Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

И. В. Солнышкина

ТЕОРИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Утверждено в качестве учебного пособия
Учёным советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 519.872(07)
ББК 65В6.я7
С601

Рецензенты:
Кафедра экономики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», заведующая кафедрой доктор экономических наук, профессор Т. Б. Ершова;
Е. С. Зайцева, коммерческий директор сети магазинов «Bitte-market»

Солнышкина, И. В.
С601 Теория систем массового обслуживания : учеб. пособие / И. В. Солнышкина. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 76 с.

ISBN 978-5-7765-1053-3

В учебном пособии излагаются основные понятия предметной области дисциплины и приводится история возникновения и развития теории массового обслуживания. Содержатся сведения о математических методах, составляющих основу моделирования систем массового обслуживания, таких как уравнение Колмогорова, цепи Маркова, граф состояний систем и др. Представлена характеристика существующих систем массового обслуживания с примерами их оценки и анализа. Приводятся основные сведения, необходимые для анализа и оценки деятельности систем обслуживания, представлены научные исследования систем коммерческих и финансовых предприятий. Даются варианты задания для выполнения индивидуальных самостоятельных работ.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров по направлениям «Торговое дело» (профиль – «Коммерция») и «Экономика» (профиль – «Финансы и кредит»), составлено с расчетом на самостоятельную работу при изучении дисциплины «Теория систем массового обслуживания».

УДК 519.872(07)
ББК 65В6.я7

ISBN 978-5-7765-1053-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория систем массового обслуживания – это область прикладной математики, являющаяся обособленной частью теории случайных процессов, с комплексом задач для самостоятельного исследования. Она базируется на теории вероятностей и математической статистике. Теория систем массового обслуживания в настоящее время имеет широкую область применения не только в экономике, но и в других жизненно значимых отраслях: в социальной сфере, в военном деле, в области организации производства и обслуживания.

Дисциплина «Теория систем массового обслуживания» играет существенную роль при подготовке студентов по направлениям «Торговое дело» (профиль – «Коммерция») и «Экономика» (профиль – «Финансы и кредит»). Теория систем массового обслуживания ставит своей целью ознакомить студентов с существующими моделями количественного анализа, необходимыми для выбора управленческих решений в системах массового обслуживания коммерческой деятельности и финансового бизнеса различной сложности.

В настоящем пособии представлен весь теоретический материал дисциплины, необходимый для самостоятельной работы студентов. Все темы, вынесенные в соответствии с рабочим учебным планом на самостоятельное изучение и рассчитанные на аудиторные занятия, в полном объеме представлены в данном пособии.

В практической части особое внимание уделяется исследованию математических моделей и методов, необходимых для моделирования и анализа деятельности систем массового обслуживания, различной степени сложности. В практическую часть включены также основы моделирования всех существующих в настоящее время систем обслуживания, в зависимости от различных исходных характеристик. Изложенный материал подкреплён исследовательскими статьями автора, связанными с анализом деятельности систем массового обслуживания на территории Хабаровского края (на примере крупных розничных торговых сетей).

В конце каждого раздела приводятся контрольные задания, составленные в виде теоретических вопросов и задач. К сложным практическим задачам даны пояснения к их выполнению, приведены примеры решений.

Задания составлены таким образом, чтобы решения их помогли студентам лучше усвоить и закрепить полученные знания.

Учебное пособие содержит необходимый и достаточный материал для самостоятельной работы, который позволит углубить теоретические знания и привить практические навыки в ходе изучения дисциплины.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАССОВОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ

1.1. История зарождения и развития теории систем массового обслуживания

Теория массового обслуживания, формально являясь частью теории случайных процессов, уже несколько десятилетий имеет самостоятельную область исследований со специфическим курсом задач. Зарождение и развитие теории массового обслуживания можно представить в виде следующей цепочки: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ → ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ → ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.

Теория вероятностей (как исторический родоначальник) теории массового обслуживания зародилась и начала оформляться в XVII в. благодаря необходимости изучения закономерностей случайных явлений. Исторически сложилось так, что схемами, дающими простые и прозрачные модели случайных явлений, а также возможность повторения одного и того же опыта в условиях массовости этих явлений, явились схемы азартных игр. Само слово «азарт» (от французского «le hazard») означает «случай». До сих пор примеры из области азартных игр применяют при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, наиболее просто и наглядно иллюстрирующие основные законы теории. В середине XVII в. математические исследования в области азартных игр проводили такие учёные, как Ферма (1601 – 1665 гг.), Паскаль (1623 – 1662 гг.) и др. Именно работам этих учёных современная математика обязана появлением таких категорий, как «вероятность» и «математическое ожидание». Однако вплоть до следующего столетия зародившаяся наука так и не подошла к классическим определениям теории.

Значительный шаг вперёд в развитии теории вероятностей сделал Яков Бернулли (1654 – 1705 гг.). Он вывел и доказал закон больших чисел (простейшая форма закона больших чисел устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления, т.е. при большом числе опытов относительная частота появления конкретного исхода стабилизируется и приближается к некоему числу – вероятности этого исхода). Позднее Пуассон (1781 – 1840 гг.) доказал более общую, чем у Бернулли, форму больших чисел, а также впервые применил теорию вероятностей к задачам стрельбы (тем самым положив начало её использования в военном деле). Пуассон также вывел один из законов распределения, который играет важную роль во всех приложениях теории вероятностей, в том числе в теории массового обслуживания.

В XIX в. при заметном угасании интереса к теории вероятностей в Западной Европе в России создаётся знаменитая Петербургская математическая школа, которая дала миру важнейшие труды по теории вероятностей и развитие нескольких её приложений (в том числе теории случайных процессов), большинство из которых в настоящее время имеют самостоятельные области исследования. Основы современной теории случайных процессов (являющейся родоначальницей теории массового обслуживания) заложил А. А. Марков (1856 – 1922 гг.). Он существенно расширил области применения центральной предельной теоремы и закона больших чисел, распространив их как на зависимые, так и на независимые опыты.

Из теории случайных процессов, как уже говорилось ранее, постепенно выделилась теория массового обслуживания. Её родоначальником считается датский учёный А. К. Эрланг.

А. К. Эрланг (1878 – 1929 гг.)

Агнер Краруп Эрланг родился в Дании в 1878 г. В возрасте 14 лет он с отличием сдал предварительные экзамены в Копенгагенский университет. Из-за молодого возраста ему было отказано в обучении, поэтому следующие два года он работал в деревенской школе, после чего добился зачисления в университет. После успешного окончания университета А. Эрланг несколько лет преподавал в школах астрономию, химию, физику (его любимым предметом с детства была астрономия). В 1908 г. А. К. Эрланг стал научным сотрудником в лаборатории Копенгагенской Телефонной компании, а позднее возглавил её. В телефонной компании Эрланг проработал двадцать лет (вплоть до смерти). Он не был женат, редко брал отпуск, все свое время посвящая работе. Его первая научная работа была издана в 1909 г. Наиболее известным научным трудом Агнера К. Эрланга считается «Решение некоторых проблем в теории вероятностей значений в автоматических телефонных станциях» – именно в нем была выведена формула Эрланга, которая широко используется в теории вероятностей и других областях прикладной математики.

В настоящее время мировая наука позиционирует А. К. Эрланга как математика и инженера, основателя таких научных направлений, как теория телетрафика, теория массового обслуживания. Термин «эрланг» во всем мире используется как стандартная единица телефонного движения. Именем Эрланга названы одно из распределений вероятностей в теории вероятностей и язык программирования «Erlang» для крупномасштабных промышленных систем он-лайн, который создала одна из крупнейших компаний современности «Ericsson».

А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся базовыми в теории массового обслуживания. Развили теорию массового обслуживания уже советские учёные.

В 30-е гг. XX в. А. Я. Хинчин разработал метод «вложенных цепей Маркова», давший возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания. В 50-е гг. XX в. Б. В. Гнеденко обобщил формулы Эрланга, а также рассмотрел случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал. Б. В. Гнеденко является автором первого в СССР спецкурса по теории массового обслуживания, а написанная им монография до сих пор является основополагающей при изучении теории массового обслуживания, как в России, так и за рубежом.

В табл. 1 представлена краткая характеристика исторических этапов становления и развития теории массового обслуживания.

1.2. Предмет, методы и задачи теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания занимается анализом процессов в системах обслуживания, производства и управления, в которых однородные действия (события) повторяются многократно (предприятия торговли, коммерческие банки, автоматические линии производства, медицинские учреждения, страховые организации, транспортные системы и др.).

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между основными характеристиками системы обслуживания (число каналов обслуживания, характер входного потока заявок, которые необходимо обслужить, производительность отдельно взятого канала, пр.) с целью улучшения управления системами.

Основные задачи теории массового обслуживания заключаются в следующем:

1) Построение математической модели системы массового обслуживания и расчет её основных характеристик.

Математическая модель – это система математических соотношений, приближенно (в абстрактной форме) описывающих изучаемую систему. При построении математической модели отбрасываются несущественные с точки зрения исследователя факторы, влияющие на работы системы.

Экономико-математическая модель – это задача, предназначенная для исследования экономической проблемы.

Построение и расчет математической модели позволяют проанализировать ситуацию и выбрать оптимальное решение по управлению системой [17, с. 11].

Таблица 1

Характеристика исторических этапов становления и развития теории массового обслуживания

Этап	Ученые, внесшие вклад в развитие	Краткая характеристика этапа
Возникновение теории вероятностей (середина XVII в.)	Б. Паскаль П. Ферма Х. Гюйгенс	Исследования в области азартных игр привели к появлению теории вероятностей. В этот период формулируются основные понятия теории: «вероятность», «математическое ожидание», пр.
Развитие и распространение теории вероятностей (XVIII – XIX вв.)	Я. Бернулли К. Ф. Гаусс С. Д. Пуассон	Доказан закон больших чисел. Введен и обоснован «нормальный закон» (закон Гаусса). Доказана центральная предельная теорема. В этот период впервые появляются приложения теории вероятностей.
Появление теории случайных процессов (XX в.)	А. А. Марков	А. А. Марков (ученик П. Л. Чебышева) заложил основы теории «стохастических» случайных процессов (более подробно деятельность ученого описана на с. 21).
Появление и развитие теории массового обслуживания (XX в.)	А. К. Эрланг А. Я. Хинчин Б. В. Гнеденко	А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся основополагающими в теории массового обслуживания. В 30-е гг. XX в. А. Я. Хинчин развивает метод «вложенных цепей Маркова», дающий возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания. В 50-е гг. XX в. Б. В. Гнеденко обобщает формулы Эрланга, рассматривая случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал.

Использование математических моделей позволяет осуществлять предварительный выбор оптимальных решений по определенным критериям, предложенных поставщиком задачи или руководителем фирмы.

2) Установление зависимости эффективности работы системы массового обслуживания от её организации.

3) Решение различных оптимизационных задач, связанных с функционированием системы массового обслуживания.

4) Выработка рекомендаций по рациональному построению системы массового обслуживания для обеспечения высокой эффективности ее функционирования [17, с. 11].

Все задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге направлены на определение такого варианта работы системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от простоев каналов обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживания и пр.

Методология теории массового обслуживания включает все основные элементы теории случайных процессов: Марковские случайные процессы, потоки заявок, граф состояний, системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, др.

1.3. Классификация и структура систем массового обслуживания

Основными структурными элементами любой системы массового обслуживания являются заявки и каналы обслуживания.

«Заявка на обслуживание» – это кто-либо или что-либо, что необходимо обслуживать.

«Каналы обслуживания» – это операции обслуживания, выполняемые кем-либо или чем-либо [17, с. 11].

Роль «заявок» в коммерческой деятельности выполняют товары, посетители, тара, деньги, документы и др. Роль «каналов обслуживания» – продавцы, администраторы, повара, официанты, торговое оборудование, банкоматы и др.

«Заявки» в силу массовости поступления на обслуживание образуют потоки, которые до выполнения операций обслуживания называют входящими, а после возможного ожидания начала обслуживания (простой в очереди) образуют поток обслуживания в каналах, а затем формируют выходящий поток заявок. В силу этого основной характеристикой потока заявок на обслуживания в теории массового обслуживания является ***интенсивность потока покупателей*** **(λ)**, которая рассчитывается как среднее число заявок в единицу времени.

Рассмотрим пример расчета интенсивности потока покупателей.

Задача: Результаты наблюдения за потоком покупателей в секции универмага и проведение регистрации количества покупателей в течение каждого часа работы представлены в табл. 2. Определите интенсивность потока покупателей за час работы магазина.

Таблица 2

Регистрация потока покупателей

Часы \ Дни	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	3	8	12	5	10	12	8	3	1
4	5	11	10	9	14	14	7	2	4
5	8	5	9	11	6	6	11	4	6
6	7	9	7	12	7	7	13	14	8
7	11	12	5	14	8	9	14	11	3
8	5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	9	5	11	1	6	11	8	10	1

Решение: Для того чтобы определить интенсивность потока покупателей, необходимо найти среднее арифметическое из представленного табличного массива. Простейшим вариантом данного действия будет отыскание частного от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк.

1) *Находим сумму элементов по каждому столбцу:*

1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	8	12	5	10	12	8	3	1
5	11	10	9	14	14	7	2	4
8	5	9	11	6	6	11	4	6
7	9	7	12	7	7	13	14	8
11	12	5	14	8	9	14	11	3
5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	5	11	1	6	11	8	10	1
51	**70**	**76**	**74**	**68**	**87**	**77**	**70**	**36**

2) *Находим общую сумму:*

51 + 70 + 76 + 74 + 68 + 87 + 77 + 70 + 36 = 609.

3) *Находим частное от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк:*

*609 / (9 * 9) = 7,5.*

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\boldsymbol{t}_{\text{обсл}}$ является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения

$$f(t_{\text{обсл}}) = \mu * e^{-\mu t},$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. Данная интенсивность находится по формуле

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}}, \tag{1}$$

где $t_{обсл}$ – среднее время обслуживания заявок [17, с. 26-29].

Рассмотрим пример расчета интенсивности потока обслуживания.

Задача: Результаты наблюдения за работой консультантов в коммерческом банке по времени обслуживания клиентов представлены в табл. 3. Определите среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке.

Таблица 3

Регистрация потока покупателей

Номер интервала	**Интервал времени обслуживания, мин**	**Частота (*f*)**
1	0 – 5	12
2	5 – 10	15
3	10 – 15	20
4	15 – 20	14
5	20 – 25	4
6	25 – 30	2

Решение: Для определения интенсивности обслуживания необходимо найти среднее время обслуживания клиентов в банке, а затем найденное значение подставить в формулу (1). При определении среднего времени обслуживания необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1) *Находим середину каждого из представленных в табл. 3 интервалов:*

Номер интервала	**Интервал времени обслуживания, мин**	**Середина интервала**
1	0 – 5	2,5
2	5 – 10	7,5
3	10 – 15	12,5
4	15 – 20	17,5
5	20 – 25	22,5
6	25 – 30	27,5

2) *Находим сумму произведения середины интервала на частоту:*

*(2,5 * 12) + (7,5 * 15) + (12,5 * 20) + (17,5 * 14) + (22,5 * 4) + (27,5 * 2) = = 782,5.*

3) *Находим частное от деления суммы произведения середины интервалов на частоту на сумму частоты:*

782,5 / (12 + 15 + 20 + 14 + 4 + 2) = 11,68.

Таким образом, среднее время обслуживания ($t_{обсл}$) = 11,68 мин.

Далее полученное значение подставим в формулу (1) и найдем интенсивность обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{11{,}68} = 0{,}086 .$$

Переведём полученное значение в часы, получим:

*0,086 * 60 = 5,16 кл./ч.*

В теории массового обслуживания обычно полученные значения не округляют, т.к. считается, что найденная величина характеризует не физическую величину объекта обслуживания (покупателя, клиента и т.д.), а обслуженную величину его покупки, запроса. Например, если расчетное значение интенсивности обслуживания покупателей в зоне кассового узла крупного магазина самообслуживания получилось 2,5 покупателя в минуту, это значит, что за минуту кассир успел пробить все покупки из корзины двух покупателей и половину покупок из корзины третьего покупателя. Таким образом, округление как в одну, так и в другую сторону для характеристики работы системы обслуживания будет некорректным, а использование полученных округлённых значений в последующих расчетах может исказить полученные результаты эффективности работы всей системы обслуживания.

Другой важнейшей характеристикой систем массового обслуживания, объединяющей показатели μ и λ, является ***интенсивность нагрузки системы* (ρ)**, которая показывает степень согласования входного и выходного потоков заявок, определяет устойчивость системы массового обслуживания и находится по следующей формуле:

$$\rho = \lambda / \mu.$$

Существующие варианты заявок, особенности их обслуживания и образования очередей, количество и организация каналов обслуживания послужили причиной появления большого разнообразия систем массового обслуживания, которые классифицируют по ряду признаков.

Теоретическими подходами разработки классификаций занимается наука логика. ***Классификация*** – это многоступенчатое логическое деление, когда каждый из членов деления в свою очередь становится делимым понятием, но уже по иному основанию деления [2, с. 104].

В простейшем случае классификация представляет собой древовидную или иерархическую структуру. Это происходит, когда каждый из членов классификации подвергается делению только по одному основанию. На верхнем этаже этой пирамиды или дерева находится главное понятие, дающее название всей классификации и обобщенно охватывающее абсолютно все объекты, входящие в эту классификацию. Следующий, второй слой – результат логического деления главного понятия по наиболее существенному признаку или основанию деления, под ним располагается следующий слой, полученный логическим делением каждого из элементов второго этажа по своему основанию деления, и т.д.

В иных случаях объекты, входящие в объем какого-либо члена классификации, различаются по двум (или более) равно существенным основаниям, и тогда древовидная структура уступает место комбинативной или фасетной структуре: линейка альтернативных членов деления заменяется матрицей, размерность которой соответствует числу одновременно реализующихся оснований деления. Эта матрица занимает в структуре классификатора уже не один слой, а столько, сколько оснований деления задействовано в матрице. Для любых классификаций важна простота, т.к. количественный предел активного восприятия и анализа пользователем массива объектов – семь; в таком классификаторе легко работать как оператору, так и пользователю [2, с. 105-113].

В теории массового обслуживания принята комбинативная структура классификации всех имеющихся систем обслуживания. Таким образом, главное понятие (системы массового обслуживания) разделено на пять равно существенных оснований, которые представляют собой классификационные признаки систем. Такими признаками являются: количество каналов обслуживания, расположение каналов, возможность образования очереди, дисциплина очереди и объем заявок, обращающихся в системе.

В зависимости от количества каналов обслуживания все системы делят на два типа:

1) одноканальные;

2) многоканальные.

В зависимости от взаимного расположения каналов системы также делят на два типа:

1) системы с параллельным расположением каналов (в таких системах обслуживание заявок может вести любой свободный канал);

2) системы с последовательным расположением каналов (в таких системах обслуживание ведут несколько каналов, причём каждый последующий может приступить к обслуживанию только после того, как обслуживание завершил предыдущий канал). Ярким примером последовательности обслуживания могут служить медицинские учреждения. Так, чтобы записаться на приём к врачу, необходимо прийти в регистратуру (первый канал обслуживания), затем на приём к врачу (второй канал), затем сдать соответствующие анализы (третий) и т.д.

В зависимости от возможности образования очереди все системы обслуживания делят на три группы:

1) системы с отказом в обслуживании – это такие системы, в которых образование очереди невозможно, т.е. если заявка пришла на обслуживания в тот момент, когда все каналы заняты, она получает отказ в обслуживании. Примером таких систем могут быть любые диспетчерские службы (если вы звоните в диспетчерскую такси в тот момент, когда все телефоны заняты, вы не можете дозвониться, т.е. получаете отказ в обслуживании);

2) системы с ограничением на длину очереди – это такие системы, в которых образование очереди будет ограничено каким-либо параметром. Ярким примером таких систем являются кинотеатры – купить билеты на конкретный сеанс можно в таком количестве, сколько мест в кинозале (здесь очередь ограничена количеством мест, помимо количественных существуют также временные ограничения);

3) системы без ограничения – в таких системах очередь может расти без ограничения.

В зависимости от дисциплины очереди все системы обслуживания делят на следующие группы:

1) обслуживание «с приоритетом»;

2) обслуживание «по правилам».

Как правила, так и приоритеты бывают нескольких видов. Рассмотрим каждый из них. Приоритет в обслуживании делится на:

- абсолютный – такой вид приоритета, как правило, имеют надзирательные и контролирующие органы, например, если в магазин для проверки приходит санитарная эпидемиологическая станция, то магазин закрывается, т.е. все остальные заявки (посетители) получают отказ в обслуживании;

- относительный – как правило, имеют работники рассматриваемой системы, например, часто можно наблюдать такую картину: вы стоите в очереди в кассу в крупном супермаркете, подходит продавец, у которого начался обеденный перерыв, и оплачивает свою покупку без ожидания в очереди – это нормальная практика, поскольку у работника системы возможно ограниченно время перерыва, да и любой из нас «в своей системе» ведёт себя соответственно;

- специальные правила приоритета – закреплены законодательными нормами (законами, постановлениями правительства и/или органами местного самоуправления), в качестве примера можно привести наиболее известное правило специального приоритета: «ветераны ВОВ обслуживаются вне очереди».

Обслуживание по правилам включает следующие правила:

- «первый пришел – первый обслужился» – это естественная дисциплина очереди;

- «последний пришел – первый обслужился»;

- обслуживание при случайном отборе заявок из очереди.

На рис. 1 рассмотренная классификация представлена в наглядном виде.

Рис. 1. Классификация систем массового обслуживания

1.4. Контрольные вопросы и задания к разделу 1

Задача 1.

Результаты регистрации входного потока посетителей магазина в течение дня и значения его характеристик представлены в табл. 4. Дайте подробную характеристику представленного в таблице потока. Рассчитайте итоговые значения λ max и λ min. Найдите среднее значение интенсивности потока посетителей в течение дня. Можно ли вычислить интенсивность потока посетителей для каждого часа работы магазина? Ответ на вопрос обоснуйте.

Таблица 4

Интенсивности потока покупателей

Интервал времени, ч	max кол-во покупателей, чел.	max интенсивность потока λ max, мин	min кол-во покупателей, чел.	min интенсивность потока λ min, мин	Среднее кол-во покупателей, чел.
8 – 9	300	5	200	3,3	250
9 – 10	500	8,3	400	6,6	450
10 – 11	800	13,3	500	8,3	650
11 – 12	1000	16,6	300	5	650
12 – 13	700	11,6	300	5	500
13 – 14	0	0	0	0	0
14 – 15	900	15	200	3,3	550
15 – 16	800	13,3	300	5	550
16 – 17	700	11,6	100	1,6	400
17 – 18	800	13,3	300	5	550
18 – 19	500	8,3	100	1,6	300
19 – 20	400	6,6	300	5	350
Итого:	7400	λ max =	3000	λ min =	5200

Задача 2.

Результаты наблюдения за работой консультантов специализированного магазина аудио- и видеотехники по времени обслуживания покупателей приведены в табл. 5. Определите среднее время и интенсивность обслуживания покупателей.

Таблица 5

Интервалы и частота обслуживания покупателей

Номер интервала	Интервал обслуживания, мин	Частота
1	0 – 5	27
2	5 – 10	23
3	10 – 15	18
4	15 – 20	11
5	20 – 25	8
6	25 – 30	3

Задача 3.

Результаты наблюдения за потоком клиентов в коммерческом банке и проведение регистрации их количества представлены в табл. 6. Определите интенсивность потока клиентов за час работы банка, а также среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке при заданном распределении времени обслуживания (табл. 7).

Таблица 6

Интенсивности потока клиентов коммерческого банка

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.
9 – 10	13	18	15	19	13	29
10 – 11	13	18	15	19	13	29
11 – 12	19	32	23	21	26	58
12 – 13	31	38	38	24	48	69
13 – 14	39	44	46	32	53	102
14 – 15	47	57	59	39	71	117
15 – 16	51	58	63	40	89	128
16 – 17	76	69	71	49	97	97
17 – 18	89	83	86	67	103	84
18 – 19	96	97	98	71	128	76

Таблица 7

Интервалы и частота обслуживания покупателей

Номер интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Частота
1	0 – 5	29
2	5 – 10	48
3	10 – 15	26
4	15 – 20	9
5	20 – 25	5
6	25 – 30	3
7	30 – 35	2
8	35 – 40	1

Вопросы:

1) Охарактеризуйте основные этапы становления и развития теории систем массового обслуживания.

2) Кого считают родоначальником теории систем массового обслуживания?

3) Перечислите русских учёных, которые внесли значительный вклад в развитие теории массового обслуживания.

4) Перечислите классифицирующие признаки систем массового обслуживания и охарактеризуйте их. Каким образом строятся классификации?

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В данном разделе представлены ключевые темы теории вероятностей и математической статистики, которые необходимы для изучения принципов моделирования систем массового обслуживания, а также применяемые в процессе анализа эффективности деятельности систем.

2.1. Потоки событий

Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует поток событий. Поведение системы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например: обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания; в этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя. При этом характерной основной чертой потоков является вероятностное распределение времени между соседними событиями [17, с. 26-27].

Выделяют следующие виды потоков:

1) ***Регулярный поток событий*** – события в нем следуют одно за другим через заранее заданные и строго определенные промежутки времени. Такой поток является идеальным и очень редко встречается на практике. Например, поток изменения минутной цифры на табло электронных часов.

2) ***Стационарный поток событий*** – если все его временные характеристики не меняются со временем. Для стационарного потока событий вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси времени 0-t этот участок расположен.

Интенсивность такого потока есть величина постоянная. На практике потоки могут считаться стационарными только на некотором ограниченном промежутке времени. Обычно поток покупателей в магазине существенно меняется в течение рабочего дня. Однако можно выделить определенные временные интервалы, внутри которых этот поток допустимо рассматривать как стационарный (имеющий постоянную интенсивность).

3) ***Поток без последствия*** – если число событий, попадающих на один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой промежуток времени (при условии, что эти промежутки не пересекаются между собой).

В потоке без последствия события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток звонков на станцию скорой помощи является простейшим без последствия, т.к. звонящие действуют независимо друг от друга.

4) ***Ординарный поток событий*** – вероятность попадания двух и более событий на очень малый промежуток времени пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью попадания только одного события. В ординарном потоке события происходят по одному, а не по два и более.

Если поток одновременно обладает свойствами ординарности, стационарности и отсутствием последствий, то такой ***поток называют простейшим или потоком Пуассона*** [17, с. 27].

Простейший поток играет среди других существующих потоков особую роль. Рассмотрим на оси времени некоторый промежуток времени ***t***, допустим, вероятность попадания случайного события на этот промежуток равняется ***P***, а полное число возможных событий – ***n***. При наличии свойств ординарности потока вероятность ***P*** должна быть достаточно малой величиной, а ***n*** – достаточно большим числом. В этих условиях для вычисления вероятности попадания на промежуток времени ***t*** некоторого числа событий ***m*** можно воспользоваться **формулой Пуассона** [3, с. 101]

$$P = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где a – среднее число событий, попадающих на данный промежуток времени.

Распределение Пуассона представлено в приложении 1.

Кроме понятия простейшего потока заявок часто приходится пользоваться понятиями потоков других типов.

Поток событий называется ***потоком Пальма***, когда в этом потоке промежутки времени между последовательными событиями являются независимыми, одинаково распределенными случайными, но в отличие от простейшего потока не обязательно распределенными по показательному закону. Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков систем массового обслуживания. Если на какую-либо систему поступает какой-то поток заявок, то он этой системой разделяется на два: поток обслуженных и поток не обслуженных заявок [3, с. 521].

Основой в теории выходных потоков является ***теорема Пальма***:

Пусть на систему массового обслуживания поступает поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании (не обслуживается), если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток не обслуженных заявок является так же потоком Пальма [3, с. 521].

Важным частным случаем потока Пальма является ***поток Эрланга***. Этот поток получается прореживанием простейшего потока. Такое прореживание производится путем отбора по определенному правилу событий из простейшего потока. Например, условившись учитывать только каждое второе событие из образующих простейший поток, мы получаем поток Эрланга второго порядка, если брать только каждое 3-е событие, то образуется поток Эрланга третьего порядка и т.д.

Задача: На рабочем месте консультанта коммерческого банка установлен телефон. Звонки справочного характера следуют в среднем через 5 мин. Какова вероятность того, что за полчаса будет 3 звонка? Определите, какой поток образуют звонки.

Решение: Определим среднее число событий за заданный промежуток времени (по условию задачи – это полчаса, т.е. 30 мин), также в условии сказано, что звонки следуют каждые 5 мин, следовательно, за полчаса будет 6 звонков (30 / 5). Теперь подставим значение в формулу Пуассона:

$$P = \frac{6^3}{3!} 2{,}71^{-6} = 0{,}1 \approx 10\,\%.$$

Как следует из расчета, вероятность того, что за полчаса будет только 3 звонка, очень мала и составляет 10 %. Звонящие в коммерческий банк действуют независимо друг от друга, следовательно, поток звонков – простейший без последствия.

В условиях этой же задачи при определении вероятности того, что за полчаса будет хотя бы один звонок, расчет будет следующим:

$P = 1 - e^{-a} = 1 - e^{-6} = 0{,}998 \approx 99{,}8\,\%.$

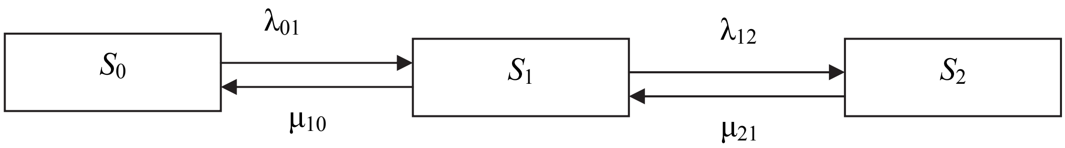
То есть в этом случае мы бы сказали, что практически со стопроцентной вероятностью звонок будет.

Исчисления числа ***e*** представлены в приложении 2.

2.2. Граф состояний

При анализе случайных процессов удобно пользоваться вариантом схематического изображения возможных состояний систем массового обслуживания на рисунке в виде графа с разметкой его возможных состояний. При построении размеченного графа состояния система обычно изображается либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния [3, с. 521].

Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске будет следующим:



Система может находиться в одном из трех состояний:

S_0 – канал свободен (простаивает);

S_1 – канал занят обслуживанием;

S_2 – канал занят обслуживанием, одна заявка в очереди.

Переход системы из состояния S_0 в состояние S_1 происходит под воздействием простейшего потока с интенсивностью λ_{01}, а из состояния S_1 в S_0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью μ_{10}.

Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Переход по стрелке, ведущей из состояния в негоже, означает задержку системы в данном состоянии.

Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность $p_i(t)$ того, что система будет находиться в состоянии S_i в момент времени t, называется вероятностью *I*-го состояния системы массового обслуживания и определяется числом поступающих заявок на обслуживание (k).

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t_0, t_1, t_2 ……….t_n система оказывается в том или ином заранее известном состоянии последовательно. Такая случайная последовательность событий носит название ***Марковской цепи*** [17].

Марковские случайные процессы (цепи Маркова)

А. А. Марков (1856 – 1922 гг.)

Андрей Андреевич Марков родился в Рязанской губернии в 1856 г. В гимназии А. Марков отставал по всем предметам за исключением математики. Математику он любил с детства и уже в гимназии самостоятельно находил новые методы интегрирования линейных уравнений. По окончании гимназии, юноша был направлен в Петербург, где поступил в Петербургский университет. А. Марков был учеником великого математика П. Л. Чебышева (влияние которого определило дальнейшую математическую судьбу А. Маркова).

Университет был окончен с золотой медалью, а через два года А. А. Марков защитил диссертацию и остался преподавать в университете. Педагогический талант Маркова был огромен, его способность доступно доносить материал поражала современников, а выпущенные им пособия «Исчисление конечных разностей» и «Исчисление вероятностей» практически сразу были переведены на иностранные языки и изданы за рубежом. Педагогическую деятельность он не оставил до последнего года жизни.

Научное творчество А. А. Маркова очень разнообразно, однако главные его достижения сделаны в теории чисел и в теории вероятно-

стей. Именно А. Марков предложил изучать с точки зрения теории вероятностей системы, в которых предыдущие состояния влияют на последующие. Если вероятность перехода системы из одного состояния в другое зависит только от этих состояний и не зависит от предыдущей истории развития системы, то такие переходы А. Марков предложил называть простыми цепями. Если же эти вероятности зависят и от предыдущих состояний, то – сложными цепями. А. А. Марков обнаружил, что основные теоремы, полученные для схемы независимых случайных величин, могут быть доказаны и для схемы сложных цепей. В честь своего создателя описанная схема сейчас называется «цепь Маркова». Прошло совсем немного времени, и Марковские цепи нашли широкое применение в физике и математике, дали основу для зарождения теории случайных процессов, которая в свою очередь стала базой теории массового обслуживания.

Вся жизнь А. А. Маркова была целиком посвящена науке. Свой последний труд он написал за несколько месяцев до смерти. Умер А. А. Марков 20 июля 1922 г.

Марковская цепь описывается с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого количества заявок, поступающих на обслуживание, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния S_i в любое другое S_j не зависит от того, когда и как система перешла в состояние S_i.

Марковская цепь представляет собой разновидность Марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Основной задачей исследования Марковской цепи является вычисление безусловных вероятностей нахождения системы S на любом (k-м) шаге в состоянии S_i [4, с. 87-95].

Переходные вероятности $p_{ij}(k)$ можно записать в виде матрицы

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{vmatrix}$$

По главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки в данном состоянии: p_{11}; p_{22}; ….. $p_{mn}(k)$. Так как на каждом шаге система S может находиться только в одном из взаимоисключающих состояний, то для любой i-й строки матрицы сумма всех стоящих в ней вероятностей $\boldsymbol{p_{ij}(k) = 1}$. Матрица, обладающая таким свойством, называется стохастической. Все элементы стохастической матрицы отвечают условию

$$0 \le p_{ij} \le 1.$$

Вероятность задержки в такой матрице можно получить как дополнение до единицы всех остальных членов строки [4, с. 92-111]

$$p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k).$$

При нахождении вероятностей состояний Марковской цепи на k-м шаге $\boldsymbol{p_i(k)}$ удобно пользоваться размеченным графом состояний, где возле каждой стрелки, ведущей из состояния S_i в состояние S_j, проставлена переходная вероятность p_{ij}. Вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы суммы вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из состояния S_i.

Если состояние S_i является поглощающим, то вероятность задержки в этом состоянии равняется 1. Имея матрицу переходных вероятностей, можно по ней построить размеченный граф системы и наоборот. Пример построения графа по матрице показан на рис. 2.

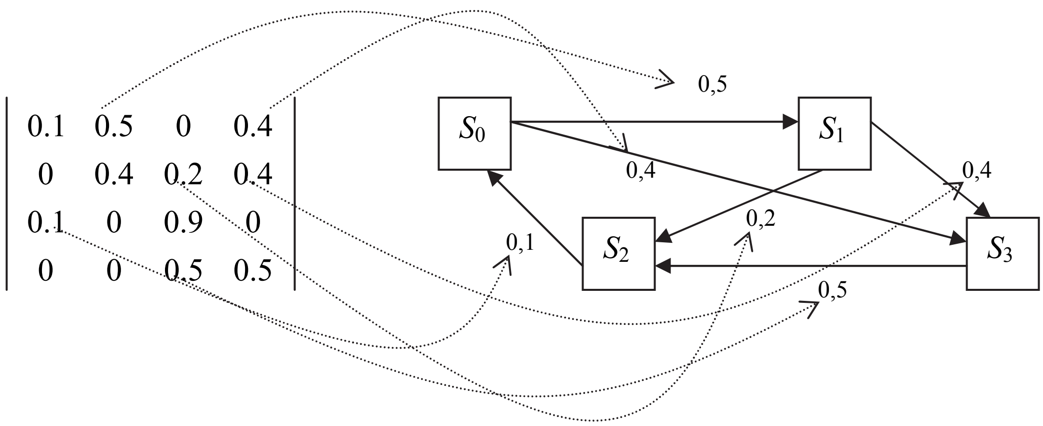


Рис. 2. Пример составления размеченного графа

Очевидно, что вероятности задержки для такого графа будут следующие:

$p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13} + p_{14}) = 1 - (0{,}5 + 0 + 0{,}4) = 0{,}1;$

$p_{22} = 1 - (p_{21} + p_{23} + p_{24}) = 1 - (0 + 0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}4;$

$p_{33} = 1 - (p_{31} + p_{32} + p_{34}) = 1 - (0{,}1 + 0 + 0) = 0{,}9$; и т.д. – в данном случае это показывает главная диагональ матрицы, если же имеется только размеченный граф и по нему необходимо построить матрицу переходных вероятностей, значения по главной диагонали вычитаются приведённым способом.

Задание: На основе размеченного графа (рис. 3) постройте матрицу переходных вероятностей. Определите вероятности задержки в каждом состоянии.

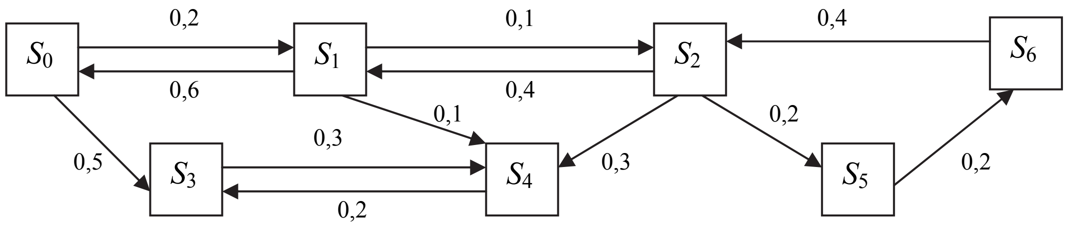


Рис. 3. Размеченный граф системы № 1

Представленный на рисунке граф имеет семь состояний, следовательно, матрица будет иметь размерность 7 × 7.

Вероятности задержки в каждом состоянии, т.е. главную диагональ матрицы, вычислим согласно представленному в теоретической части описанию:

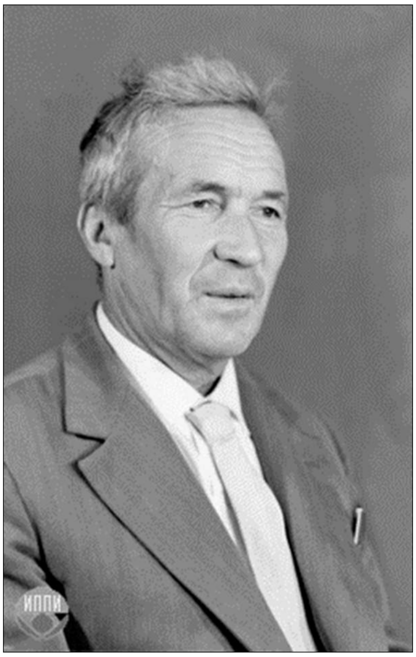
- *для* $S_0 = 1 - (0{,}2 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0 + 0) = 0{,}3;$
- *для* $S_1 = 1 - (0{,}6 + 0{,}1 + 0 + 0{,}1 + 0 + 0) = 0{,}2;$
- *для* $S_2 = 1 - (0 + 0{,}4 + 0 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0) = 0{,}1;$
- *для* $S_3 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0{,}3 + 0 + 0) = 0{,}7;$
- *для* $S_4 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0{,}2 + 0 + 0) = 0{,}8;$
- *для* $S_5 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0{,}2) = 0{,}8;$
- *для* $S_6 = 1 - (0 + 0 + 0{,}4 + 0 + 0 + 0) = 0{,}6.$

Теперь известны все значения для матрицы. Если переход из одного состояния в другое отсутствует, в матрице переходной вероятности ставится ноль.

$$\begin{vmatrix}
0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\
0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6
\end{vmatrix}$$

2.3. Уравнение Колмогорова

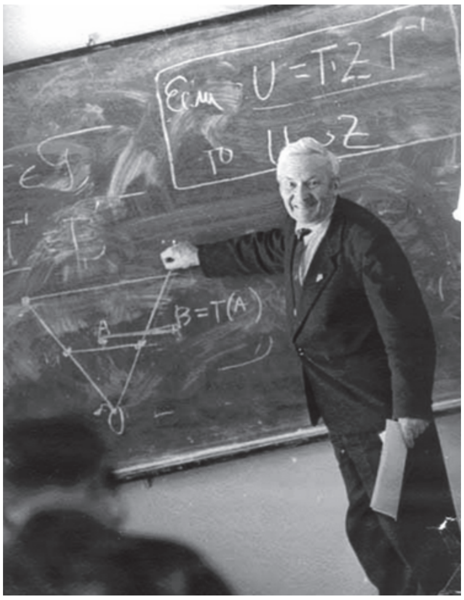
Уравнение Колмогорова позволяет вычислить все вероятности состояний системы массового обслуживания в функции времени.



А. Н. Колмогоров (1903 – 1987 гг.)

Великий русский ученый, один из крупнейших математиков 20-го столетия, член Национальной академии наук США, член Нидерландской королевской академии наук и Академии наук Финляндии, член Академии наук Франции и Германской академии естествоиспытателей, член Международной академии истории наук и национальных академий Румынии, Венгрии и Польши, почетный член Королевского статистического общества Великобритании и Лондонского математического общества, почетный член Международного статистического института и Математического общества Индии. Лауреат самых почетных научных премий: П. Л. Чебышева и Н. И. Лобачевского, Академии наук СССР, Международной премии Фонда Вольфа, Ленинской и Государственной премий, награжденный семью орденами Ленина и золотой медалью Героя Социалистического Труда – академик.

Андрей Николаевич Колмогоров родился в апреле 1903 г., вырастила и воспитала его родная тетка Вера Яковлевна Колмогорова, т.к. мать умерла при родах, а отец погиб в Гражданскую войну. Своим именем Андрей Николаевич обязан деду (предводителю угличского дворянства, помещику Якову Степановичу Колмогорову), который назвал внука в честь своего любимого литературного героя – князя Андрея Болконского. В 1910 г. А. Колмогорова определяют в московскую гимназию. Первыми серьезными научными увлечениями в гимназии были биология и русская история. Математику он любил с детства и в гимназии был лучшим учеником по этому предмету. По окончании гимназии Колмогоров поступил на математическое отделение химико-технологического института им. Д. И. Менделеева. В первые студенческие годы Колмогоров серьезно занимался русской историей и даже посещал курсы древнерусской истории профессора С. В. Бахрушина, но вскоре был сделан окончательный выбор в пользу математики. Осенью 1929 г., по окончании аспирантуры, А. Н. Колмогоров становится научным сотрудником института математики Московского *университета, а вскоре его директором. В 1941 г. Колмогоров выполняет ряд работ военного характера, в частности работая над теорией стрельбы. Совместно с сотрудниками Артиллерийского научно-исследовательского института ведётся большая теоретическая и расчетная работа по эффективности систем стрельбы. 3 сентября 1942 г. А. Н. Колмогоров бракосочетался со своей одноклассницей по гимназии Анной Дмитриевной Егоровой.*



В послевоенные годы А. Н. Колмогоров углубленно занимается проблемами теории вероятности и путями её развития – это привело к появлению нового самостоятельного раздела теории вероятности – теории ветвящихся случайных процессов.

На протяжении всего времени активной работы в университете А. Н. Колмогоров читал лекции (преподавание он считал очень важным и существенным делом), руководил работами аспирантов, являлся редактором нескольких изданий, посвященных математике.

Наиболее существенный вклад А. Колмогоров внес в теорию вероятностей, заложил основу теории Марковских случайных процессов с непрерывным временем, развил теорию стационарных случайных процессов, теорию ветвящихся процессов. Колмогорову принадлежат исследования по применению математических методов в лингвистике и биологии. Ценное практическое применение получили его исследования по статистическим методам контроля массовой продукции и по теории стрельбы.

Представим работу простейшей системы массового обслуживания в виде размеченного графа. Для этого проанализируем процессы обслуживания небольшого киоска. Работа киоска в течение рабочего дня может быть описана с использованием трёх состояний:

S_0 – система свободна, простаивает (т.е. покупателей нет, продавец не занят обслуживанием);

S_1 – система занята обслуживанием (подошёл один покупатель, продавец приступил к его обслуживанию);

S_2 – система занята обслуживанием, образуется очередь (во время обслуживания первого покупателя подошли ещё один, два и более человек, которые встали в очередь).

Размеченный граф такой системы представлен на рис. 4.

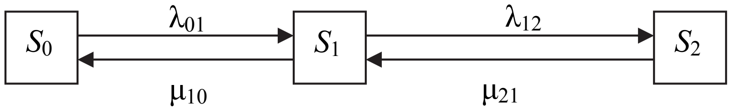


Рис. 4. Граф, описывающий работу простейшей системы

Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями $\lambda_{ij}(i, j = 0, 1, 2)$; так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока покупателей (к киоску подошёл один человек), а обратный переход из состояния S_1 в S_0 – под воздействием потока «интенсивности обслуживания» – продавец обслужил первого покупателя и т.д.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице

$$\sum_{i=0}^{j} p_i(t) = 1.$$

Рассмотрим систему в момент t и, задав малый промежуток Dt, найдем вероятность $p_0(t + Dt)$ того, что система в момент $t + Dt$ будет находиться в состоянии S_0. Это достигается разными способами.

1) Система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время Dt не вышла из него.

Вывести систему из этого состояния можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01} + \lambda_{12})$, т.е. с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01} + \lambda_{12})Dt$. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна $[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{12})Dt]$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0, по первому способу (т.е. того, что находилась в состоянии S_0 и не выйдет из него за время Dt), равна по теореме умножения вероятностей

$$p_0(t) * [1 - (\lambda_{01} + \lambda_{12}) * \Delta t].$$

2) Система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) находилась в состоянии S_1 или S_2 и за время Dt перешла в состояние S_0. Потоком интенсивностью μ_{10} (или μ_{21} – см. рис. 4) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\mu_{10}Dt$ (или $\mu_{21}Dt$). Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по этому способу, равна

$$p_1(t) \times \mu_{10}Dt \text{ (или } p_2(t) \times \mu_{21}Dt).$$

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

$$p_0(t + \Delta t) = p_1(t) \times \mu_{10}\Delta t + p_2(t) \times \mu_{21}\Delta t + p_0(t)\,[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{12}) * \Delta t],$$

откуда

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t) * \mu_{10} + p_2(t) * \mu_{21} - (\lambda_{01} + \lambda_{12}) * p_0(t).$$

Переходя к пределу при $Dt \to 0$ (приближенные равенства, перейдут в точные), получим в левой части уравнения производную $p'_0(t)$ (обозначим ее для простоты p'_0)

$$p'_0 = p_1 \times \mu_{10} + p_2 \times \mu_{21} - (\lambda_{01} + \lambda_{12}) * p_0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. уравнение, содержащее как саму неизвестную функцию, так и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогично для других состояний системы S, можно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Сформулируем правило составления уравнений Колмогорова.

В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.*

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*. Например, если предельная вероятность состояния S_0, т.е. $p_0 = 0{,}5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Систему уравнений Колмогорова можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться следующим правилом:

1) Слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность рассматриваемого состояния, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выходящих из данного состояния.

2) Справа от знака равенства ставится сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих в данное состояние, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки выходят.

3) Для решения подобной системы добавляют нормировочное условие (сумма вероятностей всех состояний системы массового обслуживания равна 1) [17, с. 43-45].

Применяя правила составления уравнения Колмогорова, получим следующую систему уравнений для простейшей системы массового обслуживания, рассмотренной на рис. 4:

$$\begin{cases} P_0\lambda_{01} = P_1\mu_{10}; \\ P_1(\lambda_{12} + \mu_{10}) = P_0\lambda_{01} + P_2\mu_{21}; \\ P_2\mu_{21} = P_1\lambda_{12}; \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1. \end{cases}$$

Решить систему уравнений Колмогорова можно с использованием процессов «рождения-гибели».

Процессы «рождения-гибели»

Среди однородных Марковских процессов существует класс случайных процессов, имеющих широкое применение при построении математических моделей в областях демографии, биологии, экономики и т.д. Это процессы «рождения-гибели». Для Марковских процессов «рождения-гибели» также находятся финальные вероятности, пользуясь правилами составления уравнения для конечного числа предельных вероятностей состояния системы (например, пользуясь правилами составления уравнения Колмогорова). Решая подобные системы уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния [17, с. 48-49].

Пример: Для Марковского процесса «рождения-гибели», описанного графом, приведённом на рис. 5, найдём финальное распределение.

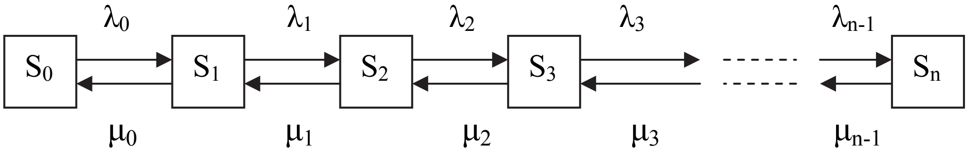


Рис. 5. Размеченный граф процесса «рождения-гибели»

Пользуясь правилом составления уравнения Колмогорова, запишем систему уравнений для данного графа

$$\begin{cases} P_0\lambda_0 = P_1\mu_0; \\ P_1(\lambda_1 + \mu_0) = P_0\lambda_0 + P_2\mu_1; \\ P_2(\lambda_2 + \mu_1) = P_1\lambda_1 + P_3\mu_2; \\ P_3(\lambda_3 + \mu_2) = P_2\lambda_2 + P_{k\text{-}1}\mu_k; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ P_n\mu_{n\text{-}1} = P_{n\text{-}1}\lambda_{n\text{-}1}; \\ P_0 + P_1 + P_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + = 1. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния системы массового обслуживания [17, с. 49]:

$$p_0 = (1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} + ... + \frac{\lambda_0\lambda_1......\lambda_n}{\mu_0\mu_1......\mu_n})^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} * p_0;$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} * p_0;$$

$$p_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} * p_0;$$

$$p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2.......\lambda_n}{\mu_0\mu_1\mu_2.......\mu_n} * p_0.$$

Задание: Узел расчета мини-маркета состоит из двух кассовых аппаратов, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид (рис. 6). Найдите предельные вероятности p_0, p_1, p_2 при следующих исходных данных: $\mu_0 = \mu_1 = 0,6$ пок./мин, $\lambda_0 = 1$ пок./мин, $\lambda_1 = 0,8$ пок./мин.

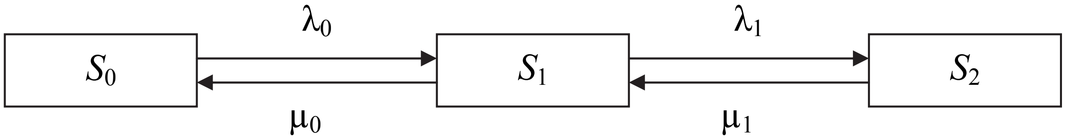


Рис. 6. Размеченный граф кассового узла мини-маркета:
S_0 – обе кассы свободны (простаивают); S_1 – одна касса занята (любая из двух); S_2 – обе кассы заняты обслуживанием

Решение:

$$p_0 = (1 + \frac{1}{0,6} + \frac{1*0,8}{0,6*0,6})^{-1} = 0,204;$$

$$p_1 = \frac{1}{0,6} * 0,204 = 0,341;$$

$$p_2 = \frac{1*0,8}{0,6*0,6} * 0,204 = 0,455.$$

Проверка: 0,204 + 0,341 + 0,455 = 1 (сумма всех вероятностей равна единице, следовательно, решение верно).

Интерпретация полученных значений, в соответствии с описанной выше теорией, заключается в следующем: 20 % рабочего времени обе кассы магазина простаивают (вероятность p_0 = 0,204 ≈ 20 % (p_0 соответствует состоянию S_0 – т.е. кассы свободны, простаивают)), и только 46 % рабочего времени обе кассы заняты обслуживанием.

2.4. Контрольные вопросы и задания к разделу 2

Задача 1.

По заданной матрице переходных вероятностей (рис. 7) постройте размеченный граф состояний. Определите вероятность задержки системы в состоянии S_2 и S_1.

$$\begin{vmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Рис. 7. Матрица № 1

Задача 2.

По заданной матрице переходных вероятностей (рис. 8) постройте размеченный граф состояний. Определите вероятность задержки системы в состоянии S_3 и S_1.

$$\begin{vmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Рис. 8. Матрица № 2

Задача 3.

Работу кассового аппарата в узле расчета магазина можно описать следующими состояниями: S_0 – устройство полностью исправно, S_1 – имеются незначительные неисправности, позволяющие работать, S_2 – устройство сломано, требуется ремонт, S_3 – устройство списано, ремонту не подлежит. Переходные вероятности из одного состояния в другое следующие: P_{01} = 0,3; P_{02} = 0,2; P_{03} = 0,4; P_{10} = 0,1; P_{12} = 0,3; P_{13} = 0,2; P_{20} = 0,3; P_{23} = 0,4.

Найдите вероятности задержки в каждом состоянии, постройте размеченный граф и матрицу переходных вероятностей.

Задача 4.

Имеется неразмеченный граф (рис. 9). Сделайте разметку на графе таким образом, чтобы вероятности задержки в каждом состоянии соответствовали следующим значениям: S_0 = 0,3; S_1 = 0,2; S_2 = 0,5; S_3 = 0,6; S_4 = 0,3; S_5 = 0,4.

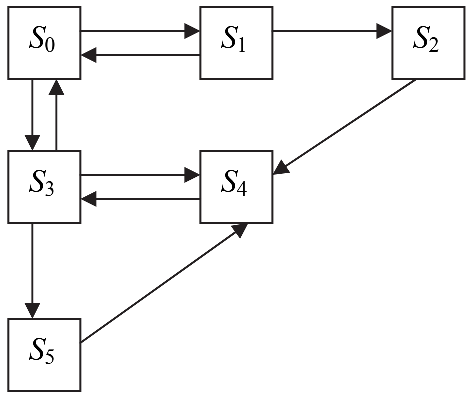


Рис. 9. Неразмеченный граф № 1

Задача 5.

Кредитный отдел коммерческого банка состоит из двух рабочих мест. В течение рабочего дня работа отдела может быть описана следующими состояниями:

S_0 – оба кредитных эксперта свободны;

S_1 – один кредитный эксперт занят выдачей кредита (любой из двух);

S_2 – оба кредитных эксперта заняты.

Найдите предельные вероятности p_0, p_1, p_2 при следующих исходных данных: μ_0 = 0,6 кл./мин, λ_0 = 0,3 кл./мин, μ_1 = 0,5 кл./мин, λ_1 = = 0,7 кл./мин. Сделайте вывод о работе кредитного отдела банка.

Задача 6.

На основе размеченного графа (рис. 10) постройте матрицу переходных вероятностей. Определите вероятности задержки в каждом состоянии.

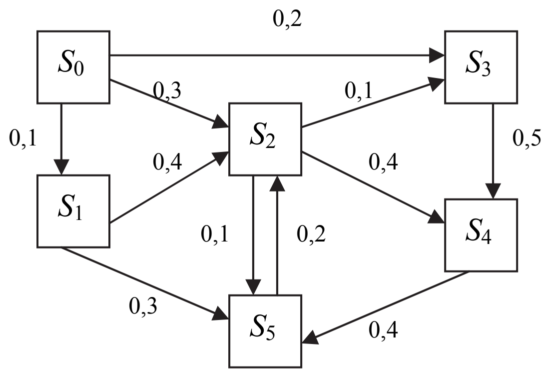


Рис. 10. Размеченный граф № 2

Задача 7.

В отделении коммерческого банка работает один консультант, который консультирует клиентов по всем вопросам работы отделения. В среднем на консультацию одного клиента уходит 12 мин. Клиенты к консультанту подходят независимо друг от друга в среднем через каждые 40 мин, в случае если консультант занят, они уходят. Определите долю потери клиентов.

Задача 8.

В мастерской по мелкому (срочному) ремонту обуви работает один мастер. Клиенты в мастерскую приходят независимо друг от друга в среднем через каждые 35 мин. Мастер выполняет заказ одного клиента в среднем 25 мин, в случае если мастер занят, клиенты уходят. Определите долю потери клиентов.

Задача 9.

Взрослое население пос. Селижарово составляет 3897 чел. Безработный Коля решил организовать у себя в поселке сеть распространения продуктов «Герболайф». Каждый входящий в пирамиду «Герболайфа» вербует нового клиента в среднем за полдня. Распространение «Герболайфа» может надоесть даже основоположнику этого бизнеса Коле. В среднем человек увлекается распространением «Герболайфа» 2 недели, затем бросает. Однако его можно опять убедить в прибыльности этого дела. Если в поселке не останется никого, кто распространял бы «Герболайф», то бизнес погибнет. Нарисуйте размеченный граф, описывающий изменение во времени численности населения пос. Селижарово, занимающегося распространением «Герболайфа». Запишите систему уравнений Колмогорова.

Задача 10.

В кондитерском цехе работают три мастера. Первый – пекарь – занимается исключительно приготовлением теста и выпечкой коржей для тортов. Второй – кондитер – приготовлением кремов и оформлением тортов. Третий – ученик кондитера – помогает и пекарю, и кондитеру, а также занимается упаковкой тортов и выдачей заказов. В среднем в день пекарь и кондитер выпекают и оформляют два торта. Ученик может упаковать и выдать пять тортов. Заказы на изготовления тортов поступают нерегулярно, в среднем на три торта в день, причем, если на данный день уже есть заказы, клиенты уходят в другие кондитерские. Постройте размеченный граф, описывающий работу в кондитерском цехе. Запишите систему уравнений Колмогорова и вычислите финальное распределение вероятностей.

Задача 11.

Инвестиционный паевой фонд «Селена» открыл филиал в пос. Черниговка. Филиал состоит из одного управляющего и действует по принципу финансовой пирамиды. Каждый входящий в фонд может завербовать нового клиента в среднем за 1 день. Человек, вступивший в фонд и сделавший денежный вклад, может выйти из него и забрать деньги только через месяц. Взрослое население пос. Черниговка составляет 1873 чел. Если в поселке не останется никого, кто не вошел бы в фонд, бизнес погибнет. Нарисуйте размеченный граф, описывающий изменение во времени численности населения пос. Черниговка, входящего в фонд. Запишите систему уравнений Колмогорова.

Задача 12.

В секции овощи-фрукты центрального универсама города находится 1 кассовый аппарат, возможные состояния которого: S_0 – касса свободна, S_1 – касса занята. Найдите предельные вероятности при следующих данных: среднее время обслуживания заявок составляет 7 пок./ч, результаты наблюдения за потоком покупателей представлены в табл. 8. Сделайте вывод о работе системы.

Таблица 8

Хронометраж потока покупателей в секции овощи-фрукты

Дни / Часы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	4	4	1	4	2
2	3	1	2	5	4	3	3	4	1
3	1	3	1	1	3	3	1	3	1
4	2	3	4	5	2	4	2	1	1
5	3	2	3	4	5	3	3	2	1

3. МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания

Для совершенствования деятельности систем массового обслуживания необходимо тщательно производить наблюдения за процессами обслуживания в системе. На основе наблюдений можно выделить экономические критерии оценки работы систем.

В коммерческой сфере критерий эффективности чаще всего связан со временем и скоростью обращения товаров. Время и скорость обращения, являясь экономическими показателями коммерческой деятельности, характеризуют эффективность использования средств, вложенных в товарные запасы. Товарооборачиваемость отражает среднюю скорость реализации среднего товарного запаса, т.е. можно сказать, что имеется связь показателей коммерческой деятельности с временными характеристиками.

Эффективность работы коммерческого предприятия складывается из совокупности времени выполнения отдельных операций обслуживания, в то же время для населения затраты времени включают время на дорогу до магазина, ожидания начала обслуживания, выбор продукции, расчет.

Проведенные исследования структуры затрат времени населения свидетельствуют о том, что значительная его часть расходуется нерационально, а коммерческая деятельность в конечном счете направлена на удовлетворение потребности человека [17, с. 61-62]. Поэтому моделирование систем массового обслуживания должно включать анализ затрат времени по каждой элементарной операции обслуживания. Наиболее общие экономические показатели (товарооборот, прибыль, издержки обращения) в экономико-математических моделях необходимо увязывать с дополнительно возникающей группой показателей, определяемых спецификой обслуживающих систем. Для того чтобы выявить слабые места в работе любой системы массового обслуживания и разработать действенные рекомендации по совершенствованию, необходимо использовать до 10 показателей. Основными показателями, характеризующими работу системы обслуживания, являются следующие [17, с. 62-63]:

а) P_0 – вероятность простоя системы;
б) $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании;
в) $P_{\text{обсл}}$ – вероятность обслуживания;
г) $L_{\text{оч}}$ – длина очереди;
д) $T_{\text{оч}}$ – среднее время ожидания обслуживания (ожидания в очереди);
е) $P_{\text{оч}}$ – вероятность образования очереди;
ж) $T_{\text{смо}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;
з) А – абсолютная пропускная способность системы;
и) Q – относительная пропускная способность системы;
к) $t_{\text{пр}}$ – среднее время простоя канала;
л) $n_{\text{з}}$ – среднее число занятых каналов;
м) $n_{\text{св}}$ – среднее число свободных каналов;
н) $t_{\text{обсл}}$ – среднее время обслуживания.

Как уже было сказано выше, для анализа эффективности деятельности любой системы массового обслуживания необходима увязка общеэкономических показателей со специфическими показателями деятельности систем. Для этого затраты системы делят на две группы:

1) ***$C_{ио}$* – *издержки обращения*** – связаны со следующими показателями: числом занятых обслуживанием каналов; затратами на содержание системы; интенсивностью обслуживания; степенью загрузки каналов; эффективным использованием каналов; пропускной способностью системы обслуживания.

2) $C_{ип}$ – ***издержки потребления*** – это издержки собственно заявок, поступающих на обслуживание, связаны со следующими показателями: длиной очереди; временем ожидания в очереди; вероятностью отказа в обслуживании; временем пребывания заявки в системе.

Показатели обеих групп составляют общие затраты ($C_{об}$), однако они противоречивы, т.е. улучшение показателей в одной группе обязательно повлечёт за собой ухудшение в другой. Например: чтобы снизить время ожидания в очереди или длину очереди, можно добавить ещё один канал обслуживания, но это повлечёт за собой дополнительные затраты на содержания системы обслуживания. Поэтому моделировать работу любой системы массового обслуживания необходимо таким образом, чтобы установить разумный компромисс между показателями двух групп (собственно заявок и полнотой использования возможностей системы). То есть, как $C_{ио}$ – издержки обращения, так и $C_{ип}$ – издержки потребления, должны иметь оптимальные значения при минимуме общих затрат [17, с. 64]

$$C_{об} = (C_{ио} + C_{ип}) \to \min.$$

3.2. Одноканальная система массового обслуживания с отказом

Классическим примером одноканальной системы с отказом в обслуживании может служить диспетчерская с одним телефонным номером. В тот момент, когда телефон занят, заявка, пришедшая на обслуживание, покидает систему не обслуженной, т.е. образование очереди в такой системе невозможно.

Размеченный граф состояний одноканальной системы с отказом в обслуживании представлен на рис. 11, где λ и μ – интенсивность потока заявок и интенсивность обслуживания соответственно. Состояние системы S_0 обозначает, что канал свободен, а S_1 – что канал занят обслуживанием заявки.

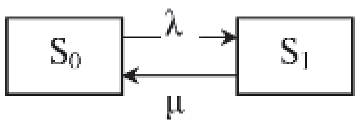


Рис. 11. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с отказом

Основные характеристики системы (вероятность простоя системы и вероятность занятости канала обслуживания) можно определить, используя уравнение Колмогорова (см. раздел 2.3). Также для рассматриваемой системы массового обслуживания можно определить относительную и абсолютную пропускную способность, которые рассчитываются по следующим формулам:

$$Q = \frac{\lambda * P_0}{\lambda} = P_0,$$

где Q – относительная пропускная способность.

$$\mathrm{A} = \frac{\lambda * \mu}{\lambda + \mu} = \lambda Q,$$

где А – абсолютная пропускная способность.

Пример решения задачи: В мастерской по мелкому (срочному) ремонту обуви работает один мастер. Клиенты в мастерскую приходят независимо друг от друга в среднем через каждые 30 мин. Мастер выполняет заказ одного клиента в среднем 20 мин, в случае если мастер занят, клиенты уходят. Определите долю потери клиентов.

Решение: Система обслуживания, описанная в задаче, является одноканальной (т.к. в мастерской работает только один мастер – т.е. канал обслуживания один) и с отказом в обслуживании, т.к. из условия следует, что образование очереди невозможно (если мастер занят, клиенты не ждут, а уходят).

Работа системы будет описана двумя состояниями: 1) система свободна; 2) система занята обслуживанием (см. граф системы на рис. 11). Следовательно, долю потери клиентов будет характеризовать P_1, вероятность состояния S_1, т.к. клиенты уходят, когда мастер занят. Таким образом, рассчитав P_1, узнаем долю потери клиентов.

Из теоретической части следует, что вероятности одноканальной системы массового обслуживания с отказом можно найти, используя уравнение Колмогорова. Для решения нам также необходимо определиться с характеристиками системы. Интенсивность потока клиентов (λ) здесь будет равна 2 кл./ч (клиенты подходят к мастеру в среднем каждые 30 мин). Интенсивность обслуживания (μ) – 3 заказа/ч (мастер выполняет один заказ в среднем 20 мин). Подставим значения интенсивностей в формулы для решения уравнения Колмогорова:

$$P_0 = (1 + \frac{2}{3})^{-1} = 0{,}600;$$

$$P_1 = \frac{2}{3} * 0{,}600 = 0{,}399 \approx 40\,\%.$$

Таким образом, доля потери клиентов составляет 40 %, т.е. из 100 % приходящих клиентов мастер в состоянии обслужить только 60 %. Исходя из складывающегося потока клиентов, в данную мастерскую целесообразно порекомендовать принять второго мастера.

3.3. Одноканальная система массового обслуживания с ограничением на длину очереди

В системах массового обслуживания с ограниченной очередью число мест в очереди (m) ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает систему не обслуженной. Классическим примером такой системы является, например, кинотеатр с одной билетной кассой. Купить билеты на конкретный сеанс можно только в таком количестве, сколько мест в зале кинотеатра имеется. Граф одноканальной системы с ограничением на длину очереди представлен на рис. 12.

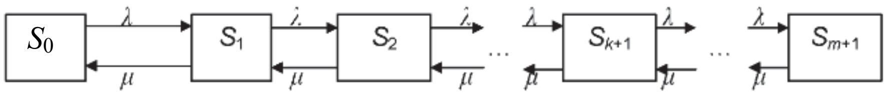


Рис. 12. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – канал обслуживания свободен;

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка;

S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок;

S_{m+1} – канал обслуживания занят, все m мест в очереди заняты.

Анализ деятельности одноканальных систем с ограниченной очередью проводят по следующим формулам [17, с. 84-95]:

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = P_{m+1} = \rho^{m+1} * P_0 .$$

Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} * P_0 .$$

Абсолютная пропускная способность

$$\text{A} = Q * \lambda.$$

Все остальные показатели системы зависят от показателя нагрузки системы (ρ). Рассмотрим общий и частный случаи расчёта показателей в зависимости от значения нагрузки системы.

Частный случай:

при $\rho = 1$

Вероятность простоя системы

$$P_0 = 1 / (m + 2).$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди на обслуживании ($L_{оч}$)

$$L'_{оч} = \frac{m*(m+1)}{2} * P_0 .$$

Среднее время ожидания обслуживания ($T_{оч}$)

$$T'_{оч} = L'_{оч} / \lambda.$$

Важной характеристикой системы является среднее время пребывания заявки в системе ($T_{смо}$), которое включает среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Рассчитывается $T_{смо}$ по формуле

$$T_{смо} = \frac{m+1}{2\mu} .$$

Общий случай:

при $\rho \neq 1$

Вероятность простоя системы

$$P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{m+2})} .$$

Среднее число заявок, стоящих в очереди на обслуживании ($L_{оч}$)

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m (m - m*\rho + 1)}{(1-\rho)^2} * P_0 .$$

Среднее время ожидания обслуживания ($T_{оч}$)

$$T_{оч} = L_{оч} / \lambda.$$

Среднее время пребывания в системе ($T_{смо}$)

$$T_{смо} = \left(L_{оч} / \lambda + L_{об} / \lambda\right) = \frac{L_{смо}}{\lambda} ,$$

где $L_{об}$ – среднее число заявок, находящихся на обслуживании.

$$L_{об} = m + 1 / m + 2.$$

$$L_{смо} = L_{об} + L_{оч},$$

где $L_{смо}$ – среднее число заявок, находящихся в системе.

Пример решения задачи 1: В магазине самообслуживания поток покупателей простейший с интенсивностью 2 покупателя в минуту. В зоне кассового узла установлен один кассовый аппарат, позволяющий добиться *такой производительности труда, при которой интенсивность потока обслуживания составляет 2 покупателя в минуту. Определите основные характеристики работы системы массового обслуживания (магазина) при условии, что очередь при входе в зал самообслуживания ограничена 5 покупателями.*

Решение: В задаче дано λ = 2 пок./мин; μ= 2 пок./мин; m = 5 покупателей. Здесь необходимо применять формулы частного случая, т.к. $\rho = \frac{2}{2} = 1$.

$$P_0 = 1 / (m + 2) = 1 / (5 + 2) = 0{,}143 \approx 14\ \%;$$

$$L'_{оч} = \frac{m * (m+1)}{2} * P_0 = \frac{5 * (5+1)}{2} * 0{,}143 = 2{,}15 \approx 2 \text{ покупателя};$$

$$T'_{оч} = L'_{оч} / \lambda = 2{,}15 / 2 = 1{,}1 \approx 1 \text{ мин.}$$

Вывод: Расчётные значения основных показателей работы системы массового обслуживания (магазина) находятся в пределах допустимых значений, за исключением показателя вероятности простоя системы, который незначительно (на 3 %) превышает нормативное значение, следовательно, работу рассматриваемой системы массового обслуживания следует оценить удовлетворительно.

Пример решения задачи 2: На автомойку в среднем за час приезжают шесть автомобилей. Если в очереди уже находятся два автомобиля, вновь подъезжающие клиенты не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего одно. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 700 р. Определите характеристики работы системы массового обслуживания и долю потери выручки автомойки (при условии 12 часового рабочего дня).

Решение: В задаче дано λ = 6 авто/ч; $t_{обсл}$ *= 20 мин =>* $\mu = \frac{1}{20} = 0{,}05$ *авто/мин или 3 авто/ч (0,05 * 60)*[1]*; m = 2 автомобиля. Здесь необходимо применять формулы общего случая, т.к.* $\rho = \frac{6}{3} = 2$.

$$P_0 = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{m+2})} = \frac{1-2}{1-2^4} = 0{,}067 \approx 7\ \%;$$

$$P_{отк} = \frac{(1-\rho)\rho^{m+1}}{(1-\rho)^{m+2}} = \frac{(1-2) * 2^3}{(1-2)^4} = 0{,}5 \approx 50\ \%;$$

[1] При решении задач все исходные данные должны быть приведены к одной системе измерения, т.е. если один показатель (в данном случае интенсивность входного потока заявок) дан в часах, то второй показатель (интенсивность обслуживания) также необходимо перевести в часы и наоборот.

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m - m*\rho + 1)}{(1-\rho)^2} * P_0 = 1{,}33 \approx 1 \text{ автомобиль;}$$

$T_{оч} = L_{оч} / \lambda = 1{,}33 / 6 = 0{,}22$ *ч* $= 13{,}2$ *мин.*

*Потерю выручки можно рассчитать, используя показатель вероятности отказа в обслуживании ($P_{отк}$). При условии 12 часового рабочего дня потеря клиентов в пересчёте на количество автомобилей составит: 6 * 12 * 0,5 = 36; соответственно потеря в выручке будет равна: 36 * 700 = = 25 200 р.*

Вывод: Показатель отказа в обслуживании свидетельствует о том, что половина всех приезжающих автомобилей не обслуживается, для улучшения работы системы необходимо добавить дополнительное место для мойки автомобилей, что приведёт к сокращению доли потери клиентов и увеличит выручку автомойки.

3.4. Одноканальная система массового обслуживания без ограничений

В одноканальных системах массового обслуживания с неограниченной очередью длина очереди (теоретически) может расти до бесконечности. Примером такой системы массового обслуживания может служить очередь в хлебном магазине (булочной) с одним кассиром. Граф одноканальной системы без ограничений на длину очереди изображён на рис. 13.

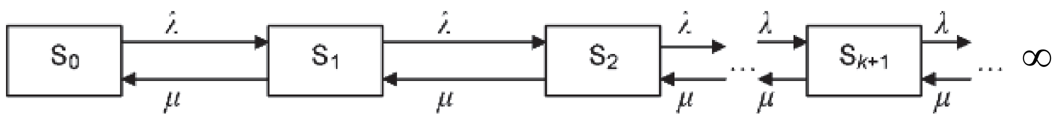


Рис. 13. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – канал обслуживания свободен;

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка;

S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок.

Все характеристики такой системы массового обслуживания можно получить из формул предыдущего раздела, полагая в них $m \to \infty$.

Поскольку в системах массового обслуживания отсутствует ограничение на длину очереди, то любая заявка может быть обслужена, т.е. относительная пропускная способность равна

$$Q = P_{обсл} = 1.$$

Вероятность отказа в такой системе невозможна, поэтому принимается как $P_{\text{отк}} = 0$.

Анализ остальных показателей системы можно провести по формулам [17, с. 95-101]:

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda * Q = \lambda.$$

Вероятность пребывания в очереди (k) заявок

$$P_k = \rho^k\,(1 - \rho).$$

Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в системе

$$L_{\text{смо}} = L_{\text{оч}} + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + t_{\text{обсл}} = \frac{L_{\text{смо}}}{\lambda}.$$

Пример решения задачи: В булочной один контролёр-кассир. В течение часа в булочную в среднем приходят 54 покупателя. Среднее время обслуживания одного покупателя составляет 1 мин. Определите характеристики системы массового обслуживания и проведите анализ её работы.

Решение: В задаче дано $\lambda = 54$ *пок./ч;* $t_{обсл} = 1$ *мин* => $\mu = \frac{1}{1} = 1$ *пок./мин или 60 пок./ч;* $\rho = \frac{54}{60} = 0{,}9$.

$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \approx 10\ \%;$

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1 \approx 8 \text{ чел.};$$

$$T_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{8{,}1 * 60}{54} = 9 \text{ мин.}$$

Вывод: Система работает неудовлетворительно, несмотря на незначительный процент простоя. Среднее время ожидания обслуживания большое (практически в два раза превышает норматив), что соответственно приводит к росту очереди. В булочной, учитывая складывающийся входящий поток покупателей, целесообразно организовать дополнительный канал обслуживания.

3.5. Многоканальная система массового обслуживания с отказом

В коммерческой деятельности примерами многоканальных систем массового обслуживания могут являться офисы коммерческих предприятий с несколькими телефонными каналами, справочные службы, диспетчерские такси и пр.

Размеченный граф многоканальной системы массового обслуживания с отказом в обслуживании представлен на рис. 14.

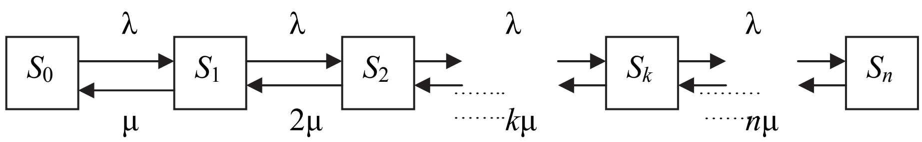


Рис. 14. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – система свободна (простаивает);

S_1 – занят один канал обслуживания;

S_2 – занято два канала обслуживания;

S_k – занято k каналов обслуживания;

S_n – все каналы системы заняты обслуживанием.

Случайный процесс, протекающий в системе массового обслуживания, представляет собой частный случай процесса «рождения-гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, которые позволяют получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга [17, с. 75]:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{n} \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}.$$

Для многоканальной системы массового обслуживания с отказом рассчитывают следующие значения:

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдет все каналы занятыми

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} * P_0 .$$

Относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - P_n \quad \text{или} \quad Q = P_{\text{обсл}} = \frac{n_{\text{з}}}{\rho} .$$

Абсолютная пропускная способность рассчитывается по формуле

$$\text{A} = \lambda * P_{\text{обсл}} .$$

Число каналов, занятых обслуживанием, и коэффициент занятости каналов рассчитываются по следующим формулам:

$$n_{\text{з}} = \rho * P_{\text{обсл}} = \frac{\text{A}}{\mu} ;$$

$$k_{\text{з}} = \frac{n_{\text{з}}}{n} = \frac{\rho}{n} * P_{\text{обсл}} .$$

Среднее время пребывания заявки в системе определяется формулой Литтла

$$T_{\text{смо}} = \frac{n_{\text{з}}}{\lambda} .$$

Пример решения задачи: В коммерческом банке, в отделе кредитования физических лиц, три телефонные линии. В среднем в отдел поступает 75 звонков в час. Среднее время предварительных переговоров справочного характера составляет 2 мин. Определите основные характеристики системы, оцените её работу.

Решение: В задаче дано количество каналов обслуживания $n = 3$; $\lambda = 75$ *звонков/ч;* $t_{обсл} = 2$ *мин* => $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$ *звонков/мин или* $60 * 0{,}5 =$ $= 30$ *звонков/ч;* $\rho = \frac{75}{30} = 2{,}5$.

Находим вероятность того, что обслуживанием не занят ни один канал: $P_0 = \left(\sum_{n=0}^{n} \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1} = \left(1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{1*2} + \frac{2{,}5^3}{1*2*3}\right)^{-1} = 0{,}11 \approx 11\ \%;$

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} * P_0 = \frac{2{,}5^3}{3!} * 0{,}11 = 0{,}282 \approx 28\ \%;$$

$$Q = P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}282 = 0{,}718;$$

$$n_з = \rho * P_{обсл} = \frac{A}{\mu} = 2{,}5 * 0{,}718 = 1{,}795 \approx 2 \text{ канала.}$$

Вывод: Согласно представленным расчётам, в отделе необходима ещё одна телефонная линия, т.к. входящий поток звонков обслуживается только на 72 %, в отделе в постоянном режиме занято две телефонные линии – это неудовлетворительно характеризует работу системы в целом.

3.6. Многоканальная система массового обслуживания с ограничением на длину очереди

Пусть на вход системы массового обслуживания, имеющей n каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ, а максимальное число мест в очереди равно m. Граф такой системы представлен на рис. 15.

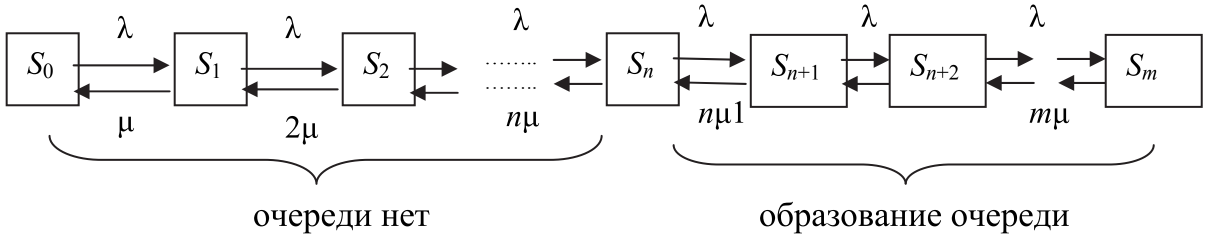


Рис. 15. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – система свободна (простаивает);

S_1 – занят один канал обслуживания;

S_2 – занято два канала обслуживания;

S_n – все каналы системы заняты обслуживанием;

S_{n+1} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди одна заявка;

S_{n+2} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди две заявки;

S_m – все каналы заняты, все m мест в очереди заняты.

Все показатели системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди зависят от показателя нагрузки системы и количества каналов обслуживания. В этих системах, так же как и в одноканальных системах с ограничением, выделяют общий и частный случаи [17, с. 101-106].

Частный случай:

при $\rho / n = 1$

Вероятность простоя системы определяется по формуле

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m * \rho^{n+1}}{n * n!}\right)^{-1}.$$

Вероятность того, что в системе массового обслуживания находится какое-либо количество заявок

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} * P_0, \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!} * P_0, \quad P_n = \frac{\rho^n}{n!} * P_0 .$$

Вероятность образования очереди и вероятность отказа в обслуживании соответственно равны

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{n!} * \frac{1-(\rho/n)^m}{1-\rho/n} * P_0,$$

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!} * P_0.$$

Относительная пропускная способность системы и абсолютная пропускная способность рассчитываются по следующим формулам:

$$Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}},$$

$$\text{A} = \lambda * Q.$$

Среднее число занятых и среднее число простаивающих каналов определяются по формулам

$$n_{\text{з}} = \text{A}/\mu = \rho * Q,$$

$$n_{\text{пр}} = n - n_{\text{з}}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, находится в зависимости от величины ρ / n

$$L_{\text{оч}} / = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{m*(m+1)}{2} * P_0.$$

Среднее время ожидания в очереди рассчитывается в зависимости от величины ρ / n

$$T_{\text{оч}} / = \frac{L_{\text{оч}} /}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется по формуле

$$T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}.$$

Коэффициенты занятости и простоя каналов определяются по формулам

$$K_з = n_з / n,$$

$$K_{пр} = 1 - K_з.$$

Общий случай:

при $\rho / n \neq 1$

Вероятность простоя системы находится по формуле

$$P_0 = (\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!*(n-\rho)} * (1 - (\frac{\rho}{n})^m))^{-1}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди), рассчитывается по формуле

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{1 - (\rho / n)^m * (m + 1 - m * \rho / n)}{(1 - \rho / n)^2} * P_0.$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

Все остальные показатели системы для общего случая рассчитываются по тем же формулам, какие представлены в частном случае, т.к. не зависят от нагрузки системы и количества каналов обслуживания.

Пример решения задачи: В магазине поток покупателей простейший с интенсивностью 6 человек в минуту. Покупателей обслуживают три контролёра-кассира с интенсивностью 2 покупателя в минуту. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Определите основные показатели системы, дайте оценку её работы.

Решение: n = 3; λ = 6 чел./мин; μ = 2 пок./мин; m = 5 чел.; $\rho = \frac{6}{2} = 3$

здесь представлен частный случай, т.к. $\rho / n = 3 / 3 = 1$.

$$P_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m * \rho^{n+1}}{n * n!})^{-1} = (1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{1*2*3} + \frac{5 * 3^4}{3*(1*2*3)})^{-1} = 0{,}0282$$

$\approx 3\ \%$;

$$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!} * P_0 = \frac{3^8}{3^5 * 3!} * 0{,}0282 = 0{,}127 \approx 13\ \%;$$

$$L_{оч}/ = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{m * (m+1)}{2} * P_0 = \frac{3^4}{3 * (1*2*3)} * \frac{5 * 6}{2} * 0{,}0282 = 1{,}9 \approx 2 \text{ чел.};$$

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}9}{6} = 0{,}32 \text{ мин.}$$

Вывод: Система работает хорошо, т.к. все показатели (за исключением вероятности отказа в обслуживании) находятся в пределах допустимых значений.

3.7. Многоканальная система массового обслуживания без ограничений

В системах массового обслуживания без ограничений теоретически предполагается, что очередь будет расти бесконечно, следовательно, вероятность отказа в обслуживании будет равна нулю. Размеченный граф такой системы представлен на рис. 16.

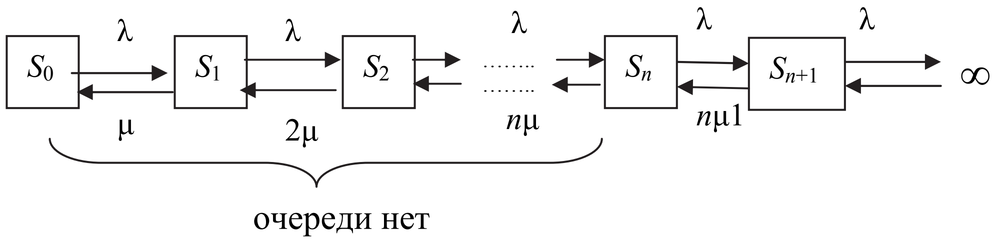


Рис. 16. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания без ограничений

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – система свободна (простаивает);

S_1 – занят один канал обслуживания;

S_2 – занято два канала обслуживания;

S_n – все каналы системы заняты обслуживанием;

S_{n+1} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди одна заявка.

……$\to \infty$ – бесконечное число заявок, образующих очередь.

Основные характеристики данной системы можно получить из формул многоканальной системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди, при переходе к пределу при $m \to \infty$ [17, с. 111]:

Вероятность простоя системы определяется по формуле

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}.$$

Вероятность образования очереди вычисляется по формуле

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} * P_0.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, будет определяться по формуле

$$L_{\text{оч}} = \frac{n}{n-\rho} * P_{\text{оч}}.$$

Среднее время ожидания в очереди рассчитывается по формуле

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе находится по формуле

$$T_{\text{смо}} = T_{\text{оч}} + t_{\text{обсл}}.$$

3.8. Контрольные вопросы и задания к разделу 3

Задача 1.

Станция наведения истребителей имеет 3 канала. Каждый канал может одновременно наводить один истребитель на одну цель. Среднее время наведения истребителей на цель равно 2 мин. Поток целей простейший с плотностью 1,5 самолета в минуту. Найдите среднюю долю целей, проходящих через зону действия не обстрелянными, если цель, по которой наведение не началось в момент, когда она вошла в зону действия истребителей, вообще остается неактивной. Сделайте вывод о работе станции.

Задача 2.

В сельской парикмахерской работает один мастер, который делает только простейшие прически. В среднем он стрижет одного клиента 20 мин. Клиенты к парикмахеру подходят независимо друг от друга в среднем через каждые 55 мин, в случае если парикмахер занят, они уходят. Определите долю потери клиентов (задачу решите двумя способами, используя характеристики системы массового обслуживания и без них).

Задача 3.

Автоматическая телефонная станция имеет 4 линии связи. На станцию поступает простейший поток заявок с интенсивностью 3 вызова в минуту. Вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Средняя продолжительность разговора 2 мин. Найдите вероятность отказа и среднюю долю времени, в течение которой станция вообще не загружена.

Задача 4.

На плодоовощную базу в среднем через 30 мин прибывают машины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определите показатели и дайте оценку работы системы массового обслуживания.

Задача 5.

Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, обслуживает (распускает) состав на горке в среднем за 20 мин. Определите основные характеристики системы массового обслуживания, сделайте вывод о её работе.

Задача 6.

Вычислите непосредственно по графу состояний, пользуясь схемой процесса рождения и гибели, финальные вероятности состояний для простейшей двухканальной системы массового обслуживания с тремя местами в очереди при интенсивности заявок 0,6 и интенсивности обслуживания 0,2. Найдите для этой системы массового обслуживания характеристики $\acute{L}_{оч}$, $\acute{L}_{смо}$, $T_{оч}$, $T_{смо}$, не пользуясь формулами характеристики системы, а непосредственно через финальные вероятности.

Задача 7.

Подсчитайте характеристики эффективности для простейшей одноканальной системы массового обслуживания с тремя местами в очереди при интенсивности потока заявок, равной 4 заявки в час, интенсивности обслуживания, равной 2 заявки в час. Выясните, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до 4.

Задача 8.

Система массового обслуживания – обувной магазин, в котором каждый покупатель проходит три фазы обслуживания: 1) выбор и примерка обуви; 2) уплата денег в кассу; 3) получение покупки на контроле. Поток покупателей в магазине простейший с интенсивностью 45 человек в час.

В отделе примерки имеются 4 стула. Среднее время примерки и выбора обуви равно 5 мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе равно 1 мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупки. На контроле работают три продавца, среднее время выдачи покупки равно 2 мин. Все потоки событий простейшие. Определите характеристики эффективности работы магазина. Ответьте на следующий вопрос: В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?

Задача 9.

Определите оптимальное число телефонных номеров, необходимых для установки на коммерческом предприятии, при условии, что заявки на переговоры поступают с интенсивностью 90 звонков в час, а средняя продолжительность разговора по телефону составляет 2 мин.

Задача 10.

В торговом павильоне покупателей обслуживает 1 продавец. Площадь павильона равна 24 $м^2$, из них 10 $м^2$ приходится на торговый зал. Если в павильоне очередь на обслуживание составляет 10 человек, потенциальный покупатель туда не входит. Дайте оценку такой системы массового обслуживания и определите рекомендации по созданию оптимального режима работы, если интенсивность прихода покупателей составляет 120 человек в час, а среднее время обслуживания одного покупателя равно 3 мин.

Задача 11.

На АЗС имеется только одна колонка для заправки. Интенсивность потока автомобилей на АЗС к колонке за бензином составляет 30 авто в час. Среднее время заправки равно 5 мин. Проведите анализ работы системы массового обслуживания.

Задача 12.

Имеется простейшая трехканальная система массового обслуживания с отказами. На нее поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки в минуту, время обслуживания заявки одним каналом равно 0,5 мин. Выгодно ли с точки зрения пропускной способности системы массового обслуживания заставить все три канала обслуживать заявки сразу? Причем в этом случае среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в системе массового обслуживания?

Задача 13.

Имеется простейшая трехканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок – 4 заявки в час, среднее время обслуживания составляет 0,5 ч. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди; 2) среднее время пребывания заявки в очереди и 3) среднее время пребывания заявки в системе, объединить все три канала в один с втрое меньшим средним временем обслуживания?

Задача 14.

Среднее число покупателей, поступающих на узел расчета в магазине самообслуживания, 100 человек в час. Кассир может обслуживать 60 человек в час. Определите, какое число кассиров необходимо для того, чтобы вероятность появления очереди не превысила 0,60.

Задача 15.

На АТС поступают заявки на междугородние переговоры. В среднем за 1 ч поступает 13 заявок. Приведите аргументы против того, что поток заявок на телефонную станцию является ординарным. Найдите среднее число заявок, поступающих за сутки. На телефонной станции появляются сбои в работе, если за полчаса на нее поступит более 50 заявок. Найдите вероятность сбоя станции.

Задача 16.

Двое рабочих обслуживают 6 станков. Станок требует наладки в среднем каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Все потоки событий простейшие. Определите характеристики системы массового обслуживания. Установите, улучшатся ли характеристики системы массового обслуживания, если рабочие будут налаживать станки совместно, тратя вдвоем на наладку в среднем 5 мин.

Задача 17.

Рабочий обслуживает 4 станка, каждый станок отказывает с интенсивностью 0,5 отказа в час. Среднее время ремонта одного станка 0,8 ч. Все потоки событий простейшие. Определите основные показатели, характеризующие систему массового обслуживания.

4. АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Одной из главных задач массового обслуживания является рациональная организация торгово-технологических процессов, например, в крупных магазинах самообслуживания.

В общем виде система обслуживания торгового предприятия, применяющего метод самообслуживания, состоит из двух фаз:

1) зона самообслуживания – выбор покупателями товаров в торговом зале;

2) зона кассового узла – расчет покупателей за покупку.

Основная функция кассового узла состоит в обеспечении высокой пропускной способности торгового зала. Основными факторами, влияющими на пропускную способность узла расчета, являются количество кассовых кабин и типы кассовых аппаратов. Вопросы рациональной организации зоны кассовых узлов стали волновать владельцев торговых точек практически с тех пор, как появились первые кассовые аппараты. История создания кассового аппарата приводится в конце данного раздела (с. 55).

Кассовый узел можно рассматривать как систему обслуживания с потерями (отказами) или как систему с ожиданием. Однако ни одна из этих систем не позволяет реально описать процесс обслуживания в кассовом узле крупного магазина самообслуживания, поэтому вторую фазу обслуживания целесообразно рассматривать как систему с ограниченной длиной очереди (промежуточную между системой с ожиданием и системой с потерями) [17, с. 123-124].

Приведём анализ системы массового обслуживания на примере городского универсама («Bitte-market»). Универсам – крупный магазин самообслуживания, работающий ежедневно с 8 до 22 ч. Ассортимент составляют практически все товарные группы продуктов питания и ограниченный ассортимент предметов бытовой химии. Узел расчета состоит из 8 кассовых аппаратов. Результаты регистрации потока покупателей и их обслуживания представлены в табл. 9. Наблюдения и регистрация проводились как в будни, так и в выходные дни для достоверности данных анализа.

Таблица 9

Регистрация потока покупателей в магазине универсам

Часы работы	Будние дни		Выходные и праздничные дни	
	Кол-во покупателей, чел.	Среднее время обслуживания $t_{обсл}$, мин	Кол-во покупателей, чел.	Среднее время обслуживания $t_{обсл}$, мин
8 – 9	24	0,9	27	1
9 – 10	47		54	
10 – 11	72		237	
11 – 12	96		219	
12 – 13	108		187	
13 – 14	152		156	
14 – 15	109		203	
15 – 16	66		159	
16 – 17	84		116	
17 – 18	216		109	
18 – 19	199		106	
19 – 20	183		144	
20 – 21	138		182	
21 – 22	101		143	

Максимально допустимое число покупателей, стоящих в очереди в одну кассу, для модели массового обслуживания с ограничением на длину очереди в соответствии с проектируемой зоной кассового узла принимается равным 10 покупателям [17, с. 127].

Расчет основных показателей системы массового обслуживания, необходимых для анализа, был проведён с использованием формул для оценки деятельности многоканальной системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди (с. 45 – 47 данного пособия). Расчёты представлены в табл. 10.

Таблица 10

Характеристики системы обслуживания в универсаме
для различного числа кассовых аппаратов

Кол-во кассовых аппаратов в узле, шт.	Характеристики системы обслуживания	
	Среднее время ожидания обслуживания $T_{оч}$, мин	Вероятность потери заявок $P_{отк}$
1	401,4	44,64
2	1,1	0,08
3	1,3	0,0005
4	1,5	0,0015
5	0,13	0,000003
6	0,00008	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

На основе анализа данных табл. 10 можно сделать вывод, что по мере увеличения количества касс, время ожидания покупателями в очереди уменьшается. Также очевидным является тот факт, что когда мощность кассового узла чрезмерно мала, большая часть покупателей будет уходить не обслуженными. Чем больше мощность кассового узла, тем вероятность потери клиентов будет уменьшаться, однако здесь важным становится – не превысить оптимальную мощность. Для универсама (по данным табл. 10) этот предел лежит между 5 и 6 кассовыми аппаратами, фактически же в магазине установлено 8 касс. В качестве рекомендаций по улучшению работы магазина можно предложить создание экспресс-касс (касса одной – двух покупок), в этом случае в часы пик покупатели не будут выстаивать длительные очереди ради одной покупки, что также положительно повлияет на характеристики системы обслуживания.

Из истории создания кассовых аппаратов

Многие века торговцев волновал вопрос точного учёта поступлений и продаж. Некачественный учёт открывал большие возможности для хищений, от которых более всего страдали владельцы розничных магазинов, не имеющие возможности уличить своих продавцов и приказчиков в утаивании выручки. Промышленная революция привела к необходимости точного учёта товарно-денежных операций во всех областях торговли. В настоящее время считается, что впервые автоматизировать денежные операции попытался Дэвид Браун, который в 1875 г. сконструировал аппарат для транспортировки небольших товаров, наличных денег и прочих мелких грузов (аппарат представлял собой канатную дорожку, протянутую под потолком через весь магазин, к которой крепились небольшие корзины). В 1882 г. Вильям Лэмсон, владелец крупного мебельного магазина в Массачусетсе, купил у Д. Брауна права на использование механизма, и постепенно внося разнообразные изменения, стал выпускать несколько модификаций «механических курьеров», которые пользовались большой популярностью у розничных торговцев.

Однако изобретателями первого кассового аппарата считаются братья Ритти. Джеймс Ритти, владелец бара в Огайо, однажды озадачился вопросом учёта собственных доходов, т.к., имея высокую пропускную способность, бар всё же приносил убытки (нечистые на руку работники, получая от клиентов деньги, нередко клали их себе в карман). В 1878 г., путешествуя на пароходе, Джеймс Ритти обратил внимание на прибор, отсчитывающий каждый оборот двигательного вала, и решил, что принцип этого механизма можно использовать для создания аппарата, учитывающего количество денежных операций у него в баре. О своём открытии он рассказал брату (Джону Ритти) и попросил его сконструировать аппарат, учитывающий выручку. 4 ноября 1879 г. изобретение братьев Ритти было запатентовано. Сконструированный аппарат имел два ряда клавиш, отмечавших сумму покупки, и часовой циферблат с двумя стрелками (для долларов и центов). Вскоре Ритти также придумал приспособление, с помощью которого каждая денежная операция фиксировалась на бумажном рулоне. Вскоре бар Ритти стал приносить большие доходы не только из-за честности буфетчиков, но и из-за необычного аппарата, который собирал толпы зевак.

Впоследствии изобретение Ритти получило название «Неподкупный кассир Ритти» и стало пользоваться большой популярностью, однако, не имея возможности наладить массовый выпуск аппаратов, братья продали свой патент Якобу Экерту, который в свою очередь перепродал его Джону Паттерсону. Паттерсон добавил к аппарату выдвижной ящик для денег и наладил массовый выпуск кассовых аппаратов. В 1911 г. было продано миллион кассовых аппаратов, которые к тому времени приобрели массовый спрос не только в США, но и во всех развитых странах мира.

4.1. Пример анализа системы массового обслуживания в коммерческой деятельности

Печатается по материалам исследования «Анализ организации обслуживания покупателей в зоне кассовых узлов предприятий розничной торговой сети Хабаровского края», опубликованном в научном журнале «Известия ИГЭА», г. Иркутск, 2011 г., № 2, с. 74-77, автор И. В. Солнышкина (в пособии представлен полный текст исследования).

Насыщенность рынка и обострение конкуренции между торговыми предприятиями приводит к необходимости изменения отношения к клиентам, к их запросам и нуждам, это превращает качество обслуживания в один из главных факторов конкурентоспособности предприятия.

Устройство кассовых узлов и организация их работы напрямую влияют на качество обслуживания клиентов, т.к. именно в зоне кассового узла складываются такие основные характеристики обслуживания, как длина очереди, интенсивность обслуживания, среднее время ожидания в очереди и др. От этих характеристик напрямую зависит желание покупателя посещать ту или иную торговую точку, и, как следствие, перечисленные характеристики влияют на объем выручки, получаемой торговым предприятием.

Проанализируем деятельность кассовых узлов крупных магазинов самообслуживания на территории Хабаровского края. Материалом для анализа и оценки деятельности магазинов послужили лонгитюдные наблюдения автора за организацией работы кассовых узлов в магазинах самообслуживания города Хабаровска, города Комсомольска-на-Амуре и поселка городского типа Солнечный. Основу наблюдений составили крупнейшие розничные сети края: ООО «Димарт» (сеть Super Good), ООО «ПФК ДиС» (сеть «Десяточка»), ООО «Народная компания» (сеть НК-сити). А также магазины, принадлежащие индивидуальным предпринимателям и муниципалитетам: «Белая Русь», «777» (Три семерки), «Универсам» (сеть «Bitte-market»), «Amba» и др.

В ходе анализа деятельности предприятий торговли также предполагается проверить гипотезу «ядра периферии», суть которой заключается в том, что чем дальше от краевого центра, тем хуже организована работа кассовых узлов. В целях исследования установим шкалу оценки, которая будет основана на показателях деятельности систем обслуживания, представленных в табл. 11. Таким образом, соответствие нормативным значениям будет характеризоваться как хорошая организация деятельности, частичное несоответствие – удовлетворительная и отклонения по всем показателям – неудовлетворительная организация деятельности.

Таблица 11

Характеристика показателей теории массового обслуживания

Показатель	Формула расчета	Характеристика
λ – интенсивность потока покупателей	Среднее значение количества покупателей, посетивших магазин в единицу времени	
μ – интенсивность обслуживания	$\mu = \frac{1}{t_{обсл}}$, где $t_{обсл}$ – среднее время обслуживания	Величина, обратная среднему времени обслуживания покупателей
ρ – нагрузка системы	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	
n – количество каналов обслуживания	Количество кассовых аппаратов в зоне кассового узла	
m – ограничение на длину очереди	Характеристика данного показателя в полном объеме приведена выше по тексту	
P_0 – вероятность простоя системы	При $\rho / n = 1$ $P_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m * \rho^{n+1}}{n * n!})^{-1}$; При $\rho / n \neq 1$ $P_0 = (\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!*(n-\rho)} * (1 - (\frac{\rho}{n})^m))^{-1}$	Вероятность простоя при нормальном функционировании системы не должна превышать 10 – 13 %. (Так, например, вероятность простоя, равная 25 %, означает, что четверть всего рабочего времени кассиры просто ничего не делают). В то же время недопустимо $P_0 = 0$, это означает, что кассиры ни минуты не отдыхают, а всю смену заняты только обслуживанием
$L_{оч}$ – средняя длина очереди	При $\rho / n = 1$ $L_{оч} / = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{m * (m+1)}{2} * P_0$; При $\rho / n \neq 1$ $L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{1 - (\rho / n)^m * (m + 1 - m * \rho / n)}{(1 - \rho / n)^2} * P_0$	При нормальном функционировании системы длина очереди не превышает 5 – 7 человек
$T_{оч}$ – среднее время ожидания в очереди	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$	

В отправной точке исследования, в соответствии с выдвинутой гипотезой, предполагаем, что организация работы кассовых узлов в магазинах Хабаровска – хорошая, в магазинах Комсомольска-на-Амуре – удовлетворительная, в магазинах Солнечного – неудовлетворительная. Такое предположение имеет право на существование, т.к., организуя работу магазина, собственник торгового предприятия чаще всего исходит исключительно из собственных возможностей, крайне редко принимая в расчет существующие экономико-математические методы организации деятельности. В соответствии с этим, как частный, так и государственный бизнес в краевых центрах имеет больше возможностей, чем на периферии, и в силу больших возможностей может лучше организовать свою работу.

В приводимом исследовании зоны кассовых узлов на всех анализируемых предприятиях целесообразно рассматривать как системы с ограниченной длиной очереди. В данном случае образование очереди возможно (поэтому системы не могут характеризоваться как системы с отказом), с другой стороны, бесконечное образование очереди практически невозможно. Кроме того, переполнение зоны кассового узла приводит к тому, что очередь начинает перетекать в зону самообслуживания, это в свою очередь нарушает условия нормального выбора товаров другими покупателями.

Для модели систем массового обслуживания с ограничением на длину очереди (m), в соответствии с проектируемой зоной кассового узла, максимально допустимое число покупателей, стоящих в очереди в одну кассу, принимается равным m = 10 чел. [17, с. 127]. Как уже говорилось выше, анализ работы торговых предприятий проводился в крупных населенных пунктах Хабаровского края. В каждом исследуемом пункте анализировалась деятельность наиболее посещаемых торговых предприятий. Для того чтобы сделать вывод об организации работы торговых предприятий в конкретном населенном пункте, по регистрируемым показателям λ, $t_{обсл}$, n (см. табл. 11) находилось среднее значение для данного населенного пункта.

Например, в Солнечном были исследованы следующие магазины самообслуживания: «777» – имеет в зоне расчета 2 кассовых аппарата, «Десяточка 1» – 1 касса, «Десяточка 2» – 2 кассы, «Amba» – 2 кассы. Таким образом, среднее значение количества касс для поселка составляет – 2. Остальные регистрируемые показатели рассчитывались так же как средние. Значения исходных средних величин по каждому населенному пункту представлены в табл. 12.

Таблица 12

Средние значения исходных показателей по населенным пунктам края

г. Хабаровск	г. Комсомольск-на-Амуре	п.г.т. Солнечный
Среднее количество покупателей в час (λ), чел./ч		
$\lambda = 338$	$\lambda = 106$	$\lambda = 32$
Среднее время обслуживания одного покупателя ($t_{обсл}$), мин		
$t_{обсл} = 1{,}2$	$t_{обсл} = 1{,}9$	$t_{обсл} = 1{,}7$
Среднее количество касс в зоне кассового узла (n), шт.		
$n = 7$	$n = 5$	$n = 2$

Для более объективных данных исследования регистрация количества покупателей и среднего времени обслуживания проводилась периодически в разное время года (осень, зима, весна, лето) в разные часы работы торговых предприятий (утро, день, вечер).

Для оценки деятельности кассовых узлов достаточно рассчитать три важнейшие характеристики: вероятность простоя системы (P_0), вероятность образования очереди ($L_{оч}$) и среднее время ожидания обслуживания ($T_{оч}$). Результаты расчетов представлены в табл. 13.

Таблица 13

Показатели деятельности систем обслуживания в Хабаровском крае

г. Хабаровск	г. Комсомольск-на-Амуре	п.г.т. Солнечный
$P_0 = 0{,}0012 \approx 0$ %	$P_0 = 0{,}0294 \approx 3$ %	$P_0 = 0{,}403 \approx 40$ %
$L_{оч} = 10{,}8 \approx 11$ чел.	$L_{оч} = 3{,}04 \approx 3$ чел.	$L_{оч} = 0{,}5 \approx$ нет очереди
$T_{оч} = 1{,}9 \approx 2$ мин	$T_{оч} = 1{,}69 \approx 1{,}7$ мин	$T_{оч} = 1$ мин

В отправной точке исследования выдвигалась гипотеза «ядра периферии». Данные табл. 13 свидетельствуют о том, что выдвинутая гипотеза частично не оправдалась. Проанализируем полученные данные.

Краевой центр (город Хабаровск): Зоны расчета в среднем по городу организованы неудовлетворительно, т.к. основные характеристики работы находятся за пределами допустимых значений. Вероятность простоя, равная 0, и образование очереди большей, чем предполагаемая проектируемая зона кассового узла, свидетельствуют о том, что в среднем количество устанавливаемых кассовых аппаратов недостаточно для обслуживания складывающегося потока покупателей.

Город Комсомольск-на-Амуре: Полученные данные свидетельствуют о хорошей организации работы, т.к. расчетные значения находятся в допустимых пределах (хотя среднее время ожидания в очереди несколько превышает средне допустимое значение). В таких случаях для более четкой интерпретации полученных данных рассчитываются другие характеристики системы обслуживания. Так, например, если для Комсомольска-на-Амуре рассчитать среднее количество постоянно занятых каналов обслуживания ($n_з$), то это значение составит 3 шт., т.е. в среднем по городу в зонах кассовых узлов достаточно 4 кассовых аппарата. В соответствии с вышесказанным, будем считать, что организация работы магазинов Комсомольска-на-Амуре – удовлетворительная.

Поселок городского типа Солнечный: По данным расчета 40 % всего рабочего времени кассиры простаивают – это крайне неэффективная организация работы.

Однако здесь следует отметить, что расчёты основывались на средних значениях. Таким образом, полученные данные нельзя относить абсолютно ко всем магазинам. Даже среди исследуемых предприятий есть такие, в которых работа кассовых зон организована отлично, однако таких предприятий мало.

Проблема правильной организации работы торговых предприятий должна волновать собственников не только потому, что неудовлетворительная работа снижает качество обслуживания, а ещё и потому, что от этого зависит само существование их бизнеса. Так, например, если рассматривать издержки системы массового обслуживания (количество каналов обслуживания (касс), затраты на содержание системы, пропускную способность и пр.) и издержки заявок, приходящих на обслуживание, т.е. покупателей (длина очереди, среднее время ожидания обслуживания и пр.), то показатели этих двух групп являются противоречивыми. Противоречивы они в том смысле, что улучшение показателей в одной группе непременно приведет к ухудшению показателей в другой группе. Например, сокращение длины очереди и среднего времени ожидания в очереди можно добиться, установив дополнительно еще один кассовый аппарат в зону расчета. Таким образом, улучшив показатели в одной группе (сократим очереди), мы непременно ухудшим их в другой группе (вложение средств на закупку и установку дополнительного оборудования + затраты на его содержание).

Рассчитать оптимальное количество касс, необходимых для установки в зоне кассового узла, можно путем подстановки в формулы для расчета основных показателей деятельности системы (см. табл. 11) значения $n = 2$; 3; 4 и т.д. до получения оптимальных значений P_0, $L_{оч}$ и $T_{оч}$.

Обратную ситуацию можно наблюдать в приведенном исследовании на примере Солнечного, где мы получили среднее количество касс большее, чем необходимо для организации оптимальной работы. Это означает, что, вложив деньги в оборудование, необходимость в котором не столь велика, собственник увеличил срок окупаемости этого оборудования и издержки на содержание всей системы обслуживания, что непременно снизит получаемую прибыль.

Другая ситуация наблюдается в городе Хабаровске, где по данным расчетов среднее количество кассовых аппаратов недостаточно, чтобы обслуживать складывающийся поток покупателей, это также влияет на величину получаемой прибыли. По данным исследования А. Баутова [1], возможно несколько различных ситуаций и соответствующие им оптимальные стратегии управления системой обслуживания, в его исследовании строятся зависимости значений прибыли и числа кассовых узлов (рис. 17). На рисунке по оси абсцисс отложено число функционирующих в системе обслуживания кассовых узлов, а ординат – соответствующие значения приносимой ими валовой прибыли. Если зависимость имеет вид 1 (оптимум 1), то даже неограниченный рост числа кассовых узлов практически не увеличивает прибыль торгового предприятия.

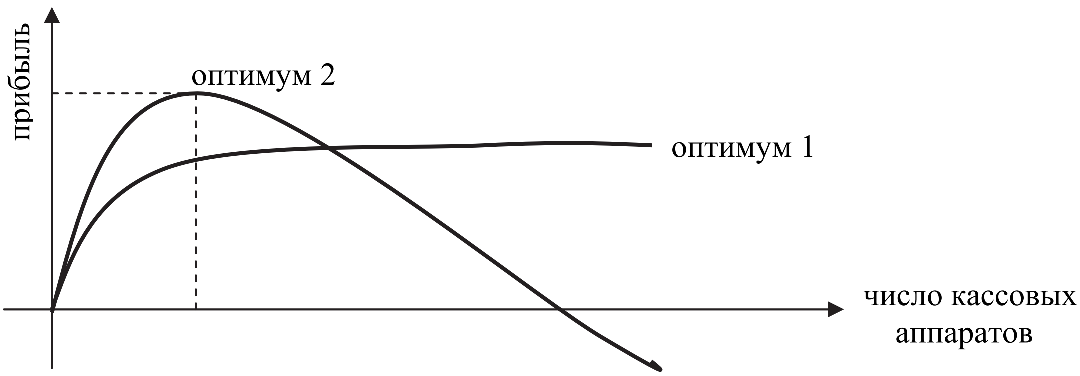


Рис. 17. Возможные зависимости прибыли от числа кассовых узлов

Если зависимость имеет вид 2, то существует единственное оптимальное число кассовых узлов, которое обеспечивает максимальную прибыль. Отклонение в любую сторону от него ведет только к снижению прибыли, а при существенно неправильном управлении системой обслуживания – и к убыткам [1, с. 27]. В приведенном исследовании можно заметить некоторую категоричность, которая не всегда подтверждается практикой. Так, например, в поселке Солнечном у жителей выбор небогат, и они зачастую вынуждены посещать имеющиеся торговые точки, даже если уровень организации обслуживания низкий, за неимением лучшего. В этом случае торговое предприятие будет получать прибыль, независимо от каких бы то ни было показателей. Тем не менее для торговых предприятий уровень обслуживания покупателей должен быть важным критерием работы, потому как каждое предприятие действует в условиях рынка, где в любой момент может появиться конкурент, способный предоставить все, что нужно клиентам.

Основной задачей собственников торговых предприятий должно являться установление разумного компромисса между показателями заявок, приходящих на обслуживания (покупатели), и возможностями самой системы обслуживания. Данную задачу можно решить, используя методы теории массового обслуживания, в том числе представленные в данной работе.

4.2. Пример анализа системы массового обслуживания в финансовом бизнесе (на примере коммерческого банка)

Печатается по материалам исследования «Методы теории массового обслуживания, используемые для оценки качества обслуживания в коммерческом банке», опубликованном в журнале «Маркетинг в России и за рубежом», 2010 г., № 1, с. 30-37, автор к.э.н., доцент ЧГУ Е. А. Хакимова (в пособии представлен сокращенный вариант опубликованного текста исследования).

В целях оценки и оптимизации качества обслуживания в коммерческом банке рассмотрен аналитический метод теории массового обслуживания, предложена система показателей качества функционирования банка как разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием. Приведен пример расчета численности специалистов операционных офисов с помощью предложенного метода. Предложенный подход может быть использован при разработке программ повышения конкурентоспособности коммерческих банков.

В настоящее время качество обслуживания как элемент бизнес-коммуникаций получает свое развитие по мере насыщения рыночной инфраструктуры коммерческими банками и обострения конкурентной борьбы. Растет необходимость в комплексном стратегическом отношении к клиентам, что превращает качество обслуживания в один из важнейших факторов конкурентоспособности коммерческого банка на рынке, тем более что влияние ценовых факторов на массовые услуги ослабевает. Для планирования численности специалистов, оценки и оптимизации качества обслуживания клиентов банка можно воспользоваться методами теории массового обслуживания.

Коммерческий банк является примером разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием, в которой поступающий поток требований клиентов не ограничен. Для оценки и оптимизации качества обслуживания в коммерческом банке можно воспользоваться аналитическим методом теории массового обслуживания.

Данный метод теории массового обслуживания позволяет установить зависимость между заданными условиями работы банка (число специалистов, их производительность, правила работы, характер потока клиентов) и интересующими характеристиками – показателями эффективности системы массового обслуживания, описывающими с той или другой точки зрения ее способность справляться с потоком клиентов (среднее число клиентов, обслуживаемых специалистом в единицу времени; среднее число занятых обслуживанием специалистов; средняя длина очереди и среднее время ожидания каждым клиентом начала обслуживания и др.).

В связи с этим целью оценки функционирования банка является установление взаимосвязи между потоками клиентов, числом специалистов, производительностью отдельного специалиста и эффективностью обслуживания для выявления направлений повышения качества обслуживания клиентов.

Для коммерческого банка как разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием рассчитываются различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

Рассмотрим применение аналитического метода теории массового обслуживания на примере деятельности четырех отделений коммерческого банка.

Для определения показателей эффективности отделений банка были определены исходные данные, выявленные в ходе наблюдения за обслуживанием клиентов в течение месяца, рассчитанные как среднее арифметическое значений, полученных за каждый день месяца. За единицу времени принимается один час рабочего дня.

Отделение банка № 1:

- число специалистов (n) – 10;
- среднее время обслуживания одним специалистом одного требования клиента ($t_{обсл}$) – 4,2 мин (0,07 ч);
- среднее число требований клиентов, поступающих в банк в течение часа (λ), – 124 чел.;
- интенсивность обслуживания (μ) – 14 чел., обслуженных каждым специалистом за час.

Отделение банка № 2:

- число специалистов (n) – 6;
- среднее время обслуживания одним специалистом одного требования клиента ($t_{обсл}$) – 5,8 мин (0,097 ч);
- среднее число требований клиентов, поступающих в банк в течение часа (λ), – 55 чел.;
- интенсивность обслуживания (μ) – 10 чел., обслуженных каждым специалистом за час.

Отделение банка № 3:

- число специалистов (n) – 7;
- среднее время обслуживания одним специалистом одного требования клиента ($t_{обсл}$) – 5,3 мин (0,09 ч);
- среднее число требований клиентов, поступающих в банк в течение часа (λ), – 70 чел.;
- интенсивность обслуживания (μ) – 11 чел., обслуженных каждым специалистом за час.

Отделение банка № 4:

- число специалистов (n) – 8;
- среднее время обслуживания одним специалистом одного требования клиента ($t_{обсл}$) – 5,0 мин (0,08 ч);
- среднее число требований клиентов, поступающих в банк в течение часа (λ), – 94 чел.;
- интенсивность обслуживания (μ) – 13 чел., обслуженных каждым специалистом за час.

В рассмотрение был введен параметр $p = \lambda / \mu$ – среднее число специалистов, которое необходимо иметь в операционном офисе банка, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования клиентов.

Отделение банка № 1: 124 / 14 = 8,9.

Отделение банка № 2: 55 / 10 = 5,5.

Отделение банка № 3: 70 / 11 = 6,4.

Отделение банка № 4: 94 / 13 = 7,2.

По расчётам основных показателей системы обслуживания было определено, что в отделении № 1 всего 64 % времени специалисты полностью заняты обслуживанием клиентов, а в отделениях № 2, 3 и 4 – 70; 75,7; 70,2 % времени соответственно.

Наименьшее среднее время ожидания клиентом начала обслуживания в отделении № 1 – 0,04 ч (2,4 мин); незначительно больше время ожидания в отделении № 4 – 0,07 ч (4,2 мин). Достаточно высокие значения в отделениях № 3 и 2 – 0,11 ч (6,6 мин) и 0,14 ч (8,4 мин) соответственно. Таким образом, наибольшая средняя длина очереди наблюдается в отделениях № 2 и 3, чуть меньше очередь в отделении № 4, минимальная средняя длина очереди в отделении № 1.

Во всех офисах банка в среднем в течение часа не занят обслуживанием клиентов один специалист.

Значения полученных коэффициентов простоя относительно низкие во всех отделениях.

В целом значения полученных коэффициентов загрузки достаточно высокие и практически не различаются по операционным офисам банка.

Несмотря на то, что значения таких показателей, как вероятность того, что все специалисты заняты обслуживанием клиентов; среднее число свободных от обслуживания специалистов; коэффициент простоя специалистов; коэффициент загрузки специалистов, практически не различаются по отделениям, все же наиболее рационально организована работа по обслуживанию клиентов в отделении № 1, в котором лучше отрегулировано распределение клиентских потоков в операционном зале, следовательно, выше качество обслуживания.

Применение аналитического метода теории массового обслуживания подтверждает существование тесной взаимосвязи между потоками клиентов, количеством и производительностью специалистов банка и эффективностью обслуживания потребителей банковских услуг.

Таким образом, с помощью методов теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи планирования, оценки и оптимизации качества обслуживания клиентов в коммерческом банке, в частности могут вырабатываться рекомендации по рациональному построению обслуживающих систем банка, организации их работы и регулированию потока заявок при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих каналов, в целях обеспечения конкурентоспособности и высокой эффективности функционирования коммерческого банка.

4.3. Контрольные вопросы и задания к разделу 4

1) Проведите оценку своей деятельности с помощью характеристик систем массового обслуживания.

2) Оцените согласованность взаимодействия студентов вашей группы с помощью характеристик систем массового обслуживания в процессе выполнения самостоятельных работ: подготовка к семинару, выполнение курсовой работы, др.

3) Проведите оценку работы характеристиками систем массового обслуживания киоска, продуктового павильона или любого другого торгового (финансового) предприятия.

4) Продолжите предложение: в многоканальной системе массового обслуживания с отказом расчет всех вероятностей состояния системы основан на ____.

5) Как аргументировать построение системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди в коммерческой деятельности?

5. ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Студенты очной формы обучения выполняют РГЗ на тему: «Анализ работы кассового узла крупного магазина самообслуживания».

Номер варианта выбирается студентом по последней цифре номера зачётной книжки.

ЗАДАНИЕ: В табл. 14 – 23 представлены результаты хронометража количества покупателей в течение рабочего дня в магазине самообслуживания «Универсам». Определите количество необходимых кассовых аппаратов в расчетном узле и постройте график выхода на работу кассиров с учетом данных табл. 24.

Таблица 14

Хронометраж (для варианта 0)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	0	0	2	1	0	2	5	0	2	0	2	5	0	6
9 – 10	0	2	3	10	13	3	3	0	3	10	11	3	0	0
10 – 11	3	15	18	12	15	15	4	11	18	19	19	14	11	0
11 – 12	15	37	48	31	29	45	12	10	24	24	26	18	45	19
12 – 13	19	24	54	48	68	59	118	23	29	56	46	65	98	65
13 – 14	24	49	89	39	99	114	156	25	46	89	78	54	124	98
14 – 15	39	68	93	82	118	148	163	36	18	96	98	78	156	114
15 – 16	42	89	102	46	168	169	121	48	95	102	124	102	192	214
16 – 17	58	96	132	78	205	190	219	96	100	140	145	145	214	258
17 – 18	69	102	148	96	234	217	282	103	114	156	148	189	254	246
18 – 19	73	115	159	115	256	283	112	125	148	190	190	201	282	198
19 – 20	89	98	98	169	170	256	98	68	96	87	97	212	299	100
20 – 21	53	46	52	90	98	120	75	45	50	54	54	140	190	67
21 – 22	45	51	48	23	64	52	50	28	32	54	23	41	44	50

Таблица 15

Хронометраж (для варианта 1)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	1	3	1	0	0	1	5	2	3	5	0	1	2
9 – 10	11	14	25	14	19	23	28	13	15	10	9	8	18	29
10 – 11	15	25	36	45	78	45	32	48	78	45	54	23	63	20
11 – 12	23	32	38	39	30	48	39	23	23	46	57	34	56	54
12 – 13	48	45	45	45	45	65	45	36	32	54	96	56	48	58
13 – 14	54	87	65	68	56	89	56	23	56	69	45	87	95	69
14 – 15	62	89	52	92	62	92	68	48	48	92	86	92	87	120
15 – 16	98	92	89	101	106	102	78	59	56	98	47	102	45	145
16 – 17	104	106	102	200	165	128	82	78	89	102	51	140	128	165
17 – 18	140	201	157	214	189	169	91	82	78	144	48	201	192	189
18 – 19	156	198	203	256	206	201	105	102	92	156	49	214	206	206
19 – 20	201	180	211	140	260	223	154	112	116	189	100	256	228	198
20 – 21	100	90	80	56	100	256	168	148	154	200	59	100	236	96
21 – 22	96	54	48	75	98	54	59	87	92	56	87	71	98	65

Таблица 16

Хронометраж (для варианта 2)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	0	1	3	5	0	0	2	6	5	9	2	9	14
9 – 10	11	8	19	24	11	12	14	28	32	11	14	17	19	23
10 – 11	19	15	14	10	15	17	21	26	14	29	16	18	24	16
11 – 12	28	32	44	29	41	40	26	23	41	52	44	26	52	49
12 – 13	56	96	48	74	59	82	56	92	56	78	92	48	52	96
13 – 14	101	104	100	115	123	142	150	144	101	114	107	112	105	156
14 – 15	158	160	148	168	189	206	209	212	206	223	244	205	201	256
15 – 16	89	96	69	50	21	59	114	23	56	98	103	145	158	203

Продолжение табл. 16

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
16 – 17	59	89	69	96	95	92	103	144	106	200	201	154	98	256
17 – 18	201	217	256	290	256	214	200	208	211	200	211	100	100	201
18 – 19	230	248	189	201	198	165	203	111	115	207	168	96	158	100
19 – 20	100	98	78	56	100	120	145	100	98	78	65	100	98	79
20 – 21	56	68	71	52	41	58	96	58	75	39	58	41	58	24
21 – 22	61	68	69	52	40	72	96	58	75	58	58	94	30	45

Таблица 17

Хронометраж (для варианта 3)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	0	1	0	0	1	5	0	2	3	0	0	1	3
9 – 10	0	3	5	0	0	5	8	0	6	2	5	9	7	5
10 – 11	2	6	9	12	6	9	11	9	7	3	2	11	12	9
11 – 12	13	15	18	19	20	18	14	20	14	10	9	15	13	23
12 – 13	30	32	24	36	38	41	54	30	36	47	58	50	63	69
13 – 14	60	72	89	91	80	71	96	17	63	98	78	59	103	97
14 – 15	78	92	96	81	103	115	132	89	74	96	102	124	145	130
15 – 16	54	58	52	39	48	96	92	45	32	68	74	89	92	105
16 – 17	28	27	36	54	32	45	69	10	28	96	45	29	69	87
17 – 18	13	15	89	78	14	18	87	12	45	18	52	48	36	70
18 – 19	89	94	98	106	125	134	100	125	148	154	102	105	140	100
19 – 20	92	98	105	117	124	98	76	93	105	118	128	150	98	70
20 – 21	34	48	49	52	40	38	29	45	54	20	48	79	60	50
21 – 22	30	48	45	52	98	38	45	48	92	20	48	61	54	81

Таблица 18

Хронометраж (для варианта 4)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	0	2	0	1	0	1	2	1	1	1	0	2	3	6
9 – 10	10	11	9	8	5	1	0	5	13	14	18	15	3	3
10 – 11	14	15	12	14	15	27	14	13	19	18	34	18	28	17
11 – 12	18	17	18	29	27	46	78	19	25	27	18	15	54	39
12 – 13	27	25	28	31	19	69	99	28	31	29	41	29	78	81
13 – 14	25	32	34	41	28	87	115	32	39	35	44	38	115	99
14 – 15	29	48	48	56	36	105	143	39	48	42	53	62	108	115
15 – 16	34	48	56	78	59	127	157	41	54	54	59	76	142	169
16 – 17	45	54	62	82	68	148	159	59	59	69	72	79	181	176
17 – 18	49	69	84	89	81	159	172	61	71	78	81	105	200	93
18 – 19	58	73	91	93	104	103	89	84	85	91	84	117	193	84
19 – 20	62	69	63	95	119	87	51	65	59	94	89	119	126	57
20 – 21	34	30	28	42	85	54	24	23	34	35	25	63	94	48
21 – 22	45	30	45	42	85	87	12	45	30	35	21	46	46	50

Таблица 19

Хронометраж (для варианта 5)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	0	0	1	0	2	1	0	1	3	0	1	0	3	5
9 – 10	13	18	15	19	13	29	13	10	15	11	10	3	7	14
10 – 11	13	18	15	19	13	29	13	10	15	11	9	3	3	0
11 – 12	19	32	23	21	26	58	49	12	17	9	18	15	33	1
12 – 13	31	38	38	24	48	69	69	25	23	23	20	39	145	13
13 – 14	39	44	46	32	53	102	81	26	48	43	38	57	187	145
14 – 15	47	57	59	39	71	140	156	38	59	51	69	81	198	129
15 – 16	51	58	63	40	89	169	158	54	63	97	71	99	215	186
16 – 17	76	69	71	49	97	181	204	92	105	115	100	123	283	192
17 – 18	89	83	86	67	103	189	117	68	117	124	110	158	294	216
18 – 19	96	97	98	71	128	120	78	90	59	96	97	182	270	97
19 – 20	78	87	70	45	132	97	54	50	48	53	40	90	100	51
20 – 21	60	87	80	45	154	97	54	69	58	53	40	154	158	100
21 – 22	78	87	70	45	132	97	54	56	48	41	40	90	98	51

Таблица 20

Хронометраж (для варианта 6)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	0	1	3	0	0	1	2	6	0	0	1	9	1
9 – 10	4	12	2	24	3	12	12	28	32	2	4	2	19	2
10 – 11	6	13	12	10	9	14	19	26	14	5	5	7	24	14
11 – 12	8	15	14	29	15	19	40	23	41	14	14	10	52	27
12 – 13	12	22	17	74	45	21	57	92	56	12	28	39	52	89
13 – 14	122	78	69	115	56	58	98	144	101	34	46	59	105	92
14 – 15	145	69	58	168	98	69	123	212	206	69	59	79	201	187
15 – 16	189	58	45	50	112	92	189	23	56	89	79	109	158	214
16 – 17	89	121	98	96	190	198	289	144	106	98	81	154	98	247
17 – 18	200	159	78	290	200	214	357	208	211	165	154	201	100	200
18 – 19	78	200	145	201	206	290	270	111	115	200	169	200	158	250
19 – 20	95	250	198	56	218	301	210	100	98	154	199	180	98	159
20 – 21	101	174	100	52	187	100	154	58	75	100	98	98	58	100
21 – 22	70	90	97	52	100	98	79	58	75	89	76	90	30	98

Таблица 21

Хронометраж (для варианта 7)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	0	0	0	1	2	3	2	6	5	0	1	2	1
9 – 10	11	4	1	2	1	2	5	28	32	11	2	3	4	2
10 – 11	19	12	15	17	20	30	36	26	14	29	10	11	45	50
11 – 12	28	20	20	21	36	45	50	23	41	52	10	28	80	90
12 – 13	56	20	32	30	20	54	80	92	56	78	29	32	100	145
13 – 14	101	45	60	70	60	98	101	144	101	114	48	59	178	192
14 – 15	158	50	60	50	98	126	154	212	206	223	56	69	200	250
15 – 16	89	50	50	78	92	159	200	23	56	98	60	71	218	270

Продолжение табл. 21

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
16 – 17	59	78	81	91	129	174	250	144	106	200	100	100	250	290
17 – 18	201	87	91	81	200	250	301	208	211	200	100	110	270	300
18 – 19	230	103	114	125	201	264	305	111	115	207	120	140	290	301
19 – 20	100	178	189	200	206	200	180	100	98	78	150	150	250	280
20 – 21	56	200	180	201	200	201	150	58	75	39	100	120	210	200
21 – 22	61	100	100	98	105	117	87	58	75	58	89	98	100	110

Таблица 22

Хронометраж (для варианта 8)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	2	0	1	3	2	3	0	2	0	1	2	0	2	14
9 – 10	12	15	14	18	28	39	14	28	2	4	5	5	6	23
10 – 11	20	21	25	29	31	45	50	26	12	13	16	18	25	16
11 – 12	31	35	39	40	45	59	26	23	29	32	33	25	45	49
12 – 13	41	49	51	52	69	89	56	92	39	40	45	45	65	96
13 – 14	50	59	48	61	94	106	150	144	45	55	65	98	103	156
14 – 15	63	67	98	100	120	141	209	212	69	78	79	102	140	256
15 – 16	79	89	98	100	150	198	114	23	70	79	98	105	169	203
16 – 17	89	99	109	187	192	150	103	144	89	89	92	106	180	256
17 – 18	98	100	154	200	205	208	200	208	100	140	159	190	207	201
18 – 19	109	100	154	201	256	214	203	111	150	190	200	189	270	100
19 – 20	154	165	178	196	168	171	145	100	170	160	196	200	200	79
20 – 21	170	178	102	150	109	100	96	58	200	210	180	175	170	24
21 – 22	120	110	101	124	100	98	96	58	156	169	100	101	98	45

Таблица 23

Хронометраж (для варианта 9)

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.	Вс.
8 – 9	0	1	1	0	1	0	2	2	6	0	5	2	9	14
9 – 10	2	3	6	7	2	8	10	28	32	11	16	17	19	23
10 – 11	14	16	20	26	29	30	39	26	14	20	29	18	24	16
11 – 12	20	25	29	30	45	59	69	23	41	39	37	39	52	49
12 – 13	40	45	60	69	78	98	100	92	56	59	87	48	52	96
13 – 14	60	78	98	89	100	130	159	144	101	89	100	112	105	156
14 – 15	70	79	89	103	120	150	198	212	206	110	120	205	201	256
15 – 16	80	92	100	102	148	189	216	23	56	123	156	145	158	203
16 – 17	98	87	100	98	100	189	200	144	106	198	187	154	98	256
17 – 18	120	154	189	170	189	200	180	208	211	200	210	100	100	201
18 – 19	169	189	193	198	199	201	197	111	115	210	237	96	158	100
19 – 20	197	178	199	200	200	189	170	100	98	245	265	100	98	79
20 – 21	180	185	179	189	178	167	140	58	75	201	189	41	58	24
21 – 22	140	120	100	100	90	95	89	58	75	100	98	94	30	45

Таблица 24

Распределение количества покупок и времени расчета покупателей $16^{20} - 16^{30}$ ч по кассе № 2

Количество покупок, шт.	Время расчета, с	Количество покупок, шт.	Время расчета, с
3	19	1	4
2	12	2	10
3	16	3	14
3	10	3	10
3	13	4	13
1	3	2	6
5	28	2	5
3	10	7	38
9	40	5	30
5	37	5	26
3	7	6	29
2	5	7	40
4	14	8	50
6	30	5	26
2	7	30 покупателей (120 покупок)	600
7	38		

Студенты заочной формы обучения направления «Экономика» (профиль – «Финансы и кредит») пишут реферат. Темы рефератов представлены ниже. Тема выбирается студентом самостоятельно по последней цифре номера зачётной книжки.

1) Исторические этапы становления и развития теории массового обслуживания.

2) Математические методы, наиболее часто применяемые в теории систем массового обслуживания (теория графов, уравнение Колмогорова, потоки событий).

3) Характеристика и методы анализа одноканальных систем массового обслуживания.

4) Характеристика и методы анализа многоканальных систем массового обслуживания.

5) Теория вероятностей как основная база теории систем массового обслуживания.

6) Особенности проведения анализа деятельности кассовых узлов магазинов с использованием инструментов теории систем массового обслуживания.

7) Потоки событий в теории массового обслуживания, характеристики потоков.

8) Возможности использования теории систем массового обслуживания во всех видах бизнеса (коммерческий, финансовый, производственный).

9) Использование критерия распределения Пирсона и формулы Пуассона в теории систем массового обслуживания.

10) Характеристики систем массового обслуживания. Особенности систем с отказом в обслуживании.

11) Марковские случайные процессы.

12) Характеристики систем массового обслуживания. Особенности систем с неограниченной очередью.

13) Классификация систем массового обслуживания в коммерческой деятельности.

14) Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания.

15) Характеристики систем массового обслуживания в различных сферах коммерческой деятельности.

16) Цепи Маркова.

17) Основные характеристики многоканальных систем обслуживания.

18) Особенности проведения анализа систем массового обслуживания без ограничения.

19) Массовое обслуживание в коммерческой деятельности.

20) Одноканальные системы с отказом в обслуживании.

В качестве итоговой аттестации по дисциплине предусмотрен экзамен. Перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен, представлен ниже.

1) Исторические этапы развития теории массового обслуживания.

2) Массовое обслуживание в коммерческой деятельности.

3) Характеристика основных потоков событий (регулярный, стационарный, без последствия, ординарный).

4) Характеристика производных потоков (Пальма, Эрланга, Пуассоновский).

5) Формула Пуассона, её применение в теории систем массового обслуживания.

6) Графы состояний систем массового обслуживания.

7) Основные принципы построения размеченного графа по матрице переходных вероятностей.

8) Свойства матрицы переходных вероятностей.

9) Составление матрицы переходных вероятностей по размеченному графу.

10) Марковские случайные процессы.

11) Цепи Маркова.

12) Классификация систем массового обслуживания в коммерческой деятельности.

13) Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания.

14) Одноканальные системы с отказом в обслуживании.

15) Одноканальные системы с ограничением на длину очереди.

16) Одноканальные системы без ограничения.

17) Многоканальные системы с отказом в обслуживании.

18) Многоканальные системы с ограничением на длину очереди.

19) Многоканальные системы без ограничения.

20) Основные характеристики одноканальных систем обслуживания.

21) Основные характеристики многоканальных систем обслуживания.

22) Особенности проведения анализа систем массового обслуживания без ограничения.

23) Системы массового обслуживания в различных сферах коммерческой деятельности.

24) Биография основателя теории массового обслуживания и русских учёных, внесших значительный вклад в её развитие.

25) Анализ систем массового обслуживания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии были рассмотрены основные положения теории систем массового обслуживания (теории очередей) в той последовательности, которая позволяет наиболее быстро освоить ключевые темы дисциплины. Изложенный материал тесно переплетён с высшей математикой и способствует закреплению знаний, полученных в ходе изучения математических дисциплин. Весь представленный в пособии теоретический материал подкреплён примерами решения практических задач с последовательными комментариями и выводами.

Практические задачи и задания для самостоятельного решения составлены таким образом, чтобы обучающиеся получили основные навыки оценки и анализа реально существующих систем массового обслуживания. Ключевыми темами для практических задач были выбраны системы массового обслуживания коммерческих предприятий и финансовых учреждений, что связано с основными направлениями подготовки бакалавров на факультете экономики и менеджмента.

Для более лёгкого усвоения дисциплины трудоёмкий математический блок комбинировался теоретическим материалом из истории дисциплины, биографий основоположников и выдающихся учёных, внесших значительный вклад в её развитие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баутов, А. Оптимизация системы обслуживания покупателей в торговых предприятиях / А. Баутов // Управление продажами. – 2001. – № 1. – С. 26-33.

2. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 432 с.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник / Е. С. Вентцель. – М. : Академия, 2003. – 576 с.

4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и её приложения : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Академия, 2003. – 432 с.

5. Высшая математика для экономистов : учебник / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 471 с.

6. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2007. – 404 с.

7. Гусев, В. А. Математика, справочные материалы / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1988. – 416 с.

8. Ильченко, А. Н. Экономико-математические методы : учеб. пособие / А. Н. Ильченко. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 288 с.

9. Калинина, В. Н. Математическая статистика / В. Н. Калинина, В. Ф. Панкин. – М. : Дрофа, 2002. – 336 с.

10. Колесников, А. Н. Краткий курс математики для экономистов : учеб. пособие / А. Н. Колесников. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 208 с.

11. Медведев, Г. А. Начальный курс финансовой математики : учеб. пособие / Г. А. Медведев. – М. : Острожье, 2000. – 267 с.

12. Малыхин, В. И. Математика в экономике : учеб. пособие / В. И. Малыхин. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 356 с.

13. Просветов, Г. И. Математические методы в экономике : учеб.-метод. пособие / Г. И. Просветов. – 3-е изд. – М. : Изд-во РДЛ, 2007. – 160 с.

14. Солнышкина, И. В. Анализ организации обслуживания покупателей в зоне кассовых узлов предприятий розничной торговой сети Хабаровского края / И. В. Солнышкина // Известия ИГЭА. – Иркутск, 2011. – № 2. – С. 74-77.

15. Солнышкина, И. В. Оценка и анализ развития сетевой формы торговли в Хабаровском крае / И. В. Солнышкина // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. Науки о человеке, обществе и культуре. – 2013. – № II-2(14). – С. 110-114.

16. Справочник по математике для экономистов : учеб. пособие / под ред. проф. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 464 с.

17. Фомин, Г. П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности : учеб. пособие / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 144 с.

18. Фомин, Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности : учебник / Г. П. Фомин. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

19. Фомин, Г. П. Модели выбора решений в коммерческих операциях / Г. П. Фомин. – М. : МГУК, 1996. – 236 с.

20. Хакимова, Е. А. Методы теории массового обслуживания, используемые для оценки качества обслуживания в коммерческом банке / Е. А. Хакимова // Маркетинг в России и за рубежом. – 2010. – № 1. – С. 30-37.

21. Цыпкин, А. Г. Справочник по математике для средней школы : справочное издание / А. Г. Цыпкин ; под ред. С. А. Степанова. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.

22. Четыркин, Е. М. Теория массового обслуживания и её применение в экономике : учеб. пособие / Е. М. Четыркин. – М. : Статистика, 1971. – 103 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗНАЧЕНИЕ $P = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА)

m	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ e^{-x}

x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0,00	1,000	10	0,40	0,670	7	0,80	0,449	4	3,00	0,050	5
0,01	0,990	10	0,41	664	7	0,81	0,445	5	3,10	0,045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3,20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3,30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3,40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3,50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3,60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3,70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3,80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3,90	20	2
0,10	0,905	9	0,50	0,606	6	0,90	0,407	4	4,00	0,0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4,10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4,20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4,30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4,40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4,50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4,60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4,70	0,0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4,80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4,90	74	7
0,20	0,819	8	0,60	0,549	6	1,00	0,368	35	5,00	0,0067	6
21	811	8	61	543	5	1,10	333	31	5,10	61	6
22	802	8	62	538	5	1,20	302	29	5,20	55	5
23	795	8	63	533	6	1,30	273	26	5,30	50	5
24	787	8	64	527	5	1,40	247	24	5,40	45	4
25	779	8	65	522	5	1,50	223	21	5,50	41	4
26	771	8	66	517	5	1,60	202	19	5,60	37	4
27	763	7	67	512	5	1,70	183	18	5,70	33	3
28	756	8	68	507	5	1,80	165	15	5,80	30	3
29	748	7	69	502	5	1,90	150	15	5,90	27	2
0,30	0,741	8	0,70	0,497	5	2,00	0,135	13	6,00	0,0025	3
31	733	7	71	492	5	2,10	122	11	6,10	22	2
32	726	7	72	487	5	2,20	111	11	6,20	20	2
33	719	7	73	482	5	2,30	100	9	6,30	18	1
34	712	7	74	477	5	2,40	0,091	9	6,40	17	2
35	705	7	75	472	4	2,50	82	8	6,50	15	1
36	698	7	76	468	5	2,60	74	7	6,60	14	2
37	691	7	77	463	5	2,70	67	6	6,70	12	1
38	684	7	78	458	4	2,80	61	6	6,80	11	1
39	677	7	79	454	5	2,90	55	5	6,90	10	1
0,40	0,670		0,80	0,449		3,00	0,050		7,00	0,0009	