

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ¹
по дисциплине

Линейные преобразования и квадратичные формы

Направление подготовки	01.03.04 – «Прикладная математика»
Направленность (профиль) образовательной программы	Математическое моделирование и криптография

Обеспечивающее подразделение
Кафедра «Прикладная математика»

Разработчик ФОС:

доцент кафедры ПМ, к.ф.-м.н.

(должность, степень, ученое звание)

(подпись)

А.Л. Григорьева

(ФИО)

Оценочные материалы по дисциплине рассмотрены и одобрены на заседании кафедры,
протокол № 5 от « 10 » 03 2024 г.

Заведующий кафедрой _____ А.Л. Григорьева

¹ В данном документе представлены типовые оценочные средства. Полный комплект оценочных средств, включающий все варианты заданий (тестов, контрольных работ и др.), предлагаемых обучающемуся, хранится на кафедре в бумажном и электронном виде.

1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами образовательной программы

Таблица 1 – Компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения	Планируемые результаты обучения по дисциплине
Универсальные		
Общепрофессиональные		
ОПК-1 Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-2.1 Знает основные естественно-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач ОПК-2.2 Умеет использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера ОПК-2.3 Владеет навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности	<i>Знать:</i> основные естественно-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач; <i>Уметь:</i> использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера; <i>Владеть:</i> навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности;

Таблица 2 – Паспорт фонда оценочных средств

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Формируемая компетенция	Наименование оценочного средства	Показатели оценки
Линейные пространства и их преобразования.	ОПК-1	РГР	Осуществляет выбор математических операций и аналитических алгоритмов для решения текущей математической задачи
Билинейные и квадратичные формы.	ОПК-1	Контрольная работа	Демонстрирует практическое использование математических мето-

			дов и аналитических алгоритмов для анализа задач
--	--	--	--

2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, представлены в виде технологической карты дисциплины (таблица 3).

Таблица 3 – Технологическая карта

№	Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
2 семестр <i>Промежуточная аттестация в форме Зачет с оценкой</i>				
1	Расчетно-графическая работа	10 неделя	30 баллов	<p>30 баллов - Студент полностью выполнил задание РГР, показал отличные умения и навыки в рамках усвоенного учебного материала, работа оформлена аккуратно и в соответствии с предъявляемыми требованиями.</p> <p>20 баллов - Студент полностью выполнил задание РГР, показал хорошие умения навыки в рамках усвоенного учебного материала, но не смог обосновать оптимальность предложенного решения, допущены одна или две неточности, есть недостатки в оформлении работы.</p> <p>10 баллов - Студент полностью выполнил задание РГР, но допустил существенные неточности и грубые ошибки, не проявил умения правильно интерпретировать полученные результаты, качество оформления работы имеет недостаточный уровень.</p> <p>0 баллов - Студент не полностью выполнил задание РГР, при этом проявил недостаточный уровень умений и навыков, а также неспособен пояснить полученный результат.</p>
1	Контрольная работа	16 неделя	30 баллов	<p>30 баллов - Студент полностью выполнил задание контрольной работы, показал отличные умения и навыки в рамках усвоенного учебного материала, контрольная работа оформлена аккуратно и в соответствии с предъявляемыми требованиями.</p> <p>20 баллов - Студент полностью выполнил задание контрольной работы, показал хорошие умения навыки в рамках усвоенного учебного материала, но не смог обосновать оптимальность предложенного решения, допущены одна или две неточности, есть недостатки в оформлении контрольной работы.</p>

№	Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
				10 баллов - Студент полностью выполнил задание контрольной работы, но допустил существенные неточности и грубые ошибки, не проявил умения правильно интерпретировать полученные результаты, качество оформления контрольной работы имеет недостаточный уровень. 0 баллов - Студент не полностью выполнил задание контрольной работы, при этом проявил недостаточный уровень умений и навыков, а также не способен пояснить полученный результат.
	Текущий контроль	-	60 баллов	-
	ИТОГО:	-	60 баллов	-
Критерии оценки результатов обучения по дисциплине: 0 – 64 % от максимально возможной суммы баллов – «неудовлетворительно» (недостаточный уровень для промежуточной аттестации по дисциплине); 65 – 74 % от максимально возможной суммы баллов – «удовлетворительно» (пороговый (минимальный) уровень); 75 – 84 % от максимально возможной суммы баллов – «хорошо» (средний уровень); 85 – 100 % от максимально возможной суммы баллов – «отлично» (высокий (максимальный) уровень)				

3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы

3.1 Задания для текущего контроля успеваемости

РГР

1. Образует ли линейное пространство, заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов \vec{a} и \vec{b} , и произведение любого \vec{a} элемента на любое число $\alpha \in R$? Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа. Сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов. В случае линейной зависимости найти выражение одного вектора через другие.

$$1, x^2, 1+x, (1+x)^2 \text{ в } (-\infty, \infty).$$

3. Найти размерность и базис линейного подпространства, являющегося линейной оболочкой системы векторов. Записать разложение векторов системы по найденному базису:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0), & \vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1), & \vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1), \\ \vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1), & \vec{a}_5 = (1, 0, 1, 1). \end{cases}$$
4. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} .$$

5. Найти координаты вектора \vec{x} в базисе $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, если он задан в базисе

$$e = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3). \begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \frac{3}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x} = (1, -4, 8).$$

6. Записать систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:

$$\vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1), \quad \vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1).$$

7. Даны две системы векторов. Найти размерности и базисы суммы и пересечения линейных оболочек этих систем:

$$\vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1), \quad \vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1).$$

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{b}_2 = (2, 2, 0, 0), \quad \vec{b}_3 = (1, 2, 0, 1), \quad \vec{b}_4 = (2, 3, 0, 1).$$

8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x} \in \vec{y}$, заданных в базисе $f = (\vec{f}_1 \vec{f}_2 \vec{f}_3)$, если сами векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ заданы в некотором ортонормированном базисе e .

$$\vec{f}_1 = (2, -1, 3), \quad \vec{f}_2 = (-4, 3, 3), \quad \vec{f}_3 = (1, -1, 0), \quad \vec{x} = (2, 1, 2), \quad \vec{y} = (1, -2, 1).$$

9. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис линейной оболочки векторов.

$$\vec{f}_1 = (2, -1, 3, -1), \quad \vec{f}_2 = (7, -4, 3, 3), \quad \vec{f}_3 = (1, -1, -6, 0).$$

10. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов заданных в некотором ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства E_4 :

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1), \\ \vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1), \quad \vec{a}_5 = (1, 0, 1, 1). \end{cases}$$

11. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования?

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2^2 - x_3, x_3, 2x_2 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, 0); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, 2x_2 + x_3). \end{cases}$$

12. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_1, x_1 - x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (2x_2, x_3, x_1)$. Найти $\varphi(-\varphi + 2\eta)(\vec{x})$.

13. Определить ранг и дефект линейного оператора, а также найти базисы образа и ядра.

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3).$$

14. Найти матрицу линейного преобразования φ в базисе $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, если она задана в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y = x\sqrt{3}$.

16. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ , заданного в некотором базисе матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду: а) методом Якоби, б) методом Лагранжа. Найти канонический базис и матрицу перехода к каноническому базису.

$$k(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Найти это преобразование, канонический базис, матрицу перехода к каноническому базису, убедиться, что в этом базисе матрица квадратичной формы является диагональной.

3. Используя теорию квадратичных форм, исследовать кривую второго порядка заданную

$$k(\vec{x}) = 5\sqrt{2}x_1^2 + 5\sqrt{2}x_2^2 + 6\sqrt{2}x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

общим уравнением и построить ее.

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$