

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ¹
по дисциплине

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Направление подготовки	<i>01.03.04 – «Прикладная математика»</i>
Направленность (профиль) образовательной программы	<i>Математическое моделирование и криптография</i>

Обеспечивающее подразделение
<i>Кафедра «Прикладная математика»</i>

Разработчик ФОС:

доцент кафедры ПМ, к.ф.-м.н.

(должность, степень, ученое звание)

(подпись)

А.Л. Григорьева

(ФИО)

Оценочные материалы по дисциплине рассмотрены и одобрены на заседании кафедры,
протокол № 5 от «10» 03 2024 г.

Заведующий кафедрой _____ А.Л. Григорьева

¹ В данном документе представлены типовые оценочные средства. Полный комплект оценочных средств, включающий все варианты заданий (тестов, контрольных работ и др.), предлагаемых обучающемуся, хранится на кафедре в бумажном и электронном виде.

1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами образовательной программы

Таблица 1 – Компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения	Планируемые результаты обучения по дисциплине
Универсальные		
Общепрофессиональные		
ОПК-1 Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1.1 Знает основные естественно-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач; ОПК-1.2 Умеет использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера; ОПК-1.3 Владеет навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности;	<i>Знать:</i> основные естественно-научные составляющие задач профессиональной деятельности, а также математические и физические теоремы, законы, алгоритмы решения задач; <i>Уметь:</i> использовать методы решения задач, математические, физические законы для решения задач прикладного характера; <i>Владеть:</i> Владеет навыками использования основных математических, физических законов, теорем, алгоритмов решения в задачах профессиональной деятельности;
Профессиональные		

Таблица 2 – Паспорт фонда оценочных средств

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Формируемая компетенция	Наименование оценочного средства	Показатели оценки
Алгебра и геометрия	ОПК-1	Контр.	Знает постановку задачи интерполирования. Умеет строить интерполяционные полиномы. Владеет навыками интерполирования для решения задач.
Алгебра и геометрия		РГР	Знает основные понятия численного дифференцирования и интегрирования. Умеет находить приближенное значение интеграла и производных функций заданных таблично.

			Демонстрирует практическое использование математических методов и аналитических алгоритмов для анализа задач.

2 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, представлены в виде технологической карты дисциплины (таблица 3).

Таблица 3 – Технологическая карта

	Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
<i>Промежуточная аттестация в форме «Эк»замена 1 - семестр</i>				
1	РГР	3-4 неделя	3 - 30 баллов	9-10 баллов - Студент полностью и в срок выполнил задание, показал отличные умения и навыки в рамках усвоенного учебного материала. 6-8 баллов - Студент полностью выполнил задание, показал хорошие умения навыки в рамках усвоенного учебного материала, но не смог обосновать оптимальность предложенного решения, допущены одна или две неточности. 3-5 баллов - Студент полностью выполнил задание, но допустил существенные неточности и грубые ошибки, не проявил умения правильно интерпретировать полученные результаты..
2	«Контр»	зачетная неделя	5 - 30 баллов	25-30 баллов - Студент полностью и в срок выполнил задание контрольной работы, показал отличные умения и навыки в рамках усвоенного учебного материала, контрольная работа оформлена аккуратно и в соответствии с предъявляемыми требованиями. 20-24 баллов - Студент полностью выполнил задание контрольной работы, показал хорошие умения навыки в рамках усвоенного учебного материала, но не смог обосновать оптимальность предложенного решения, допущены одна или две неточности, есть недостатки в оформлении контрольной работы. 15-19 баллов - Студент полностью выполнил задание контрольной работы, но допустил существенные неточности и грубые ошибки, не проявил умения правильно интерпретировать полученные результаты, качество оформления контрольной работы имеет недостаточный уровень. 10-14 баллов - Студент не полностью выполнил задание контрольной работы, при

	Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
				этом проявил недостаточный уровень умений и навыков, а также неспособен пояснить полученный результат
Текущий контроль:	кон-	-	40 баллов	-
ИТОГО:		-	100 баллов	-
Критерии оценки результатов обучения по дисциплине: 0 – 34 % от максимально возможной суммы баллов – «неудовлетворительно» (недостаточный уровень для промежуточной аттестации по дисциплине); 35 – 54 % от максимально возможной суммы баллов – «удовлетворительно» (пороговый (минимальный) уровень); 55 – 84 % от максимально возможной суммы баллов – «хорошо» (средний уровень); 85 – 100 % от максимально возможной суммы баллов – «отлично» (высокий (максимальный) уровень)				

3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы

3.1 Задания для текущего контроля успеваемости

РГР-1 «Линейная и векторная алгебра»

1. Вычислить определитель, используя: а) разложение по 2-ой строке; б) разложение по 3-му столбцу; в) метод эффективного понижения порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ и выяснить, являются ли матрицы перестановочными. Убедиться, что выполняется равенство $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти обратную матрицу C^{-1} двумя способами: а) помощью присоединенной матрицы; б) с помощью элементарных преобразований строк. Показать, что выполняется равенство: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать совместность системы и решить её: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

5. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить её:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 10x_4 - x_5 = -2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_4 = -13, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

6. Найти общее решение системы однородных уравнений и построить ФСР.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 12x_4 + 19x_5 = 0. \end{cases}$$

КР-1 «Линейная и векторная алгебра»

1. Даны векторы $\vec{a} = -5\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 6\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{5\pi}{3}$.

Найти: а) $\left(-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $np_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $\cos(\vec{a}, 2\vec{b})$.

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора \vec{a} ; б) скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; в) проекцию вектора \vec{c} на вектор \vec{d} ; г) координаты точки M , делящей отрезок AB в отношении 5 : 4.

$$A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), \vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC}, \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{CB}, \vec{d} = \vec{AC}.$$

3. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{d} в этом базисе:

$$\vec{a} = \{5, 4, 1\}, \vec{b} = \{-3, 5, 2\}, \vec{c} = \{2, -1, 3\}, \vec{d} = \{7, 23, 4\}.$$

4. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Необходимо: а) Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c}$; б) найти модуль векторного произведения векторов $3\vec{a}, 2\vec{c}$; в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{b}, -4\vec{c}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны \vec{b}, \vec{c} ; д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$.

$$\vec{a} = \{2, -3, 1\}, \vec{b} = \{0, 1, 4\}, \vec{c} = \{5, 2, -3\}.$$

5. Даны вершины пирамиды $A(3, 4, 5), B(1, 2, 1), C(-2, -3, 6), D(3, -6, -3)$. Найти:

а) площадь грани ACD ;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и вершины C и D ;

в) объем пирамиды $ABCD$.

6. Найти собственные числа и собственные векторы преобразования, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тестирование

Т-1 «Линейная алгебра»:

Вопрос 1. Дана система уравнений в матричном виде $A \cdot X = B$. Матричное решение системы будет:

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

- 1) $X = A^{-1} \cdot B$; 2) $X = A \cdot B^{-1}$; 3) $X = B \cdot A^{-1}$.

Вопрос 2. Ранг матрицы не изменится, если.....

Варианты ответов: (выберите несколько правильных ответов)

- 1) транспонировать матрицу,
- 2) все элементы некоторой строки умножить на действительное число $\lambda \neq 0$,
- 3) удалить в матрице произвольную строку,
- 4) к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на действительное число $\lambda \neq 0$.

Вопрос 3. Разложение определителя матрицы A по i -ой строке определяется формулой $\det A = \dots$

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 4. Определитель $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 2\alpha + 7 \end{vmatrix}$ равен 0, если α равно ...

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 5. Если существует матрица $A^T + 9A$, то матрица A

Варианты ответов: (выберите несколько правильных ответов)

- 1) является трапециевидной (размера $m \times n$, где $m < n$),
- 2) может быть треугольной,
- 3) может быть единичной,
- 4) является квадратной.

Вопрос 6. Матрица $\begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ является вырожденной, если число α равно...

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 7. Разность между числом свободных и базисных переменных системы урав-

нений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ равна ...

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 8. Система линейных уравнений $\begin{cases} 8x_1 - 9x_2 = 1, \\ -8x_1 + \alpha x_2 = -3. \end{cases}$ не имеет решений при

$\alpha = \dots$

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 9. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ равен

Запишите решение и ответ:

Вопрос 10. Решить однородную систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Запишите решение и ответ:

Т-2 «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия»

Вопрос 1. Вектор \vec{a} называется единичным, если

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

- 1) $\vec{a} = 1$, 2) $|\vec{a}| = 1$, 3) $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

Вопрос 2. Вектор, параллельный прямой, называется

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

- 1) сонаправленным, 2) направляющим, 3) нормальным.

Вопрос 3. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Тогда линейная комбинация $\vec{a} + 3\vec{b}$ этих векторов имеет вид...

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 4. Пусть \vec{a} и \vec{b} – взаимно перпендикулярные единичные векторы. Тогда $(\vec{a} - \vec{b})^2$ равно ...

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 5. Даны векторы $\vec{a} = (4, -3, 10)$ и $\vec{b} = (2, 1, 4)$, тогда их векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 6. Уравнение прямой вида $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ называется ...

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

- 1) каноническим, 2) общим, 3) нормальным.

Вопрос 7. Уравнением прямой, перпендикулярной прямой $y = 2x + 3$, является...

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

1) $2x - y + 1 = 0$, 2) $x + 2y + 4 = 0$, 3) $x + 3y + 12 = 0$.

Вопрос 8. Нормальный вектор плоскости $x + 2y + z - 15 = 0$ имеет координаты....

Впишите правильный ответ: _____

Вопрос 9. Даны точки $A(0,1)$ и $B(6,-3)$, где B - середина отрезка AC . Тогда точка C имеет координаты

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ)

1) $(3, -1)$, 2) $(12, -7)$, 3) $(12, -6)$, 4) $(12, 7)$.

Вопрос 10. Расстояние от точки $A(1, 4, -3)$ до плоскости $4x + 3y - 12z + 455 = 0$ равно

Впишите правильный ответ: _____

Теоретические вопросы экзамена

1. Перестановки. Теорема о числе перестановок из n элементов (с доказательством). Инверсии. Четные и нечетные перестановки.
2. Определители порядка n . Формулы для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
3. Миноры и алгебраические дополнения элемента матрицы. Теорема о разложении определителя по строке или столбцу (формулировка).
4. Свойства определителей.
5. Действия над матрицами.
6. Определение обратной матрицы. Вывод формулы для вычисления обратной матрицы.
7. Получение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Свойства обратной матрицы.
8. Понятия ранга матрицы и базисного минора. Методы нахождения и свойства ранга матрицы.
9. Системы линейных уравнений, основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли (формулировка). Схема исследования неоднородных систем.
10. Теорема Крамера (с доказательством). Матричный метод решения систем линейных уравнений.
11. Метод Гаусса.
12. Системы однородных линейных уравнений и схема их исследования. Фундаментальная система решений и структура общего решения.
13. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Свойства проекций.
1. Скалярное произведение векторов, его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей. Основные приложения.
2. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей. Основные приложения.
3. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей. Основные приложения.
4. Линейные пространства. Понятие n -мерного евклидова пространства. Линейные преобразования, их собственные числа и собственные векторы.
5. Прямая на плоскости, различные виды уравнений. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение прямых.

6. Плоскость в пространстве, различные виды уравнений. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.
7. Прямая в пространстве. Различные виды уравнений. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение прямых.
8. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
9. Эллипс. Вывод канонического уравнения. Основные формулы.
10. Гипербола. Вывод канонического уравнения. Основные формулы.
11. Парабола. Вывод канонического уравнения. Основные формулы.

Типовые экзаменационные задачи

На экзамен выносятся практические задания, соответствующие всем теоретическим вопросам.

1. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить её:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 10x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$

2. Вычислить определитель:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Даны векторы $\vec{a} = -5\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 6\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 5$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{5\pi}{3}$.

Найти: а) $\left(-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $np_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $\cos\left(\widehat{\vec{a}, 2\vec{b}}\right)$.

4. Найти расстояние от точки $A(1,2,3)$ до плоскости $3x+5y-z=7$.

5. Найти собственные числа и собственные векторы преобразования, заданного

в некотором базисе матрицей: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$