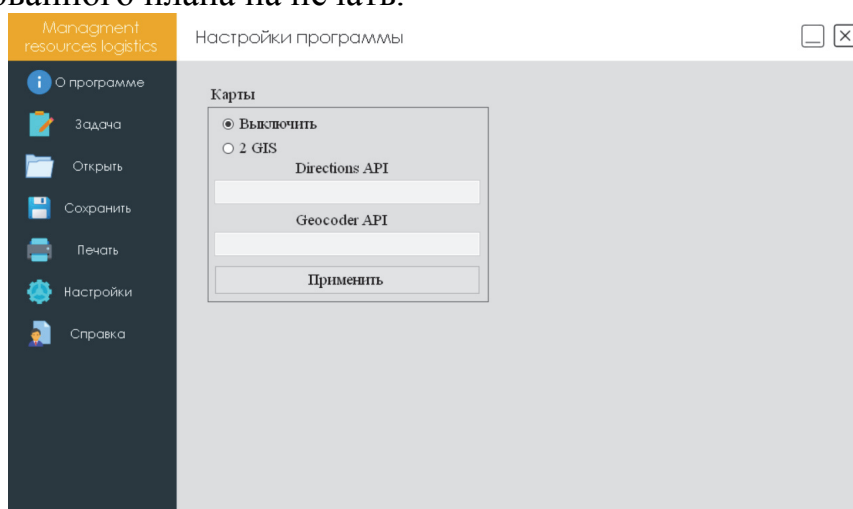


Рисунок 4 – Настройка API-соединения для программы

Программа может функционировать также с Яндекс Картами (при выборе соответствующего контента) и содержит развернутую справку пользователя, позволяющую освоить использование программного продукта ЛПР, не имеющему специальных навыков владения математическим и программным инструментарием решения оптимизационных задач.

Кроме того, в рамках рационального использования ресурсного потенциала организации, занятой производством растениеводческой продукции, в программе реализуется возможность решения задачи оптимизации размещения сельскохозяйственных культур по посевным площадям с учетом последователей и предшественников, а также исходя из способов обработки почвы и имеющегося машинно-тракторного парка. В справке пользователя подробно описана последовательность операций при анализе информации и заполнения таблиц в данной трактовке.

### **Заключение**

На сегодняшний день в условиях развития цифрового общества востребованными являются автоматизированные технологии, призванные обеспечить ЛПР необходимым инструментарием для управления процессами сбора информации, анализа, выбора, планирования и пр. с целью достижения наиболее выгодного результата экономической деятельности предприятий АПК. При этом грамотное использование потенциала сельскохозяйственных организаций зависит от обеспечения процессов управления соответствующими математическими и инструментальными средствами.

Разработанная программа «Management-Resources-Logistics» направлена на оптимизацию выбора маршрута при транспортировке груза и распределения ресурсного потенциала (земельного, машинного и пр.). Позволяет определить ряд минимальных параметров (время, расстояние, затраты) в соотношении с объемом распределяемых ресурсов. Использует математический аппарат транспортной задачи. Функционирует во взаимосвязи с ресурсами 2ГИС, а также при выборе контента с Яндекс Картами, что способствует получению актуальной информации по изменению дорожной обстановки. Есть возможность оперативного редактирования построенного маршрута с учетом дорожно-транспортных работ, происшествий и пр. Реализует функцию вывода на печать полученного решения. Имеет удобный интерфейс, позволяющий использование разработки при поддержке принятия решений широким кругом пользователей без больших временных затрат на освоение.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Указ Президента РФ от 09.05.2017 N 203 «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 - 2030 годы». Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL:

[https://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_216363/](https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_216363/) (дата обращения: 30.04.2024).

2. Паспорт национального проекта «Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации» (утв. президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол от 04.06.2019 № 7) Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: [https://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_328854/](https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_328854/) (дата обращения: 30.04.2024).

3. Алтухов, А. И. Глобальная цифровизация как организационно-экономическая основа инновационного развития агропромышленного комплекса РФ / А. И. Алтухов, М. Н. Дудин, А. Н. Анищенко // Проблемы рыночной экономики. – 2019. – № 2. – С. 17-27.

4. Бельский, В. И. Преимущества и проблемы цифровизации сельского хозяйства / В. И. Бельский // Проблемы экономики. – 2019. – № 1. – С. 12-19.

5. Меденников, В. И. Концепция развития информатизации АПК при переходе к цифровой экономике / В. И. Меденников, М. И. Горбачев, Л. Г. Муратова, С. Г. Сальников // Международный сельскохозяйственный журнал. – 2017. – № 5. – С. 49-53.

6. Development of a digital model for assessing the influence of agroecological factors on the productivity of wheat grains / I. N. Besaliev, I. P. Bolodurina, D. I. Parfenov, S. S. Akimov // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2021. – Vol. 624, Iss. 1, 7 January 2021: International Conference on World Technological Trends in Agribusiness, WTTA 2020, 4-5 July 2020, Omsk City, Western Siberia, Russian Federation / Omsk State Agrarian University. – P. 1-6.

7. Гатаулин, А. М. Издержки производства сельскохозяйственной продукции: Методология измерения и пути снижения / А. М. Гатаулин. – Москва: Экономика, 1983. – 183 с.

8. Рахматуллин, Р. Р. Разработка алгоритмов решения задач оптимизации производства для программного обеспечения системы поддержки принятия решений в сельском хозяйстве / Р. Р. Рахматуллин, А. А. Чумаков, Е. А. Спешилов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11, № 3. – С. 1-12. – DOI: 10.26102/2310-6018/2023.42.3.012

9. Болодурина, И. П. Математические и инструментальные средства обеспечения интеллектуальной системы поддержки принятия решений при управлении грузопотоками / И. П. Болодурина, Е. А. Спешилов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 2. – С. 93-107. – DOI: 10.15593/2499-9873/2023.2.09

10. Мулярец, С. А. Специфика и проблемы цифровой трансформации предприятий российского агропромышленного комплекса / С. А. Мулярец // Инновации и инвестиции. – 2021. – № 4. – С. 315-320.

11. Смагин, Б. И. Экономический анализ и статистическое

моделирование аграрного производства: монография / Б. И. Смагин; М-во сельского хоз-ва РФ, Федеральное гос. образовательное учреждение высш. проф. образования «Мичуринский гос. аграрный ун-т». – Мичуринск: Изд-во Мичуринского гос. аграрного ун-та, 2007. – 153 с.

12. Спешилова, Н. В. Интеллектуализация технологии подготовки управленческих решений в условиях цифровизации экономики (на примере регионального сельскохозяйственного производства): монография. / Н. В. Спешилова, В. Н. Шепель. – ОУП ВО «АТиСО»; ФГБОУ ВО «ОГУ». – Оренбург: Типография «Экспресс-печать», 2022. – 152 с.

13. Оптимизация транспортировки и распределение ресурсов «Management-Resources-Logistics» / Н. В. Спешилова, О. А. Иневатова, Е. А. Спешилов, Р. В. Глазунов, Д. А. Полехов, А. А. Кучин. – Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2023664161, Роспатент, 03.07.2023.

14. Трипкош, В. А. Модельное представление организации грузопотоков транспортной компании в рамках реализации логистической стратегии / В. А. Трипкош, Е. А. Спешилов // Сборник материалов X Всероссийской конференции с международным участием «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» (Оренбург, 18-19 ноября 2021 года). – Издательство: Оренбург: Оренбургский государственный университет, 2021. – С. 385-389.

УДК 539.3; 621.9

**Стельмаков Вадим Александрович** - кандидат технических наук, доцент высшей школы промышленной инженерии ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет».

**Mr. Vadim A. Stelmakov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Higher School of Industrial Engineering of the Pacific State University.

## **ШЛИФОВАНИЕ КАК ПРОЦЕСС ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЗЁРЕН АБРАЗИВНОГО ИНСТРУМЕНТА**

## **GRINDING AS A PROCESS OF DEFORMATION AND DESTRUCTION OF ABRASIVE TOOL GRAINS**

**Аннотация.** Целью исследования является установление особенностей деформации и разрушения зёрен абразивного инструмента при бесцентровом шлифовании заготовок деталей, типичных для изделий оборонного комплекса.

Получены следующие результаты: а) выявлено, что даже новый абразивный инструмент имеет зёрна, разрушенные в процессе спекания и правки инструмента; б) установлено, что абразивные зёрна не только

деформируются и поворачиваются в связке, но и разрушаются по механизму скола; в) выявлено, что каждый абразивный инструмент (по марке и характеристикам) имеет свою интенсивность разрушения зёрен, свою долю зёрен, вырванных из связки, свой уровень вовлечения объёмов инструментального материала в разрушение и свой механизм разрушения зёрен и связки.

**Abstract.** The purpose of the study is to establish the features of deformation and destruction of abrasive tool grains during centerless grinding of blanks of parts typical for products of the defense complex.

The following results were obtained: a) it was revealed that even a new abrasive tool has grains destroyed during sintering and straightening of the tool; b) it was found that abrasive grains not only deform and turn in a bundle, but also collapse according to the chipping mechanism; c) it was revealed that each abrasive tool (by brand and characteristics) has its own destruction intensity grains, their share of grains torn from the bundle, their level of involvement of volumes of instrumental material in destruction and their mechanism of destruction of grains and bundles.

**Ключевые слова:** абразивный инструмент, деформация зёрен, разрушение зёрен

**Keywords:** abrasive tool, grain deformation, grain destruction

## **Введение**

Для специального машиностроения и оборонной промышленности растут требования к качеству процессов шлифования, в том числе, к процессу бесцентрового шлифования [1 - 6]. При этом предъявляются требования по исключению прижога материала деталей. В таких условиях задача обеспечения правильного выбора абразивного инструмента является первостепенной. И даже при условии правильной марки абразивного инструмента и его характеристик стоит вопрос о частоте выполнения операции правки абразивного инструмента. Иначе не удастся выдержать требования чертежа по точности диаметра на всей длине шлифуемой поверхности. Следовательно, необходимо исследование процесса выкрашивания абразивных зёрен из инструмента. С этих позиций ниже приведены некоторые результаты такого исследования как результаты состояния абразивных режущих инструментов в ходе их эксплуатации.

Отдельные примеры кинетики процесса разрушения абразивного инструмента с характеристиками 25A F80 O6V показаны на рисунке 1.

Из рисунка следует, что абразивный инструмент с характеристиками 25A F80 O6V в исходном состоянии (рисунок а) уже имеет разрушенные (светлые пятна) зёрна, число разрушенных зёрен растёт значительно за первые 10 минут работы (рисунок б), за 20 минут работы (рисунок в) происходит не только разрушение групп зёрен, но и «засаливание» инструмента продуктами материала шлифуемой заготовки детали.



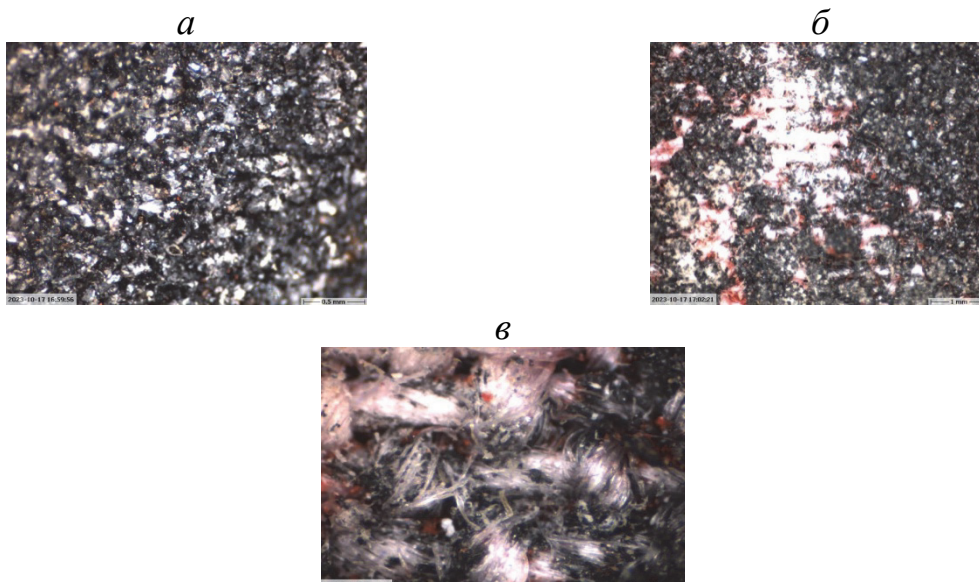


Рисунок 1 – Фото структуры абразивного инструмента с характеристиками 25А F80 O6V: *а* – режущий инструмент новый, не был в эксплуатации; *б* – инструмент работал 10 минут; *в* – инструмент работал 20 минут (*а* и *б* увеличение в 32 раза, *в* увеличение в 130 раз)

### Заключение

Выполненные исследования и документирование результатов показали следующее:

а) в разрушение абразивного инструмента вовлечены большие его объёмы, зёрна претерпевают не только разрушение сколом, но попутно происходит деформация и поворот зерна в связке, что влечёт за собой вырыв зерна из связки;

б) новый абразивный инструмент имеют разрушенные зёрна;

г) у каждого абразивного инструмента имеется своя интенсивность разрушения зёрен, доля вырванных зёрен из связки, свой уровень вовлечения объёмов инструментального материала в разрушение и свой механизм разрушения зёрен и связки;

д) каждый из рассмотренных инструментальных материалов имеет свои преимущества, свои недостатки и, соответственно, свою область применения.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Непогожев А.А., Романенко А.М. Анализ влияния характеристики абразивного инструмента на температуру при процессе шлифования без применения смазочно-охлаждающих технологических сред. Материалы Международной научно – практической конференции под общей редакцией А.И. Вострецова. Современная наука: проблемы, идеи, тенденции (Modern science: problems, ideas, trends) [Электронный ресурс] / Vydavatel «Osviceni», Научно – издательский центр «Мир науки». – Электрон. текст. данн. (5,94 Мб.) – Нефтекамск: Научно – издательский центр «Мир науки», 2021.

2. Попов С.А. Анализ схем стружкообразования в связи с геометрией рабочей поверхности шлифовального круга. - В кн.: Основные вопросы высокопроизводительного шлифования. М.: Машиностроение, 1960, стр. 176.

3. Редько С.Г., Королев А.В. Расположение абразивных зерен в рабочей поверхности шлифовального круга.// Станки и инструмент, 1976, №5.

4. Резников В.А., Минаков В.В. Исследование мгновенной контактной поверхности при шлифовании. // Вестник машиностроения, 1974, №9. 1974, № 9, с. 48.

5. Романенко А.М., Шатько Д.Б., Непогожев А.А., Караваев Я.С. Обработка шлифованием высоколегированных коррозионно стойких сталей на примере 12Х18Н10Т. Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2021; (3):С. 98 – 106.

6. Шиц Е.Ю. Явление структурообразования полиолефинов при введении технических шлифпорошков алмазов природного происхождения/ Шиц Е.Ю., Корякина В.В.// Перспективные материалы. – 2012. № 4, с. 53 – 60.

УДК 004.42

**Судаков Владимир Анатольевич**, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

**Sudakov Vladimir Anatolievich**, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, KIAM RAS

**Сивакова Татьяна Владимировна**, научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,

**Sivakova Tatiana Vladimirovna**, Researcher, KIAM RAS

## **БИБЛИОТЕКА MILPy ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СМЕШАННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

## **FOR SOLVING PROBLEMS OF MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMMING**

**Аннотация.** Представлено программное обеспечение для решения оптимизационных задач с линейными целевыми функциями и ограничениями в условиях использования целочисленных переменных. Программное обеспечение разработано в форме библиотеки, допускающей вызов из системы программирования Python 3.9 и выше. Формат входных данных текстовый поток MPS (Mathematical Programming System).

**Abstract.** The software for solving optimization problems with linear objective functions and constraints under conditions of using integer variables is presented. The software is developed in the form of a library that allows calling

from the Python 3.9 programming system and higher. The input data format is the MPS (Mathematical Programming System) text stream.

**Ключевые слова:** программное обеспечение, смешанное целочисленное линейное программирование, решатель, задача линейного программирования.

**Keywords:** software, mixed integer linear programming, solver, linear programming problem.

### **Введение**

Задачи смешанного-целочисленного линейного программирования (MILP) имеют приоритетное направление в области математической оптимизации. Возможность их использования на практике для широкого круга задач, в области транспорта, торговли, производства, менеджмента и многих других повышает их актуальность [1,2]. Данный тип задач относится к классу NP-сложных задач предназначен для минимизации линейной целевой функции с линейными ограничениями [3].

### **Основная часть**

Авторами была разработана новая библиотека MILPy, предназначенная для решения задач смешанного-целочисленного линейного программирования на языке Python. Она написана в объектно-ориентированном стиле и позволяет задавать в удобном виде ограничения и целевую функцию для типовых задач. При разработке MILPy использовались библиотеки NumPy, SciPy, pysmps, itertools, copy, operator и multiprocessing. Основным элементом модуля MILPy является класс LPSolver, в котором хранятся данные задачи линейного программирования.

Помимо стандартного конструктора имеются три конструктора, преобразующие некоторые типы задач (TSP, JSSP и RCPSP) в задачи линейного программирования, и конструктор, считывающий задачу из MPS файла. Ниже подробнее расписаны сами конструкторы и их параметры:

- `from_mps` - конструктор, считывающий файл MPS, и возвращающий объект класса LPSolver;
- `from_rcpsp` – конструктор, преобразующий задачу составления расписания проектов с ограничениями на ресурсы (Resource-Constrained Project Scheduling Problem - RCPSP) в задачах линейного программирования (ЗЛП);
- `from_jssp` – конструктор, преобразующий задачу составления расписаний рабочего цеха (Job Shop Scheduling Problem - JSSP) в ЗЛП;
- `from_tsp` – конструктор, преобразующий задачу коммивояжёра (Traveling Salesman Problem - TSP) в ЗЛП. На вход подаются либо матрица расстояний между пунктами  $C = (c_{ij})$ , либо диагональная матрица расстояний  $D$ . Обе имеют размерность  $n \times n$ , где  $n$  – количество пунктов. Помимо класса LPSolver в модуле присутствует вспомогательный класс BNBNode, в котором хранится информация о подзадаче.

На выбор в решателе предоставляются обёртка решателя HIGHS (High Performance Optimization Software), использующий метод ветвей и сечений [4]

и собственная реализация метода ветвей и границ. Ниже приведен алгоритм, который был реализован.

---

### Алгоритм Ветвей и границ

---

*Вход:* Оптимизационная задача  $R$

*Выход:* Оптимальное решение  $x^*$  и значение функции  $c^*$ , или отсутствие таковых, если нет решения

1. Инициализировать список подзадач  $\mathcal{L} := \{R\}$  и верхнюю границу  $\hat{c} := \infty$ .
  2. Если  $\mathcal{L} = \emptyset$ , вернуть  $x^* = \hat{x}$  и  $c^* = \hat{c}$ .
  3. Выбрать подзадачу  $Q \in \mathcal{L}$  и удалить  $Q$  из  $\mathcal{L}$ .
  4. Решить релаксацию  $Q_{relax}$  подпроблемы  $Q$ . Если  $Q_{relax}$  пустая, то нижняя граница  $\check{c} := \infty$ . Иначе  $\check{x}$  будет оптимальным решением  $Q_{relax}$ , а  $\check{c}$  его целевым значением.
  5. Если  $\check{c} \geq \hat{c}$ , то перейти к шагу 2.
  6. Если  $\check{x}$  удовлетворяет условию интегральности для  $R$ , то  $\hat{x} := \check{x}$ ,  $\hat{c} := \check{c}$  и перейти к шагу 2.
  7. Разбить  $Q$  на подзадачи  $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ , положить  $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{Q_1 \cup \dots \cup Q_k\}$  и перейти к шагу 2.
- 

Для решения релаксированной задачи используется двойственный модифицированный симплекс метод DRSM (Dual Revised Simplex Method) [5]. В процессе решения ЗЛП методом ветвей границ используются следующие вспомогательные методы, принадлежащие классу LPSolver

Установка библиотеки выполняется стандартными методами pip:

```
pip install git+https://github.com/jmaerte/pysmps.git  
pip install -i https://test.pypi.org/simple/ milpy==1.0.8
```

Выходные данные – это вектор значений оптимизационных переменных, значение целевой функции и диагностические сообщения об ошибках, времени решения задачи и этапов решения. Результаты будут представлены атрибутами соответствующих объектов.

### **Заключение**

Разработана новая библиотека MILPy, предназначенная для решения задач смешенного целочисленного линейного программирования на языке Python. Она написана в объектно-ориентированном стиле и позволяет задавать в удобном виде ограничения и целевую функцию для типовых задач. Новый MILPy-решатель позволил решать СЦЛП задачи используя высокоуровневый интерфейс для загрузки данных в формате mps, а также отдельные виды специальных типовых задач: задача коммивояжера (TSP); задача составления плана работ с мощностными ресурсами (Resource Constrained Project Scheduling - RCPSP); задачи планирования последовательности выполнения работ множеством машин (Job Shop Scheduling Problem - JSSP).

Наиболее целесообразно добавить в библиотеку MILPu широкую палитру разнообразных решателей и для каждой задачи необходимо подбирать метод и настраивать гиперпараметры.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Мельничук А. В., Сивакова Т. В., Судаков В. А. Решение задач оптимизации с использованием мультиагентных моделей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 100. – С. 1-16. – DOI 10.20948/prepr-2019-100.

2. Богданов И. П., Нестеров В. А., Судаков В. А., Сыпало К. И., Топоров Н. Б. Расчет оптимальной загрузки воздушных транспортных средств с учетом приоритизации летательных аппаратов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2021. – № 3. – С. 57-70. – DOI 10.31857/S0002338821030033.

3. Белозеров И.А., Судаков В.А. Машинное обучение с подкреплением для решения задач математического программирования // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2022. – № 36. – С. 1-14. . – DOI 10.20948/prepr-2022-36.

4. HiGHS - High Performance Optimization Software [Электронный ресурс]. – URL: <https://ergo-code.github.io/HiGHS/stable/> (дата обращения 20.06.2024).

5. Галяутдинов Р.Р. Задача коммивояжера — метод ветвей и границ [Электронный ресурс]. – URL: <https://galyautdinov.ru/post/zadacha-kommivoyazhera> (дата обращения: 23.06.2024).

УДК 517.9, 574.34

**Суходоев Иван Георгиевич**, младший научный сотрудник, Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН

**Sukhodoev Ivan Georgievich**, Junior Researcher, Institute for Comprehensive Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

#### **СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХ МИГРАЦИОННО СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ**

#### **SYNCHRONIZATION OF OSCILLATIONS OF THREE MIGRATIONALLY RELATED POPULATIONS**

**Аннотация.** Работа посвящена изучению синхронизации колебаний в системе трех миграционно связанных популяций в кольцо. Модель динамики представляет собой систему трех идентичных логистических отображений, которые диссипативно связаны между собой. Пользуясь качественными методами исследования динамических систем, построен полный фазовый портрет модели. Показано, что в фазовом пространстве

существует несколько периодических точек, соответствующие синхронным и несинхронным циклам.

**Abstract.** The work is devoted to the study of the synchronization of oscillations in a system of three migratoryly connected populations in a ring. The dynamics model is a system of three identical logistic mappings that are dissipatively interconnected. Using qualitative methods of studying dynamic systems, a complete phase portrait of the model was constructed. It is shown that there are several periodic points in the phase space, corresponding to synchronous and asynchronous cycles.

**Ключевые слова:** популяция, миграция, циклы, синхронизация, фазовый портрет, бифуркация.

**Keywords:** population, migration, cycles, synchronization, phase portrait, bifurcation.

### Введение

При исследовании системы миграционно связанных популяций пристальное внимание уделяется изучению особенностей полной и фазовой синхронизации динамики численности между разными местообитаниями (участками). Так несколько слабо связанных популяций одного вида, имеющих синхронную или синфазную динамику, могут быть приняты за одну большую популяцию (кластер), а несинхронные им – как популяции меньшего размера. Вместе с тем незначительное изменение силы связи может привести к возникновению противофазных колебаний численностей локальных популяций или частичной синхронизации.

Целью данной работы является исследование особенностей динамики и условий возникновения фазовой синхронизации циклов разных периодов (длин) в зависимости от параметров роста и силы связи в системе из трех миграционно связанных популяций

#### Задачи

1. Аналитическое и численное исследование соответствующей модели с дискретным временем (три диссипативно связанных отображения)
2. Исследование условий устойчивости неподвижных и периодических точек (2- и 3-цикл)
3. Поиск условий синхронизации 2- и 3-цикла на смежных участках
4. Построение бифуркационных диаграмм и фазовых портретов

Рассматриваются уравнения динамики численности трех миграционно связанных популяций:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n)(1-2m) + m(f(y_n) + f(z_n)), \\ y_{n+1} = f(y_n)(1-2m) + m(f(x_n) + f(z_n)), \\ z_{n+1} = f(z_n)(1-2m) + m(f(x_n) + f(y_n)), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_n$ ,  $y_n$  и  $z_n$  – численности в  $n$ -й сезон размножения,  $m$  – коэффициент миграции ( $0 \leq m \leq 0.5$ ), равный доле от численности каждой популяции после

размножения, которые пополняют два связанных с ней участка. Функция  $f(x)$  описывает локальный рост популяции со следующими свойствами:  $f(0)=a$  и  $df/dx < 0$ , где  $a$  – максимальная скорость роста популяции. Такой вид функции позволяет описать плотностную регуляцию численности: максимальный рост наблюдается при низкой численности, когда внутривидовая конкуренция за ресурсы минимальна, а с ростом численности конкуренция усиливается и рост замедляется.

Рассмотрим функцию  $f$  в виде дискретного аналога модели Ферхюльста, т.е.  $f(x_n) = ax_n(1-x_n/K)$ , где  $K$  – экологическая ниша популяции. Путем несложной замены переменных  $Kx_n \rightarrow x_n$ ,  $Ky_n \rightarrow y_n$ ,  $Kz_n \rightarrow z_n$  от уравнений (1) можно перейти к модели с относительными численностями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(1-2m) + am(y_n(1-y_n) + z_n(1-z_n)), \\ y_{n+1} = ay_n(1-y_n)(1-2m) + am(x_n(1-x_n) + z_n(1-z_n)), \\ z_{n+1} = az_n(1-z_n)(1-2m) + am(x_n(1-x_n) + y_n(1-y_n)). \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) имеет тривиальную  $\bar{x}_0 = \bar{y}_0 = \bar{z}_0 = 0$  и нетривиальную  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \bar{z}_1 = (a-1)/a = h$  неподвижные точки. Очевидно, что условия их устойчивости аналогичны условиям одномерного уравнения  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n/K)$ : тривиальная точка устойчива при  $0 < a < 1$ , нетривиальная при  $1 < a < 3$ . Потеря устойчивости ненулевой точки происходит согласно каскаду удвоения периода, в результате которого при  $3 < a \leq 4$  динамика демонстрирует пилообразные колебания численности (циклы), подчиняющиеся универсальности Фейгенбаума.

В данной системе колебания численностей (циклы) демонстрируют фазовую мультистабильность. В этом случае в зависимости от начальных численностей формируются либо синхронные циклы, либо режимы, отличающиеся степенью фазовой синхронизации на смежных участках.

Показано, что 2-цикл помимо полностью синхронного варианта динамики трех популяций может иметь три варианта с двумя синхронными (синфазными) и одной несинхронной (несинфазной) им популяцией. В то время для циклов больших длин, в том числе 3-цикла, динамика трех популяций может иметь сдвиг фазы колебаний (быть несинхронной). На примере 2- и 3-цикла показано, что при вариации скорости роста и коэффициента миграции происходит переход от состояния, когда возможна только синхронная динамика, к состоянию с двумя, а далее тремя несинхронными популяциями. В случае 2-цикла крайний вариант возможен только как часть переходной динамики.

Исследовано устройство фазового пространства в случае 2-цикла. Обнаружено, что каждая периодическая точка, соответствующая разным вариантам фазовой синхронизации, окружена набором седловых точек, которые задают бассейны притяжения разных вариантов совместной динамики. Можно предположить, что характер бифуркаций, приводящих к появлению этих точек, и, соответственно, сценарий усложнения динамики значительно отличаются от системы двух связанных популяций. Отметим,

что несинхронная (несинфазная) динамика, наблюдаемая для трех популяций на основе 3-цикла, по всей видимости, возможна для трех и более популяций. Такой режим примечателен тем, что его можно представить как сдвиг одного и того же пика численности при движении особей по кругу. Примечательно, что это происходит в системе симметрично связанных популяций. Поэтому его исследование, например, методом фазовых портретов, предложенным в статье, имеет довольно заманчивые перспективы.

### **Заключение**

1. Колебания численностей (циклы) демонстрируют фазовую мультистабильность. В зависимости от начальных численностей формируются либо синхронные циклы, либо режимы, отличающиеся степенью фазовой синхронизации на смежных участках

2. Показано, что 2-цикл помимо полностью синхронного варианта динамики трех популяций может иметь три варианта с двумя синхронными (синфазными) и одной несинхронной (несинфазной) им популяцией

3. Исследовано устройство фазового пространства в случае 2-цикла. Обнаружено, что каждая периодическая точка, соответствующая разным вариантам фазовой синхронизации, окружена набором седловых точек, а порождаемые ими сепаратрисные поверхности (неустойчивые многообразия) задают бассейны притяжения разных вариантов совместной динамики

*Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.*

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Суходоев И.Г., Кулаков М.П., Курилова Е.В., Фрисман Е.Я. Особенности синхронизации динамики в системе из трех миграционно связанных популяций // Региональные проблемы. 2024. Т. 27, № 1. С. 50–61. DOI: 10.31433/2618-9593-20224-27-1-50-61.

2. Кулаков М.П., Аксенович Т.И., Фрисман Е.Я. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: анализ синхронизации циклов // Региональные проблемы. 2013. Т. 16, № 1. С. 5–15.

3. Earn D.J.D., Rohani P., Grenfell B.T. Persistence, chaos and synchrony in ecology and epidemiology // Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences. – 1998. – Vol. 265. – No. 1390. P. 7–10. doi: 10.1098/rspb.1998.0256

4. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps without the Inverse // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2004. Vol. 3, No. 2 DOI: 10.1137/030600131

5. Kuznetsov A.P., Roman Yu.P. Properties of synchronization in the systems of nonidentical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.



УДК 517.956.4+51-76

**Тахиров Ж. О.**, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом «Математическое моделирование нелинейных систем», Институт Математики, Ташкент

**J.O.Takhirov**, DSc., professor, Head of the Department of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems, Institute of Mathematics, Tashkent

## **О ДИНАМИКЕ МОДЕЛИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ИНФЕКЦИИ С ИММУННЫМ ОТВЕТОМ**

### **ON THE DYNAMICS OF A FREE BOUNDARY INFECTION MODEL WITH AN IMMUNE RESPONSE**

**Аннотация.** Предложена модель вирусной инфекции с самопролиферацией цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ) с нелинейной скоростью заражения и свободными границами, изучена ее глобальная динамика. Доказано существование, единственность и равномерные оценки глобального решения, а также поведение компонентов решения и неизвестной границы на больших интервалах времени. С помощью базового репродуктивного числа  $R_0$  определены достаточные условия для распространения или исчезновения вируса.

**Abstract.** A model of viral infection with self-proliferation of cytotoxic T-lymphocytes (CTLs) with a nonlinear infection rate and free boundaries is proposed, and its global dynamics are studied. The existence, uniqueness and uniform estimates of the global solution are proved, as well as the behavior of the components of the solution and the unknown boundary over large time intervals. With the help of the basic reproductive number  $R_0$  sufficient conditions are created for the spread or disappearance of the virus.

**Ключевые слова:** модель инфекции, свободные границы, априорные оценки, долговременное поведение.

**Keywords:** infection model, free boundaries, a priori estimates, long time behavior.

#### **Введение**

Обычно считается, что вирус распространяется через восприимчивые клетки посредством процесса кровообращения. Вирусы прикрепляются, проникают и затем заражают клетки-мишени; инфицированные клетки могут выделять новые вирусные частицы в результате репликации вируса, и эти новые вирусы дополнительно заражают другие неинфицированные клетки.

С развитием биомедицинских исследований математические модели также играют все более важную роль в предоставлении информации о вирусной инфекции и динамике, а также о том, как можно уменьшить или даже искоренить инфекцию. Например Новак и др. [1] впервые предложили

следующую четырехмерную систему с популяцией цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ), основанную на базовой модели:

$$\begin{aligned}x' &= s - \beta xv - d_1x, \\y' &= \beta xv - d_2y - pyz, \\v' &= ky - qw, \\z' &= cyz - d_3z.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x(t), y(t), v(t)$  и  $z(t)$  представляют собой неинфицированные клетки-мишени, инфицированные клетки, свободный вирус и (ЦТЛ), соответственно. Неинфицированные клетки производятся с постоянной скоростью  $s$ , умирают со скоростью  $d_1x$  и заражаются со скоростью  $\beta xv$ . Инфицированные клетки производятся со скоростью  $\beta xv$  и умирают со скоростью  $d_2y$ . Свободные вирусы производятся из инфицированных клеток со скоростью  $ky$  и умирают со скоростью  $uv$  (ЦТЛ) производятся со скоростью  $cyz$  путем стимуляции инфицированных клеток и умирают со скоростью  $d_3z$ . Инфицированные клетки устраняются (ЦТЛ) со скоростью  $pyz$ . После этого на основе базовых моделей было проведено много исследований для анализа динамики различных вирусных инфекций внутри хозяина.

Недавние исследования механизма продукции иммунных клеток показали, что в дополнение к стимуляции инфицированных клеток нельзя пренебрегать их самопролиферацией [2]. Таким образом, для понимания эффекта самораспространения на основе системы (1) и результатов работы [2], авторы [3] предлагают следующую новую модель вирусной инфекции:

$$\begin{aligned}x' &= s - \beta xv - d_1x, \\y' &= \beta xv - d_2y - pyz, \\v' &= ky - uv, \\z' &= cyz + \frac{rz}{1-z/m} - d_3z.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь логистический член распространения  $\frac{rz}{1-z/m}$  описывает самораспространение (ЦТЛ), в котором параметр  $r$  обозначает скорость самораспространения на душу населения, а  $m$  обозначает размер популяции (ЦТЛ).

### **Математическая модель со свободной границей**

В последнее время задачи со свободной границей стала широко использоваться для описания медико-биологических и экологических процессов [4-6]. Для описания процесса постепенного расширения и изменения рассматриваемой области была введена свободная граница, которая представляет собой фронт распространения основного компонента модели.

Нам кажется, что введение задач со свободной границей в теорию нелинейных диссипативных структур вполне приемлемо и даже естественно. Такие модели более адекватно описывают естественные процессы.

Попробуем обобщить полученные выше результаты и предложить модель со следующими модификациями на основе системы (2):

– (i) Система рассматривается в ограниченных областях  $Q = \{(t, x): t > 0, -l < x < l\}$ ,  $D = \{(t, x): t > 0, g(t) < x < h(t)\}$ ;

– (ii) Мы предполагаем, что основное пространственное распространение происходит за счет перемещения (диффузии и адвекции) вирусов *in vivo*, тогда как инфицированные клетки неподвижны;

– (iii) Поскольку ЦТЛ производятся со скоростью  $cuз$  за счет стимуляции инфицированных клеток, а заражение клеток вызывается вирусами, их область распространения одинакова

$$\begin{aligned} u_t &= (d_1(u)u_x)_x + b_1u_x + \theta - au - buw/(1+w), (t, x) \in Q, \\ v_t &= buw/(1+w) - cv - pvz, (t, x) \in D, \\ w_t &= (d_3(w)w_x)_x + b_3w_x + kv/(1+w) - qw, (t, x) \in D, \\ z_t &= (d_4(z)z_x)_x + b_4z_x + cyz + rz/(1-z/m) - dz, (t, x) \in D, \\ v(t, x) &= w(t, x) = z(t, x) = 0, t > 0, x \notin (g(t) < x < h(t)), \\ u_x(t, -l) &= u_x(t, l) = 0, t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), -l \leq x \leq l, \\ v(0, x) &= v_0(x), w(0, x) = w_0(x), z(0, x) = z_0(x), \\ -h_0 &\leq x \leq h_0 = h(0) = -g(0) < l, \\ g'(t) &= -\mu wx(t, g(t)), h'(t) = -\beta w_x(t, h(t)), t > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u(t, x), v(t, x), w(t, x)$  и  $z(t, x)$  представляют популяции неинфицированных клеток, инфицированных клеток, вирусов и ЦТЛ соответственно;  $x = g(t)$  и  $x = h(t)$  — подвижные границы, которые должны быть определены вместе с  $u(t, x), v(t, x), w(t, x)$  и  $z(t, x)$ ;  $\theta, a, b, c, k, q, \mu, \beta$  и  $h_0$  — положительные константы.

Целью статьи является исследование некоторых свойств решения и установление глобальной разрешимости задачи (3). Предложен метод установления априорных оценок типа Шаудера для нового класса задач со свободной границей для смешанно-двухфазных уравнений. Исследованы поведение компонентов решения и неизвестной границы на больших интервалах времени.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Nowak M. A. “Population dynamics of immune responses to persistent viruses // M. A. Nowak, C. R. M. Bangham // Science. -1996. V. 272, pp. 74–79.

2. Korobeinikov A. “Immune response and within-host viral evolution: immune response can accelerate evolution// A. Korobeinikov // J.Theor. Biol.,-2018.V. 456, pp.74–83 .

3. Jiang C. Global properties of a virus dynamics model with selfproliferation of CTLs// C. Jiang, H. Kong, G. Zhang, K. Wang, // Mathematics in Applied Sciences and Engineering, 2021.V.2 (2), pp.123–133.

4. Y. Du Y. and Z. Lin, “Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary //Y. Du , Z. Lin//SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2010. V. 42 (1), pp.377–405.

5. Liu Y. Biological invasion in a predator-prey model with a free boundary // Y. Liu, Z. Guo M. El Smaily , L. Wang // Boundary Value Problems.- 2019. V. 33 (22).

6. J. O. Takhirov, “A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology// J. O. Takhirov// Indian J. Pure Appl. Math. -2019 .V. 50 (1), pp. 95–112.

УДК 519.642.2, 517.972.7

**Твёрдый Дмитрий Александрович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории «электромагнитного излучения», Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

**Tverdyi Dmitriy Alexandrovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Researcher of Laboratory “Electromagnetic radiation”, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ТИПА ГЕРАСИМОВА-КАПУТО АЛГОРИТМОМ ЛЕВЕНБЕРГА-МАРКВАРДА НА ПРИМЕРЕ НЕОДНОРОДНОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ**

## **RESTORING THE ORDER OF A FRACTIONAL DERIVATIVE OF THE GERASIMOV-CAPUTO TYPE BY THE LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM ON THE EXAMPLE OF AN INHOMOGENEOUS FRACTIONAL EQUATION**

**Аннотация.** Дробно-дифференциальные модели природных процессов все чаще находят свое применение. Однако даже с учетом понимания тонкостей моделируемого процесса подбор параметров в моделях приходится осуществлять вручную. Что приводит к идеям об методах определения оптимальных параметров. Прямая задача определяется как задача Коши для дробного уравнения, где производная понимается в смысле Герасимова-Капуто с переменным показателем степени дробной производной. Прямая задача решается численно с помощью нелокальной неявной конечно-разностной схемы. Обратная задача сводится к минимизации целевой функции, определяющей переменный показатель степени дробной производной, на основе экспериментальных данных. Для

минимизации целевой функции используется итерационный метод Левенберга-Марквардта. На тестовых примерах было показано, что данный метод действительно может быть использован для безусловной оптимизации с целью определения вида целевой функции и её оптимальных значений в конкретных моделях.

**Abstract.** Fractional differential models of natural processes are becoming increasingly popular. However, despite the understanding of the intricacies of the modeled process, selecting parameters for these models still needs to be done manually. This leads to the idea of finding optimal parameters using various methods. The direct problem can be defined as a Cauchy problem for a fractional equation with a variable-order Gerasimov-Caputo derivative. This problem is solved using a non-local implicit finite difference method. To solve the inverse problem, we minimize an objective function that determines the variable exponent in the fractional derivative based on experimental data. We use the Levenberg-Marquardt algorithm to find the optimal value of the exponent. Using test cases, it was demonstrated that the method can be applied to solve the inverse problem of finding the optimal values for the objective function.

**Ключевые слова:** обратные задачи, теория оптимизации, алгоритм Левенберга-Марквардта, дробные производные, Герасимов-Капуто, эффект памяти, неявные конечно-разностные схемы.

**Keywords:** inverse problems, optimization theory, Levenberg-Marquardt algorithm, fractional derivatives, Gerasimov-Caputo, memory effect, implicit finite-difference schemes.

## Введение

Дробные производные позволяют описывать эффект памяти или эрдитарности, который можно наблюдать во многих динамических процессах [1]. Поэтому возникает интерес к использованию методов для поиска оптимальных значений параметров модели, связанных с этим эффектом, на основе наблюдаемых данных. Например, при описании геологических и геофизических процессов, которые невозможно наблюдать напрямую глубоко под землёй, таких как процессы, происходящие в земной коре [2]. В математических моделях таких процессов порядок дробной производной может указывать на интенсивность процесса, связанную с изменением характеристик среды.

## Постановка прямой и обратной задач

Рассматривается задача Коши для неоднородного дробного уравнения в области  $\Omega = \{(t): 0 \leq t \leq T\}$ , как прямая задача вида:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma) d\sigma}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} = 1, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где, слева – дробная производная типа Герасимова-Капуто переменного порядка  $\alpha(t)$ ;  $u(t) \in C^2[0, T]$  – функция решения;  $\alpha(t) \in C^1[0, T]$ ;

$\Gamma(\cdot)$  - гамма-функция Эйлера;  $\dot{u} = du/dt$ ;  $T$  – время моделирования;  $t$  – текущее время моделирования;  $u(0)$  – константа.

Пусть  $\alpha(t) \in \mathbb{A}$  – функция известного класса, и её вид определяется неким набором параметров. Тогда, согласно [3] решение обратной задачи сводится к поиску  $\vec{X} = [X_0, \dots, X_{K-1}]$ ,  $\vec{X} \in \mathbb{R}^K \in \mathbb{R}$  – неизвестных  $K$  параметров, характеризующих  $\alpha(t)$ . Пусть в равномерной сеточной области  $\hat{\Omega} = \{(t_i = i\tau): 0 \leq i \leq N\}$  с шагом дискретизации  $\tau = T/N$ , где определены классы сеточных функций  $\hat{U} \in \hat{\Omega}$  и  $\hat{A} \in \hat{\Omega}$ , прямая и обратная задачи дискретизируются:  $u(t) = u(t_i) = u_i \in \hat{U}$ ,  $\alpha(t) = \alpha(t_i) = \alpha_i \in \hat{A}$ . Тогда разностная обратная задача по восстановлению  $\alpha(\vec{X})$  может быть представлена в виде нелокальной неявной конечно-разностной схемы (IFDS) [4]:

$$A_{(i)} = \frac{\tau^{-\alpha(\vec{X})}}{\Gamma(1-\alpha(\vec{X}))}, \quad w_{(j)}^{(i)} = (j+1)^{1-\alpha(\vec{X})} - j^{1-\alpha(\vec{X})}, \quad (2)$$

$$A_{(i)} \sum_{j=0}^{i-1} w_{(j)}^{(i)} (u_{i-j} - u_{i-j-1}) = 1, \quad u_0 = \theta_0, \quad u_i = \theta_i,$$

где,  $u_i = \theta_i = \vec{\theta}$  – вектор известных экспериментальных данных о решении (1) в области  $\hat{\Omega}$ , размерности  $N$ ;  $i$  – номер узла сетки  $\hat{\Omega}$ . Пусть  $\omega(\vec{X}) = [\omega_0, \dots, \omega_{N-1}]$  – решение разностной прямой задачи (1) при некотором приближении  $\vec{X}$ , тогда в терминах теории безусловной оптимизации [5] решение (2) сводится к минимизации  $\Psi$  функционала невязки:

$$\min_{\vec{X} \in \mathbb{R}^K} \Psi(\vec{\theta} - \omega(\vec{X})) = M(\eta(\vec{X})), \quad M(\eta(\vec{X})) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\theta_i - \omega_i)^2, \quad (3)$$

Полагая что выполняется  $\Psi(\vec{X}) \in C^1(G \subset \mathbb{R}^K)$ , где  $G$  – выпуклое множество, задача минимизации (3) решается методом Левенберга-Марквардта [6].

В качестве экспериментальных данных берутся эталонные модельные данные с возмущением  $[-0.25, 0.25]$  в виде белого шума. Эталонные данные – это различные численные решения прямой задачи с известными видами функции  $\alpha(t)$ , которые далее требуется восстановить. Результаты представлены на (рисунок 1).

### Заключение

В работе применен метод математической безусловной оптимизации Левенберга-Марквардта для восстановления оптимальных значений и вида функции  $\alpha(t)$  переменного порядка дробной производной типа Герасимова-Капуто переменного порядка. На тестовых примерах показано, что для неоднородного дробного уравнения с оператором дифференцирования типа Герасимова-Капуто переменного порядка  $\alpha(t)$  возможно решение обратной задачи на функциональный параметр  $\alpha(t)$ , зависящий от нескольких неизвестных переменных. Результаты решения разностной обратной задачи хорошо согласуются с экспериментальными данными с высокими значениями коэффициентов подобия.

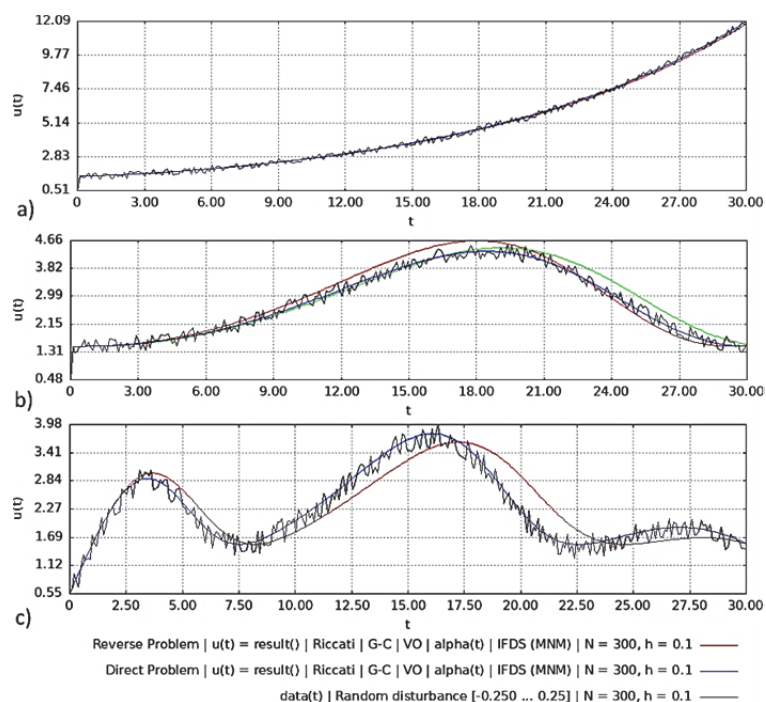


Рисунок 1 – Результаты решения тестовых задач при: а)  $\alpha(t_i) = X_0 \left( i\tau/T \right)$  – линейно-возрастающей; б)  $\alpha(t_i) = X_0 \sin(X_1 i\tau)^2$  – периодической; в)  $\alpha(t_i) = X_0 \left( (N - i)\tau/T \right) \cos(X_1 i\tau)^2$  – периодической функции с линейно-убывающей амплитудой.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050, <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Sur les equations integro-differentielles et leurs applications / V. Volterra // Acta Mathematica. – 1912. – Vol. 35. – No 1. – P. 295-356. – DOI 10.1007/BF02418820.
2. Tarantola, A. Inverse problem theory: methods for data fitting and model parameter estimation / A. Tarantola. – New York: Elsevier Science Pub. Co., 1987. – 613 pp. – ISBN 0444427651.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва: Наука, 2004. – 798 с. – ISBN 5-02-033599-1.
4. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation / D. A. Tverdyi, R. I. Parovik // Fractal and Fractional. – 2022. – Vol. 6. – No 1. – P. 1-27. – DOI 10.3390/fractalfract6010023. – EDN XPPXOV.
5. Dennis, J. E. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations / J. E. Dennis, Jr. Robert, B. Schnabel – Philadelphia: SIAM, 1996. – 394 pp. – ISBN 9781611971200.

6. The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory / J. J. More // In: Watson, G.A. (eds) Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics. – 1978. – Vol. 630. – P. 105-116. – DOI 10.1007/BFb0067700.

УДК 004.942, 519.6, 537.874

**Твёрдый Дмитрий Александрович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории «электромагнитного излучения», Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

**Tverdyi Dmitriy Alexandrovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Researcher of Laboratory “Electromagnetic radiation”, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

**Малкин Евгений Ильич**, научный сотрудник лаборатории «электромагнитного излучения», Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН

**Malkin Evgeniy Illich**, Associate Researcher of Laboratory “Electromagnetic radiation”, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

## **ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОНЧ РАДИОВОЛН В ЕСТЕСТВЕННОМ ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ-ИОНОСФЕРА И ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ОТ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ГРАНИЦ**

## **ABOUT ONE PROBLEM OF COMPUTER MODELING OF VLF RADIO WAVE PROPAGATION IN A NATURAL EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE AND BACKSCATTERING FROM BOUNDARY INHOMOGENEITIES**

**Аннотация.** Среди различных явлений атмосферного электричества интерес представляют грозовые разряды, так как они могут сопровождать или вызывать катастрофические явления. Грозовые разряды порождают радиоволны с максимумом интенсивности в очень низкочастотном диапазоне. Радиоволны распространяются в волноводе, образованном поверхностью Земли и нижней границей ионосферы. Границы волновода могут иметь участки неоднородной проводимости, на которых будет происходить рассеяние этих радиоволн. В работе предлагается упрощенная математическая модель в первом приближении для описания возмущений радиоволн в полосковом волноводе над очагом подготовки землетрясения. В результате моделирования показано, что в участках неоднородной проводимости границ волновода происходит обратное рассеяние, а в



зависимости от типа неоднородности меняются характеристики проходящей радиоволны.

**Abstract.** Among the various phenomena of atmospheric electricity, thunderstorms are of interest, since they can accompany or cause catastrophic phenomena. Lightning discharges generate radio waves with a maximum intensity in a very low frequency range. Radio waves propagate in a waveguide formed by the Earth's surface and the lower boundary of the ionosphere. The boundaries of the waveguide may have areas of inhomogeneous conductivity on which these radio waves will be scattered. The paper proposes a simplified mathematical model in the first approximation to describe the disturbances of radio waves in a strip waveguide above the earthquake preparation site. As a result of the simulation, it is shown that in the areas of inhomogeneous conductivity of the waveguide boundaries, backscattering of the radio wave occurs, and depending on the type of inhomogeneity, the characteristics of the passing radio wave change.

**Ключевые слова:** электромагнитное излучение, ОНЧ, математическое моделирование, уравнения Максвелла, FDTD, волновод Земля-ионосфера, PML, PEC, неоднородная проводимость, обратное рассеяние, MATLAB.

**Keywords:** electromagnetic radiation, VLF, mathematical modeling, Maxwell's equations, FDTD, Earth-ionosphere waveguide, PML, PEC, inhomogeneous conductivity, backscattering, MATLAB.

## **Введение**

Среди различных явлений атмосферного электричества интерес представляют грозовые разряды, так как они могут сопровождать или вызывать катастрофические явления. Согласно данным сети радиодатчиков молний The World Wide Lightning Location Network (WWLLN), на Земле каждую секунду происходит до 50 разрядов молний. В большинстве наземных наблюдений в очень низкочастотном (ОНЧ) диапазоне преобладают «сферрики» («атмосферрики») — импульсные широкополосные радиосигналы грозовых разрядов. Грозовые очаги можно представлять как постоянно действующие источники импульсного электромагнитного (ЭМ) излучения, при этом основная часть энергии этого излучения находится в ОНЧ-диапазоне (3–30 кГц). Радиоволны распространяются не в свободном пространстве, а в волноводе «Земля-ионосфера» сложной структуре, направляющей волны в одном направлении, образованный поверхностью Земли и нижней границей ионизированной части атмосферы [1]. Границы (стенки) волновода могут иметь участки неоднородной проводимости, на которых будет происходить рассеяние. Зачастую в исследованиях рассматриваются ионосферные неоднородности. В то же время существуют участки неоднородной проводимости нижней границы, обусловленные изменением электрофизических свойств Земли [2]. Такие участки будут неизбежно влиять на характеристики ЭМ волн. Поэтому, исследуя параметры ОНЧ сфериков, можно определить наличие участка неоднородной проводимости нижней границы волновода.

Идея о том, что граничные условия на земной поверхности могут влиять на распространение радиоволн и давать предвестниковый эффект, появилась ещё во второй половине прошлого века. Тогда учёные начали наблюдать за изменениями амплитуды и фазы сигналов радиостанций, радиотрассы которых пролегают над очагами подготовки землетрясений. Основная сложность поиска предвестниковых эффектов в данных радионаблюдений — это отсутствие комплексной модели возмущений в волноводе Земля-Ионосфера при подготовке землетрясений.

Целью данного исследования является построение модели распространения ОНЧ-радиоволны от точечного источника, приближённо описывающей грозовой разряд, и возмущений ЭМ поля, возникших при её взаимодействии с участками неоднородной проводимости волновода, которые могут быть связаны с очагами подготовки землетрясения.

### Упрощенная модель волновода

ОНЧ-радиоволны являются возмущениями ЭМ поля волнового характера с определённой частотой. Поле характеризуется электрическими  $\vec{E}$  и магнитными  $\vec{H}$  напряженностями среды и описывается системой основных уравнений электромагнетизма [3] на основе уравнений Максвелла [4].

Схематично, волновод «Земля-ионосфера» можно представлять образованным объёмом нейтральной атмосферы и двумя проводящими объёмами, искривлёнными относительно радиуса Земли. Основное упрощение данной модели в том, что рассматривается плоский волновод, пренебрегая кривизной Земли. После чего рассматривается его двумерное сечение в Декартовой системе координат, ортогональное Земле, которое можно рассматривать как полосковый волновод). Система уравнений для ЭМ поля для полоскового волновода представляется двумя независимыми системами уравнений, из которых рассматривается  $TE_y$  — поперечно-электрическая к оси  $y$  мода.

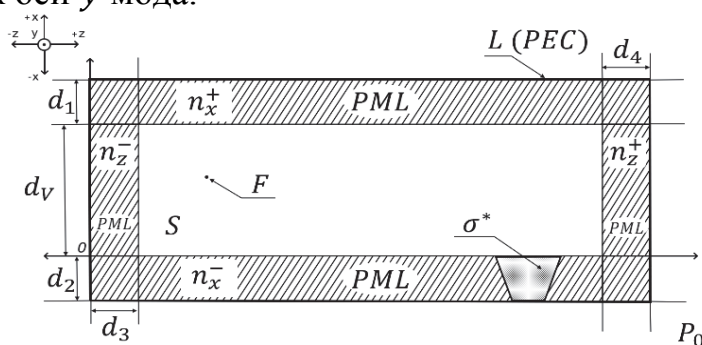


Рисунок 1 – Схематичное представление модели как полоскового волновода: где,  $F$  - источник энергии ЭМ поля;  $\sigma^*$  - участок неоднородной проводимости среды

Граничные условия задаются такими, чтобы контур, ограничивающий полосковый волновод, являлся экранирующей границей [3] — идеальный проводник (PEC) [4], контур, полностью отражающий падающие ЭМ волны. Для моделирования стенок волновода с плавно изменяющимися

параметрами среды (skin-слой), воспользуемся дополнительными граничными условиями, а именно Perfect Matched Layer (PML) [5] — специальные области вдоль PEC, где проводимости меняются по степенному закону. Таким образом, EM поле локализуется в области, моделирующей атмосферу, а PML среды поглощают проходящие через них волны. Участок неоднородной проводимости Земли моделируется участком PML нижней границы волновода определённой геометрии, где проводимость определяется другими параметрами. Далее модельные уравнения решаются численно по схеме FDTD на равномерной сетке [6]. Все расчёты и визуализации реализуются в виде программного комплекса в пакете MATLAB.

### **Заключение**

Представлена упрощенная математическая модель в первом приближении для описания возмущений радиоволн в полосковом волноводе над очагом подготовки землетрясения. В ходе компьютерных численных экспериментов на основе предложенной модели симулируется распространение радиоволны с частотой 10 [кГц] вдоль участков неоднородной проводимости различной геометрии. В результате показано, что в участках неоднородной проводимости границ полоскового волновода происходит обратное рассеяние радиоволны. Показано, что в зависимости от типа неоднородности меняются характеристики проходящей радиоволны.

Дальнейшее продолжение работы состоит в уточнении модели. Например, перейти к постановке трехмерной задачи или рассматривать волновод «Земля-ионосфера» естественной, искривленной формы. Это позволит в будущем сопоставлять результаты моделирования обратного рассеяния по уточненной модели с реальными данными.

### **Благодарности**

Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2)

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Альперт, Я. Л. Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля – ионосфера / Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель. – Москва: Наука, 1967. – 123 с.
2. Химический состав подземных вод режимных водопроявлений Петропавловского геодинамического полигона, Камчатка: типизация и эффекты сильных землетрясений / Г. Н. Копылова, Н. В. Гусева, Ю. Г. Копылова, С. В. Болдина // Вулканология и Сейсмология. – 2018. – Т. 12. – № 4. – С. 43-62. – DOI: 10.1134/S0203030618040041. – EDN XWLMMDR.
3. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – Москва: Наука, 1973. – 607 с.
4. Taflove, A. Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method, 3rd edition / A. Taflove, S. C. Hagness. – Massachusetts: Artech House, 2005. – 1038 pp. – ISBN 9781580538329.

5. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves / J. P. Berenger // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 114. – No 2. – P. 185-200. – DOI 10.1006/jcph.1994.1159

6. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1966. – Vol. 14. – No 3. – P. 302-307. – DOI 10.1109/TAP.1966.1138693.

УДК 538.91

**Терновой Никита Константинович**, студент, Дальневосточный  
Федеральный Университет

**Ternovoi Nikita Konstantinovich**, student, Far Eastern Federal University

**Нефедев Константин Валентинович** Институт прикладной математики  
ДВО РАН

**Nefedev Konstantin Valentinivich**, Institute of Applied Mathematics, Far  
Eastern brunch of RAS

**Анисич Александр Игоревич**, студент, Дальневосточный федеральный  
университет

**Anisich Alexandr Igorevich**, student, Far Eastern Federal University

**Лобанова Элиза Александровна**, студент, Дальневосточный федеральный  
университет, лаборант, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Lobanova Eliza Alexandrovna**, student, Far Eastern Federal University,  
laboratory assistant, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern brunch of RAS

**Черкасов Михаил Дмитриевич**, студент, Дальневосточный федеральный  
университет

**Cherkasov Michail Dmitrievich**, student, Far Eastern Federal University

**Прохоров Егор Игоревич** Дальневосточный федеральный университет

**Prokhorov Egor Igorevich** Far Eastern Federal University

## **ПОИСК ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ РЕШЕТКИ ХОПФИЛДА**

## **SEARCH FOR THE LOW-ENERGY STATE OF THE HOPFIELD LATTICE**

**Аннотация.** Спиновые стекла определяются как неупорядоченные системы со случайными конкурирующими взаимодействиями [1]. Спиновая решетка при изменении взаимодействия между спинами меняет энергетическое состояние. Цель- Найти низкоэнергетическое состояние системы изменяя направление спинов, на примере решетки из статьи [2], в которой реализовано искусственное спиновое стекло, которое повторяет аспекты нейронной сети Хопфилда [3]. Получен алгоритм вычисления одного из низкоэнергетических состояний, а также визуализация этого состояния на примере данных [2].

**Abstract.** Spin glasses are defined as disordered systems with random competing interactions [1]. The paper [2] presents an implementation of an artificial spin glass that replicates aspects of the Hopfield neural network [3]. The lattice changes energy state when the interaction between spins changes. The goal is to find a low-energy state of the system by changing the direction of spins. We obtained an algorithm for calculating one of the low-energy states, as well as a visualisation of this state on the example data [2].

**Ключевые слова:** Математическая модель, Решетка Хопфилда, низкоэнергетическое состояние

**Keywords:** Mathematical model, Hopfield lattice, low-energy state

### Введение

Вычисление основных состояний спиновых стекол является трудной задачей и существует лишь несколько эффективных точных методов для систем небольших размеров. Поэтому важно разработать эффективные алгоритмы либо для экономии вычислительных усилий, либо для получения более качественных данных [5]. Цель работы: найти низкоэнергетическое состояние спинового льда на решетке Хопфилда. В статье [2] получена реализация искусственного спинового стекла, повторяющая аспекты нейронной сети Хопфилда [3]. Два популярных в настоящее время алгоритма— это parallel tempering (PT) Monte Carlo [6] и population annealing Monte Carlo (PAMC) [7].

### Основная часть

В статье [2] сканирующей электронной микроскопией получено изображение искусственной сети Хопфилда. Магнитный момент каждого островка может принимать только два значения в модели Изинга.

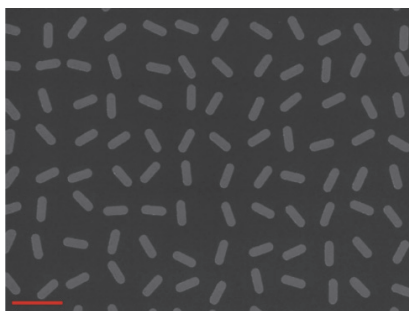


Рисунок 1 – Спиновая решётка Хопфилда [2]

Модель Эдвардса-Андерсона математически отражает сущность спинового стекла [4]. Основное свойство спиновых стекол - наличие конкуренции различных магнитных взаимодействий. Гамильтониан Эдвардса-Андерсона (1) в модели диполей позволяет исследовать особенности спиновых стекол. В нём спины рассматриваются как простые двоичные переменные, принимающие только значения  $\pm 1$ . Направление магнитного момента может принимать только одно из двух направлений (либо вверх  $+1$ , либо вниз  $-1$ )

$$H = -\sum_{i,j} J_{i,j} S_i S_j \quad (1)$$

Мы можем выделить фиксированную часть из гамильтониана, ответственную за взаимодействия, и найти параметр J энергии для каждой пары спинов по формуле (2). Учитываются пары в горизонтальном и вертикальном направлениях (без учета взаимодействия по диагонали).

$$J = \sum_{\langle i,j \rangle} \left( \frac{(\vec{m}_i \vec{m}_j)}{|\vec{r}_{ij}|^3} - 3 \frac{(\vec{m}_i \vec{r}_{ij})(\vec{m}_j \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^5} \right) \quad (2)$$

Каждый спин может быть направлен в двух противоположных направлениях, т.е. может быть представлен однокомпонентным вектором, который принимает значения +1 или -1. Необходимо найти для локальной системы такое направление каждого спина, чтобы значение H (1) было минимальным. Рассмотрим квадратную решетку. Она может иметь 3 типа в зависимости от знаков J между парами (Таблица 1).

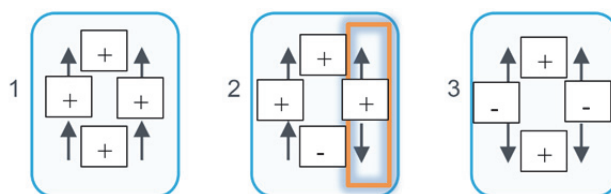


Таблица 1 –Пример решетки

Во 1 и 3 типах при подборе направлений спинов получаем сумму отрицательных энергий. А в 2 возникает фрустрированная пара с положительной энергией (1). Мы получили решетку с значениями J для всех пар спинов S0-S95 (Рисунок 2), где значения S0-S95- располагающиеся в решетке спины, а численные значения между ними – значения энергии J (2). Красным выделены группы 2 типа в которых фрустрированная пара.

S0	0.33	S1	0.87	S2	-0.19	S3	1.66	S4	-1.53	S5	1.34	S6	1.39	S7	-0.26	S8	1.23	S9	1.37	S10	1.01	S11	0.69	-0.46	-0.95	-1.47	0.67	-0.16	-1.53	-1.41	-1.33	-0.75	-1.74	-1.89	
S12	1.92	S13	1.94	S14	-0.39	S15	-0.42	S16	-0.74	S17	-0.14	S18	1.39	S19	-0.51	S20	0.24	S21	0.76	S22	1.15	S23	0.17	-0.79	-1.10	-1.80	0.68	-1.74	-1.52	-1.13	-0.83	-0.78	-1.79	-1.67	
S24	0.19	S25	1.05	S26	0.70	S27	0.10	S28	0.41	S29	0.81	S30	0.10	S31	-0.24	S32	-1.05	S33	1.28	S34	0.55	S35	-1.58	-1.20	0.32	-1.26	-0.28	-1.74	-1.49	-0.56	-1.40	0.58	-1.30	-0.71	
S36	0.97	S37	1.49	S38	-1.04	S39	1.30	S40	1.24	S41	1.31	S42	1.62	S43	0.84	S44	0.60	S45	-1.52	S46	1.75	S47	-1.54	-1.31	0.40	-1.39	-1.62	-1.80	-1.45	-0.52	-0.54	-0.86	-0.52	-0.65	
S48	-0.58	S49	-1.48	S50	1.56	S51	1.47	S52	0.96	S53	1.04	S54	0.50	S55	1.26	S56	1.12	S57	0.39	S58	1.14	S59	-0.20	-0.81	-1.15	-0.90	-0.87	-1.91	-1.90	-1.27	0.22	-1.39	-1.14	-1.31	
S60	0.12	S61	0.94	S62	1.49	S63	1.98	S64	-0.19	S65	0.82	S66	-0.14	S67	-0.76	S68	1.25	S69	1.17	S70	-0.76	S71	-0.42	-1.94	0.42	-0.04	0.32	-0.72	-1.86	-1.16	-1.22	-1.80	-0.83	-1.65	
S72	1.11	S73	-0.39	S74	0.65	S75	1.07	S76	-0.64	S77	1.13	S78	-0.43	S79	-1.55	S80	0.41	S81	0.76	S82	1.37	S83	-1.67	-1.57	-1.04	-1.83	-1.62	-1.19	-1.19	-0.92	-1.12	-2.00	-0.69	-1.06	
S84	1.44	S85	-0.86	S86	1.25	S87	1.28	S88	-0.86	S89	-0.78	S90	1.06	S91	-0.15	S92	0.31	S93	0.74	S94	-1.04	S95	-1.06	-1.67	-1.57	-1.04	-1.83	-1.62	-1.19	-1.19	-0.92	-1.12	-2.00	-0.69	-1.06

Рисунок 2– Значения J спиновой решетки

**Алгоритм:** 1. При выборе направлений спинов в группах без фрустрированной пары (1 и 3 тип) мы соблюдаем условие отрицательной энергии для каждой пары. 2. При выборе в группах с фрустрированной парой (2 тип) выбираем фрустрированную пару с наименьшим значением J в группе. 3. При наличии 2-х спинов, взаимодействующих с двумя группами 2 типа, такие группы являются соседствующими и меняют положение фрустрированных пар друг друга 4. При соседстве нескольких групп с

фрустрированной парой сумма энергии фрустрированных пар должна быть минимальной, что проверяется кодом перебора (до  $2^{20}$  вариантов)  
 Решетка (Рисунок 3) имеет две соседние группы спинов с фрустрированной парой. Наименьшие значения  $J$  для пар S0-S1 и S12-S24, эти пары будут с положительной энергией (1) а остальные с отрицательной, что подтверждает перебор.

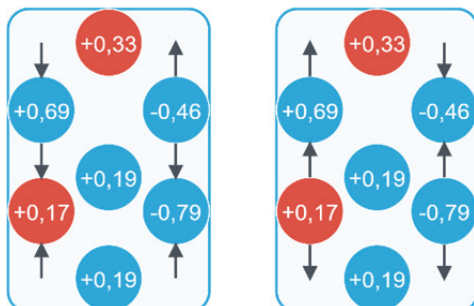


Рисунок 3 Решетка S (0,1,12,13,24,25)

Найти основное состояние с наличием  $2^{96}$  вариантов полным перебором затруднительно. Однако можно найти его, основываясь на полученных закономерностях (рисунок 4).

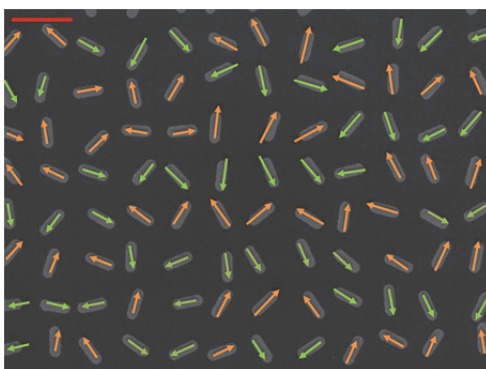


Рисунок 4 Основное состояние решетки Хопфилда

### Заключение

Представлен более простой в использовании и менее точный относительно методов Монте-Карло алгоритм поиска низкоэнергетического состояния для решетки Хопфилда, где не применим полный перебор. Для использования в дополнение имеющимся методам.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10069, <https://rscf.ru/project/24-71-10069/>

The research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-71-10069, <https://rscf.ru/en/project/24-71-10069/>

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. J.A. Mydosh 2015 Rep. Prog. Phys. 78 052501 DOI 10.1088/0034-4885/78/5/052501

2. Saccone, M., Caravelli, F., Hofhuis, K. et al. Direct observation of a dynamical glass transition in a nanomagnetic artificial Hopfield network. *Nat. Phys.* 18, 517–521 (2022). <https://doi.org/10.1038/s41567-022-01538-7>

3. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *PNAS* 79.8.2554 doi:10.1073/pnas.79.8.2554

4. Кинцель В "Спиновые стекла как модельные системы для нейронных сетей" УФН 152 123–131(1987)/DOI:10.3367/UFNr.0152.198705d.0123

5. Barzegar, Amin, et al. "Optimization of population annealing Monte Carlo for large-scale spin-glass simulations." *Physical Review E* 98.5 (2018): 053308.

6. K. Hukushima and K. Nemoto, Exchange Monte Carlo method and application to spin glass simulations, *J. Phys. Soc. Jpn.* 65, 1604 (1996).

7. J. Machta, Population annealing with weighted averages: A Monte Carlo method for rough free-energy landscapes, *Phys. Rev. E* 82, 026704 (2010).

УДК 539.3(5), 621.74

**Ткачева Анастасия Валерьевна**, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН Хабаровского федерального исследовательского центра, Комсомольск-на-Амуре, Россия

**Tkacheva Anastasia Valerievna**, Ph.D. physics and mathematics Sciences, senior researcher at the Laboratory of Problems of Creation and Processing of Materials and Products, Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk Federal Research Center, Komsomolsk-on-Amur, Russia

**Евстигнеева Анна Алексеевна**, студент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

**Evstigneeva Anna Alekseevna**, student, Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

## **О НАПРЯЖЕНИЯХ В СФЕРИЧЕСКОЙ КЕРАМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ABOUT STRESSES IN SPHERICAL CERAMIC FORM**

**Аннотация.** Работа посвящена задаче температурных напряжений. В ней исследуется влияние предварительной прокалики керамической оболочковой формы и уровень погружения в опорный наполнитель на напряжения, возникающие в момент заливки и кристаллизации металла. Полагается, что металл, керамическая форма опорный наполнитель деформируются упруго, при этом упругие модули не зависят от температуры. В качестве контактных условий на границе контактирующего



металла с внутренней поверхностью формы принимаются равенства напряжений нормальных и касательных к граничной поверхности. Опорный наполнитель принимается не деформируемым, его контакт с материалом оболочковой формы полагается жестким.

Отмечается незначительное увеличение уровня напряжений в форме за счет присутствия опорного наполнителя и заметное влияние на него предварительного ее нагрева

**Abstract.** The work is devoted to the problem of temperature stresses. It examines the effect of pre-calcination of a ceramic shell mold and the level of immersion in a support filler on stresses arising at the time of casting and crystallization of the metal. It is assumed that the metal, ceramic mold, and support filler are deformed elastically, while the elastic modules do not depend on temperature. The contact conditions at the boundary of the contacting metal with the inner surface of the mold are assumed to be the equality of stresses normal and tangential to the boundary surface. The supporting filler is assumed to be non-deformable, its contact with the shell-shaped material is assumed to be rigid.

There is a slight increase in the stress level in the mold due to the presence of a support filler and a noticeable effect of its preheating on it

**Ключевые слова:** упругость, температурные напряжения, литье по выплавляемым моделям, оболочковая форма.

**Keywords:** elasticity, temperature stresses, die casting, shell shape.

## Введение

Производство шаровых заготовок с помощью литья по выплавляемым моделям довольно распространено, поэтому исследования в этом направлении ведутся не один год. Данный технологический процесс непрерывно модернизируют. В ряде работ изучалось влияние геометрии оболочкой формы на ее напряжённо-деформированное состояние (НДС), толщины стенки керамики, материала отливок и материала оболочковой формы.

В данной работе исследуется влияние, оказываемое со стороны опорного наполнителя, на напряжения, возникающие в процессе затвердевания металла в сферической керамической оболочковой форме. Для этой цели рассматривается различный уровень погружения оболочкой формы в опорный наполнитель. Наряду с этим изучается также влияние предварительного подогрева (прокалки) формы.

## Постановка задачи

В сферическую керамическую оболочковую форму, размерами ( $R \leq r \leq R_s$ ), прогретую до температуры  $T_*$  °C заливают расплавленную сталь температурой  $T = 1550$  °C. Следует найти распределение напряжений в

течении времени кристаллизации металла. Введем сферическую систему координат  $(r, \varphi, \theta)$  и свяжем ее с центром формы, которая может быть как в свободном состоянии, так и помещена в опорный наполнитель частично или полностью (рис. 1). Примем сферу сплошной, полагая, что наличием воронки в материале оболочковой формы можно пренебречь.

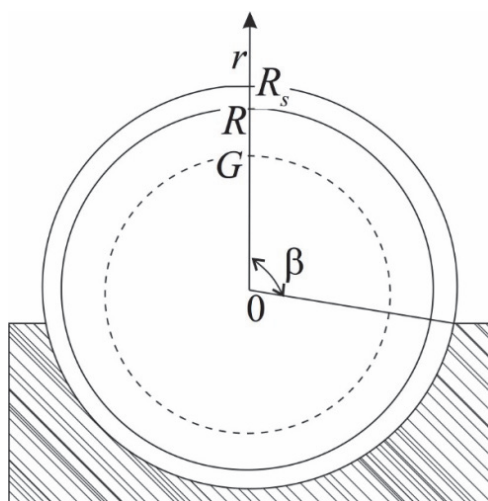


Рис.1 Схема задачи.

Образуемый в ходе распределения температуры и охлаждения металл и керамическую форму считаем упругими, деформацию малой. Соотношение Дюамеля-Неймана описывает связь между напряжением упругой деформацией и температурой

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - 3\alpha K(T - T_0))\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1)$$

$\lambda$ ,  $\mu$ ,  $K = \frac{2}{3}\mu + \lambda$  упругие модули,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Полагаем, что температура не зависит от скорости деформаций, и распространяется благодаря закону Фурье

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad}T) \quad (2)$$

$\lambda$  – теплопроводность Вт/(м°C),  $c$  – удельная теплоемкость Дж/(кг°C),  $\rho$  – плотность кг/м³.

В качестве контактных условий на границе контактирующего металла с внутренней поверхностью формы принимаются равенства напряжений нормальных и касательных к граничной поверхности. Опорный наполнитель принимается не деформируемым, его контакт с материалом оболочковой формы полагается жестким.

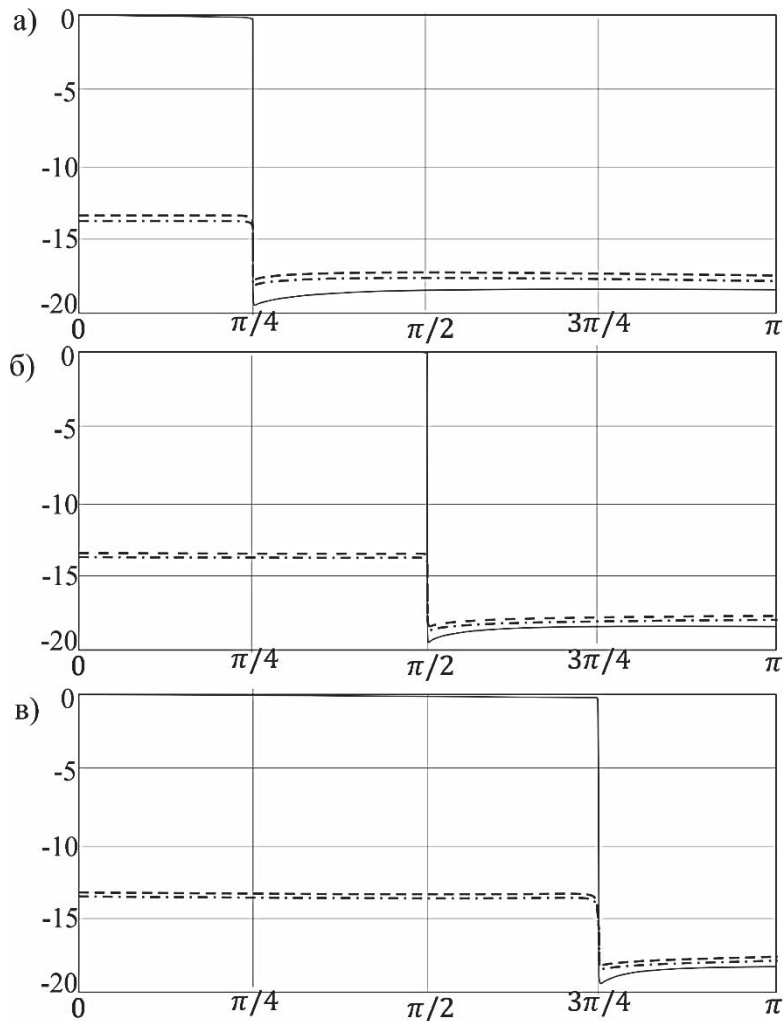


Рис. 2 Распределение напряжений на внешней поверхности формы погруженной на угол  $\beta$  : а)  $\pi/4$ ; б)  $\pi/2$ , в)  $3\pi/4$ . Прямой обозначено радиальное напряжение, пунктирной  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_\theta$ .

Зависимостью упругих модулей и теплофизических характеристик пренебрегаем. Дополняет систему уравнений (1, 2) уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (3)$$

### Обсуждение результатов

Принятые физико-механические характеристики сред:  
 для жидкого металла плотность  $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , теплоемкость  $900 \text{ Дж/(кг } ^\circ\text{C)}$ , скрытая удельная теплота кристаллизации  $270 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$ , коэффициент теплопроводности  $2,98 \text{ Вт/(м } ^\circ\text{C)}$   
 для твердого металла плотность  $7860 \text{ кг/м}^3$ , теплоемкость  $460 \text{ Дж/(кг } ^\circ\text{C)}$ , коэффициент теплопроводности  $29 \text{ Вт/(м } ^\circ\text{C)}$ , коэффициент линейного расширения  $11,0 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , параметры Ламе  $\lambda=121,1 \text{ ГПа}$ ,  $\mu=80,7 \text{ ГПа}$

для оболочковой формы плотность  $2000 \text{ кг/м}^3$ , теплоемкость  $840 \text{ Дж/(кг } ^\circ\text{C)}$ , коэффициент теплопроводности  $0,812 \text{ Вт/(м } ^\circ\text{C)}$ , коэффициент линейного расширения  $0,51 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , параметры Ламе  $\lambda=172,6 \text{ ГПа} \cdot 10$   $\mu=259,0 \text{ ГПа}$ .

На рис. 2 приведены напряжения на внешней поверхности керамической оболочки для разных случаев погружения в опорный наполнитель, угол  $\beta$  принимался равным  $\pi/4$ ,  $\pi/2$  и  $3\pi/4$ . Опорный наполнитель создает сжимающие напряжения на внешней поверхности формы, при этом контактное напряжение на внутренней поверхности не возрастает.

На рис. 3 продемонстрирована зависимость максимального напряжения в керамической форме от температуры прокаливания в первый временной интервал. Чем выше температура прокаливания, тем меньше максимальные напряжения зарождаются в керамической форме при кристаллизации отливки.

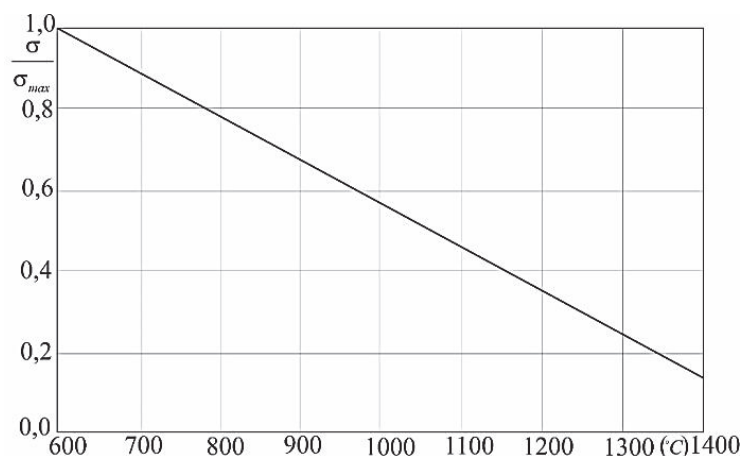


Рис. 3. Зависимость максимального напряжения в керамической форме от температуры прокаливания.

### **Заключение**

В первые секунды заливки металла в сферическую керамическую форму опорный наполнитель оказывает негативное влияние на образование отрицательных напряжений на внешней поверхности оболочки. Степень погружения в опорный наполнитель не увеличивает напряжения на свободной внешней поверхности формы. Чем выше температура прокаливания, тем меньше напряжения и вероятность растрескивания формы.

### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>»

УДК 532.595

**Ткаченко Олег Павлович**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН

**Tkachenko Oleg Pavlovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Computing Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

## **АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КРИВИЗНЫ ОСИ: ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ**

### **ANALYSIS OF CURVED PIPELINE VIBRATIONS DEPENDING ON THE CURVATURE OF THE AXIS: NUMERICAL STUDY**

**Аннотация.** Проведен асимптотический и численный анализ математической модели, описывающей колебания стенки металлической изогнутой трубы при наличии пульсирующего потока жидкости. Построенная математическая модель основана на теории упругих оболочек В.З. Власова, что позволяет исследовать дополнительные параметры колебаний по сравнению со стержневыми моделями. Разработан алгоритм преобразования математической модели к упрощенной постановке начально-краевой задачи. Проведено исследование, подтверждающее высокую точность и адекватность предложенных моделей и методов исследования.

**Abstract.** An asymptotic and numerical analysis of a mathematical model describing the vibrations of the wall of a metal curved pipe in the presence of pulsating fluid flow was conducted. The developed mathematical model is based on V.Z. Vlasov's theory of elastic shells, enabling the study of additional vibration parameters in comparison to rod models. An algorithm was devised to transform the mathematical model into a simplified formulation of the initial boundary value problem. A study was performed to validate the high accuracy and adequacy of the proposed models and research methods.

**Ключевые слова:** изогнутый трубопровод, гидроупругие колебания, математическая модель, численный анализ, верификация.

**Keywords:** curved pipeline, hydroelastic vibrations, mathematical model, numerical analysis, verification.

#### **Введение**

Здесь анализируется математическая модель колебаний изогнутого подводного трубопровода [1], основанная на теории оболочек В.З. Власова [2]. Дополнительно, в работах [3, 4] предложены математические модели НДС изогнутого трубопровода в различных теориях оболочек.

Современные методы решения задач с изломом в области разрабатываются в работе [5]. Для применения этих методов к исследованию

распространения колебаний в трубах с сильным изгибом, необходимо ослабить требования на кривизну профиля в [1]. Данная работа посвящена условиям этого обобщения задачи.

В статьях [1, 6] представлен алгоритм редукции уравнений модели до начально-краевой задачи меньшей размерности, чем исходные уравнения. В работе [6] проведено исследование уравнений колебаний трубы с потоком жидкости в нулевом приближении, где также подробно описана геометрия физической системы.

Исследуется модель трубопровода, изогнутого вдоль плоской кривой с известной кривизной  $\kappa_0(s)$ , где число

$$\varepsilon = R_0 \max |\kappa_0| \quad (1)$$

играет решающую роль в характеристиках модели.  $R_0$  – радиус трубы.

### Основная часть

Уравнения математической модели, полученные в рамках теории технических оболочек, доступны в открытом доступе в источнике [7]. Алгоритм редукции уравнений модели, применимый при  $\varepsilon \ll 1$ , разработан и описан в работах [1, 6, 7]. В указанных исследованиях вводятся криволинейные координаты  $(s\theta R)$ , система отсчета в декартовых координатах  $(xyz)$ , а также обозначения для параметров скорости, давления в жидкости и деформаций стенки трубы. Эти обозначения рассмотрены в указанных источниках и не требуют переопределения.

В условиях гидравлического удара уравнения колебаний в безразмерных компонентах выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial v_s'}{\partial \tau} + \frac{a^2}{1 + \varepsilon r f \sin \theta} \frac{\partial p'}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta'}{\partial \tau} + \frac{a^2}{\alpha r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_r'}{\partial \tau} + \frac{a^2}{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial r} = 0, \\ a^2 \frac{\partial p'}{\partial \tau} + (1 + \varepsilon r f \sin \theta)^{-1} \frac{\partial v_s'}{\partial \zeta} + (\alpha r)^{-1} \frac{\partial v_\theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r'}{\alpha \partial r} + \frac{v_r'}{\alpha r} + \\ + \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha (1 + \varepsilon r f \sin \theta)} (v_\theta' \cos \theta + v_r' \sin \theta) = 0; \\ v_r|_{R=R_0} = \frac{\partial w'}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено:  $v_s' = v_s/c_f$ ,  $v_\theta' = v_\theta/c_f$ ,  $v_r' = v_r/c_f$  – безразмерные скорости жидкости;  $\zeta = s/\ell$ ,  $r = R/R_0$ ,  $\tau = t/\omega\ell$  – безразмерные координаты и время;  $w' = w/R_0$  – радиальное перемещение стенки трубы;  $f(\zeta) = \kappa_0(\zeta) / \max |\kappa_0|$  – функция кривизны;  $\alpha = R_0/\ell \ll 1$ ,  $\ell$  – характерная длина волны,  $c_f$  – скорость звука в жидкости.

Для устранения размерностей вдоль угловой и радиальной координат в уравнениях (2) следует применить преобразования [1, 6]:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 \sin \theta + \varepsilon \mathbf{v}_2 \cos \theta + \dots; \quad p' = p_0 + \varepsilon p_1 \sin \theta + \varepsilon p_2 \cos \theta + \dots \quad (3)$$

Анализ результатов численного решения полученных уравнений представлен в источнике [7]. В методе редукции первого приближения необходимо провести уточнение, если параметр  $\varepsilon$  находится в диапазоне значений 0.25-0.5. Пусть выполнено соотношение

$$1 \pm \varepsilon^2/2 \approx 1. \quad (4)$$

Из (2)–(4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + a^2 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} &= \frac{\varepsilon^2}{2} a^2 fr \frac{\partial p_1}{\partial \zeta}; \\ a^2 \left( \frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} &= \frac{\varepsilon^2}{2} fr \frac{\partial v_{s1}}{\partial \zeta} - \frac{\varepsilon^2 f}{2\alpha} (v_{\theta 2} + v_{r1}). \end{aligned}$$

Далее в приближении  $v_0 = 0$  и с учетом (4) получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_+}{\partial \tau} + \frac{\partial I_+}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} &= -\varepsilon^2 f \frac{\partial w_1}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial I_-}{\partial \tau} - \frac{\partial I_-}{\partial \zeta} - 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} &= \varepsilon^2 f \frac{\partial w_1}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначено:  $I_+ = v_{s0} + a^2 p_0$ ,  $I_- = v_{s0} - a^2 p_0$  – инварианты Римана.

Таким образом, математическая модель распространения колебаний в слабоизогнутом трубопроводе, изначально построенная и исследованная в работах [6, 7], дополнена уравнениями (5) для учета сильного изгиба.

В работе [8] проведено исследование распространения колебаний в трубе с изгибом. Ниже представлено сравнение численных результатов, полученных по модифицированным уравнениям (5) математической модели, предложенной в работах [6, 7], с результатами из работы [8] в целях верификации модели.

Данные физической системы: два прямолинейных участка металлической цилиндрической трубы длиной  $L_1 = 12.27$  м,  $L_2 = 35.71$  м,  $h = 1.27$  мм, радиусом  $R_0 = 13$  мм, модулем упругости  $E = 117$  ГПа, заполнены жидкостью плотностью  $\rho_{f0} = 998$  кг/м<sup>3</sup>. Участки трубы соединены под прямым углом стандартными фитингами с радиусом изгиба  $\rho_0 = 20.6$  мм. Начальная скорость потока жидкости  $v_{0f} = 1.1$  м/с. При данных условиях  $\varepsilon \approx 0.6$ . В эксперименте [8] поток жидкости был отсечен от насоса с использованием быстродействующего клапана, и производилось измерение давления возле клапана. Метод численного решения проблемы с использованием разностного подхода описан в работе [7].

Экспериментальные значения давления из [8] были оцифрованы с помощью программы Plot Digitizer. Проведен численный анализ с использованием нашей модели, и полученное приближенное решение оказалось близким к экспериментальным данным.

Был проведён статистический анализ сходства результатов. Математическое ожидание относительного отклонения расчетного давления от его экспериментального значения из [8] было рассчитано на основе данных в 330 временных точках и составило  $MP = 0.152$ . Среднеквадратичное отклонение относительного отклонения оказалось равным  $\sigma_p = 0.077$ .

### **Заключение**

Представлена обобщенная математическая модель для анализа распространения колебаний в изогнутых трубах. Модель применима для сильного изгиба трубы. Результаты вычислительных экспериментов подтвердили точность математической модели и метода ее анализа.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Рукавишников, В. А. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе / В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т. 41, № 6(244). – С. 161-169. – EDN ONTIPZ.

2. Власов, В. З. Избранные труды. Т.1. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов. – Москва: Академия наук СССР, 1962. – 528 с.

3. Rukavishnikov, V. A. Approximate resolving equations of mathematical model of a curved thin-walled cylinder / V. A. Rukavishnikov, O. P. Tkachenko // Applied Mathematics and Computation. – 2022. – Vol. 422. – P. 126961. – DOI 10.1016/j.amc.2022.126961. – EDN GNFBND.

4. Rukavishnikov, V. A. Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline / V. A. Rukavishnikov, O. P. Tkachenko // Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – Vol. 39, No. 6. – P. 905-922. – DOI 10.1007/s10483-018-2338-9. – EDN YBFDOP.

5. Rukavishnikov, V. A. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity / V. A. Rukavishnikov, E. I. Rukavishnikova // Computers & Mathematics with Applications. – 2023. – Vol. 151. – P. 408-417. – DOI 10.1016/j.camwa.2023.10.021. – EDN LHJMNL.

6. Tkachenko, O. P. Asymptotic analysis of the equations of hydroelastic oscillations in thin-walled elastic pipeline / O. P. Tkachenko, A. S. Ryabokon // Materials Physics and Mechanics. – 2021. – Vol. 47, No. 5. – P. 747-766. – DOI 10.18149/MPM.4752021\_9. – EDN ZNPPNS.

7. Рукавишников, В. А. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе / В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 51-64. – EDN RXPLSZ.

8. Wiggert, D. C. The Effect of Elbow Restraint of Pressure Transients / D. C. Wiggert, R. S. Otwell, F. J. Hatfield // Journal of Fluids Engineering. – 1985. – V. 107. – P. 402-406.



УДК 539.3

**Устинов Константин Борисович**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории «Геомеханика», Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

**Ustinov Konstantin Borisovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Leading Researcher, Laboratory of Geomechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

**Гандилян Давид Ваганович**, аспирант, младший научный сотрудник лаборатории «Механика технологических процессов», Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

**Gandilyan David Vaganovich**, graduate student, junior research, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

## **О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМИРОВАНИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН**

### **ON BOUNDARY CONDITIONS IN PROBLEMS RELATED TO DEFORMATION OF THIN PLATES**

**Аннотация.** Рассмотрена задача деформирования круговой пластины сцепленной по краю с основанием под действием постоянной поперечной нагрузки. Условие сопряжения с основанием учитывается с помощью граничных условий типа обобщенной упругой заделки. Целью работы является исследование влияния нежесткости заделки на параметры упругого отклика пластины. В качестве основных уравнений используются уравнения Фепля фон Кармана. Получено полуаналитическое решение задачи с помощью разложения основных переменных в степенные ряды, а также численное решение, основанное на выборе граничных условий в нуле с последующим их уточнением. Численные результаты получены для круговой пластины из алюминия на кремниевой подложке.

**Abstract.** The problem of deformation of a circular plate connected along the edge to the base under the action of a constant transverse load is considered. The condition of mating with the base is taken into account using boundary conditions of the type of generalized elastic clamping.

The aim of the work is to estimate influence of clamping compliance. The Föppl-von Karman equations are used as the basic set.

A semi-analytical solution to the problem was obtained using the expansion of the main variables into power series, and a numerical solution based on the choice of boundary conditions at zero with their subsequent refinement.

Numerical results were obtained for a circular aluminum wafer on a silicon substrate.

**Ключевые слова:** подложка, пластина, матрица жесткости, уравнения Фепля-фон Кармана, граничные условия типа обобщенной упругой заделки

**Keywords:** substrate, plate, stiffness matrix, Föppl-von Karman equations, boundary conditions of the generalized elastic embedding type

### Введение

Расчет элементов тонких конструкций на упругом основании имеет большое значение во многих областях. В частности, при разработке микроэлектромеханических систем (МЭМС), в процессе фотолитографии, где на круглую подложку из кремния наносят тонкий слой (покрытие) фоторезистора [1-2]. Поэтому возникает необходимость в исследовании физико-механических параметров покрытия данной конструкции, представляющая собой тонкую круговую пластину, с учетом влияния подложки.

Рассмотрена задача о деформировании круговой пластины сцепленной с основанием под действием постоянной поперечной нагрузки. Целью работы является расчет параметров деформирования круговой пластины с учетом влияния подложки. Для решения задачи использовалась модель Фепля фон Кармана в рамках нелинейной теории упругости, а в качестве граничных условий используются граничные условия типа обобщенной упругой заделки, которое учитывает свойства подложки [3-5].

### Постановка задачи

Рассматриваемая область представляет собой в исходном состоянии круговую пластину радиуса  $R$  и толщиной  $h$ . Для решения задачи используем цилиндрическую систему координат (рисунок 1). При отслоении на пластину действует поперечная нагрузка с постоянной интенсивностью  $q$ .

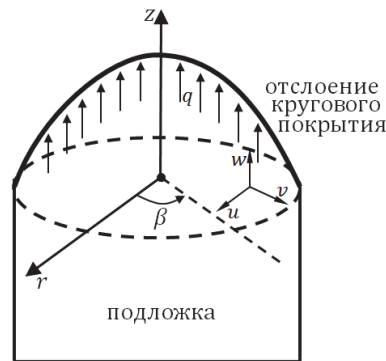


Рисунок 1 – Исходная конфигурация

В качестве модели используем модель Фепля-фон Кармана, основные уравнения которой представимы в виде [6-8]:

$$\begin{aligned}
 D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] &= \frac{qr}{2} + T_r \frac{dw}{dr}, \\
 \frac{d}{dr} [rT_r] - T_\beta &= 0, \\
 r \frac{d}{dr} [T_r + T_\beta] + \frac{hE}{2} \left[ \frac{dw}{dr} \right]^2 &= 0.
 \end{aligned}
 \quad D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \quad (1)$$

где  $T_r, T_\beta$ - компоненты сжимающих усилий,  $E, \nu$ -модуль Юнга и коэффициент Пуассона для пластины. Неизвестными величинами из системы уравнений (1) являются  $T_r, T_\beta, w$ . Влияние подложки учитывается с помощью граничных условий типа обобщенной упругой заделки [3-5]:

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(R) \\ -hw'(R) \\ w(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ h^{-1}M_r \\ Q \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \quad (2)$$

где  $M_r$ - изгибающий момент,  $Q$ - поперечное усилие,  $a_{ij}$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) — матрица коэффициентов упругой заделки.

В силу симметрии и равномерности нагрузок считаем, что усилие  $T_r$ , а также нормальная компонента смещений  $w$  являются симметричными функциями, поэтому их можно представить в виде степенных (четной степени) рядов.

$$T_r = \sum_{i=0}^{+\infty} A_{2i} r^{2i}, \quad w = \sum_{i=0}^{+\infty} B_{2i} r^{2i}, \quad (3)$$

где неизвестные коэффициенты  $A_j, B_j$  вычисляются с помощью уравнений (1) и граничных условий (2). Для расчетов принимались значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона равными  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.35$ . В качестве коэффициентов упругой заделки принимались значения [7]:  $a_{11} = 10$ ,  $a_{12} = 1.7$ ,  $a_{22} = 12$ ,  $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ . Радиус пластины и толщину считаем:  $R = 100, h = 1$ , значение интенсивности поперечной нагрузки:  $q = 7 \cdot 10^5$ .

Недостатком данного подхода является требование учета все большего числа слагаемых при увеличении прогиба, а следовательно, больше вычислительной мощности и времени; при числе членов ряда  $n > 50$  скорость вычислений значительно замедляется.

При расчетах был применен также следующий численный алгоритм: сначала задача решалась в рядах (при максимально возможном  $n$ ), затем брались условия при  $r = 0$ , и решалась система дифференциальных уравнений (1) с известными начальными условиями. Затем, граничные условия изменялись, и осуществлялся поиск их значений, удовлетворяющих граничным условиям задачи.

### **Заключение**

Рассмотрена задача о деформировании отслоения круговой пластины, соединенная с подложкой, под действием равномерной поперечной нагрузкой. Для учета влияния подложки используются граничные условия типа обобщенной упругой заделки. Решение задачи в рядах получено в приближении модели Фепля фон Кармана. Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании. Проведено сравнение величин прогиба в центре пластины, продольного усилия и изгибающего момента на краю пластины, с учетом и без граничных условий упругой

заделки. Показано, что при поперечной нагрузке, соответствующей прогибам более 5% от радиуса пластины, разница в значениях изгибающего момента на ее краю, посчитанная с учетом и без учета податливости заделки, превышает 10 %, что показывает необходимость учета податливости подложки.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 23-19-00866 (для КБУ).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Лапшинов Б. А. Технология литографических процессов. / Б. А. Лапшинов // Московский государственный институт электроники и математики. М. – 2011. – 95 с.
2. Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Editor Jose Maria De Teresa. Bristol, England: IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
3. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // International Journal of Fracture. 2000. Vol. 104, Issue 2. Pp. 169–179. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>.
4. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // International Journal of Fracture. 2002. Vol. 113. Pp. 39–55. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>.
5. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50, Issue 1. Pp. 62–80. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
7. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2024. Т. 30, № 1. С. 50–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>.
8. Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска. От цилиндра к ультратонкой мембране // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–105. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. EDN: <https://www.elibrary.ru/blerei>.

УДК 669.15

**Худякова Вилена Александровна**, аспирант, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Khudyakova Vilena Aleksandrovna**, graduate student, Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Жилин Сергей Геннадьевич**, канд. техн. наук, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Zhilin Sergey Gennadievich**, candidate of technical sciences, Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Предин Валерий Викторович**, канд. техн. наук, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук

**Predein Valery Viktorovich**, candidate of technical sciences, Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**Богданова Нина Анатольевна**, младший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук.

**Bogdanova Nina Anatolyevna** junior research fellow, Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences

**ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРЕВА ТЕРМИТНОЙ ШИХТЫ И РЕАКТОРА НА СВОЙСТВА ПОЛУЧАЕМОГО ЖЕЛЕЗОАЛЮМИНИЕВОГО СПЛАВА МЕТОДОМ АЛЮМОТЕРМИИ**  
**INFLUENCE OF PRE-HEATING THERMITE BARCH AND REACTOR ON THE PROPERTIES OF THE OBTAINED IRON-ALUMINUM ALLOY BY ALUMONHERMY METHOD**

**Аннотация.** Интерметаллидные сплавы на основе Fe-Al нашли свое применение в машиностроении, металлургии, электротехнике и др. ввиду высокой стойкости к коррозии и износу при повышенных температурах. Получение железоалюминиевых сплавов методом алюмотермии с предварительным нагревом шихты позволяет добиться более эффективного разделения металла и шлака и определяет особенности структуры и свойств слитка.

**Abstract.** Intermetallic alloys based on Fe-Al have found their use in mechanical engineering, metallurgy, electrical engineering, etc. due to their high resistance to corrosion and wear at elevated temperatures. The production of iron-aluminum alloys by aluminothermy with preheating of the charge makes it possible to achieve more efficient separation of metal and slag and determines the features of the structure and properties of the ingot.

**Ключевые слова:** термитная шихта, предварительный нагрев, алюминиды железа, графитовый реактор, интерметаллидный сплав.

**Keywords:** thermite charge, preheating, iron aluminides, graphite reactor, intermetallic alloy.

### **Основная часть**

Сплавы содержащие интерметаллидные соединения Fe-Al, благодаря уникальным свойствам позволяют использовать изделия или покрытия, полученные на их основе, в условиях агрессивных сред. Такие сплавы обладают меньшей плотностью в сравнении с железом и более высокой прочностью в сравнении с алюминием [1-2]. Традиционные процессы получения таких интерметаллидных сплавов представляются многоэтапными и энергозатратными. Наиболее перспективным видится метод экзотермического восстановления железа из его оксидов посредством алюмотермии, который позволяет снизить количество технологических операций и энергетических ресурсов. С увеличением содержания алюминия в термитной шихте скорость реакции и температура образующегося расплава снижается [3-5]. Предполагается, что введение дополнительного тепла посредством предварительного нагрева термитной шихты позволит увеличить эффективность процесса в аспекте формирования слитков с более широким диапазоном содержания алюминия.

Целью работы является изучение физико-механических свойств интерметаллидных сплавов полученных алюмотермическим переплавом предварительно нагреваемой термитной шихты.

В рамках поставленной цели решались задачи определения влияния предварительного нагрева термитной шихты с различным содержанием алюминия в диапазоне 25-65 % по массе на температуру струи сплава при его разливе, массовый выход металлической фазы и микротвердость HV.

В результате проведенных экспериментов выявлено, что нагрев термитной шихты до 400 °С увеличивает скорость ее горения в исследуемом интервале содержания алюминия 25-65 % по массе в сравнении с термитной реакцией, осуществляемой без предварительного нагрева, что, в свою очередь, на 5-10 % увеличивает температуру струи образующегося интерметаллидного сплава.

При высоком содержании активного алюминия в шихте (около 50 %) предварительный нагрев смеси до 400 °С, в ряде случаев, обеспечивает возможности достижения значений выхода металлической фазы до 70 %.

Наиболее высокие показания микротвердости, принадлежащие диапазону значений 850-950 HV, наблюдаются при содержании алюминия в экспериментальных сплавах от 55-58 % по массе.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. M. Wang, Y. Zhou Review on FeAl intermetallic compound coating by thermal spraying // Hot Working Technol., 47 (6) (2018), pp. 45-48;

2. Xinmin Li, Runzhi Zhang, Zibo Liu, Yifan Pu Molecular dynamics study on friction of the iron-aluminum alloy // Materialstoday communications. Volume 33, December 2022, 104402;

3. Батаев, А. А. Композиционные материалы: строение, получение, применение / А. А. Батаев, В. А. Батаев. - М., 2006. - 400 с.;

4. Recent advances in B2 iron aluminide alloys: deformation, fracture and alloy design / Liu C. T., George E. P., Maziasz P. J., Schneibel J. H. // Mater. Sci. Eng. A258, - 1998. - p. 84-98;

5. Ji Hoon Kima, Myung Hoon Choa, Hong-Min Shimb, Soo Hyung Kima,с, Fabrication and thermal behavior of Al/Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> energetic composites for effective interfacial bonding between dissimilar metallic substrates // Journal of Industrial and Engineering Chemistry 78 (2019) 84–89;

УДК 519.157, 519.115.2

**Цициашвили Гурами Шалвович**, главный научный сотрудник институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, руководитель научно-исследовательской группы вероятностных методов и системного анализа ИПМ ДВО РАН, доктор физ.-мат. наук, Владивосток

**Tsitsiashvili Gurami Shalvovich**, main researcher, IAM FEB RAS, head of the research group of probabilistic methods and system analysis of the Institute of Problems of Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Vladivostok

## **СПИСКИ МЕТОК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ**

## **LISTS OF LABELS WHEN DETERMINING SHORTEST PATHS IN A GRAPH**

**Аннотация.** В настоящей работе решена задача определения всех кратчайших путей в взвешенном, невзвешенном и планарном графах. Эта задача решается путем обобщения известных алгоритмов Дейкстра и волнового алгоритма с помощью введения списков меток. В списке меток при каждой вершине/грани графа первая метка определяет длину кратчайшего пути. Вторая метка задается множеством вершин, из которых существуют прямые связи (ребра/границы) в рассматриваемую вершину/грань. Для взвешенного графа длина пути определяется как сумма длин его ребер. Для планарного графа длина пути - это число границ между гранями, которые пересекает кратчайший путь во внешнюю грань. Предлагаемые алгоритмы определяют только самые необходимые характеристики графа, по которым можно восстановить кратчайшие пути.

**Abstract.** In this paper, we solve the problem of determining all shortest paths in weighted, unweighted and planar graphs. This problem is solving by generalizing the well-known Dijkstra and wave algorithms by introducing lists of labels. In the list of labels for each vertex/face of the graph, the first label determines the length of the shortest path. The second label is defining by a set of vertices from which there are direct connections (edges/boundaries) to the vertex/face. For a weighted graph, the path length is defining as the sum of the lengths of its edges. For a planar graph, the path length is the number of boundaries between edges that the shortest path to the outer edge crosses. The proposed algorithms determine only the most necessary characteristics of the graph from which the shortest paths can be reconstructing.

**Ключевые слова:** взвешенный граф, планарный граф, грань, кратчайший путь, соседи вершины.

**Keywords:** weighted graph, planar graph, edge, shortest path, neighbors of a vertex.

### **Введение**

В настоящей работе рассматривается задача перечисления всех ребер кратчайших путей из стартовой вершины в другие вершины ориентированного графа (орграфа) или из грани планарного графа до внешней грани. Эта задача решается для трех видов графов: взвешенного, невзвешенного и планарного. По мнению специалистов в областях транспорта, картографии и биотехнологии в настоящий момент она является актуальной.

Для взвешенного графа длина пути определяется как сумма длин его ребер. Для невзвешенного графа длина пути - это число ребер в нем. Для планарного графа длина пути - это число границ между гранями, которые пересекает путь из грани во внешнюю грань. Задача определения минимальной длины от стартовой вершины до других вершин графа во взвешенном орграфе решается на основе алгоритма Дейкстра [3] или на основе алгоритма Беллмана [4, 5]. Аналогичная задача, но в невзвешенном графе решается на основе волнового алгоритма [6]. А задача определения длины кратчайшего пути от каждой грани до внешней грани в планарном графе решается с помощью понятия множества соседей - окружения грани планарного графа другими гранями.

В настоящей работе рассматриваемые алгоритмы дополнены понятием списка меток. Понятие списка меток берется из математического программирования (см., например, [7, 8]). Список меток состоит первой метки, определяющей длину кратчайшего пути до вершины из стартовой вершины или длину кратчайшего пути из грани во внешнюю грань. Для взвешенных и невзвешенных орграфов вторая метка - это перечень вершин, из которых направляются ребра кратчайших путей в рассматриваемую



вершину. Тем самым по вторым меткам у вершины взвешенного или невзвешенного орграфа можно перечислить все ребра кратчайших путей в эту вершину графа. Для планарного графа вторая метка - это перечень граней, которые в кратчайших путях до внешней грани являются соседними с рассматриваемой гранью. Таким образом, по спискам меток можно определить все кратчайшие пути из стартовой вершины в остальные вершины взвешенного или невзвешенного орграфа. Аналогично для планарного графа по спискам меток у граней графа можно перечислить все кратчайшие пути во внешнюю грань.

### Основная часть

В алгоритме Дейкстра решается задача определения длины кратчайших путей из выделенной вершины взвешенного (снабженного положительной длиной ребер) графа  $G$ . Однако нет алгоритма перечисления всех ребер, входящих в кратчайшие пути. В этом пункте работы строится модификация алгоритма Дейкстра, позволяющая перечислить все ребра кратчайших путей с помощью списков дополнительных меток. Алгоритм Дейкстра строится для ориентированного взвешенного графа (без кратных ребер)  $G$  с множеством вершин  $V$ , состоящим из  $n$  вершин, множеством ребер  $E$  и совокупностью весов ребер  $\{s(e) > 0, e \in E\}$ . В графе  $G$  имеется стартовая вершина  $0$  из которой ищутся все кратчайшие пути в остальные вершины этого графа.

В предлагаемой модификации алгоритма Дейкстра каждой вершине  $v \in V$  сопоставляется список из первой и второй меток. По окончании работы алгоритма первая метка  $R(v)$  равна длине кратчайшего пути из вершины  $0$  в вершину  $v$ . Вторая метка  $S(v)$  - это совокупность таких соседей  $u$  вершины  $v$  в графе  $G$ , чтобы все последние ребра  $(u, v)$  кратчайших путей из  $0$  в вершину  $v$  образовывали множество вершин  $S(v)$ . В списке меток вершины  $v \in V$  первая метка отделяется от второй метки значком.

Определение первой и второй меток вершин графа  $G$  производится рекуррентной процедурой. Вначале задают  $R(0) = 0, R(v) = \infty, v \in V, v \neq 0, S(v) = \emptyset, v \in V, G_0 = G, V_0 = V, E_0 = E$ . Далее для  $0 \leq j \leq n$  выбирают вершину  $k_j$  из условия  $R(k_j) = \min_{v \in V_j} R(v)$ , переопределяют метки  $R(v), S(v)$  и строят

граф  $G_{j+1}$  из следующих условий.

- (A) Если  $R(k_j) + s(k_j, v) < R(v)$ , то
- (B) Если  $R(k_j) + s(k_j, v) = R(v)$ , то  $R(v) := R(v), S(v) := S(v) \cup k_j$ .
- (C) Если  $R(k_j) + s(k_j, v) > R(v)$ , то  $R(v) := R(v), S(v) := S(v)$ .

После такого переопределения меток вершину  $k_j$  полагают посещенной и строят граф  $G_{j+1}$  удалением из множества вершин  $V_j$  графа  $G_j$  вершины  $k_j$  и из множества ребер  $E_j$  инцидентных  $k_j$  ей в  $E_j$  ребер. В результате строится граф  $G_{j+1}$  с множеством вершин  $V_{j+1}$  и множеством ребер  $E_{j+1}$ . Для первой метки эта рекуррентная процедура совпадает с алгоритмом Дейкстра [3]. А для второй метки с помощью матиндукции несложно доказать, для каждого  $j$  все последние ребра  $(u, v)$  кратчайших путей из 0 в вершину  $v$  образуют множество вершин  $S(k_j)$ . Тем самым представленная модификация алгоритма Дейкстра позволяет с помощью вторых меток вершин определить все кратчайшие пути в графе  $G$  из стартовой вершины 0 в остальные вершины графа.

На рисунке 1 приведен пример взвешенного неориентированного графа (частный случай орграфа с одинаковыми весами разнонаправленных ребер) с номерами вершин в кругах. В таблице 1 даны списки меток для вершин этого графа.

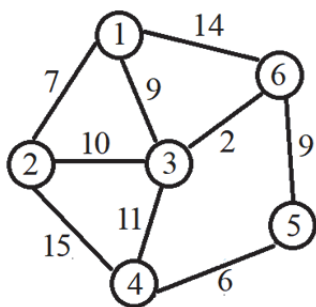


Рисунок 1. Пример взвешенного графа.

Таблица 1. Список вершин и меток

Вершины	1	2	3	4	5	6
Списки меток	0	7; 1	9; 1	20; 3	20; 6	11; 3

### Заключение

В настоящей работе акцент сделан не на определении длин кратчайших путей в графе, а на определении самих кратчайших путей. Собственно говоря, в работе не дается алгоритм перечисления всех кратчайших путей. Списки меток, введенные в работе позволяют только определять кратчайшие пути из некоторой вершины в стартовую вершину или из некоторой грани во внешнюю грань. Однако предлагаемая техника проставления списков меток, особенно второй метки, дает возможность следовать известным алгоритмам определения длин кратчайших путей: алгоритму Дейкстра, волновому алгоритму и др. Это позволяет путем

введения второй метки рекуррентно определять ее изменение при переходе к новой вершине/границе графа. Особенностью предлагаемых алгоритмов является введение в них второй метки списка, которая в то же время является пустым или непустым множеством вершин графа. В настоящей работе акцент не делается на оценку вычислительной сложности алгоритма и на оценку объема необходимой для реализации памяти. Поэтому данный алгоритм может быть использован для относительно небольших взвешенных графов. Следует отметить, что требования единственности вершин во второй метке графа, с одной стороны, позволяет уменьшить вычислительную сложность представленных алгоритмов и требуемый объем памяти. С другой стороны, наличие нескольких вершин во второй метке дает возможность увеличить надежность решения о кратчайших путях в графе. Причем в различных приложениях (транспортные системы, картография, биотехнология) эти условия по-разному влияют на удобства приведенных алгоритмов.

#### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Цициашвили Г. Ш., Бочарников В. Н., Краснопеев С. М. Метод устранения мешающего параметра в статистике пуассоновского потока точек // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023, т. 62. № 1. С. 101–106.
2. Tsitsiashvili G. Sh., Bulgakov V. P. New Applied Problems in the Theory of Acyclic Digraphs // Mathematics. 2022, v. 10(1). 45.
3. Dijkstra E. W. A note on two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik. 1959, v. 1. No 1. P. 269–271.
4. Bellman R. On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. 1956, v. 16. No 1. P. 87–90.
5. Ford L. R. Jr., Fulkerson D. R. Flows in Networks. Princeton: Princeton University Press, 1962. 212 p.
6. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2006. 1296 с.
7. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
8. Головешкин А. В., Михалкович С. С. Устойчивая алгоритмическая привязка к произвольному участку кода программы // Программные системы: теория и приложения. 2022, т. 13. № 1(52). С. 3–33.

УДК 004.021

**Черкасов Михаил Дмитриевич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Cherkasov Michail Dmitrievich**, student, Far Eastern Federal University

**Терновой Никита Константинович**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Ternovoi Nikita Konstantinovich**, student, Far Eastern Federal University

**Лобанова Элиза Александровна**, студент, Дальневосточный федеральный университет, лаборант, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Lobanova Eliza Alexandrovna**, student, Far Eastern Federal University, laboratory assistant, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

**Анисич Александр Игоревич**, студент, Дальневосточный федеральный университет

**Anisich Alexandr Igorevich**, student, Far Eastern Federal University

**Шевченко Юрий Андреевич**, доцент департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий, Дальневосточный федеральный университет, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной информатики, Институт прикладной математики ДВО РАН

**Shevchenko Yuriy**, Associate Professor, Department of Theoretical Physics and Intelligent Technologies, Far Eastern Federal University, Senior Researcher at the Laboratory of Computational Informatics, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОТЖИГА В МОДЕЛИ ИЗИНГА**

## **THE APPLYING OF PARALLEL TEMPERING IN THE ISING MODEL**

**Аннотация.** В модели Изинга [1] для нахождения основного состояния с минимальной энергией необходимо непосредственно перебрать  $2^N$  состояний спиновой системы, что затрудняет поиск основных состояний при больших  $N$ . Также при использовании классических алгоритмов при низких температурах у теплоёмкости возникает погрешность. Наша цель: для оптимального решения проблемы разработать алгоритм параллельного отжига [2]. Чтобы он хорошо работал, нам надо добиться вероятности обмена между репликами в 20% [3]. Он отлично подойдёт для вычисления основного состояния систем спиновых стёкол. Результаты представлены с учётом ручного подбора температур в параллельном отжиге. Программа написана на языке с++ с подходом ООП, что позволяет интегрировать программу в другие проекты.

**Abstract.** In the Ising Model [1] for searching ground state with the minimal energy, necessary go through  $2^N$  the states directly, that complicating to find ground state in big spin systems. Also, when using classical algorithms at low temperatures, the heat capacity has an inaccuracy. Our goal: to develop a parallel tempering algorithm [2] for the optimal solution of the problem. In order for it to

work well, we need to achieve a 20% chance of an exchange between replicas [3]. It will be perfect for computing ground state spin systems of spin glasses. At the moment, parallel tempering was developed, but considering the manual selection temperatures in parallel tempering. The program was written on c++ language with OOP approach, which allows to integrate program into other projects.

**Ключевые слова:** модель Изинга, параллельный отжиг, разработка

**Keywords:** Ising model, parallel tempering, development

### **Введение**

Модель Изинга [1] – математическая модель статистической физики, где спины могут принимать два состояния: +1 и -1. Всего количество состояний системы из  $N$  спинов может быть  $2^N$ . В нашей модели используется квадратная спиновая система  $L \times L$  размера, где  $L$  – линейный размер системы. Наша задача из всех состояний спиновых систем найти систему с минимальной энергией (начальное состояние системы), а также посчитать характеристики системы (намагниченность, теплоёмкость, энергия и т.д.). Если подойти классическим методом, то чтобы наши задачи были выполнены, нам надо перебрать непосредственно  $2^N$  состояний систем, что экспоненциально возрастает вычислительная мощность при увеличении размера системы. В связи с этим, мы разработали алгоритм параллельного отжига. Главное его преимущество заключается в том, что он с высокой вероятностью находит начальное состояние системы. Данный алгоритм актуален тем, что он может помочь в нахождении основного состояния и получить более корректные характеристики системы. Главная часть программы – алгоритм температурной балансировки находится в стадии доработки и ведутся работы по исправности данного алгоритма. Далее планируется интегрировать данную программу в модель спинового стекла для нахождения основного состояния и характеристик спиновой системы.

### **Основная часть**

В модели Изинга энергия взаимодействия спина с соседними спинами вычисляется по следующей формуле:

$$E = -J \sum_{i,j} S_i S_j, \quad (1)$$

где  $J$  – константа обменного взаимодействия ( $J=1$  для ферромагнитной модели),  $S_i, S_j$  - знаки спинов [-1, +1]. Суть алгоритма параллельного отжига в следующем [2]: задаётся спиновая система со случайным состоянием определённой температуры, далее создаётся  $N-1$  копий исходной системы и отдаляются по температурам от исходного состояния так, чтобы они были равноудалены друг относительно друга, тем самым повышая температуры реплик. После, для каждой системы с соответствующими температурами срабатывает алгоритм Метрополиса. После выполнения алгоритма Метрополиса он выдаёт энергии каждой системы, которые идут в алгоритм аппроксимации (балансировки).

Суть аппроксимационного (балансировочного) алгоритма заключается в том, чтобы расположить температуры так, чтобы вероятность обмена между репликами была в 20%, т.к. эта вероятность даёт наиболее быструю сходимость к основному состоянию и более нам подходящая [3]. Это работает следующим образом: полученные энергии и соответствующие им температуры мы копируем в ещё один массив (резервный). Он нам нужен для получения прямых по 2-м точкам и поэтому будет неизменяемым, а в исходный массив мы будем записывать полученные температуры и энергии. Далее выбираем 2 первые соседние точки по резервному температурному массиву. По ним мы будем двигать 2-ую точку из исходного массива с шагом  $\Delta T - const$  по следующей формуле:

$$E'_2 = \left( \frac{T_2 + \Delta T - T_1}{T_2 - T_1} \right) (E_2 - E_1) + E_1, \quad (2)$$

где  $E'_2$  - энергия 2-ой реплики исходного массива,  $E_2$  и  $E_1$  - энергии 2-ой и 1-ой реплики резервного массива (Важно, что  $T_2 + \Delta T = T_1$ ).

Но изначально мы проверяем вероятность обмена между репликами по формуле:

$$p = e^{\frac{E'_2 - E_1}{T_2 + \Delta T - T_1}}. \quad (3)$$

Если вероятность обмена больше 20%, то мы отдаляем вторую точку, если меньше, то приближаем, и так определённое количество шагов, пока вероятность обмена не станет приблизительно равной 20%. После отработки данного алгоритма, мы записываем полученную энергию и температуру в исходный массив и выбираем следующую пару, по которой мы будем строить прямую и выполнять алгоритм. То есть из резервного массива новой первой температурой будет предыдущая вторая температура, а новая вторая температура будет следующей, после предыдущей второй температуры. И таким образом мы перезаписываем в исходный массив новые температуры и алгоритм их возвращает в качестве выходного значения.

После аппроксимационного (балансировочного) алгоритма у нас снова выполняется алгоритм Метрополиса, но уже с новыми температурами, и далее снова срабатывает алгоритм аппроксимации (балансировки). Всего таких циклических подходов должно быть  $M$  шагов (шагов Монте-Карло). Это и есть параллельный отжиг.

Далее, исходя из всего параллельного отжига, мы усредняем энергию и считаем теплоёмкость по формуле:

$$C(T) = \frac{\langle E^2 \rangle_i - \langle E \rangle_i^2}{kT_i N}, \quad (4)$$

где  $k = 1$  - постоянная Больцмана,  $N$  - размер спиновой системы

Чтобы убедиться в корректной работоспособности алгоритма параллельного отжига, ниже приведены результаты его работы, но с учётом ручного подбора температур, т.е. без алгоритма балансировки температур.

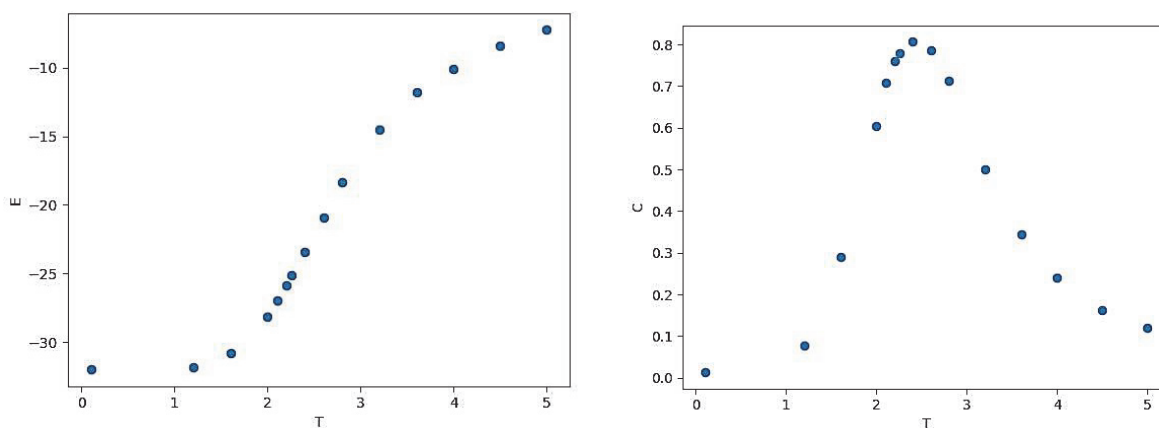


Рис. 1. Зависимость энергии от температуры слева, и теплоёмкости от температуры – справа.

Наша программа реализована на языке программирования с++ с использованием ООП. Использование ООП позволит интегрировать программу в проекты как класс и позволит упростить вычисления.

#### **Заключение**

Разработка параллельного отжига играет важную роль в модели Изинга. Параллельный отжиг может помочь как в нахождении основного состояния, так и в получении более точных результатов для теплоёмкости при низких температурах. На данный момент идёт отладка алгоритма балансировки температур. При доведении алгоритма балансировки до рабочего состояния, он будет интегрирован в модель спиновых стёкол.

#### **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10069, <https://rscf.ru/project/24-71-10069/>.

#### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Janke W. Monte Carlo methods in classical statistical physics //Computational many-particle physics. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008. – С. 79-140.
2. Patriksson A., van der Spoel D. A temperature predictor for parallel tempering simulations //Physical Chemistry Chemical Physics. – 2008. – Т. 10. – №. 15. – С. 2073-2077.
3. Earl D. J., Deem M. W. Parallel tempering: Theory, applications, and new perspectives //Physical Chemistry Chemical Physics. – 2005. – Т. 7. – №. 23. – С. 3910-3916.

УДК 621.74.045

**Чернышова Дарья Витальевна**, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Chernyshova Daria Vitalievna**, postgraduate student, Komsomolsk-on-Amur State University

**Евстигнеева Анна Алексеевна**, магистр, Комсомольский-на-Амуре государственный университет

**Evstigneeva Anna Alekseevna**, magister, Komsomolsk-on-Amur State University

**Дмитриев Эдуард Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета

**Dmitriev Eduard Anatolyevich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rector of Komsomolsk-on-Amur State University

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ В НЕЙ ШАРООБРАЗНОЙ СТАЛЬНОЙ ОТЛИВКИ<sup>2</sup>**

### **FEATURES OF MODELING THE STRESS-STRAIN STATE IN A SPHERICAL CERAMIC SHELL MOLD DURING SOLIDIFICATION OF A STEEL CASTING IN IT**

**Аннотация.** Формулируется задача по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в оболочковой форме (ОФ), заформованной в опорный наполнитель (ОН), при охлаждении в ней стальной отливки. Численный метод решения задачи включает в себя два этапа: 1) задача по решению уравнения теплопроводности с учетом начальных и граничных условий; 2) задача по определению НДС в ОФ с учетом найденного температурного поля. Результатами решения являются величины напряжений, перемещений в среднем по граням каждого элемента и средняя температура в элементе.

**Abstract.** The problem of determining the stress-strain state (SSS) in a shell mold (SM) molded into a support filler (SF) is formulated when the casting is cooled in it. The numerical method of solving the problem includes two stages: 1) the task of solving the equation of thermal conductivity, taking into account the initial and boundary conditions; 2) the task of determining the SSS in the SM, taking into account the found temperature field. The results of the solution are the values of stresses, average changes along the edges of each element and the average temperature in the element.

**Ключевые слова:** литье по выплавляемым моделям, оболочковая форма, напряженное состояние, моделирование, трещинообразование

---

<sup>2</sup> В работе принимали участие д.т.н. профессор Одинокоев В.И., д.т.н. профессор Евстигнеев А.И.



**Keywords:** investment casting, shell mold, stressed state, modeling, fracturing

### Введение

В работе строится математическая модель получения шарообразной стальной отливки в керамической ОФ [1].

### Инженерная постановка задачи

Жидкая сталь разливается в сферическую ОФ, в которой ОН кристаллизуется путем отвода тепла от стенок ОФ через ОН. Сферическая ОФ может быть монолитной или состоять из ряда слоев. При охлаждении стали в ОФ, вследствие большого температурного градиента, в стенке ОФ возникают температурные напряжения, которые при определенных внешних воздействиях могут привести к образованию трещин в ней или ее разрушению, а значит и к браку получаемой стальной отливки. Таким образом, задачей настоящего теоретического исследования является определение степени влияния внешних факторов, при которых сферическая ОФ не будет разрушаться от возникающих в ней температурных напряжений.

### Математическая постановка задачи

Рассматривается осесимметричное тело вращения. Деформируемый материал считается изотропным, движение - медленным.

Имеем четырехкомпонентную систему: область I – жидкий металл (ЖМ); область II – твердый металл; область III – ОФ, IV – ОН (рис. 1). Деформируемой средой является затвердевший металл (область II) и форма (область III) – изотропные материалы.

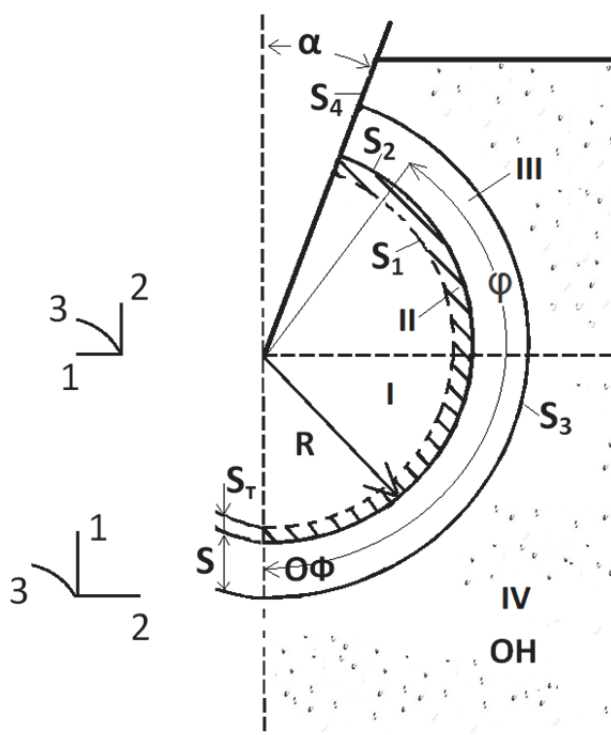


Рисунок 1 – Расчетная схема шарообразной ОФ, заформованной ОН и залитой жидким металлом с учетом осевой симметрии

Процесс нестационарный. Используя теорию упругости и Эйлери систему координат, запишем для каждой из областей систему уравнений:

– для области I:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P; \quad P = \gamma h; \\ \theta = \alpha_1 \Delta \theta;\end{aligned}\quad (1)$$

– для областей II, III:

$$\left\{ \begin{aligned}\sigma_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \\ \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii}; \\ \varepsilon_{ii} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(U_{ij} + U_{ji}); \\ C_p \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad} \theta);\end{aligned}\right.\quad (2)$$

здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\sigma$  – гидростатическое напряжение,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $h$  – высота столба жидкого металла;  $k_p = \frac{1-2\mu}{E}$  – коэффициент объемного сжатия;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $G_p$  – модуль сдвига в среде области  $p$  (II, III);  $\alpha_p$  – коэффициент линейного расширения;  $a_1$  – коэффициент температуропроводности в области I;  $\tau$  – время;  $\theta$  – температура;  $C_p$  – удельная теплоемкость в области  $p$ ;  $\gamma$  – плотность;  $\theta_p^*$  – начальная температура в области  $p$ ;  $\lambda = \lambda(\theta)$  – теплопроводность;

$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ ;  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ; используется суммирование по повторяющимся индексам.

Начальные условия задачи:  
 $\Delta|_{\tau=0} = 0$  – отсутствие твердой фазы металла;  
 $\theta_I^*|_{\tau=0} = 0 = \theta_M^*$  – температура разливаемого жидкого металла;  
 $\theta_{III}^*|_{\tau=0} = \theta^*$  – начальная температура формы.

Граничные условия задачи (рис. 1, б):

- на оси симметрии:  $U_2 = 0$ ;  $\sigma_{21} = 0$ ;  $q_n = 0$ ;
- на поверхностях  $S_1, S_3, S_4$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}|_{s_1} = -P; \sigma_{12}|_{s_1} = 0; U_1|_{s_3} = 0, \sigma_{22}|_{s_4} = 0; \\ \sigma_{12}|_{s_3} = -\psi \frac{U_{ck}}{U^*} \text{con}(n_1 x_1); \theta|_{s_3} = \theta^*;\end{aligned}\quad (3)$$

здесь  $U_{ck}$  – скольжение материала формы относительно песка,  $U^*$  – нормирующее перемещение;  $\psi$  – параметр, характеризующий условия трения между формой и опорным наполнителем.

Для решения системы (2) использовался численный метод [3] и авторское программное обеспечение [4, 5]. Результаты вычислительных расчетов распределения температуры, напряжений и скоростей перемещений в деформируемой ОФ приведены в [2].

При осевой симметрии имеем  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0; \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0; U_3 = 0$ .

В соответствии с работой [3], уравнения (2) и значения  $\varepsilon_{ii}$  с учетом осевой симметрии запишутся:

$$\begin{aligned} S_{13}\Delta S_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + S_{12}S_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + 0,5\Delta\sigma_{11}S_{12}S_{13} + 0,5\Delta\sigma_{12}S_{21}S_{23} + (S_{21}\Delta S_{23} + 2S_{23}\Delta S_{21})\sigma_{21} &= 0; \\ S_{21}\Delta S_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + S_{23}S_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 0,5\Delta\sigma_{22}S_{23}S_{21} + 0,5\Delta\sigma_{21}S_{12}S_{13} + (S_{12}\Delta S_{13} + 2S_{13}\Delta S_{12})\sigma_{21} &= 0; \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= 2G_p(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p(\theta - \theta_p^*).$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{2\Delta U_1}{S_{21}} + \frac{2U_2}{S_{21}} \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}; \varepsilon_{22} = \frac{2\Delta U_2}{S_{32}} + \frac{2U_1}{S_{12}} \frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \varepsilon_{33} = \frac{2U_1}{S_{13}} \frac{\Delta S_{13}}{S_{31}} + \frac{2U_2}{S_{23}} \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}}. \quad (5)$$

здесь  $U_i = U_i^1 + U_i^2, \Delta U_i = U_i^2 - U_i^1, (i = 1, 2); S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2; \Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$ .

Принятая символика описана в работе [1].

Для решения уравнения теплопроводности использовался численный метод [1, 3]. В соответствии с рассматриваемым методом для каждого внутреннего  $k$ -го элемента записывается из теплового баланса система теплопроводности в разностном виде с учетом осевой симметрии и строится итерационная процедура, которая с учетом того, что тепловой поток по  $x_3$  равен нулю, представляется итерационной формулой:

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21}}, \\ t_{12} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \frac{\Delta\tau}{C_k\gamma_k V_k}; t_{11} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^1 \frac{\Delta\tau}{C_k\gamma_k V_k}; \\ t_{22} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \frac{\Delta\tau}{C_k\gamma_k V_k}; t_{21} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^-)}{S_{12} + S_{12}^-} F_2^1 \frac{\Delta\tau}{C_k\gamma_k V_k}; \\ F_i^j &= S_{ik}^j S_{ip}^j; i \neq k \neq p; i, k, p = 1, 2, 3; j = 1, 2; V_k = \frac{S_{13}S_{12}(S_{21} + S_{31})}{16}; \end{aligned} \quad (6)$$

здесь  $\theta_k^*$  – средняя температура в  $k$ -ом элементе в начале временного шага  $\Delta\tau$ ;  $\lambda_k, \theta_k, C_k, \gamma_k$  – средние теплопроводность, температура, теплоемкость и плотность в  $k$ -ом элементе в конце временного шага  $\Delta\tau$ ;  $\lambda_i^-, \theta_i^-$  и  $\lambda_i^+, \theta_i^+$  ( $i = 1, 2$ ) – теплопроводность и температура в элементе, следующим за элементом  $k$  по координате  $x_i$  в отрицательном и положительном направлениях  $x_i$ ;  $S_{21}^- = S_{21}^1 - S_{21}^2; S_{21}^+ = S_{21}^1 + S_{21}^2; S_{ij}^{1+}$  ( $i \neq j; i, j = 1, 2$ ) и  $S_{ij}^{1-}$  – длина дуги  $S_{ij}^1$  элемента, следующим за элементом  $k$  в положительном и отрицательном направлении по координате  $x_j$ .

## **Заключение**

Разработана математическая модель процесса получения шарообразной стальной отливки в керамической ОФ, которая продемонстрирована на примере получения отливки «шаровая опора». С учетом наложенных ограничений, начальных и граничных условий, задача решалась с применением апробированного численного метода.

В результате решения с учетом разработанного алгоритма и с помощью авторских программных комплексов получены поля температуры, напряжений и скоростей перемещений в деформированной ОФ. Наиболее опасными с точки зрения трещинообразования являются сжимающие напряжения  $\sigma_{22}$ , а в облицовочном слое на поверхности контакта ОФ с жидким металлом в начальный момент охлаждения  $\sigma_{33}$ .

## **Благодарности**

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>

## **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Одинокое В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Намоконов А.Н., Иванкова Е.П. Чернышова Д.В. Напряженно-деформированное состояние керамической оболочковой формы при формировании в ней стальной шарообразной отливки. Часть 1. Известия вузов. Черная металлургия. 2024;67(2), 211-218. – DOI: 10.17073/0368-0797-2024-2-211-218.

2. Одинокое В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Намоконов А.Н., Иванкова Е.П. Чернышова Д.В. Напряженно-деформированное состояние керамической оболочковой формы при формировании в ней стальной шарообразной отливки. Часть 2. Известия вузов. Черная металлургия. 2024;67(4).

3. Одинокое В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В., Баков А.В. Математическое моделирование сложных технологических процессов. М.: Наука, 2008. - 176 с.

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021616121 «Программа математического моделирования оптимизации выбора температуры опорного наполнителя, физических свойств материала и структуры оболочковой формы по выплавляемым моделям для повышения её трещиностойкости при охлаждении в ней отливки» / В.И. Одинокое, Э.А. Дмитриев, А.И. Евстигнеев, Е.П. Иванкова Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 16.04.2021 г.

5. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012661389. ОДИССЕЙ / В.И. Одинокое, А.Н. Прокудин, А.М. Сергеева, Г.М. Севастьянов. Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 13.12.2012г.

УДК 538.9

**Чесноков Михаил Алексеевич**, аспирант, Дальневосточный Федеральный Университет

**Chesnokov Mikhail Alekseevich**, graduate student, Far Eastern Federal University

**Наливайко Игорь Николаевич**, аспирант, Дальневосточный Федеральный Университет

**Nalivaiko Igor Nikolaevich**, graduate student, Far Eastern Federal University

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОБРАЗЦОВ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СПИНОВЫХ СТЕКОЛ**

### **DEVELOPMENT OF A SOFTWARE FOR CREATING SAMPLES OF LOW-ENERGY STATES OF SPIN GLASSES**

**Аннотация.** Был разработан программный инструмент для генерации образцов систем спиновых стекол в низкоэнергетических состояниях с возможностью управления распределением обменных интегралов  $J_{ij}$  в рамках модели Эдвардса-Андерсона с открытыми граничными условиями. Образцы были созданы как с помощью ручного редактирования с последующим масштабированием, так и путем случайного распределения обменных интегралов  $J_{ij}$ . Полученные образцы будут проанализированы с использованием статистических методов, таких как гибридный алгоритм Метрополиса.

**Abstract.** A program for generating samples of low-energy state systems of spin glasses with the capability to manipulate the distribution of exchange integrals  $J_{ij}$  within the Edwards-Anderson model with non-periodic boundary conditions has been developed. The samples were created both through manual editing followed by scaling and by random distribution of the exchange integrals  $J_{ij}$ . The obtained samples will be analyzed using statistical methods such as the hybrid Metropolis algorithm.

**Ключевые слова:** спиновые стекла, низкоэнергетические состояния, модель Эдвардса-Андерсона, программа, Python, Qt, алгоритм Метрополис.

**Keywords:** spin glasses, low-energy states, Edwards-Anderson model, program, Python, Qt, Metropolis algorithm.

#### **Введение**

Спиновые стекла представляют собой магнитные материалы с высокой степенью фрустрации и отсутствием порядка в направлении магнитных моментов (спинов). Несмотря на многолетние исследования, природа поведения низкоэнергетических состояний спиновых стекол в модели

ближайших соседей до сих не изучена до конца с практической и теоретической точки зрения [1]. Целью данной работы является создание программного инструмента для реализации различных подходов конструирования образцов решеток спинового льда для их последующего изучения посредством численных методов.

### **Основная часть**

Был разработан программный комплекс для создания образцов низкоэнергетических состояний спиновых стекол и исследования влияния распределения значений обменных интегралов  $J_{ij}$  на свойства решеток. Величины обменных взаимодействий  $J_{ij}$  играют ключевую роль в формировании поведения моделей, образуя небольшие кластеры с локальной упорядоченностью. Нами были реализованы несколько подходов к созданию образцов для систем с закрытыми граничными условиями – путем ручного конструирования кластеров на небольших решетках с последующим масштабированием и путем случайного распределения  $J_{ij}$ .

Мы используем модель Эдвардса-Андерсона [2-4], представляющую собой квадратную решетку с изинго-подобными спинами, находящимися в узлах. Спины  $S_i$  принимают значения 1 или -1, что соответствует направлениям «вверх» или «вниз» магнитных моментов атомов. Взаимодействие между парами спинами осуществляется через случайные бимодальные обменные интегралы  $J_{ij}$ , которые могут быть как положительные, так и отрицательные (принимать значения 1 или -1 соответственно).

Программа написана на языке Python с применением фреймворка для создания оконных приложений Qt (библиотека PyQt6). Визуально, программа представляет собой оконное приложение с центральным элементом (виджетом) в виде квадратной сетки (шахматной доски), созданной посредством класса QPainter. В сетке часть ячеек занята спинами, находящимися на равном расстоянии друг от друга, в ячейках между ними находятся обменные интегралы  $J_{ij}$ .

Программа может использовать и визуализировать информацию о спинах, их геометрии и распределении  $J_{ij}$ , закодированные в соответствующие типы файлов, а также позволяет работать с новой «чистой» моделью. В этом случае создается решетка со всеми спинами «вверх» и единичным расстоянием между ними; все  $J_{ij}$  равны +1.

После загрузки данных в оперативную память и их визуализации, при нажатии на каждую занятую ячейку пользователь может редактировать ее содержимое, инвертируя направление спина или знак обменного интеграла. Таким образом происходит ручное конструирование образцов низкоэнергетических решеток с различной плотностью  $P$  обменных интегралов  $J_{ij}$  (процент содержания положительных обменных интегралов

среди всех обменных взаимодействий). Кроме моделей с «оригинальным» паттерном распределения  $J_{ij}$ , эта функция была использована для воссоздания случаев, уже ранее освещенных в научных статьях и исследованных экспериментальным способом, для обработки численными методами. Пример показан на рис. 1:

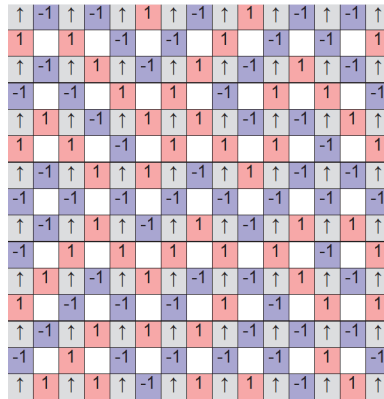


Рисунок 1 – пример образца для решетки  $N = 8$  с открытыми граничными условиями (красные ячейки  $J_{ij} = +1$ ; синие ячейки  $J_{ij} = -1$ ; серые ячейки – спины), воссозданного из научной статьи [5]

Полученные распределения на небольших решетках масштабируются до статистически значимых размеров (от 1000 и более спинов), что производится посредством копирования блоков системы. Основной проблемой является появление набора новых «граничных» обменных интегралов, которые ранее не учитывались из-за открытых граничных условий системы. Пример масштабирования системы (рисунок 2):

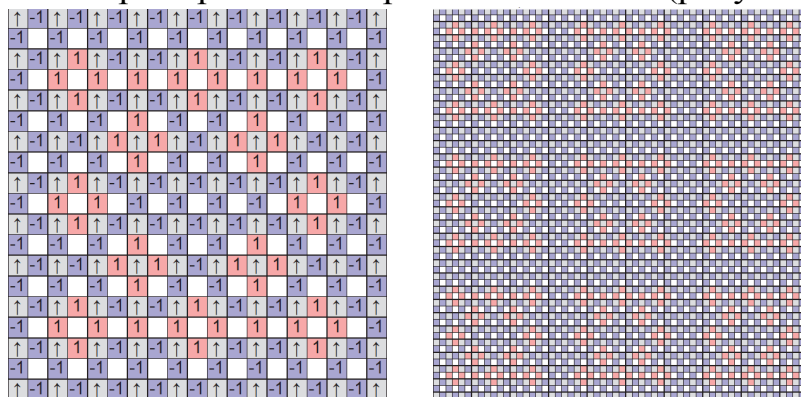


Рисунок 2 – Пример масштабирования для решетки с  $N=10$ , увеличенной в 3 раза

Вторым подходом к формированию образцов является случайное распределение  $J_{ij}$ . Оно происходит по следующему алгоритму: 1) пользователь задает количество итераций цикла; 2) на каждой итерации выбирается случайный спин; 3) значение (направление) выбранного спина инвертируется; 4) также инвертируются значения всех окружающих его обменных интегралов  $J_{ij}$ .

В результате создается образец со случайным распределением спинов и кластеров обменных интегралов:

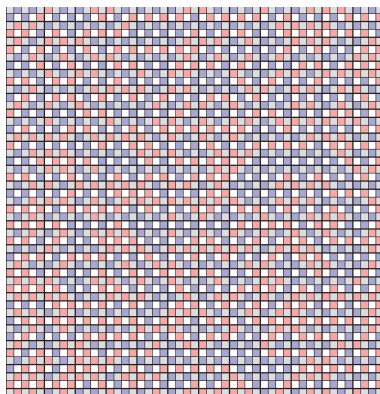


Рисунок 3 – Пример создания образца для решетки с помощью случайного распределения

При каждом изменении системы рассчитывается общая энергия (с сохранением минимальной за сессию использования конфигурации спинов и распределения  $J_{ij}$ ).

#### **Заключение**

Полученные образцы будут исследованы с помощью статистических методов, таких как гибридный алгоритм Метрополиса, и метода урезанного полного перебора для нахождения общих тенденций в распределении частиц и обменных интегралов в низкоэнергетических состояниях спиновых стекол.

#### **Благодарности**

Разработка и тестирование программного инструмента выполнена на суперкомпьютерном кластере Дальневосточного федерального университета.

#### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Newman C. M., Stein D. L. Ground-state stability and the nature of the spin glass phase //Physical Review E. – 2022. – Т. 105. – №. 4. – С. 044132.
2. Edwards S. F., Anderson P. W. Theory of spin glasses //Journal of Physics F: Metal Physics. – 1975. – Т. 5. – №. 5. – С. 965.
3. Romá F. et al. Ground-state topology of the Edwards-Anderson $\pm$ J spin glass model //Physical Review B. – 2010. – Т. 82. – №. 21. – С. 214401.
4. Katzgraber H. G., Lee L. W. Correlation length of the two-dimensional Ising spin glass with bimodal interactions //Physical Review B. – 2005. – Т. 71. – №. 13. – С. 134404.\
5. Kato M. et al. Flux roughening in spin ice with mixed $\pm$ J interactions //Physical Review B. – 2022. – Т. 106. – №. 1. – С. 014423.



УДК 539.3

**Чехонин Константин Александрович**, д.ф.-м.н., руководитель филиала Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН  
**Chekhonin Konstantin Aleksandrovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of the Khabarovsk Division, Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОРМИРУЕМОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДВИЖНОГО ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ**

### **NUMERICAL MODELING OF RESIDUAL STRESSES IN DEPOSITED METAL LAYER WITH A MOVING LASER ENERGY SOURCE**

**Аннотация.** Рассматривается быстропротекающий трехмерный процесс консолидации слоя металла, сформированного с использованием аддитивной лазерной технологии. В основу математической модели положены уравнения равновесия с вязкоупругопластической реологической моделью и уравнение энергии с учетом диффузионных, конвективных и радиационных потерь. Численное решение задачи производится методом конечных элементов с использованием адаптационного алгоритма построения сеточной области в функции от градиента температуры в несвязанной постановке с решением дискретных уравнений нестационарной теплопроводности и термомеханики. Показано влияние последовательной стратегии наращивания пяти слоев металла на распределение эффективных напряжений.

**Abstract.** A transient 3D process of metal layer solidification, formed with laser technology, is considered. The mathematical model is based on balance equation with visco-elasto-plastic rheological model and energy equation, taking into account diffusion, convective and radiation losses. Numerical solution is performed using Finite Element Method using an adaptive algorithm for constructing grid domain as a function of temperature gradient in an uncoupled formulation with the solution of discrete equations of non-stationary thermal conductivity and thermomechanics. The influence of the unidirectional scan strategy of five layers of metal on von Mises residual stresses is shown.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, лазерные аддитивные технологии, затвердевание металла, вязкоупругопластичность, остаточные напряжения.

**Keywords:** finite element method, laser additive technology, metal solidification, viscoelastoplasticity, residual stress.

## Введение

Моделирование термомеханических процессов при затвердевании металла в процессе производства изделий по технологии лазерного наращивания слоев имеет важное значение для различных отраслей, таких как космическая, автомобильная, медицинская. При затвердевании в металле протекают сложнейшие физические, диффузионные, химические, металлургические и структурные процессы.

Процесс фазового перехода в материале определяет уровень и эволюцию возникающих технологических напряжений и сопровождается большими градиентами температур (до 14 °С/мкм). Превышение технологическими напряжениями предела набранной прочности материала может привести к образованию микротрещин, вплоть до образования магистральных трещин. Скорость охлаждения ( $10^3$ – $10^6$  °С/сек) определяет микроструктуру материала, а следовательно, и прочностные свойства произведенного изделия. С механической точки зрения рассматриваемая задача относится к механике растущих тел [1].

В настоящей работе развивается подход, предложенный в работах [2–6] применительно к описанию напряженно-деформированного состояния изделия при использовании лазерных технологий наращивания слоя металла. Математическая постановка задачи и используемые термофизические и механические параметры материала взяты из недавней работы [4].

## Результаты расчетов

Численное решение задачи производим с использованием метода конечных элементов с согласованными аппроксимациями полей перемещения и гидростатического давления, удовлетворяющего LBB-условию [3]. Построение сеточной области выполняем с использованием адаптационного алгоритма в функции от градиента температуры. Алгоритм учитывает движение источника тепла с заданной скоростью сканирования путем применения технологии «исключения» и после дующего «возрождения» части материала. Непрерывное наращивание материала производится дискретно, на каждом шаге расчета, соответствующем «возрождению» очередной подобласти из «исключенных» элементов [4].

Анализ результатов расчета производим с использованием основных безразмерных параметров [4]  $Q = \frac{P}{\rho c_p (T_0)(T_l - T_0) v R_0^2}$ ,  $P_e = \frac{v R_0}{D(T_0)}$ ,  $S = \frac{\sigma}{\sigma_y(T_0)}$ ,  $\bar{T} = \frac{T}{T_m}$ , включающих мощность, радиус лазера, скорость сканирования, теплофизические и механические свойства материала.

На рис. 1 приведено распределение эффективных напряжений в расчетной области при последовательной стратегии сканирования (рис. 1а) наращивания слоев при заданном массовом расходе материала. Из результатов расчёта следует, что значения остаточных напряжений увеличиваются с ростом числа нанесённых слоёв, что согласуется с известными численными и экспериментальными исследованиями [4].

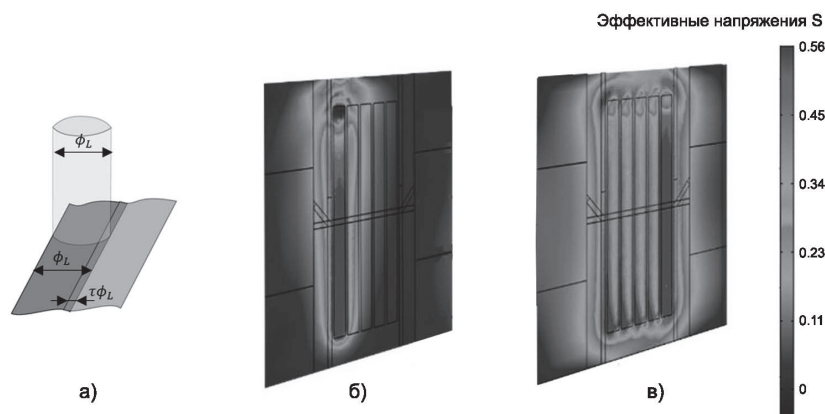


Рис. 1. Распределение эффективных напряжений Мизеса в зависимости от числа наплавленных слоёв а) стратегия сканирования; б) одного слоя и в) после нанесения пяти слоёв

Сравнение результатов вычислений продольных остаточных напряжений в первом наплавленном слое, полученных при значениях параметров  $Q = 1,33$ ,  $P_e = 5,17$  с экспериментальными данными приведено на рис. 2, которое свидетельствует об адекватности рассматриваемой термомеханической модели. Из рисунка видно, что в области подложки образуются сжимающие остаточные напряжения, в зоне теплового влияния они снижаются, и снова резко возрастают (но уже растягивающие) в области наплавленного слоя.

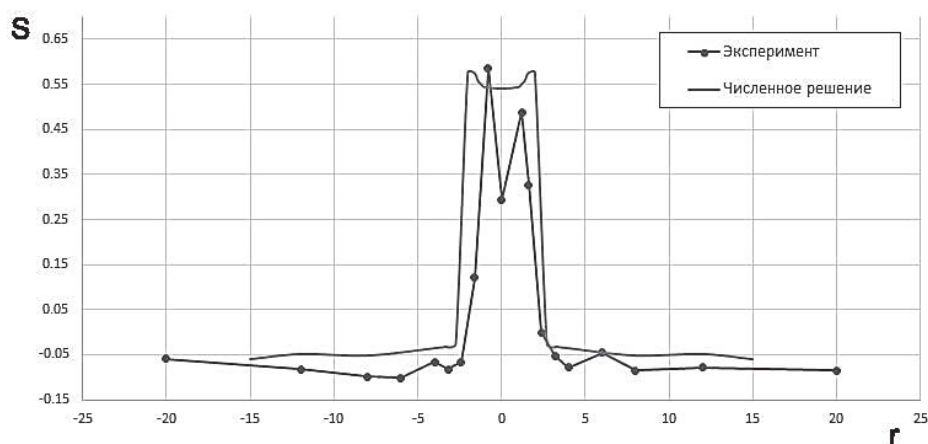


Рис. 2. Сравнение результатов вычислений остаточных напряжений с экспериментом

### Заключение

В ходе проведенных исследований предложены определяющие соотношения для термомеханической задачи отверждения при наращивании слоя металла. Проведены верификация и валидация математической модели и алгоритма расчета путем сравнения с известными аналитическими и экспериментальными исследованиями. Анализ результатов расчета производится в безразмерном виде с использованием критериев, отражающих влияние мощности лазера и скорости сканирования. Показано влияние последовательной стратегии наращивания пяти слоев металла на

распределение эффективных напряжений. Анализ результатов численных исследований показал, что остаточные напряжения могут достигать 0,58 от уровня предела текучести материала.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э., Контактные задачи растущих тел, Наука, М., 1991, 176 с.
2. Chekhonin K.A., “Current state and development of the theory of curing high-energy composite polymer materials”, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 17:1, (2024), 106–114.
3. Bulgakov V.K., Chekhonin K.A., “Modeling of a 3D Problem of compression forming system “Composite shell – low compressible consolidating Filler”, J. Mathematical Modeling, 4, (2002), 121–131.
4. Гриценко А.А., К.А. Чехонин, “Численное моделирование остаточных напряжений в формируемом металлическом слое с использованием подвижного лазерного источника энергии”, Дальневост. матем. журн., 24:1 (2024), 22–32.
5. Chekhonin K.A., Vlasenko V.D., “Numerical Modeling of Compression Cure High-Filled Polymer Material”, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 14:6, (2021), 805–814.
6. Чехонин К.А., Власенко В.Д., “Градиентный алгоритм оптимизации температурно-конверсионной задачи при отверждении высоконаполненных полимерных материалов”, Информатика и системы управления, 4:62, (2019), 58–70.

УДК 519.722:330.46

**Чупров Сергей Витальевич**, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры менеджмента и сервиса, Байкальский государственный университет

**Chuprov Sergey Vitalievich**, D.Sc. in Economics, Professor, Professor of Department of Management and Service, Baikal State University

#### **ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЭНТРОПИЙНО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ ХАОТИЗИРОВАННОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

#### **LIMIT ENTROPY-INFORMATION MODES OF CHAOTIZED OPERATION INDUSTRIAL SYSTEM**

**Аннотация.** В классических воззрениях статистической физики открытые системы испытывают влияние случайных воздействий, вследствие чего их поведение подвержено хаотизации и подчиняется энтропийным

закономерностям. Привлечение этих статистических представлений в сферу исследования кибернетических систем позволяет оценивать и анализировать их функционирование, поддерживая упорядоченность и эффект деятельности индустриальной системы введением в нее и накоплением управляющей информации. В этой связи теоретическое и прикладное значение приобретает аргументация предельных режимов энтропийно-информационных процессов индустриальной системы в зависимости от параметра времени с использованием математических моделей.

**Abstract.** In the classical views of statistical physics, open systems are influenced by random influences, as a result of which their behavior is subject to chaotization and obeys entropy laws. Involving these statistical concepts in the field of research of cybernetic systems makes it possible to evaluate and analyze their functioning, maintaining the orderliness and effect of the activity of the industrial system by introducing into it and accumulating control information. In this regard, the argumentation of the limiting modes of entropy-information processes of the industrial system depending on the time parameter using mathematical models acquires theoretical and applied significance.

**Ключевые слова:** информация, индустриальная система, модель, неопределенность, порядок, хаос, энтропия

**Keywords:** information, industrial system, model, uncertainty, order, chaos, entropy

### **Введение**

В пространстве стремительных и коренных перемен эволюционирующие индустриальные системы претерпевают метаморфозы своей структуры и поведения, порождающие комбинации медленных и быстрых, устойчивых и неустойчивых фаз своего функционирования. Появляется потребность в придании вербально сформулированным системным идеям форм логически выстроенных гипотез и статистических закономерностей, что обусловило цель излагаемого подхода – модельный анализ предельных режимов энтропийно-информационных процессов индустриальной системы с течением времени ее функционирования.

Решение задачи опирается на достигнутые результаты в области термодинамики, статистической физики, нелинейной динамики, предлагающих концепции и язык описания перестроек в динамических системах, и с позиций теории информации, кибернетики и синергетики – взаимосвязанные энтропийные и информационные процессы в хаотизированных системах. Необходимость моделирования и интерпретации логистических зависимостей и их пределов отвечает задаче управления индустриальными системами, возмущаемых случайными воздействиями своего окружения.

### **Основная часть**

Современное учение о энтропийно-информационной парадигме в кибернетике восходит к фундаментальным исследованиям по

термодинамике и статистической физике, обогативших науку об управлении представлениями о неопределенности и хаотизации открытых систем. Последние обнаруживают статистические закономерности их движения к равновесному состоянию, характеризующемуся предельно высокой неопределенностью и беспорядочными внутрисистемными взаимодействиями. В этом отношении предотвращению хаотизации и прогрессу индустриальной системы служит обеспечение скоординированного поведения элементов системы благодаря генерированию, введению и накоплению в ней управляющей информации, снижающей энтропию поведения системы.

В теории информации по Шеннону [1], мы знаем, постулируется: если величина энтропии системы имеет значение  $H$ , то количество поступившей в нее информации определяется разностью между максимально возможной в системе энтропией  $H_m$  и  $H$ :

$$I = H_m - H. \quad (1)$$

Примем в качестве допущения, что при прочих равных условиях скорость нарастания энтропии в системе пропорциональна её текущему уровню  $H$ , но встречает сопротивление, сдерживается и нелинейно теряет темп по мере приближения к максимальному значению энтропии  $H_m$ . Подобная динамика энтропии может быть описана логистическим уравнением, известным как модели Ферхюльста и Реденура [2, 3], и формализуется в наших обозначениях дифференциальным уравнением:

$$\frac{dH}{dt} = KH\left(1 - \frac{H}{H_m}\right), \quad (2)$$

где коэффициент  $K$  ( $K > 0$ ) задает скорость роста энтропии в системе.

В литературе по дифференциальным уравнениям и синергетике отмечают, что уравнение (2) отображает закономерности, присущие процессам изменения численности популяций, колоний бактерий в биологических сообществах, социальных протестов и в экономике числа потребителей некоторой технологии и роста общественного благосостояния [3, 4].

Преобразуем дифференциальное уравнение (2) следующим образом. Сначала проведем разделение переменных:

$$dH = KH\left(1 - \frac{H}{H_m}\right)dt = KH \frac{H_m - H}{H_m} dt$$

или

$$\frac{dH}{H \frac{H_m - H}{H_m}} = K dt.$$

Проведение математических преобразований и интегрирования приводят к логистическому выражению для величины энтропии:

$$H = \frac{H_m}{1 + \left(\frac{H_m}{H_0} - 1\right)e^{-Kt}}, \quad (3)$$

где  $H_0$  — величина энтропии индустриальной системы в ее исходном состоянии.

Легко увидеть, что в начальный момент времени  $t = 0$  величина энтропии ожидаемо  $H = H_0$  и с течением времени при  $t \rightarrow \infty$  она в пределе стремится к максимальной  $H \rightarrow H_m$ .

Обратим внимание на то, что разность в скобках в знаменателе формулы (3) можно представить в виде:

$$\frac{H_m}{H_0} - 1 = \frac{H_m - H_0}{H_0},$$

и поскольку разность величин энтропии  $H_m - H_0 = I_0$  определяет количество информации  $I_0$  в индустриальной системе в ее исходном положении, можем переписать выражение (3) в энтропийно-информационном контексте:

$$H = \frac{H_m}{1 + \frac{I_0}{H_0}e^{-Kt}}. \quad (4)$$

В соответствии с парадигмой теории информации можем констатировать: при отсутствии в индустриальной системе введенной информации ( $I_0 = 0$ ) энтропия ее становится максимальной:  $H = H_m$ .

Теперь найдем зависимость полученного результата для энтропии индустриальной системы от текущего значения количества информации в ней. Развернув равенство (4), найдем с учетом (1):

$$\frac{I_0 H}{H_0} e^{-Kt} = H_m - H = I$$

или относительно показателя количества информации:

$$I = \frac{I_0 H}{H_0} e^{-Kt}.$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями можно заметить, что при  $t = 0$  величина энтропии  $H = H_0$  и количество информации в индустриальной системе сводится к начальной величине:  $I = I_0$ . Однако с «безудержной» хаотизацией системы и  $t \rightarrow \infty$  информация в ней в пределе «поглощается» растущей энтропией поведения системы и потому  $I \rightarrow 0$ .

### **Заключение**

Комплементарность и симбиоз знаний естественных и экономических наук в проводимых исследованиях интеллектуализируют инструментарий управления индустриальными системами. Закономерности их функционирования и свойственные им предельные энтропийные и информационные режимы развивают аналитику динамических

производственных процессов в хаотизированных средах и дают возможность экономико-математического моделирования сценариев поведения и самоорганизации индустриальной системы для различных классов внешних возмущений [5].

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Шеннон, К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 829 с.
2. Verhulst, P. F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement / P. F. Verhulst // Correspondance mathématique et physique. 1838. – Vol. 10. – P. 113-11.
3. Журавлев, С. Г. Дифференциальные уравнения: Сборник задач: примеры и задачи экономики, экологии и других социальных наук / С. Г. Журавлев, В. В. Аниковский. – Москва: Изд-во «Экзамен», 2005. – 128 с.
4. Безручко, Б. П. Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях / Б. П. Безручко, А. А. Короновский, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов. – Москва: ЛЕНАНД, 2015. – 304 с.
5. Чупров, С. В. Теоретико-информационный анализ модели самоорганизации индустриальной системы / С. В. Чупров // Вычислительные технологии и прикладная математика: Мат-лы II Междунар. семинара (12–16 июня 2023 г., Благовещенск) / отв. ред. А. Г. Масловская. – Благовещенск: Изд-во Амурского гос. университета, 2023. – С. 222-224.

УДК 519.25

**Шарый Сергей Петрович**, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

**Sergey P. Shary**, DSc (phys & math), leading researcher of Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia

#### **ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ГАРАНТИИ ПРИ АГРЕГИРОВАНИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

#### **PROBABILISTIC GUARANTEES FOR AGGREGATING INTERVAL DATA**

**Аннотация.** В работе даются вероятностные оценки покрытия области значений случайной величины с помощью интервала её экстремальных порядковых статистик. Результат оказывается слабо зависящим от конкретного вида вероятностного распределения и полезен при решении вопроса о надёжности агрегирования точечных результатов измерений в интервальном анализе данных.

**Abstract.** The paper derives probabilistic estimates of the coverage of the range of values of a random variable using the interval of its extreme order



statistics. The result turns out to be weakly dependent on the specific type of probabilistic distribution and is useful in solving the question of how reliable is aggregating point measurement results in interval data analysis.

**Ключевые слова:** интервал, интервальная неопределённость данных, агрегирование, вероятностная гарантия

**Keywords:** interval, interval data uncertainty, aggregation, probabilistic guarantee

В этой работе рассматривается важный вопрос интервального анализа данных, но формулировка этого вопроса и ответ на него используют понятия и технику традиционной теории вероятностей.

В интервальном анализе данных один из популярных способов получения интервалов измеряемых величин – это их агрегирование (группировка), когда вместо серии результатов измерений или вместо ряда значений изменяющейся величины мы организуем интервал её измеренных значений [1]. В практической метрологии результат серии повторяющихся измерений часто представляют одним числом, например, средним отдельных результатов, но по ряду причин этот способ может быть не вполне удовлетворительным. Дело в том, что при характеристике результата серии одним числом теряется информация о разбросе данных. Если хотим указывать её в результате измерения, то должны вводить второе число, которое может быть стандартным отклонением или чем-то аналогичным. Более понятным и адекватным итогом, обобщённо представляющим несколько результатов измерений, можно взять интервал от минимального до максимального из полученных результатов, т. е. агрегировать (объединить, сгруппировать) результаты отдельных измерений. Математически, если результаты повторных измерений интересующей нас величины равны  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то интервальным результатом серии следует взять

$$x = \left[ \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \max_{1 \leq i \leq n} x_i \right].$$

Этот способ получения интервального результата измерения называется *агрегированием* или *группировкой* данных [1].

Предположим, что измеряемая величина подчиняется законам теории вероятностей, т. е. является вероятностно-случайной, так что измерения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – это её отдельные реализации. Если, в соответствии с известной аналогией, вероятностное распределение рассматриваемой величины – это единичная «вероятностная масса», рассредоточенная на вещественной оси [2], то какую её часть мы покроем с помощью агрегирования? Более точно, какова вероятность того, что следующая реализация этой величины, т. е. очередное измерение  $x_{n+1}$ , попадёт в интервал от минимума до максимума уже измеренных значений

В работе даются ответы на эти вопросы, причём рассматривается также более общая и важная для практики ситуация, когда среди измерений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  присутствуют «примеси», т. е. реализации какой-то другой случайной величины.

Предположим, что задана вещественная вероятностно случайная величина с функцией распределения  $\Phi(x)$ . Будем считать далее, что это распределение является абсолютно непрерывным [3], т. е. существует неотрицательная функция  $p(x)$  – плотность распределения  $\Phi(x)$ , такая что

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx .$$

Тогда  $\Phi'(x) = p(x)$  для любой точки непрерывности функции  $p(x)$ . Предположим, что мы рассматриваем реализации этой случайной величины –  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и фиксируем границы их изменения – нижнюю  $\underline{x} = \min \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$  и верхнюю  $\bar{x} = \max \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ . Какова вероятность того, что случайно взятое, по тому же распределению, вещественное число  $x_{n+1}$  попадёт в интервал  $[\underline{x}, \bar{x}]$  ?

Взятые в порядке возрастания элементы выборки значений случайной величины называются, как известно, порядковыми статистиками [4, 5, 6]. Им посвящена обширная литература и очень большое количество различных результатов теории вероятностей. Известно также [2, 5, 6], что функцией распределения максимума случайных величин с одной общей функцией распределения  $\Phi(x)$  является  $(\Phi(x))^n$ . Соответственно, плотность вероятности максимума имеет вид

$$n (\Phi(x))^{n-1} p(x) . \tag{1}$$

Функцией распределения минимума случайных величин с общей функцией распределения  $\Phi(x)$  является  $1 - (1 - \Phi(x))^n$ . Соответственно, плотность вероятности минимума имеет вид  $n (1 - \Phi(x))^{n-1} p(x)$ .

Если на вещественной оси случайно, по распределению с плотностью (1), берётся число, то вероятность его попадания в интервал  $[x, x + dx]$  равна  $n (\Phi(x))^{n-1} p(x) dx$ . Вероятность того, что взятое затем случайно число  $x_{n+1}$  будет бóльшим  $x$ , есть произведение выписанного выше выражения на  $(1 - \Phi(x))$ , т. е.

$$(1 - \Phi(x)) n (\Phi(x))^{n-1} p(x) dx .$$

Полная вероятность сложного события  $x_{n+1} > \max \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$  получается суммированием этих значений по всей вещественной оси, так что необходимо взять интеграл

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Phi(x)) (\Phi(x))^{n-1} p(x) dx .$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 & n \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Phi(x)) (\Phi(x))^{n-1} p(x) dx \\
 & = \\
 & = n \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x))^{n-1} p(x) dx - n \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x))^n p(x) dx = \\
 & = n \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x))^{n-1} d\Phi(x) - n \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x))^n d\Phi(x) = \\
 & = n \frac{(\Phi(x))^n}{n} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - n \frac{(\Phi(x))^{n+1}}{n+1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
 & = (1^n - 0^n) - \frac{n}{n+1} (1^{n+1} - 0^{n+1}) \\
 & = \frac{1}{n+1}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Для нахождения вероятности события  $x_{n+1} < \min \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$  заметим, что это неравенство можно переписать эквивалентным образом как  $-x_{n+1} > -\max \{ -x_1, -x_2, \dots, -x_n \}$ . Отсюда ясно, что искомая вероятность тоже должна быть равна  $1/(n+1)$ .

Полную вероятность непопадания точки  $x_{n+1}$  в интервал от минимума  $\underline{x}$  до максимума  $\bar{x}$  предшествующих реализаций можно найти, учитывая, что это событие есть сумма несовместимых событий

$x_{n+1} < \min \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$  и  $x_{n+1} > \max \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ . Поэтому их вероятности должны складываться:  $1/(n+1) + 1/(n+1) = 2/(n+1)$ . Следовательно, вероятность дополнительного события, т. е. вероятность принадлежности  $x_{n+1}$  интервалу от минимума  $\underline{x}$  измеренных значений до максимума  $\bar{x}$ , равна

$$\begin{aligned}
 & \text{вероятность} \left( x_{n+1} \in \left[ \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \max_{1 \leq i \leq n} x_i \right] \right) \\
 & \leq 1 - \frac{2}{n+1}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Н.И. Чернова заметила автору, что оценка (2), из которой вытекает основной результат (3), может быть получена гораздо более простым способом. Дело в том, что в наборе из  $n+1$  независимых случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ , которые имеют одинаковые абсолютно непрерывные распределения, вероятность того, что величина  $x_{n+1}$  будет наибольшей, т. е. будет больше максимума предыдущих  $n$ , равна всегда  $1/(n+1)$ . Это следует из равновероятности всех вариантов взаимных расположений случайных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  на вещественной оси, откуда, в свою очередь, вытекает равновероятность того, что  $x_{n+1}$  будет

самым маленьким, вторым по счёту и т. д. и, наконец, самым большим числом. Поэтому искомая вероятность равна в точности  $1/(n + 1)$ , и для получения (2) можно даже не вычислять соответствующие интегралы. Абсолютная непрерывность распределения нужна здесь для того, чтобы вариант совпадения значений  $x_i$  имел нулевую вероятность.

Тем не менее, проведённые для вычисления (2) выкладки не вполне бесполезны, так как могут послужить основой для обобщений нашего результата на более сложные случаи. Мы рассматриваем далее подробно ситуацию, когда среди  $n$  измерений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  присутствует одно или несколько измерений (которые будем называть «измерения-примеси») с распределением вероятностей, которое отличается от  $\Phi(x)$  – распределения большинства измерений. При этом получается асимптотика стремления достоверности интервального агрегирования к единице, аналогичная найденной ранее:

$$1 - \frac{2}{n - k + 1} - \frac{1}{n - k} \leq \text{вероятность} \left( x_{n+1} \in \left[ \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \max_{1 \leq i \leq n} x_i \right] \right) \leq 1. \quad (4)$$

В действительности, проведённые при обосновании оценки (4) рассуждения и выкладки применимы также к общему случаю, когда количество «измерений-примесей» неограниченно растёт с ростом объёма выборки. Так как никаких условий на конечность или фиксированность числа примесей  $k$  при выводе оценки (4) не накладывается, то возможна ситуация, когда  $k$  также растёт, не будучи ничем ограниченным. Неравенства (4) всё равно будут справедливы.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ интервальных данных. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2024, 356 с.
2. Чернова Н.И. Теория вероятностей. Электронное пособие НГУ. URL: <https://tvims.nsu.ru/chernova/tv/lec/node68.html>
3. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. М.: Издательство иностранной литературы, 1960, 435 с.
5. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.
6. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979, 336 с.

УДК 51-76+004.942

**Шевкун Иван Александрович**, младший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Shevkun Ivan Aleksandrovich**, junior scientist, Laboratory of mathematical modeling of complex physical and biological systems, Amur State University

**Масловская Анна Геннадьевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский федеральный университет

**Maslovskaya Anna Gennadievna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

## **ПОДХОД К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕАКЦИОННО-ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ БАКТЕРИАЛЬНОГО РОСТА В КАНАЛАХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ**

### **APPROACH TO NUMERICAL IMPLEMENTATION FOR THE REACTION-DIFFUSION MODEL OF BACTERIAL GROWTH IN CHANNELS WITH COMPLEX GEOMETRY**

**Аннотация.** Работа посвящена развитию вычислительных методик для реализации реакционно-диффузионной модели роста культивируемых бактерий в условиях эволюции в каналах со сложной геометрией. Математическая модель формализуется в виде начально-граничной задачи для системы нелинейных уравнений с частными производными, дополненной процедурой имитации развития стохастической дендритной структуры. Построена конечно-разностная схема решения задачи. Вычислительный алгоритм адаптирован для указанного случая и реализован в виде программного приложения в среде Matlab. Проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующих пространственно-временные закономерности бактериального роста в каналах с различной геометрией.

**Abstract.** The study is devoted to the development of computational methods for implementing the reaction-diffusion model of growth of cultivated bacteria under conditions of evolution in channels with complex geometry. The mathematical model is formalized as an initial boundary value problem for a system of nonlinear partial differential equations, supplemented by a procedure for simulating the development of a stochastic dendritic structure. A finite-difference scheme for solving the problem is constructed. The computational algorithm is adapted for this case and implemented as an application in the Matlab software. A series of computational experiments were performed to demonstrate the spatial-temporal patterns of bacterial growth in channels with different geometries.

**Ключевые слова:** бактериальный рост, микроструктура почвы, бактериальные паттерны, система «реакция-диффузия», метод конечных разностей, вычислительный эксперимент

**Keywords:** soil microstructure, bacterial growth, bacterial patterns, reaction-diffusion system, finite difference method, computational experiment

## Введение

Исследование процессов бактериального роста имеет большое значение в современном мире: борьба с болезнями, обеспечение санитарных норм, производство ферментированных пищевых продуктов – все это требует точных знаний о динамике и особенностях роста бактерий. В последнее время, благодаря стремительному развитию вычислительных мощностей, активно развиваются *in silico* исследования, позволяющие выполнять эксперименты не в пробирке или живых организмах, а на компьютере, что значительно облегчает и ускоряет разработку новых технологий.

Существует несколько основных детерминированных подходов к моделированию динамики бактериальной биомассы [1]. Кроме того, активно развиваются дискретные динамические методы, основанные на стохастическом моделировании Монте-Карло, агентном моделировании с использованием клеточных автоматов и метода частиц [2–3]. Современным трендом является разработка гибридных моделей, основанных на интеграции разнообразных методик в целях обеспечения адекватности результатов компьютерной симуляции данным биологических экспериментов. В цикле авторских исследований мы развиваем подход, предложенный Kawasaki и соавторами [4] и позволяющий визуализировать бактериальные паттерны ветвящегося морфологического типа при росте на питательной среде [5–6]. Целью настоящего исследования является адаптация и программная реализация численного алгоритма для реакционно-диффузионной модели эволюции культивированных бактерий в каналах со сложной геометрией. Подобные задачи оказываются практически актуальными при изучении и выработке стратегий управления ростом биомассы в зигзагообразных каналах, характерных для микроструктуры почвы [7].

## Постановка задачи

В рамках настоящей работы рассмотрим двумерную модель бактериального роста в питательной среде. Будем считать, что бактериальная колония потребляет нутриент и за счет этого размножается и растет в размерах в некоторой ограниченной области с заданной геометрией. Оценке подлежат пространственно-временные распределения концентрации биомассы  $b(x,y,t)$  и питания  $n(x,y,t)$ . Модель описывается начально-граничной задачей для системы нелинейных уравнений с частными производными, дополненной процедурой имитации развития стохастической дендритной структуры, и с учетом нормировки имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - bn \quad (1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla(\sigma nb \nabla b) + nb, \quad -L_x < x < L_x, \quad -L_y < y < L_y, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$n(x, y, 0) = n_0(x, y), \quad b(x, y, 0) = \beta_0(x, y), \quad -L_x < x < L_x, \quad -L_y < y < L_y, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где  $\sigma = \sigma_0(1 + \delta)$  – параметр модели;  $\delta$  – случайная величина,  $|\delta| < 1$ ;  $\beta_0(x, y) = \beta_m \exp(-(x^2 + y^2)/C^2)$ ,  $\beta_m$  и  $C$  – параметры модели;  $\Gamma$  – граница расчетной области;  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе области.

Для решения этой задачи в прямоугольной области сконструирована вычислительная схема на основе метода дробных шагов Яненко. Отметим, что адаптация модели на случай расчетной области, которая характеризуется сложным строением границ, в общем случае требует нетривиальной модификации вычислительного алгоритма. Основная идея заключается в последовательном разбиении области решения на горизонтальные и вертикальные уровни. Проходя по циклу метода дробных шагов на первом полушаге по времени, мы последовательно проводим вычисления по горизонтальным уровням. Аналогично на втором полушаге мы проходим по вертикальным уровням. Благодаря разделению вычислений производных по  $x$  и по  $y$ , метод дробных шагов Яненко оказался хорошо адаптируемым для решения задачи в областях со сложной геометрией.

### Результаты моделирования

Результаты моделирования для последнего момента времени представлены на рисунке 1.

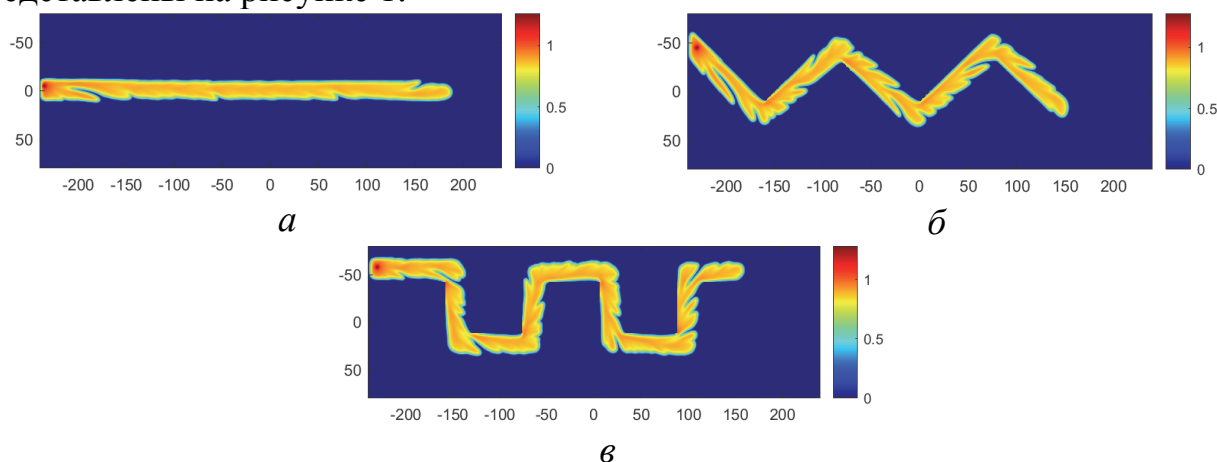


Рисунок 1 – Распределение биомассы в областях: *а* – прямой канал; *б* – зигзагообразный канал с чередующимися поворотами на  $90^\circ$ ; *в* – зигзагообразный канал с повторяющимися поворотами на  $90^\circ$

Геометрические формы для вычислительных экспериментов выбирались на основе натуральных экспериментов по исследованию бактериального роста, описанных в [6]. Геометрию можно описать следующим образом: тонкие каналы с чередующимися поворотам либо с повторяющимися поворотами на равные углы. Такая геометрия характерна для микроструктуры почвы. Также для иллюстрации работы алгоритма была выполнена симуляция бактериального роста в прямом тонком канале. Для

расчетов были установлены следующие значения параметров:  $\beta_m=0.71$ ,  $C=2.5$ ,  $L_x=240$ ,  $L_y=80$ ,  $T=15000$ ,  $\sigma_0=1$ ,  $n_0=0.5$ . Значение параметра  $\delta$  в каждом узле аппроксимации генерировалось случайным образом с помощью треугольного распределения в пределах  $(-1,1)$ .

### **Заключение**

В работе проведена адаптация и программная реализация численного алгоритма для реакционно-диффузионной модели эволюции культивируемых бактерий в каналах со сложной геометрией. Представленные *in silico* исследования свидетельствуют об адекватности развиваемого подхода и возможности его использования для моделирования ростовых процессов микроорганизмов.

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Studies of bacterial branching growth using reaction-diffusion models for colonial development / I. Golding, Y. Kozlovsky, I. Cohen, E. Ben-Jacob // *Physica A*. – 1998. – No 260. – P. 510–554.

2. Delavar, M. A. Advanced methods and mathematical modeling of biofilms. Applications in health care, medicine, food, aquaculture, environment, and industry / M. A. Delavar, J. Wang. – Elsevier: Academic Press, 2022. – 251 p. – ISBN 978-0-323-85690-4. – DOI 10.1016/C2020-0-03059-8.

3. Vassallo, L. On the growth of non-motile bacteria colonies: an agent-based model for pattern formation / L. Vassallo, D. Hansmann, L. A. Braunstein // *Eur. Phys. J. B*. – 2019. – Vol. 92. – No 216. – DOI 10.1140/epjb/e2019-100265-0.

4. Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis* / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, et. al // *Journal of Theoretical Biology*. – 1997. – No 188. – P. 177-185.

5. Салмиянов, В.О. Адаптированные алгоритмы интеллектуальной спецификации скейлинговых характеристик морфологии культивируемых бактерий / В.О. Салмиянов, И.А. Шевкун, А.Г. Масловская // *Информатика и системы управления*. – 2023. – № 4(78). – С. 75-89.

6. Шевкун, И.А. Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И.А. Шевкун, А.Г. Масловская // *Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки*. – 2023. – № 101. – С. 30-39.

7. Habitat geometry in artificial microstructure affects bacterial and fungal growth, interactions, and substrate degradation / C. Arellano-Caicedo, P. Ohlsson, M. Bengtsson, et. al // *Communications Biology*. – 2021. – Vol. 4, No 1226. – DOI: 10.1038/s42003-021-02736-4.



УДК 621.18

**Широких Андрей Антонович**, студент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**Shirokikh Andrey Antonovich**, student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

**Котов Валентин Сергеевич**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Авиационные двигатели и энергетические установки», Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**Kotov Valentin Sergeevich**, Candidate of Engineering Sciences, Senior Researcher of the Scientific and Educational Center “Aviation Engines and Power Plants”, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС КОНСТРУКТИВНОГО РАСЧЕТА СУДОВЫХ ПАРОВЫХ КОТЛОАГРЕГАТОВ**

### **PROGRAM COMPLEX FOR STRUCTURAL CALCULATION OF SHIP STEAM BOILER UNITS**

**Аннотация.** В настоящей статье приведено описание программного комплекса, предназначенного для выполнения конструктивного и поверочного расчетов судовых паровых котлоагрегатов. Авторами обозначены особенности и определен функционал разработанного программного обеспечения, в том числе, рассмотрены возможности его применения для численного решения задач, возникающих в ходе указанных этапов проектирования.

**Abstract.** This article describes a software complex designed to perform structural and verification calculations of ship steam boilers. The authors outline the features and define the functionality of the developed pro-software, including the possibilities of its application for the numerical solution of problems arising in the course of these stages of design.

**Ключевые слова:** судовой паровой котел, программа, программный комплекс, конструктивный расчет, поверочный расчет.

**Keywords:** ship steam boiler, program, program complex, structural calculation, verification calculation.

#### **Введение**

Условия и специфика районов плавания, виды морских судов и типы их энергетических установок создали необходимость в возникновении различных конструкций паровых котлов.

К судовым паровым котлам предъявляется целый ряд требований. Основными из них являются: эксплуатационная надежность, высокая маневренность, простота конструкции и обслуживания, долговечность [1]. Выполнение всех перечисленных требований возможно только при

постоянном совершенствовании процессов проектирования и расчета, для оптимизации которых разработано программное обеспечение в виде комплекса конструктивных расчетов парового котла.

### Основная часть

Программный комплекс конструктивных расчетов парового котла состоит из набора программ – математических моделей, представляющих различные модули, включающие в себя ввод переменных, расчет параметров и вывод результатов, полученных в процессе расчета. Состав некоторых из них представлен ниже.

В модуле ввода переменных в качестве исходных данных на проектирование используются основные технические показатели и спецификационные характеристики котла: требуемые паропроизводительность, рабочее давление пара, температура перегретого пара, температура питательной воды, коэффициент полезного действия, а также теплотворная способность исходного топлива.

Модуль расчета параметров включает газодинамические и термодинамические уравнения, тепловые балансы системы.

Всего в комплексе модулей восемь прикладных программ, разработанных для проектирования котлоагрегата в режиме диалога: «Определение основных параметров водопарового, газоздушного трактов котла и расхода топлива», «Конструктивный тепловой расчет парообразующего пучка», «Программа конструктивного теплового расчёта пароперегревателя», «Программа конструктивного теплового расчёта экономайзера», «Программа теплового расчёта топки на частичных нагрузках», «Программа поверочного теплового расчета парообразующего пучка», «Поверочный тепловой расчет пароперегревателя», «Программа поверочного теплового расчёта экономайзера». Программы написаны по методикам, изложенным в [2], [3] в математической среде MathCad. Подробнее представим один из фрагментов на рисунке 1.

$$\begin{aligned}
 \text{TRK4}(\text{data}) &= \left( \begin{array}{l} \text{BP} \quad \alpha \quad \text{TL} \quad \text{QP} \\ \text{PK} \quad \text{TH} \quad \text{TK} \quad \text{PG} \\ \text{RL} \quad \text{DN} \quad \text{S1} \quad \text{S2} \\ \text{NT} \quad \text{P1} \quad \text{ZP} \quad \text{PSI} \end{array} \right) \leftarrow \text{data} \\
 \text{TS} &\leftarrow 98.99 + 95.2092 \cdot \text{PK}^{0.34687} - 26.782 \cdot e^{(-0.618 \cdot \text{PK})} - 28.9 \cdot e^{-5.411 \cdot \text{PK}} \\
 \text{DTB} &\leftarrow \text{TH} - \text{TS} \\
 \text{DTM} &\leftarrow \text{TK} - \text{TS} \\
 \text{DTS} &\leftarrow \frac{\text{TH} - \text{TK}}{\ln\left(\frac{\text{DTB}}{\text{DTM}}\right)} \\
 \text{TGP} &\leftarrow \text{DTS} + \text{TS} \\
 \text{TST} &\leftarrow \text{TS} + 200 \\
 \text{FGAS} &\leftarrow \left( \text{TL} - \text{NT} \cdot \text{DN} \cdot 10^{-3} \right) \cdot \text{RL} \\
 \text{VG} &\leftarrow 11.4028 + 10.719 \cdot (\alpha - 1) \\
 \text{VH20} &\leftarrow 1.4911 + 0.1698 \cdot (\alpha - 1) \\
 \text{RH20} &\leftarrow \frac{\text{VH20}}{\text{VG}} \\
 \text{RR02} &\leftarrow \frac{1.5708}{\text{VG}} \\
 \text{RP} &\leftarrow \text{RH20} + \text{RR02} \\
 \text{SIG1} &\leftarrow \frac{\text{S1}}{\text{DN}}
 \end{aligned}$$

Рисунок 1 – Фрагмент программы конструктивного теплового расчета парообразующего пучка

В настоящих программах используется итерационный метод с линейной интерполяцией, а также предусмотрена алгоритмическая защита от нефизических результатов в промежуточных инерциях, например, для случая, когда температура нагреваемой среды превышает температуру греющей среды [4].

По результатам расчетов, проведенных в предложенных программах, формируются выходные данные, содержащие информацию как по судовому паровому котлу в целом, так и по его составляющим его элементам – трубным пучкам, топочным устройствам, коллекторам. Полученные результаты позволяют определить конструкцию котлоагрегата, в том числе указывая на его конструктивные особенности, а также требования к его производству и условия эксплуатации.

### **Заключение**

Внедрение и применение данного программного комплекса позволит сократить время и снизить трудоемкость проектирования и расчетов судовых паровых котлов, что, в свою очередь, обеспечивает предъявляемые к ним требования, а также расширяет спектр рассчитываемых характеристик установки.

### **СПИСОК ИСТОЧНИКОВ**

1. Павлов, В. В. Судовая паропроизводящая установка / И. И. Юшков, Е. А. Земцовская // Журнал молодой ученый. – 2020. – №17. – С. 69–71.
2. Закутин, П. Н. Компонировка и основные расчеты паровых котлов. / П. Н. Закутин, О. В. Арва, Л. Г. Нестеров. – Пушкин.: Изд-во ЛВВМИУ, 1980. – 247 с.
3. Тепловой расчет котельных агрегатов (нормативный метод), 3-е изд. перераб. и доп. СПб.: НПО ЦКТИ, 1998. – 257 с.
4. Карпов, И. А. Совершенствование методики тепловых расчетов судовых паровых котлов / И. А. Карпов, А. В. Панкратов, Р. К. Резникова, В. С. Котов // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: Материалы VI Всероссийской национальной научной конференции молодых учёных. В 3-х частях. Том Часть 1. Комсомольск-на-Амуре, 10–14 апреля 2023 года – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2023. – С. 542-545.
5. Методы расчета теплообмена в топках и пути совершенствования паровых котлов / К. Т. Баубеков, Р. А. Адильбеков, О. М. Талипов, А. Н. Бергузинов // Наука и техника Казахстана. – 2008. – № 3. – С. 10-15.
6. Новый подход к оценке устойчивости динамических систем на этапе их проектирования / Б. Г. Иванов, А. А. Тельнов, Е. М. Шилов [и др.] // Техническая эксплуатация водного транспорта: проблемы и пути развития: Материалы Пятой международной научно-технической конференции, Петропавловск-Камчатский, 18–21 октября 2022 года. – Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный технический университет, 2022. – С. 13-17.

УДК 51-76+004.942

**Шуай Исюань**, младший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет

**Shuai Yixuan**, junior scientist, Laboratory of mathematical modeling of complex physical and biological systems, Amur State University

**Масловская Анна Геннадьевна**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский федеральный университет

**Maslovskaya Anna Gennadievna**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

### **УЧЕТ ЭФФЕКТА ОЛЛИ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНОЙ ПОПУЛЯЦИИ**

### **THE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DYNAMICS OF BACTERIAL POPULATION IN VIEW OF THE ALLEE EFFECT**

**Аннотация.** Работа посвящена развитию детерминированного подхода для моделирования роста бактериальных культур на питательных средах с учетом эффекта Олли. Возможность положительной корреляции между скоростью роста и численностью популяции микроорганизмов формализуется с помощью уравнения Аллена-Кана. Модель дополнена уравнением, учитывающим потребление питания. Реализация модели проведена методом конечных элементов с использованием пакета COMSOL Multiphysics. Вычислительные эксперименты позволяют сравнить варианты реализации модели с учетом логического роста, сильного и слабого эффектов Олли применительно к модели эволюции микроорганизмов.

**Abstract.** The study is devoted to the development of a deterministic approach for modeling the growth of bacterial cultures on nutrient media, taking into account the Allee effect. The possibility of a positive correlation between growth rate and population size of microorganisms is formalized using the Allen-Cahn equation. The model is supplemented with an equation that takes into account nutrient consumption. The model was implemented using the finite element method with the COMSOL Multiphysics software. Computational experiments allow one to compare variants of the model implementation, taking into account logical growth, strong and weak Allee effects in relation to the model of microorganism evolution.

**Ключевые слова:** модель бактериального роста, модель бактериальной коммуникации, модель Аллена-Кана, эффект Алли, реакционно-диффузионная система, моделирование методом конечных элементов

**Keywords:** bacterial growth model, bacterial communication model, Allen-Cahnmodel, Allee effect, reaction-diffusion system, finite element simulations

## Введение

Одним из важнейших направлений математической биологии является разработка, программная реализация и применение моделей, позволяющих описать процессы самоорганизации микроорганизмов. Бактерии, как важнейшие представители микромира, при их исследовании с помощью метода культивации на питательных средах характеризуются формированием сложных пространственных конфигураций – бактериальных паттернов.

Для имитации процессов роста бактериальных колоний и потребления питания, широко применяют детерминированные модельные описания. В числе наиболее известных подходов можно отметить модели типа «хищник-жертва», представляющие собой пространственно-временные аналоги моделей Моно и Друпэ, включающие стохастическую зависимость диффузионного процесса роста биомассы от питания, а также реакционно-диффузионные модификации модели Колмогорова-Фишера [1-4]. Последний подход предполагает логический рост популяции микроорганизмов. Однако, как отмечает ряд исследователей (например, [5]), многие микроорганизмы при определенных внешних условиях ведут себя как сообщество, которое получает шанс на выживание при достижении определенной численности. Если популяция меньше некоторого порога, скорость роста снижается. Такое поведение популяций макроорганизмов соответствует проявлению эффекта Олли. В зависимости от характеристик зависимости скорости роста на единицу популяции (*Per capita*) выделяют сильный (указанная величина может быть отрицательной) и слабый эффекты Олли. Сравнение поведения этой характеристики для логистического роста численности популяции и роста с эффектом Олли показано на рис. 1.

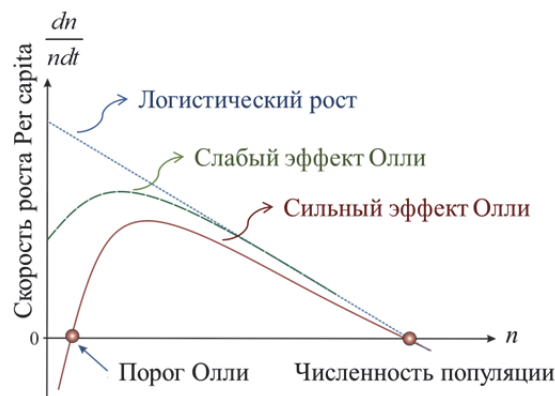


Рисунок 1 – Зависимость скорости роста популяции (на единицу популяции) от численности популяции для различных модельных подходов

В рамках детерминированного подхода, позволяющего учесть эффект Олли для популяций организмов, в литературе представлена модель Аллена-

Кана [6], которую в данном случае можно интерпретировать как модификацию модели Колмогорова-Фишера.

Учет пространственно-временной динамики популяций играет основополагающую роль в модели, предназначенной для прогнозирования характеристик бактериального кворума [7]. В связи с чем, настоящее исследование нацелено на развитие детерминированной модели эволюции бактериальных культур на питательных средах и численную реализацию этой модели для сравнительных характеристик режимов логического роста, роста популяции с учетом сильного и слабого эффектов Олли.

### Математическая постановка задачи

Математическая формализация 2D модели представлена начально-граничной задачей для системы полулинейных уравнений с параболического типа:

$$\tau_B \frac{\partial B}{\partial t} = D_B \Delta B + f(B), \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad 0 < t \leq \bar{t} \quad (1)$$

$$\tau_N \frac{\partial N}{\partial t} = D_N \Delta N - h \frac{\partial B}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad 0 < t \leq \bar{t} \quad (2)$$

$$B(x, y, 0) = B_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{q^2}\right), \quad N(x, y, 0) = N_0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < l, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t < \bar{t}, \quad (4)$$

де;  $B(x, y, t)$  – концентрация биомассы;  $N(x, y, t)$  – концентрация нутриента,  $\tau_B$ ,  $\tau_N$ ,  $D_B$ ,  $D_N$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $\theta$  – положительные параметры модели;  $l$  – линейный размер расчетной области;  $\bar{t}$  – граница интервала времени наблюдения;  $\Gamma$  – граница расчетной области.

### Вычислительные эксперименты

Численное решение задачи (1) – (4) проводилось методом конечных элементов с использованием пакета COMSOL Multiphysics. Для определенного набора параметров проведена серия вычислительных экспериментов, основной целью которых было установление влияния различных механизмов роста в рамках модели Аллена-Кана (формализованного нелинейным реакционным слагаемым  $f(B)$ ) на поведение основных характеристик модели. На рис. 2 представлен результаты симуляции концентрации биомассы и питательного субстрата в фиксированные моменты времени с учетом закона логического роста  $f(B) = aB(b - B)$ , сильного и слабого эффектов Олли  $f(B) = aB(b - B)(B - (d - \theta \cdot \arctan(eN)))$ .

Результаты симуляций свидетельствуют о том, что применительно к задаче визуализации бактериальных паттернов наиболее адекватные результаты (соответствующие биологическим наблюдениям) могут быть

получены с использованием модели Аллена-Кана, учитывающей слабый эффект Олли.

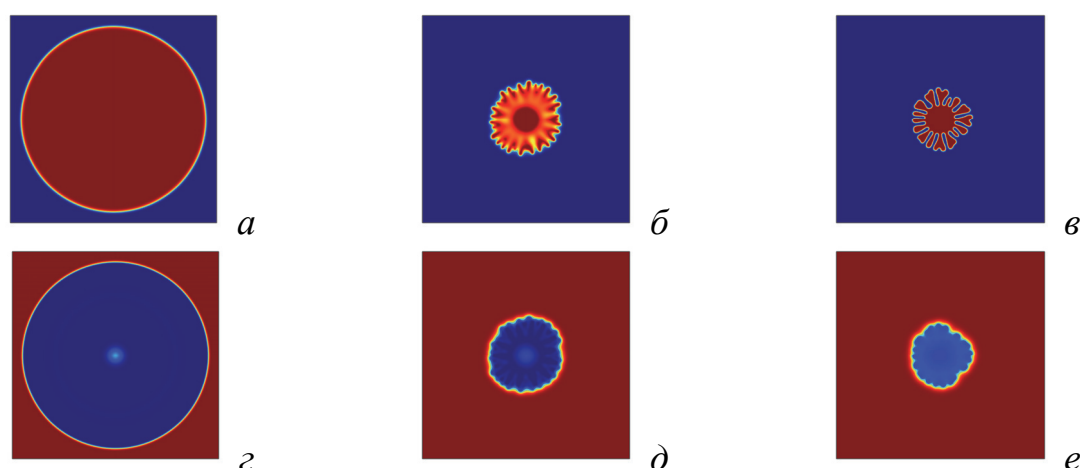


Рисунок 2 – Пространственные распределения биомассы – (а), (б), (в) и питания (г), (д), (е) для логистического роста – (а), (г) при  $\bar{t} = 15$ , роста с учетом слабого – (б), (д) и сильного (в), (е) эффектов Олли при  $\bar{t} = 60$

### Благодарности

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8).

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Studies of bacterial branching growth using reaction–diffusion models for colonial development / I. Golding, Y. Kozlovsky, I. Cohen, E. Ben-Jacob // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 1998. – V. 260, Issues 3–4, – P. 510-554.
2. Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis* / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, T. Umeda, N. Shigesada // *J. Theor. Biol.* – 1997. – V. 188. – P. 177-185.
3. Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И.А. Шевкун, А.Г. Масловская // *Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки*. – 2023. – № 101. – С. 30-39.
4. Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns / M. Mimura, H. Sakaguchi, M. Matsushita // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2000. V. 282(1–2). – P. 283-303.
5. Kaul, R.V. Experimental demonstration of an Allee effect in microbial populations / R.V. Kaul, A.M. Kramer, F.C. Dobbs, J.M. Drake // *Biology letters*. – 2016. – V. 12(4). – P. 20160070.

6. Modeling of Allee effect in biofilm formation via the stochastic bistable Allen-Cahn partial differential equation / M. Jornet // Stochastic Analysis and Applications. – 2021. – V. 39(1). – P. 22-32.

7. Modeling of bacterial communication in the extended range of population dynamics / Y. Shuai, A. Maslovskaya, C. Kuttler // Mathematical Biology. – 2023. – V. 18(1). – P. 89-104.

УДК 004.8

**Шутов Константин Станиславович**, аспирант, Дальневосточный федеральный университет

**Shutov Konstantin Stanislavovich**, postgraduate student, Far Eastern Federal University

## **РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ ПРОГРАММНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОРЕЖИМНОГО УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ УСТРОЙСТВОМ**

## **DEVELOPMENT OF A SOFTWARE SOLUTION ARCHITECTURE FOR MULTI-MODE CONTROL OF AN UNMANNED DEVICE**

**Аннотация.** Создание и внедрение беспилотных устройств привлекает внимание исследователей из-за их широкого применения, от видеонаблюдения до сельского хозяйства. Основной вызов заключается в разработке гибкой системы управления, способной работать с различными типами и режимами беспилотников. Существующие системы часто страдают от недостаточной гибкости. В работе предложена новая архитектура, состоящая из подсистем выборки команд, исполнения команд и сопряжения программной и аппаратной части. Программно-аппаратный прототип автомобильного типа продемонстрировал эффективность этой архитектуры, подтверждая ее перспективность для создания адаптивных беспилотных устройств.

**Abstract.** The creation and integration of unmanned devices has attracted the attention of researchers due to their wide range of applications, from video surveillance to agriculture. The main problem is to develop a flexible control system that can work with different types and modes of drones. Existing systems often lack flexibility. The paper proposes a new architecture that consists of a subsystem for command sampling, command execution and coupling of software and hardware. An automobile-type software and hardware prototype demonstrated the effectiveness of this architecture, confirming its prospects for creating adaptive unmanned devices.

**Ключевые слова:** беспилотное устройство, архитектура, режим управления, система управления, нейронная сеть.



**Keywords:** unmanned vehicle, drone, architecture, control mode, control system, neural network.

## **Введение**

На сегодняшний день создание и внедрение беспилотных устройств является объектом пристального внимания со стороны исследователей и инженеров. Беспилотники используются в самых разных отраслях: видеонаблюдение, доставка грузов, сельскохозяйственные работы, мониторинг параметров окружающей среды и т. п. Поэтому в настоящее время разработка эффективной и гибкой системы управления, способной функционировать с разнообразными типами беспилотных устройств и режимами работы, становится ключевым аспектом исследований [1].

Текущие решения в области систем управления беспилотными устройствами сталкиваются с ограничениями из-за недостаточной гибкости, обусловленной часто неудачной архитектурой системы, нет устоявшихся архитектурных решений. Для успешной реализации системы управления для разнообразных типов беспилотных устройств и режимов работы необходимо уделить внимание аспектам стандартизации и модульности, которые обеспечат совместимость различных компонентов и упростят процесс интеграции новых элементов [2, 3]. Таким образом в настоящее время разработка архитектурного решения для управления беспилотными устройствами является актуальной задачей.

В настоящее время реализованы различные программные архитектуры для управления беспилотными устройствами: JAUS, 4D/RCS, ArduPilot, ERASMUS, CARMEN, Orca, Player и другие [4, 5, 6]. Существуют и частные разработки, которые разрабатываются с учетом уникальных потребностей и специфики конкретных проектов, а также могут включать в себя особенности, не предусмотренные стандартными архитектурами [7, 8]. Однако, несмотря на разнообразие имеющихся решений, стоит отметить, что многие из них имеют ограничения в работе с переключением режимов управления и не всегда гибко адаптируются к изменяющимся условиям. В связи с этим наблюдается активное развитие частных разработок, ориентированных на уникальные потребности и специфику конкретных проектов.

Целью работы является разработка программной архитектуры системы управления беспилотным устройством, способным гибко изменять алгоритмы и режимы управления.

## **Основная часть**

Для управления беспилотным устройством предлагается создать архитектуру, состоящую из подсистем выборки команд управления, исполнения команд управления и сопряжения программной и аппаратной части. Архитектура представлена на рисунке 1.

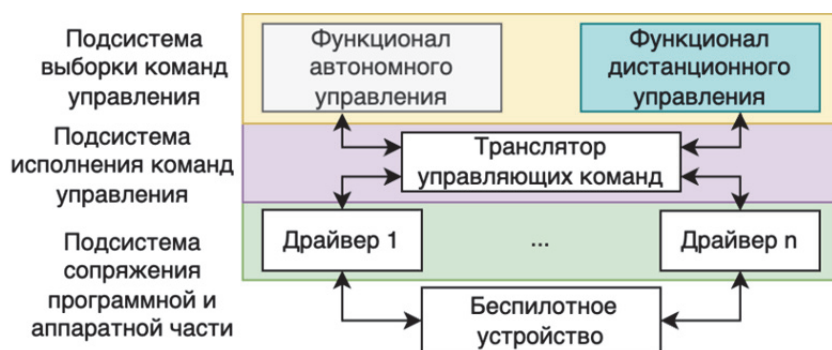


Рисунок 4 – Архитектура системы управления

*Подсистема выборки команд управления* отвечает за формирование управляющих команд с помощью расположенных в ней функциональных модулей, отвечающих за режимы работы беспилотного устройства. После того, как управляющие команды были сформированы, они отправляются в *подсистему исполнения команд* для дальнейшего исполнения. Команды управления могут формироваться, как в автономном режиме работы, так и в дистанционном режиме работы. При этом подсистема должна легко позволять расширять список поддерживаемых режимов работы в соответствии с новыми требованиями и потребностями системы.

*Подсистема исполнения команд управления* отвечает за исполнение управляющих команд (например, с помощью очереди сообщений) и обеспечивает трансляцию управляющих команд в инструкции, которые могут быть исполнены аппаратным обеспечением. Подсистема должна легко позволять добавлять новые типы команд для обеспечения расширенных функциональных возможностей беспилотного устройства. Механизм расширения должен включать в себя модульную структуру, который позволяет интегрировать новые типы команд без необходимости значительных изменений в основном коде системы.

*Подсистема сопряжения программной и аппаратной части* отвечает за взаимодействие с физическими компонентами с помощью драйверов. Драйверы представляют собой специализированные программные модули, которые управляют функциональностью конкретных механизмов и датчиков в беспилотном устройстве.

Для отработки архитектуры был разработан аппаратно-программный прототип автомобильного типа. Его аппаратная часть содержит лишь самые общие части: микрокомпьютер, камеру видеонаблюдения, модуль питания, модуль управления, GPS и шасси (колеса и платформа для крепления аппаратных модулей). Основой функционала автономного управления являются нейронные сети, потому что они могут эмулировать некоторые аспекты человеческого мышления, позволяя системам более гибко и интуитивно реагировать на изменения в окружающей среде [9].

Прототип успешно прошел испытания, описанные в [9], демонстрируя свою способность эффективно функционировать на различных траекториях.

## Заключение

В результате данной работы была спроектирована программная архитектура системы управления беспилотным устройством, обладающая уникальной способностью гибкого изменения алгоритмов и режимов управления.

Реализация программно-аппаратного прототипа позволила успешно отработать спроектированную архитектуру. Этот прототип демонстрирует работоспособность и эффективность системы управления, подтверждая осуществимость концепции и ее потенциал для дальнейшего развития и применения.

Таким образом, полученные результаты говорят о перспективности и значимости разработанной программной архитектуры для создания гибких и адаптивных беспилотных устройств, способных эффективно функционировать в различных условиях и сценариях использования.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Заварин, Б. В. Применение беспилотных летательных аппаратов в современном землеустройстве и кадастре недвижимости / Б. В. Заварин, А. В. Хараев // Актуальные проблемы в землеустройстве и пути их решения : Сборник научных статей по материалам заочной Международной научно-практической конференции, посвященной 180-летию образования УО БГСХА, Горки, 03–04 декабря 2020 года / Редколлегия: А. В. Колмыков (гл. ред.) [и др.]. – Горки: Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, 2021. – С. 84-88. – EDN CNYFAF.

2. Онтологии и безопасность автономных (беспилотных) автомобилей / О. Н. Покусаев, В. П. Куприяновский, Д. В. Катцын, Д. Е. Намиот // International Journal of Open Information Technologies. – 2019. – Т. 7, № 2. – С. 81-93. – EDN YWGUSL.

3. Jalonen, R. Safety of Unmanned Ships: Safe Shipping with Autonomous and Remote Controlled Ships / R. Jalonen, R. Tuominen, M. Wahlström // Aalto University Publication Series Science + Technology. – 2017. – №. 5. – ISBN 978-952-60-7480-1.

4. Towards an Open Software Platform for Field Robots in Precision Agriculture / K. Jensen, M. Larsen, S. H. Nielsen [и др.] // Robotics. – 2014. – №. 3. – С. 207-234. – DOI: <https://doi.org/10.3390/robotics3020207>.

5. The complete integration of MissionLab and CARMEN / S. Rodriguez, C. Diego, M. Rodilla [и др.] // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2017. – Т. 14, № 3. – DOI: <https://doi.org/10.1177/1729881417703565>.

6. Collett, T. H. J. Player 2.0: Toward a Practical Robot Programming Framework / T. H. J. Collett, B. A. MacDonald, B. Gerkey // Proceedings of the Australasian conference on robotics and automation (ACRA 2005). – 2005. – Т. 145. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL:

<https://playerstage.sourceforge.net/index.php?src=pubs> (дата обращения: 26.05.2024).

7. Architecture and Design of Unmanned Sailboat Control System with Open Source, Accessibility and Reliability / Z. Pan, Y. Cao, D. Yang [и др.] // 2021 IEEE International Conference on Unmanned Systems (ICUS). – 2021. – С. 520-526. – DOI: <https://doi.org/10.1109/ICUS52573.2021.9641340>.

8. A Multilevel Architecture for Autonomous UAVs / L. Bigazzi, M. Basso, E. Boni [и др.] // Drones. – 2021. – Т. 5, № 55. – DOI: <https://doi.org/10.3390/drones5030055>.

9. Шутов, К. С. Управление движением по программной траектории с помощью нейронной сети / К. С Шутов, В. М. Гриняк, А. В. Артемьев // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2024. – Т. 12, № 1. – DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2024.44.1.024>.

*Научное издание*

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРИКЛАДНАЯ  
МАТЕМАТИКА**

Материалы III научной конференции с международным участием  
(г. Комсомольск-на-Амуре, 7-11 октября 2024 г.)

Статьи публикуются в авторской редакции

Подписано в печать 19.11.24.

Формат 60×84 1/16. Бумага 65 г/м<sup>2</sup>. Ризограф EZ 570E.

Усл. печ. л. 23,94. Уч.-изд. л. 23,45. Тираж 100 экз. Заказ 31203.

Редакционно-издательский отдел  
Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»  
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27