Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ[1]**
**по дисциплине**

# Тензорный анализ

| | |
|---|---|
| Направление подготовки | *01.03.04 – «Прикладная математика»* |
| Направленность (профиль) образовательной программы | Математическое моделирование и криптография |

| Обеспечивающее подразделение |
|---|
| *Кафедра «Прикладная математика»* |

Разработчик ФОС:

| доцент кафедры ПМ, к.ф-м.н. | | О.В. Козлова |
|---|---|---|
| (должность, степень, ученое звание) | (подпись) | (ФИО) |

Оценочные материалы по дисциплине рассмотрены и одобрены на заседании кафедры, протокол № _10_ от «_10_» __05_ 2024 г.
Заведующий кафедрой ____________________ А.Л. Григорьева

[1] В данном документе представлены типовые оценочные средства. Полный комплект оценочных средств, включающий все варианты заданий (тестов, контрольных работ и др.), предлагаемых обучающемуся, хранится на кафедре в бумажном и электронном виде.

## 1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами образовательной программы

Таблица 1 – Компетенции и индикаторы их достижения

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения | Планируемые результаты обучения по дисциплине |
|---|---|---|
| Универсальные | | |
| | | |
| Общепрофессиональные | | |
| ОПК-1 Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике | ОПК-1.1 Знает основные естественно-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач;<br>ОПК-1.2 Умеет использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера;<br>ОПК-1.3 Владеет навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности; | Знать основные естествено-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач<br>Уметь использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера<br>Владеть навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности |
| Профессиональные | | |
| | | |

Таблица 2 – Паспорт фонда оценочных средств

| **Контролируемые разделы (темы) дисциплины** | **Формируемая компетенция** | **Наименование оценочного средства** | **Показатели оценки** |
|---|---|---|---|
| Основы тензорного анализа. | ОПК-1 | РГР | Знает основные тензорного анализа и умеет их применять для решения задач. |

## 2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, представлены в виде технологической карты дисциплины (таблица 3).

Таблица 3 – Технологическая карта

| | **Наименование оценочного средства** | **Сроки выполнения** | **Шкала оценивания** | **Критерии оценивания** |
|---|---|---|---|---|
| 7 семестр<br>***Промежуточная аттестация в форме «Зачет с оценкой»*** | | | | |
| | РГР | В конце семестра | 50 баллов | 50 баллов - студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы на защите.<br>30 баллов - студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов на защите.<br>15 баллов - студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено много неточностей.<br>0 баллов - при выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы на защите было допущено множество неточностей. |
| Текущий контроль: | | - | _50__ баллов | - |
| **Критерии оценки результатов обучения по дисциплине:**<br>0 – 64 % от максимально возможной суммы баллов – «неудовлетворительно» (недостаточный уровень для промежуточной аттестации по дисциплине);<br>65 – 74 % от максимально возможной суммы баллов – «удовлетворительно» (пороговый (минимальный) уровень);<br>75 – 84 % от максимально возможной суммы баллов – «хорошо» (средний уровень); | | | | |

| | Наименование оценочного средства | Сроки выполнения | Шкала оценивания | Критерии оценивания |
|---|---|---|---|---|
| 85 – 100 % от максимально возможной суммы баллов – «отлично» (высокий (максимальный) уровень) | | | | |

## 3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы

### 3.1 Задания для текущего контроля успеваемости

**Практические занятия**

1. Определить, сколько составляющих имеют объекты второго и третьего порядков в пятимерном пространстве.
2. Выписать полную систему равенств, задаваемую выражением $f^{ab}c_a = k^b$.
3. Показать, что $r^e_{we}$ есть объект первого порядка, и выписать полностью его составляющие.
4. Дан абсолютно симметричный объект $f^{rst}$ третьего порядка, у которого $f^{111} = 6$, $f^{222} = -4$, $f^{333} = 8$, $f^{112} = 5$, $f^{113} = -2$, $f^{221} = 7$, $f^{223} = 4$, $f^{331} = -3$, $f^{332} = 5$, $f^{123} = -2$. Доопределить оставшиеся элементы объекта.
5. Выписать все возможные типы объекта пятого порядка.
6. Определить, сколько слагаемых содержится в сумме $w_{qdsa}z^q b^d r^s m^a$ в трехмерном пространстве.
7. Доказать, что если $a_{mn}$ антисимметричен, то $a_{mn}x^m x^n = 0$, и обратно, если это уравнение верно для всех значений переменных $x^r$, то $a_{mn}$ антисимметричен.
8. Получить для определителя четвертого порядка результаты, аналогичные случаю определителя третьего порядка, исследуя случай, когда индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4 (в этом случае $e$-объекты являются объектами четвертого порядка и имеется четыре типа символов Кронекера).
9. Доказать, что $\dfrac{\partial A}{\partial a^r_i} = A^i_r$.
10. Доказать, что если $a_{mn}x^m y^n = 0$ для произвольных значений $x^r$ и $y^p$, то $a_{mn} = 0$.
11. Показать, что если элементы $a^r_s$ являются функциями переменной $x^r$, то $\dfrac{\partial A}{\partial x^r} = A^n_m \dfrac{\partial a^m_n}{\partial x^r}$.

12. Доказать, что если $A^{mn}$ есть алгебраическое дополнение $a_{mn}$ в определителе $|a_{mn}|$, то

$$e_{pmn}e_{qrs}A^{pq} = a_{mr}a_{ns} - a_{ms}a_{nr}.$$

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА**

1. Показать, что объект четвертого порядка может быть пяти различных типов.
2. Сколько членов содержится в сумме $a_{mnp}x^m y^n z^p$?
3. Показать, что абсолютно антисимметричный объект третьего порядка имеет только шесть отличных от нуля составляющих, одинаковых по модулю.
4. Если $a_{rs}$ есть объект второго порядка, удовлетворяющий уравнению $ba_{rs} + ca_{sr} = 0$, то показать, что либо $b = -c$ и $a_{rs}$ симметричен, либо $b = c$ и $a_{rs}$ антисимметричен.
5. Доказать, что

$$\delta_r^r = 3, \quad \delta_{mst}^{rst} = 2\delta_m^r, \quad \delta_{rst}^{rst} = 3!.$$

6. Если $b_s^r$ обладает тем свойством, что $b_m^r b_s^m = \delta_s^r$, то показать, что $|b_s^r| = \pm 1$.
7. Показать, что

$$\delta_{ijk}^{rst}a_m^i a_n^j a_p^k = |a_s^r|\delta_{mnp}^{rst}, \quad \delta_{ijk}^{rst}a_r^i a_s^j a_t^k = 3!|a_s^r|.$$

8. Доказать, что

$$e^{rst}A_r^i = e^{ijk}a_j^s a_k^t, \quad e_{ijk}A_r^i = e_{rst}a_j^s a_k^t.$$

9. Показать, что

$$A = \frac{1}{3!}\delta_{rst}^{ijk}a_i^r a_j^s a_k^t, \quad a_r^m A_m^r = 3A.$$

10. Доказать, что

$$\frac{\partial A}{\partial a_i^r} = A_r^i.$$

11. Если $a_{mn}$ симметричен, показать, что $A^{mn}$ тоже симметричен.
12. Выписать формулы, относящиеся к определителю, образованному из составляющих объекта $a^{mn}$.
13. Проверить численные соотношения

$$\delta_{mnp}^{ijk}\delta_{rst}^{hlp} = \delta_{rst}^{ijk}\delta_{mn}^{hl}, \quad \delta_{mnp}^{ijk}\delta_{rst}^{hnp} = 2!\delta_{rst}^{ijk}\delta_m^h, \quad \delta_{mnp}^{ijk}\delta_{rst}^{mnp} = 3!\delta_{rst}^{ijk}.$$

14. Доказать, что если $a_{mn}x^m x^n = b_{mn}x^m x^n$ для произвольных значений $x^r$, то

$$a_{mn} + a_{nm} = b_{mn} + b_{nm}$$

и, следовательно, если $a_{mn}$ и $b_{mn}$ симметричны, то

$$a_{mn} = b_{mn}.$$

15. Показать, что если $A = 0$, то решения системы уравнений $a_{rm}x^m = 0$ удовлетворяют соотношениям

$$(x^1)^2 : (x^2)^2 : (x^3)^2 = A^{11} : A^{22} : A^{33}.$$

16. *Якобиан*. Если $y^1, y^2, y^3$ – функции от $x^1, x^2, x^3$, то якобиан этих функций мы обозначим через

$$\frac{\partial\left(y^1, y^2, y^3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)},$$

то есть $$\frac{\partial\left(y^1, y^2, y^3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} = \left|\frac{\partial y^r}{\partial x^s}\right|.$$

Доказать, что если $z^1, z^2, z^3$ являются функциями $y$, то

$$\left|\frac{\partial z^r}{\partial x^s}\right| = \left|\frac{\partial z^r}{\partial y^s}\right| \cdot \left|\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right|.$$

17. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left\{\log\left|\frac{\partial y^m}{\partial x^n}\right|\right\} = \left|\frac{\partial^2 y^m}{\partial x^r \partial x^n}\right| \cdot \left|\frac{\partial x^n}{\partial y^m}\right|.$$

18. Показать, что $\gamma = \left|\gamma_s^r\right| = 1/c$.

19. Доказать, что $\left|c''^r_s\right| = \left|c'^r_s\right| \cdot \left|c^r_s\right|$.

20. Показать, что

$$\overline{a}^r = \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s} a^s, \quad \overline{a}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^r} a_s.$$

21. Показать, что дифференциалы переменных $dx^r$ образуют контравариантный вектор.

22. Показать, что если тензор в некоторой системе переменных является симметричным (или антисимметричным), то в любой другой системе переменных он также будет симметричным (или антисимметричным). Такой тензор называется симметричным (или антисимметричным).

23. Показать, что $a^r_{st} b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

24. Доказать, что если в соотношении

$$A(r, s, t) B^{st} = C^r$$

$B^{st}$ есть антисимметричный, а в остальном произвольный тензор, то $\{A(r, s, t) - A(r, t, s)\}$ есть тензор, а если $A(r, s, t)$ есть объект, антисимметричный относительно $s, t$, то $A(r, s, t)$ есть тензор.

25. Учитывая, что $e_{rst}$ и $e^{rst}$ – псевдотензоры веса –1 и 1 соответственно, вывести, что символы Кронекера являются истинными тензорами.

26. Показать, что если все составляющие двух псевдотензоров одного и того же порядка и веса равны в одной системе переменных, то они равны и в любой другой системе. (Два тензора, составляющие которых равны друг другу в любой системе переменных, называются равными).

27. Показать, что если $a^r_{st}$ есть псевдотензор, зависящий от параметра $\alpha$, то производная этого псевдотензора по параметру есть псевдотензор того же порядка и веса.