

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Кафедра «Прикладная математика и информатика»



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины «Функциональный анализ»

основной профессиональной образовательной программы
подготовки бакалавров
по направлению 01.03.04 – «Прикладная математика»
профиль «Математическое и компьютерное моделирование»

Форма обучения	Очная
Технология обучения	Традиционная

Комсомольск-на-Амуре 20__

Автор рабочей программы
доцент кафедры ПМИ, к.ф.-м.н.

_____ М.М. Зарубин
« ____ » _____ 20__ г.

СОГЛАСОВАНО

Директор библиотеки

_____ И.А. Романовская
« ____ » _____ 20__ г.

Заведующий кафедрой ПМИ

_____ С. А. Гордин
« ____ » _____ 20__ г.

Декан ФКТ

_____ Я.Ю. Григорьев
« ____ » _____ 20__ г.

Начальник учебно-методического
управления

_____ Е.Е. Поздеева
« ____ » _____ 20__ г.

Введение

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.03.2015 № 208, и основной профессиональной образовательной программы подготовки бакалавров по направлению 01.03.04 «Прикладная математика».

1 Аннотация дисциплины

Наименование дисциплины	Функциональный анализ						
Цель дисциплины	Формирование у студентов базовых знаний по основным разделам функционального анализа и умений по решению соответствующих задач.						
Задачи дисциплины	• Дать студентам теоретические знания по основным разделам курса. • Научить студентов решению задач по соответствующим разделам курса. • Предоставить студентам задания для самостоятельного выполнения и проконтролировать качество их решения. • Проконтролировать полученные знания, умения и навыки.						
Основные разделы дисциплины	Основные понятия функционального анализа. Полные метрические пространства. Принцип сжимающего отображения и его приложения.						
Общая трудоемкость дисциплины	6 з.е. / 216 академических часов						
	Семестр	Аудиторная нагрузка, ч.			СРС, ч.	Промежуточная аттестация, ч.	Всего за семестр, ч.
		Число недель в семестре	Лекции	Практические занятия			
	6	17	17	34	57	-	108
	7	17	17	34	57	-	108
ИТОГО:		34	34	68	114	-	216

2 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» нацелена на формирование знаний, умений и навыков, указанных в таблице 1.

Таблица 1 – Знания, умения, навыки

Наименование и шифр компетенции, в формировании которой принимает участие дисциплина	Перечень формируемых знаний, умений, навыков, предусмотренных образовательной программой		
	Перечень знаний (с указанием шифра)	Перечень умений (с указанием шифра)	Перечень навыков (с указанием шифра)
Готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач. Способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов (ПК-10)	35(ПК-10-3): Знать и понимать современный математический аппарат функционального анализа.	У5(ПК-10-3): Уметь применять современный математический аппарат для решения типовых задач функционального анализа.	Н5(ПК-10-3): Владеть навыком применения современного математического аппарата для решения прикладных задач с применением функционального анализа.
	35(ПК-10-5): Знать базисные методы функционального анализа на уровне, необходимом для конструктивного применения в прикладных задачах.	У5(ПК-10-5): Уметь применять методы функционального анализа при решении прикладных задач.	Н5(ПК-10-5): Владеть навыками применения методов функционального анализа в профессиональной деятельности.

3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» изучается на третьем и четвертом курсах в шестом и седьмом семестрах.

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в состав блока Б1 «Дисциплины» учебного плана и относится к обязательным дисциплинам его вариативной части (Б1.В.ОД.5).

Для освоения дисциплины необходимы знания, умения, навыки, сформированные на предыдущих этапах формирования компетенции ПК-10 «Готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач. Способность применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов» в процессе изучения дисциплин: «Общая алгебра», «Классическая механика // Прикладная механика», «Дифференциальные уравнения», «Теория случайных процессов», «Уравнения математической физики», «Механика сплошных сред», «Теория пластичности», «Теория колебаний и устойчивости».

Изучение дисциплины необходимо для дальнейшего формирования компетенции ПК-10 в процессе изучения дисциплин: «Дифференциальная геометрия», «Методы оптимизации», «Механика сплошных сред», «Теория пластичности».

4 Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 академических часов.

Распределение объема дисциплины по видам учебных занятий представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Объем дисциплины по видам учебных занятий

Объем дисциплины	Всего академических часов
Общая трудоемкость дисциплины	216
Контактная аудиторная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий), всего	102
В том числе:	
занятия лекционного типа (лекции и иные учебные занятия, предусматривающие преимущественную передачу учебной информации педагогическими работниками)	34
занятия семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и иные аналогичные занятия)	68
Самостоятельная работа обучающихся и контактная работа , включающая групповые консультации, индивидуальную работу обучающихся с преподавателями (в том числе – индивидуальные консультации); взаимодействие в электронной информационно-образовательной среде вуза	114
Промежуточная аттестация обучающихся	-

5 Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Таблица 3 – Структура и содержание дисциплины

Наименование разделов, тем и содержание материала	Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
				Компетенции	Знания, умения, навыки
Раздел 1 Основные понятия функционального анализа					
Тема Понятие о математической структуре. Функциональный анализ как раздел математики, изучающий математические структуры (категории пространств). Иерархия основных математических структур	Лекция	1	Презентационная	ПК- 10	35(ПК-10-3)
Тема Простейшая (количественная) категория. Понятие мощности множества. Счетные и континуальные множества и их свойства	Лекция	4	Презентационная	ПК- 10	35(ПК-10-3)
Тема Доказательство основных классических неравенств: Гёльдера, Минковского, Коши-Буняковского для конечных сумм, рядов, интегралов	Лекция	4	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-3)
Тема Метрические пространства. Примеры метрических пространств. Открытые и замкнутые шары в метрических пространствах. Понятие открытого, замкнутого множества в метрическом пространстве, их свойства	Лекция	4	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-3)
Тема Понятие топологического пространства. Определение предела, непрерывности в топологических терминах. Требования на топологию, обеспечивающие естественные свойства предела (хаусдорфовость топологии)	Лекция	4	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-3)

Наименование разделов, тем и содержание материала	Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
				Компетенции	Знания, умения, навыки
Тема Сравнение мощностей различных множеств	Практическое занятие	10	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Тема Построение различных метрик на основных множествах-носителях (числовых множествах, множествах векторов, последовательностей, функций)	Практическое занятие	6	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Тема Построение «шаров» в конкретных классических метриках. Проверка множеств на открытость, замкнутость в заданных метриках	Практическое занятие	6	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Тема Исследование пределов последовательностей в различных метриках	Практическое занятие	6	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Тема Исследование топологии ранее изученных метрических пространств	Практическое занятие	6	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Тема 1 Виды отображений. Обратное отображение Тема 2 Бинарные отношения. Факторизация множеств посредством отношения эквивалентности Тема 3 Иерархия мощностей множеств	Самостоятельная работа обучающихся	17	Изучение теоретических разделов дисциплины	ПК- 10	35(ПК-10-3)
	Самостоятельная работа обучающихся	17	Подготовка к практическим занятиям	ПК- 10	35(ПК-10-3)

Наименование разделов, тем и содержание материала	Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
				Компетенции	Знания, умения, навыки
	Самостоятельная работа обучающихся	8	Выполнение заданий контрольной работы КР-1	ПК- 10	35(ПК-10-3) У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
	Самостоятельная работа обучающихся	15	Выполнение РГР-1	ПК- 10	35(ПК-10-3) У5(ПК-10-3) Н5(ПК-10-3)
Промежуточная аттестация по дисциплине	Зачет				
ИТОГО по разделу 1	Лекции	17			
	Практические занятия	34			
	Самостоятельная работа обучающихся	57			
Раздел 2 Полные метрические пространства. Принцип сжимающего отображения и его приложения					
Тема Сходящиеся и фундаментальные последовательности в метрических пространствах, их соотношение и свойства	Лекция	2	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-5)

Наименование разделов, тем и содержание материала	Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
				Компетенции	Знания, умения, навыки
Тема Понятие полного метрического пространства. Примеры полных метрических пространств.	Лекция	4	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-5)
Тема Понятие сжимающего отображения. Теорема о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве	Лекция	4	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-5)
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве	Лекция	7	Традиционная	ПК- 10	35(ПК-10-5)
Тема Проверка полноты рассмотренных ранее классических метрических пространств	Практическое занятие	14	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении в конкретных классических задачах отыскания приближенного решения (неподвижной точки отображения)	Практическое занятие	4	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении для отыскания решений нелинейных уравнений	Практическое занятие	4	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении для отыскания решений систем линейных уравнений	Практическое занятие	4	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении для отыскания решений интегральных уравнений	Практическое занятие	4	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)

Наименование разделов, тем и содержание материала	Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
				Компетенции	Знания, умения, навыки
Тема Приложения теоремы о сжимающем отображении для отыскания решений дифференциальных уравнений	Практическое занятие	4	Традиционная	ПК- 10	У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Тема 4 Теорема Хаусдорфа о пополнении неполного метрического пространства Тема 5 Построение приближенного решения задачи Коши методом Пикара Тема 6 Обобщенная теорема о сжимающем отображении. Разрешимость интегрального уравнения Вольтерра	Самостоятельная работа обучающихся	17	Изучение теоретических разделов дисциплины	ПК- 10	35(ПК-10-5)
	Самостоятельная работа обучающихся	17	Подготовка к практическим занятиям	ПК- 10	35(ПК-10-5)
	Самостоятельная работа обучающихся	8	Выполнение заданий контрольной работы КР-2	ПК- 10	35(ПК-10-5) У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
	Самостоятельная работа обучающихся	15	Выполнение РГР-2	ПК- 10	35(ПК-10-5) У5(ПК-10-5) Н5(ПК-10-5)
Промежуточная аттестация по дисциплине	Зачет с оценкой				

Наименование разделов, тем и содержание материала		Компонент учебного плана	Трудоемкость (в часах)	Форма проведения	Планируемые (контролируемые) результаты освоения	
					Компетенции	Знания, умения, навыки
ИТОГО по разделу 2		Лекции	17			
		Практические занятия	34			
		Самостоятельная работа обучающихся	57			
ИТОГО по дисциплине	Лекции		34			
	Практические занятия		68			
	Самостоятельная работа обучающихся		114			
ИТОГО: общая трудоемкость дисциплины 216 часов, в том числе с использованием активных методов обучения 5 часов						

6 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа обучающихся, осваивающих дисциплину «Функциональный анализ», состоит из следующих компонентов:

- изучение теоретических разделов дисциплины;
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка и оформление двух контрольных работ (по одной в каждом семестре);
- подготовка и оформление двух РГР (по одной в каждом семестре).

Рекомендуемый график выполнения самостоятельной работы студента представлен в таблице 4.

Самостоятельная работа студентов, реализуемая вне рамок аудиторных занятий, в каждом из семестров (шестой и седьмой семестры) имеет следующую структуру:

- подготовка к лекциям;
- теоретическая подготовка к практическим занятиям;
- выполнение контрольной работы и подготовка к её сдаче;
- выполнение расчетно-графической работы.

При подготовке к лекциям студент должен восстановить в памяти материал, разобранный в предыдущих лекциях, и освежить навыки практического использования этого материала на практических занятиях.

Теоретическая подготовка к практическим занятиям требует знания пройденного лекционного материала, предварительного изучения методов решения задач по соответствующему разделу дисциплины.

Контрольная работа выполняется в первой половине семестра по мере накопления необходимых знаний и умений для её выполнения.

Расчетно-графическая работа выполняется во второй половине семестра и обобщает полученные знания, умения и навыки.

Таблица 4 – Рекомендуемый график выполнения самостоятельной работы

Вид самостоятельной работы	Часов в неделю																	Итого по видам работ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
Изучение теоретических разделов дисциплины	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Подготовка к практическим занятиям	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Выполнение заданий контрольной работы КР-1			1	1	1	1	1	1	1	1								8
Выполнение РГР-1											2	2	2	2	2	2	3	15
Итого 6 семестр	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	57
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
Изучение теоретических разделов дисциплины	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Подготовка к практическим занятиям	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Выполнение заданий контрольной работы КР-2			1	1	1	1	1	1	1	1								8
Выполнение РГР-2											2	2	2	2	2	2	3	15
Итого 7 семестр	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	57

7 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Таблица 5 – Паспорт фонда оценочных средств

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контроли- руемой компе- тенции (или ее части)	Наименование оценочного средства	Показатели оценки
Раздел 1 Основные по- нятия функционально- го анализа.	ПК-10-3	Контрольная работа КР-1. Расчетно-графическая работа РГР-1.	Знает основные понятия функционального анализа и умеет применять их для решения задач.
Раздел 2 Полные мет- рические пространства. Принцип сжимающего отображения и его приложения.	ПК-10-5	Контрольная работа КР-2. Расчетно-графическая работа РГР-2.	Знает принцип сжимающе- го отображения и умеет применять его для решения задач.

1. Промежуточная аттестация в шестом семестре проводится в форме зачета, в седьмом семестре выставляется зачет с оценкой.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций, представлены в виде технологической карты дисциплины (таблица 6).

Таблица 6 – Технологическая карта

	Наименование оценочного средства	Сроки выпол- нения	Шкала оценива- ния	Критерии оценивания
6 семестр <i>Промежуточная аттестация в форме зачета</i>				
1	Контрольная работа КР-1	11 неделя	50 бал- лов	50 баллов - студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите. 30 баллов - студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите. 15 баллов - студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах

	Наименование оценочного средства	Сроки выпол- нения	Шкала оценива- ния	Критерии оценивания
				на дополнительные вопросы на защите было допу- щено много неточностей. 0 баллов - при выполнении задания студент проде- монстрировал недостаточный уровень владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на до- полнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.
2	РГР-1	17 неделя	50 бал- лов	50 баллов - студент правильно выполнил задание. Показал отличное владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профес- сиональных задач в рамках усвоенного учебного ма- териала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите. 30 баллов - студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при ре- шении профессиональных задач в рамках усвоенно- го учебного материала. Ответил на большинство до- полнительных вопросов на защите. 15 баллов - студент выполнил задание с существен- ными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допу- щено много неточностей. 0 баллов - при выполнении задания студент проде- монстрировал недостаточный уровень владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на до- полнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.
3	Теоретиче- ские вопросы	17 неделя	50 бал- лов	50 баллов – даны полные ответы, приведены приме- ры. 30 баллов – даны полные ответы, допущены неточ- ности. 15 баллов – даны неполные ответы, допущены ошибки. 0 баллов – ответы на поставленные вопросы отсут- ствуют или неверны.
ИТОГО		-	150 баллов	

	Наименование оценочного средства	Сроки выпол- нения	Шкала оценива- ния	Критерии оценивания
Критерии оценки результатов обучения по дисциплине: 0-64 % от максимально возможной суммы баллов – «не зачтено» (недостаточный уровень для промежуточной аттестации по дисциплине); 65-100 % от максимально возможной суммы баллов – «зачтено».				
7 семестр Промежуточная аттестация в форме зачета с оценкой				
1	Контрольная работа КР-2	11 неделя	50 бал- лов	50 баллов - студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите. 30 баллов - студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите. 15 баллов - студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей. 0 баллов - при выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.
2	РГР-2	17 неделя	50 бал- лов	50 баллов - студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите. 30 баллов - студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите. 15 баллов - студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное

	Наименование оценочного средства	Сроки выпол- нения	Шкала оценива- ния	Критерии оценивания
				владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей. 0 баллов - при выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей.
3	Теоретиче- ские вопросы	17 неделя	50 бал- лов	50 баллов – даны полные ответы, приведены приме- ры. 30 баллов – даны полные ответы, допущены неточ- ности. 15 баллов – даны неполные ответы, допущены ошибки. 0 баллов – ответы на поставленные вопросы отсут- ствуют или неверны.
ИТОГО		-	150 баллов	
Критерии оценки результатов обучения по дисциплине: 0-64 % от максимально возможной суммы баллов – «неудовлетворительно» (недостаточный уровень для промежуточной аттестации по дисциплине); 65-74 % от максимально возможной суммы баллов – «удовлетворительно» (пороговый (минимальный) уровень); 75-84 % от максимально возможной суммы баллов – «хорошо» (средний уровень); 85-100 % от максимально возможной суммы баллов – «отлично» (высокий (максимальный) уровень).				

Задания для текущего контроля

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

Задание 1

Найдите расстояние между элементами x и y в метрике пространств l_1 и l_∞ .

$$1. \quad \begin{aligned} x &= \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \right) \\ y &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} x &= (1, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} x &= \left(1, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3^{n-1}}, \dots \right) \\ y &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} x &= (100, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x &= \left(1, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{5^{n-1}}, \dots \right) \\ y &= \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{5^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} x &= (1001, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{5^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} x &= \left(1, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{7^{n-1}}, \dots \right) \\ y &= \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \dots, \frac{1}{7^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} x &= (0, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} x &= (0, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{189}, \dots, \frac{1}{13^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} x &= (8, 0, \dots, 0, \dots) \\ y &= \left(\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n \cdot (n+2)}, \dots \right) \end{aligned}$$

Задание 2

Найдите расстояние между функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в метрических пространствах $L_1[a; b]$, $L_2[a; b]$ и $L_\infty[a; b]$.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|-----------|----------|
| 1. $f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x + 3$ | $a = 0$ | $b = 5$ |
| 2. $f_1(x) = x - 1$ | $f_2(x) = 2x + 1$ | $a = -2$ | $b = 7$ |
| 3. $f_1(x) = x + 2$ | $f_2(x) = 6x - 7$ | $a = -5$ | $b = 8$ |
| 4. $f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x + 8$ | $a = -4$ | $b = 15$ |
| 5. $f_1(x) = x^2 + 5x - 8$ | $f_2(x) = x + 4$ | $a = -7$ | $b = 10$ |
| 6. $f_1(x) = x^2 - 3x + 9$ | $f_2(x) = 3x + 4$ | $a = -6$ | $b = 5$ |
| 7. $f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 4x + 12$ | $a = -10$ | $b = 17$ |
| 8. $f_1(x) = 2x^2 + 4x - 5$ | $f_2(x) = x^2$ | $a = -6$ | $b = 4$ |
| 9. $f_1(x) = x^3$ | $f_2(x) = 2x^2 + 3x$ | $a = -2$ | $b = 4$ |
| 10. $f_1(x) = x^3$ | $f_2(x) = 4x^2 + 5x$ | $a = -5$ | $b = 9$ |

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

Задание 1

1. В метрическом пространстве R с обычной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ построить пример пересечения совокупности открытых множеств, которое не являлось бы открытым.

2. В метрическом пространстве R с обычной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ построить пример объединения совокупности замкнутых множеств, которое не являлось бы замкнутым.

3. В метрическом пространстве R_1^2 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

4. В метрическом пространстве R_2^2 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

5. В метрическом пространстве R_∞^2 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

6. В метрическом пространстве R_1^3 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

7. В метрическом пространстве R_2^3 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

8. В метрическом пространстве R_∞^3 изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

9. В метрическом пространстве $L_\infty^\infty [2; 3]$ изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в $f(x) = x^3 + 1$.

10. В метрическом пространстве $L_\infty^\infty [2; 2]$ изобразить замкнутый шар единичного радиуса с центром в $f(x) = x^2 - 1$.

Задание 2

1. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_1(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_1 .

2. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_{0,5}(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_2 .

3. Проверьте, принадлежит ли замкнутому шару $\bar{O}_1(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_∞ .

4. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_{0,5}(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^n}{3^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_1 .

5. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_{0,5}(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^n}{3^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_2 .

6. Проверьте, принадлежит ли замкнутому шару $\overline{O}_1(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_∞ .

7. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_1(\vec{1})$, где $\vec{1} = (1, 1, 1, \dots)$ точка $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_∞ .

8. Проверьте, принадлежит ли замкнутому шару $\overline{O}_1(\vec{0})$, где $\vec{1} = (1, 1, 1, \dots)$ точка $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_∞ .

9. Проверьте, принадлежит ли открытому шару $O_1(\vec{1})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_3 .

10. Проверьте, принадлежит ли замкнутому шару $\overline{O}_{0,3}(\vec{0})$, где $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots)$ точка $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots\right)$ в метрическом пространстве l_3 .

Задание 3

1. Пусть O_1 и O_2 - два открытых шара в метрическом пространстве, пересечение которых не пусто. Докажите, что существует открытый шар, принадлежащий их пересечению.

2. Доказать, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством.

3. Доказать, что замкнутый шар в метрическом пространстве является замкнутым множеством.

4. В метрическом пространстве ограниченных последовательностей l_∞ рассмотрим последовательность $\{e_n\}$ так называемых координатных ортов:

$$e_1 = 1, 0, 0, \dots$$

$$e_2 = 0, 1, 0, \dots$$

$$e_3 = 0, 0, 1, 0, \dots \text{ и т. д.}$$

К какой точке пространства l_∞ сходится данная последовательность покоординатно? Является ли эта точка пределом последовательности $\{e_n\}$ в метрике l_∞ ? Сходится ли вообще последовательность $\{e_n\}$ в l_∞ ?

5. Докажите, что при непрерывном отображении прообраз замкнутого множества тоже замкнут.

6. Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций рассматривается с обычной равномерной метрикой. Проверить, является ли функционал $F(y) = \max_{x \in [a, b]} y(x)$ непрерывным.

7. Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций рассматривается с обычной равномерной метрикой. Проверить, является ли функционал $F(y) = \min_{x \in [a, b]} y(x)$ непрерывным.

8. Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций рассматривается с обычной равномерной метрикой. Проверить, является ли функционал $F(y) = \int_a^b y(x) dx$ непрерывным.

9. Доказать, что отображение $f: M \rightarrow R$ метрического пространства M в числовую прямую R , где $f(x) = \rho(a, x)$ (a - фиксированный элемент метрического пространства M), является непрерывным.

10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ непрерывные отображения. Докажите, что множество $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ - замкнуто.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

Задание

Найдите приближенное решение заданной системы линейных уравнений $A \cdot X = B$, выделив сжимающий оператор и вычислив пять членов итерационной последовательности. Найдите отклонение полученного приближенного решения от точного решения системы в метриках пространств R_1^3 , R_2^3 , R_∞^3 . Все требуемые вычисления провести в среде MathCAD.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 8 & -2 \\ 1 & 200 & 7 \\ 3 & -5 & -50 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -50 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 18 & -9 \\ 1 & 300 & 17 \\ 13 & -7 & -80 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 150 \\ 400 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 700 & 81 & -42 \\ 11 & 500 & 70 \\ 30 & -25 & -500 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -50 \\ 47 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} -600 & 19 & 21 \\ 18 & 200 & 76 \\ -3 & -5 & -150 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -250 \\ 140 \\ 270 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 140 & 1 & -2 \\ 10 & 200 & 8 \\ 8 & -5 & -500 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 500 \\ 440 \\ 620 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 18 & -22 \\ 16 & 200 & 71 \\ 33 & -5 & -500 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 50 \\ -40 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 700 & 8 & -2 \\ 1 & 300 & 37 \\ 43 & -55 & -850 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -70 \\ 400 \\ 320 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 8 & 2 \\ 10 & 200 & 7 \\ 23 & -5 & -500 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 57 \\ -46 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 8 & -2 \\ 15 & 200 & -7 \\ -23 & -5 & -500 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 52 \\ -66 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} -800 & 38 & 27 \\ 10 & 900 & 67 \\ 29 & -15 & -300 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 50 \\ -45 \\ -28 \end{pmatrix}$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

Задание

Методом Пикара найти четыре первых члена итерационной последовательности, сходящейся к решению заданной задачи Коши. Результат проверить, сравнив с точным решением задачи Коши, разложенным в ряд Тейлора.

$$1. \quad \begin{cases} y' = y \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x} \\ y(6) = 3 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} y' = x \cdot y \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} y' = x^2 \cdot y \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} y' = x^3 \cdot y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{x^5} \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} y' = x^5 \cdot y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} y' = y + e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Теоретические вопросы (6 семестр)

1. Понятие о математической структуре. Иерархия основных математических структур.
2. Доказательство основных классических неравенств: Гёльдера, Минковского, Коши-Буняковского для конечных сумм, рядов, интегралов.
3. Понятие метрического пространства. Примеры метрических пространств.
4. Открытые и замкнутые шары в метрических пространствах. Понятие открытого, замкнутого множества в метрическом пространстве, их свойства.
5. Понятие предела последовательности в метрическом пространстве, его единственность.
6. Понятие топологического пространства. Определение предела, непрерывности в топологических терминах. Требования на топологию, обеспечивающие естественные свойства предела (хаусдорфовость).

Теоретические вопросы (7 семестр)

1. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в метрических пространствах, их соотношение и свойства.
2. Понятие полного метрического пространства. Примеры полных метрических пространств (в частности, уметь доказать полноту $\mathbf{R}$).
3. Понятие сжимающего отображения. Теорема о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве и её приложения.
4. Обобщенная теорема о сжимающем отображении; её приложение к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра.
5. Примеры неполных метрических пространств.
6. Теорема Хаусдорфа о пополнении произвольного метрического пространства.

8 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

8.1 Основная литература

1 Богачев, В.И. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В.И. Богачев, – М.: Изд-во ПСТГУ, 2011. – 396 с. – Режим доступа: <https://www.twirpx.com/file/1784448/>, свободный. – Загл. с экрана.

2 Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учебник для вузов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с. – Режим доступа: <https://edulib.com/matematika-2/dlya-studentov/kolmogorov-a-n-fomin-s-v-elementyi-teorii-funktsiy-i-funktsionalnogo-analiza-onlayn>, свободный. – Загл. с экрана.

8.2 Дополнительная литература

1 Фирсов, И.П. Лекции по функциональному анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.И. Сухинов, И.П. Фирсов. - Ростов н/Д: Издательство ЮФУ, 2009. - 189 с. ISBN 978-5-9275-0671-2 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/549858>.

2 Сазонов, Л.И. Функциональный анализ в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С.В. Ревина, Л.И. Сазонов - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/556115>.

3 Шейпак, И.А. Задачи по функциональному анализу [Электронный ресурс]: Учебное пособие / П.А. Бородин, А.М. Савчук, И.А. Шейпак - М.:МЦНМО, 2017. - 334 с.: ISBN 978-5-4439-3092-3 - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/970336>.

4 Кадец, В. М. Курс функционального анализа. [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В. М. Кадец. – Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с. – Режим доступа: <https://www.twirpx.com/file/810552/>, свободный. – Загл. с экрана.

5 Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учебник для вузов / А.Я. Хелемский, – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с. – Режим доступа: <https://nashol.com/2014102680297/lekcii-po-funktsionalnomu-analizu-helemskii-a-ya-2004.html>, свободный. – Загл. с экрана.

6 Босс В. Лекции по математике. Т. 5: Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В. Босс, – М.: КомКнига, 2005. – 216 с. – Режим доступа: <http://mexalib.com/view/26793>, свободный. – Загл. с экрана.

7 Богачев, В.И., Действительный и функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебник для вузов / Богачев В.И., Смолянов О.Г. – М.: РХД, 2009. – 724 с. – Режим доступа: <http://eek.diary.ru/p182478167.htm>, свободный. – Загл. с экрана.

9 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для повышения качества выживаемости знаний, задачи практических занятий и расчетно-графических работ подбираются с учетом необходимости применения знаний в последующих дисциплинах.

Проведение контроля текущей успеваемости, с одной стороны, позволяет получать адекватную информацию о степени усвоения учебного материала, с другой стороны, стимулирует ритмичность учебной деятельности.

Текущий контроль учебной деятельности студентов осуществляется на практических занятиях.

Контрольные работы (КР) способствует лучшему освоению практических навыков данного предмета. Студент получает задания в начале каждого из семестров, а сдает выполненную контрольную работу в середине соответствующего семестра (11 неделя).

Расчетно-графические работы (РГР) обобщают и систематизируют полученные знания, умения и навыки. Студент получает задания по каждой РГР в начале семестра, а сдает выполненную РГР в конце семестра.

Студент, не выполнивший к концу соответствующего семестра контрольную работу и РГР, не допускается до зачета. Критерии оценки результатов обучения по дисциплине представлены в технологической карте (таблица 6).

10 Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

С целью повышения качества ведения образовательной деятельности в университете создана электронная информационно-образовательная среда. Она подразумевает организацию взаимодействия между обучающимися и преподавателями через систему личных кабинетов студентов, расположенных на официальном сайте университета в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу <https://student.knastu.ru>. Созданная информационно-образовательная среда позволяет осуществлять взаимодействие между участниками образовательного процесса посредством

организации дистанционного консультирования по вопросам выполнения практических заданий. В учебном процессе по дисциплине активно используется контрольно-рейтинговая система факультета компьютерных технологий по контролю уровня выполнения лабораторных работ «ЛабДиспетчер», расположенная по адресу <http://biblserver/LD> в локальной сети ФКТ.

11 Описание материально-технической базы, необходимой для реализации дисциплины

Для реализации программы дисциплины «Функциональный анализ» используется материально-техническое обеспечение, перечисленное в таблице 7.

Таблица 7 – Материально-техническое обеспечение для реализации дисциплины на базе КнАГУ

Аудитория	Наименование аудитории (лаборатории)	Используемое оборудование	Назначение оборудования
	Учебная аудитория	Специализированная (учебная) мебель	Проведение лекционных и практических занятий

Лист регистрации изменений к РПД

[illegible]