

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

**А. И. Пронин, Е. Б. Щелкунов**

## **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Утверждено в качестве учебного пособия Ученым советом  
Федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

2-е издание, дополненное

Комсомольск-на-Амуре  
2015

УДК 62-52(07)  
ББК 32.965-01я7  
П815

*Рецензенты:*

Кафедра «Технологическая информатика и информационные системы»  
ФГБОУ ВПО «ТОГУ» зав. кафедрой доктор технических наук,  
профессор **В. М. Давыдов**;

**Л. А. Коневцов**, кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории  
«Композиционные материалы» ФГБУН «Институт материаловедения  
Хабаровского научного центра Дальневосточного отделения  
Российской академии наук»

**Пронин, А. И.**

П815 Теория автоматического управления : учеб. пособие / А. И. Пронин, Е. Б. Щелкунов. – 2-е изд., доп. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 108 с.

ISBN 978-5-7765-1132-5

В учебном пособии рассмотрены основные положения и принципы управления техническими и организационными системами современного машиностроения. Приведены понятия и определения, различные способы математического описания, методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем.

Пособие предназначено для студентов направления 151901.62 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», изучающих дисциплину «Теория автоматического управления», а также может быть использовано магистрантами, аспирантами и инженерами при изучении соответствующих разделов теории автоматического управления.

УДК 62-52 (07)  
ББК 32.965-01 я7

ISBN 978-5-7765-1132-5

© ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»,  
2015

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ .....	6
1.1. Обоснование важности изучения вопросов автоматизации .....	6
1.2. Основные понятия и определения .....	8
1.3. Структурная схема системы автоматического управления .....	11
1.4. Принципы управления .....	14
1.5. Классификация систем автоматического управления .....	17
1.6. Исследование систем автоматического управления .....	18
1.7. Статические и астатические системы .....	20
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	22
2.1. Задачи теории автоматического управления .....	22
2.2. Понятия о процессах, происходящих в системах автоматического управления .....	22
2.3. Статические и динамические характеристики звеньев .....	24
2.4. Понятие о моделировании .....	24
2.5. Понятие о математическом моделировании .....	25
2.6. Линеаризация дифференциальных уравнений .....	26
2.7. Общий вид дифференциального уравнения системы автоматического управления .....	28
2.8. Преобразования Лапласа .....	28
2.9. Операторный метод .....	29
2.10. Передаточная функция .....	29
2.11. Стандартная форма записи дифференциального уравнения второго порядка .....	30
2.12. Структурные схемы .....	31
2.13. Правило преобразования структурных схем .....	34
2.14. Временные характеристики САУ .....	38
2.15. Частотные характеристики звеньев .....	40
2.16. Логарифмические частотные характеристики .....	44
2.17. Типовые динамические звенья систем автоматического регулирования .....	46
2.18. Частотные характеристики разомкнутых систем .....	53
2.19. Методы описания процессов в САУ .....	56
3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	61
3.1. Математический признак устойчивости .....	63
3.2. Алгебраические критерии устойчивости .....	65

---

3.3. Частотные критерии устойчивости .....	70
3.4. Устойчивость по логарифмическим частотным характеристикам .....	73
<b>4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>77</b>
4.1. Общие положения .....	77
4.2. Оценка качества переходного процесса при воздействии ступенчатой функции .....	78
4.3. Оценка качества регулирования при гармонических воздействиях .....	79
4.4. Оценка качества регулирования в установившемся режиме (коэффициенты ошибок) .....	81
4.5. Косвенный метод определения показателей качества переходного процесса по распределению корней характеристического уравнения .....	81
4.6. Интегральные оценки качества переходных процессов .....	82
4.7. Частотная оценка качества регулирования .....	83
4.8. Синтез систем .....	84
4.9. Коррекция системы автоматического управления .....	84
<b>5. ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>85</b>
5.1. Технические средства сбора и регистрации информации .....	85
5.2. Усилительно-преобразовательные устройства .....	92
5.3. Исполнительные устройства .....	95
<b>6. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....</b>	<b>96</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>107</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>108</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Определяющим фактором повышения эффективности процесса функционирования производственной системы является наличие мобильной и оптимальной по структуре системы управления реального времени, адекватно отражающей протекающие в производственной системе процессы. Следовательно, при разработке современных технологических, производственных, информационных и других систем возникают проблемы, меньше связанные с рассмотрением свойств и законов функционирования элементов, а больше – с выбором наилучшей структуры, оптимальной организации взаимодействия элементов системы, определения оптимальных режимов функционирования, учетом влияния внешней среды и т.д. Речь идет о том, что успешное осуществление программы автоматизации предъясвляет к исследованию проблем развития производственных систем следующие требования: повышение уровня системного мышления; повышение уровня строгости описания; изучение новых методов исследования.

Главный тезис современного производства – утверждение первостепенной важности проблемы выработки целостной концепции производственной системы нового типа, охватывающей все основные аспекты: организацию, технологию, проектирование и изготовление. Только на базе подобной концепции можно корректно ставить и решать задачу комплексной автоматизации производственного процесса.

Развитие хозяйства во многом определяется техническим прогрессом в машиностроении. Разработка и внедрение в производство новейших конструкций машин, механизмов и приспособлений, соответствующих современному уровню развития науки и техники, возможны при наличии высокопроизводительного станочного оборудования. Повышение эффективности производства обеспечивает автоматизация. Автоматизация производства неизменно связана с созданием систем управления, которые выполняют функции контроля и регулирования производственных процессов, заменяя человека.

*Теория автоматического управления (ТАУ)* – это наука, которая изучает процессы управления и проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу. Иначе говоря, она изучает любые системы с обратной связью.

## 1. ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ

### 1.1. Обоснование важности изучения вопросов автоматизации

Основой деятельности любого предприятия, цеха, участка и т.п. является **производственный процесс**, под которым понимают организованную совокупность взаимосвязанных трудовых и технологических процессов, при реализации которых исходные материалы и полуфабрикаты превращаются в законченные изделия. Производственный процесс машиностроительного предприятия включает: получение заготовок, различные виды их обработки (механическую, термическую, химическую и др.), контроль качества, транспортирование, хранение, сборку машины, испытание, регулировку, окраску, отделку и упаковку.

Части производственного процесса, представляющие собой последовательность целенаправленных действий по получению из исходных материалов конечного продукта с требуемыми свойствами, называют **технологическим процессом**. Технологический процесс состоит из отдельных операций.

**Операции** – это целенаправленные процессы, выполняемые человеком для удовлетворения различных потребностей, представляющих собой организованную совокупность действий. Совокупность операций любого производственного процесса условно можно разбить на две группы: рабочие операции и операции управления.

**Рабочие операции** – это действия, необходимые непосредственно для выполнения процесса в соответствии с природой и законами, определяющими ход процесса. Например, процесс обработки деталей на станке состоит из рабочих операций: закрепления заготовки, подачи резца, снятия стружки и др.

Для достижения цели процесса рабочие операции должны организовываться и направляться действиями другого рода – **операциями управления**. При изготовлении детали на станке совершаются следующие операции управления: своевременное включение и отключение станка, поддержание заданного режима резания (числа оборотов заготовки, подачи инструмента), целенаправленное изменение скорости, направление перемещения резца и др. Совокупность операций управления образует процесс управления.

**Автоматизация технологического процесса** – применение энергии неживой природы в технологическом процессе или его составных частях для их выполнения и управления ими без участия людей, осуществляемая в целях сокращения трудовых затрат, улучшения условий производства, повышения объема выпуска и качества продукции.

**Автоматизация** – процесс совершенствования производства, характеризуемый, прежде всего, уменьшением потока информации от человека к машине и повышением самостоятельности различных уровней и звеньев управления.

В применении к любому производственному процессу степень автоматизации характеризуется частичным или полным освобождением человека от непосредственного выполнения функций управления производственными процессами и передачей этих функций управления автоматическим устройствам. **Автоматическими** называют устройства, которые управляют различными процессами и контролируют их без непосредственного вмешательства человека. При этом не только высвобождается труд человека, но и повышаются скорость и точность выполнения операций, значительно возрастает производительность и улучшаются условия труда, а также возможна сравнительно быстрая окупаемость первоначальных затрат за счет снижения эксплуатационных расходов и повышения объема и качества выпускаемой продукции.

**Автомат** – любое техническое устройство, которое может работать самостоятельно, без постоянного вмешательства человека. Рассмотрим, например, последовательность действия контрольного автомата (рис. 1.1). Первая стадия – контрольная операция. Если деталь годная, то отключается блокировочное устройство, и в действие приходит механизм выдачи, в противном случае бракованная деталь удаляется из контрольного автомата.

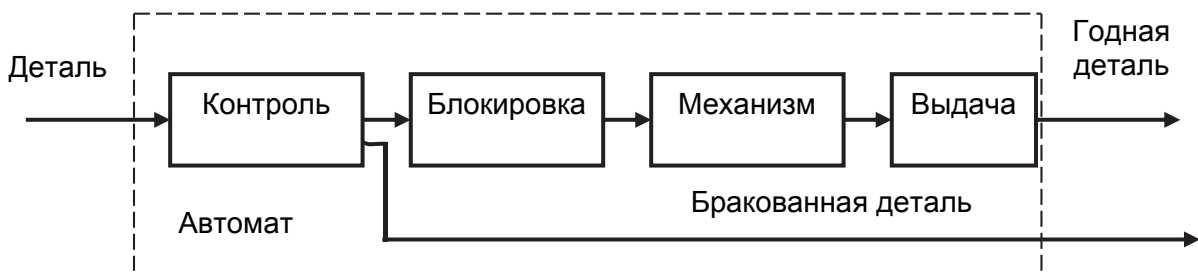


Рис. 1.1. Структурная схема автомата

Схему, изображающую последовательность процессов внутри устройства или системы, называют **функциональной структурной схемой**.

Процесс автоматизации надо отличать от процесса механизации. Полную или частичную замену операторов машинами и механизмами в рабочих операциях, выполняемых вручную, называют **механизацией**. При комплексной механизации вручную осуществляется только то, что связано с затратами усилий на управление машинами. При механизации за человеком сохраняются функции контроля и управления.

Главное направление автоматизации мелко- и среднесерийного производства – развитие и применение станков с числовым программным управлением (ЧПУ), промышленных роботов (ПР), гибких производственных систем (ГПС).

Различают несколько уровней автоматизации производства: локальную, совокупности технологических процессов, управления производством.

**Локальная автоматизация** – автоматизация отдельных технологических операций или единиц оборудования, построенная на базе узкоспециализированных по назначению автоматических регуляторов или широкоуниверсальных систем, в которых, как правило, используют современные методы цифрового управления.

При **автоматизации совокупности технологических процессов** автоматизируются связанные между собой технологические операции (процессы) или несколько единиц оборудования (робототехнические комплексы, автоматические линии, и др.). Они обеспечивают автоматическую работу комплексов технологического оборудования, координационное функционирование большого числа локальных систем.

**Автоматизация управления производством** – это создание автоматизированных систем планирования и управления производством на базе вычислительной техники. Такие системы используют при управлении как технологическими объектами, так и коллективами людей, осуществляющими производственный процесс. На этом уровне большое значение придается организационному управлению, связанному преимущественно с решением задач экономического характера, разработкой планов и производственных программ на заданные сроки, управлением материальными потоками, запасами, поддержанием ритмичного хода производства, учетом и статистическим анализом состояния производства.

На первых двух уровнях главным образом применяют автоматические системы управления, хотя возможно применение и систем «человек-машина». На третьем уровне автоматизация осуществляется только системами «человек-машина». Это объясняется тем, что с переходом к более высокому уровню автоматизации приходится все большее внимание уделять автоматизации интеллектуальной, а не физической деятельности человека.

Окончательным шагом автоматизации является интеграция с помощью ЭВМ всей производственной деятельности, начиная от конструирования изделия и заканчивая его изготовлением.

## 1.2. Основные понятия и определения

Предмет или процесс, подлежащий изучению, называют **объектом**, а все окружающие предметы, взаимодействующие с ним – **внешней средой**.

Объекты и процессы при исследовании и проектировании их представляются как системы. **Система** – совокупность элементов или устройств, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих определенную целостность, единство.

**Элемент системы** – простейшая неделимая часть системы. Любая система может быть рассмотрена как элемент системы более высокого по-



рядка, в то время как ее элементы могут выступать в качестве систем более низкого порядка.

Под *внешней средой* понимают множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему и находящихся под ее влиянием. Её следует задавать ее лишь в той части, которая относится к формированию соответствующих воздействий на элементы системы.

Универсальных правил для решения вопроса, какие элементы включать в систему, а какие – отнести к внешней среде, не существует. Конфигурация элементов системы обусловлена требованиями задач, формулировку и решение которых осуществляет исследователь.

Очевидно, что внешняя среда воздействует на объект, а объект, в свою очередь, влияет на окружающую среду. Эти взаимодействия могут быть различными: физическими (гравитационными, температурными, механическими и т.п.); информационными, т.е. сигнальными (рис. 1.2).

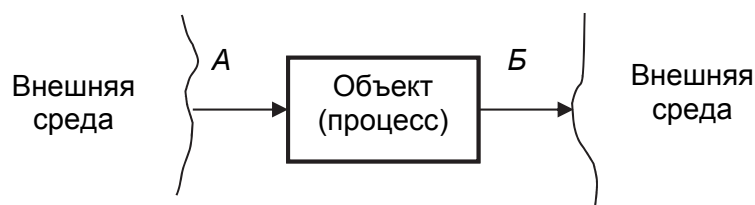


Рис. 1.2. Схема взаимодействия объекта с внешней средой

*Свойства системы* – качества, позволяющие описывать систему и выделять ее среди других систем. Свойства характеризуются совокупностью параметров, одни из которых могут иметь количественную меру, другие выражаются лишь качественно. Свойства системы проявляются в процессе ее взаимодействия с внешней средой, причем система является активной стороной этого взаимодействия.

*Состояние системы* – множество существенных свойств, которыми она обладает в данный момент времени.

Объект выделяют из среды, для того чтобы целенаправленно управлять им. Говоря об управлении как о целенаправленном процессе, введем понятие *управляющего устройства* (УУ), которое является источником целей, реализуемых управлением. Под *управлением* понимают процесс организации такого целенаправленного воздействия на объект управления, в результате которого последний переходит в требуемое (целевое) состояние.

Управляющее воздействие на объект управления можно осуществить, если выполняются следующие условия: любой процесс управления должен быть целенаправленным, т.е. должна быть известна цель управления; существует правило (совокупность правил), позволяющее добиваться поставленной цели управления в различных ситуациях; существует управ-

ляющее устройство, способное создавать в соответствии с правилом управления и целью управления управляющее воздействие под влиянием его потребностей, связанных с функционированием и взаимодействием с внешней средой и объектом управления.

В качестве управляющего устройства можно рассматривать автоматическое устройство или человека, управляющих станком, агрегатом, механизмом, процессом, или управленческий персонал цеха, завода или учреждения.

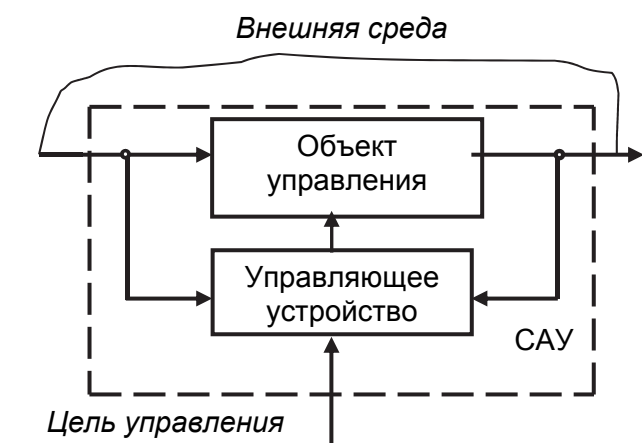


Рис. 1.3. Схема системы управления

Первым примером САУ является регулятор Ползунова-Уатта (1764 – 1765 гг.), предназначенный для автоматического поддержания постоянного давления в паровом котле (рис. 1.4). В этой машине в зависимости от числа оборотов вала 1 шары 2 регулятора под действием центробежной силы расходятся то больше,

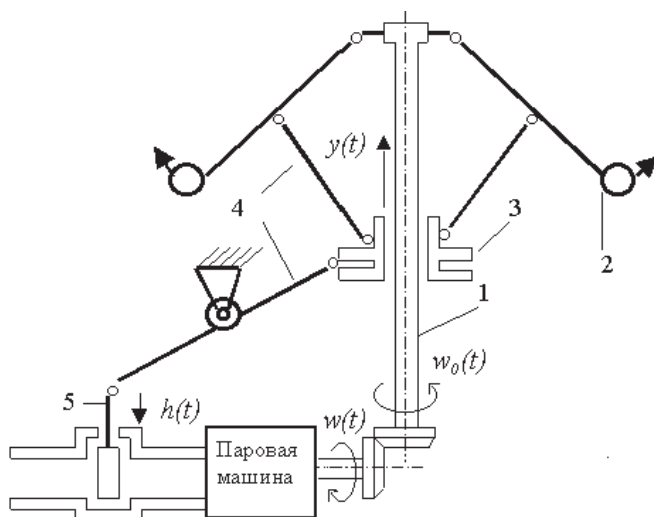


Рис. 1.4. Регулятор угловой скорости (регулятор Уатта)

**Системой автоматического управления (САУ)** называют совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействие которых приводит к выполнению поставленной цели. В структурном аспекте любую систему управления (рис. 1.3) можно представить взаимосвязанной совокупностью объекта управления и управляющего устройства.

то меньше. С ними соединена подвижная муфта 3. Через систему рычагов 4 она передвигает задвижку 5 трубы, по которой поступает пар.

Регулятор настраивается на заданное число оборотов вала  $\omega_0(t)$ . Если почему-либо скорость вала увеличилась, шары разойдутся, потянув муфту вверх  $y(t)$ , задвижка опустится  $h(t)$ . В машину начнет поступать меньше пара, а число оборотов

вала снизится до нормы. Если наоборот, вал начнет вращаться медленнее, чем нужно, регулятор поднимет задвижку, и поступление пара в машину увеличится, увеличится до нормы и число оборотов вала.

С принципами работы этого регулятора связан труд И.А. Вышнеградского «Регуляторы парового действия» (1876 г.), основными тезисами которого являются: увеличение массы шаров вредно влияет на устойчивость, уменьшение трения вредно влияет на устойчивость, уменьшение момента нагрузки маховика вредно влияет на устойчивость, уменьшение неравномерности хода вредно влияет на устойчивость.

Развитие техники: повышение мощности машин, совершенствование обработки металла, увеличение рабочей скорости, стремление уменьшить неравномерность хода, – приводило к ухудшению работы парового регулятора. Вышнеградский в своей работе объяснил, почему улучшение параметров машины ухудшает её работу. Инженерам в то время это было совершенно не ясно и никак не укладывалось в стандартные схемы. В 1892 г. А.М. Ляпунов написал работу «Общие задачи об устойчивости движения», в которой обосновал общий подход к исследованию устойчивости движения, из этого результаты Вышнеградского вытекали, как частный случай.

Во второй половине XX века были решены многие новые задачи об устойчивости систем. В современном виде ТАУ была создана в середине 60-х гг. XX века, но развитие вычислительной техники поставило перед ней новые задачи.

### 1.3. Структурная схема системы автоматического управления

Основной характеристикой всякой системы является её *структура*, под которой понимают совокупность элементов и связей между ними, определяемую исходя из распределения функций и целей, поставленных перед системой.

В общем случае САУ состоит (рис. 1.5) из объекта управления (ОУ), измерительного устройства (ИУ), задающего устройства (ЗУ), сравнивающего устройства (СУ), усилителя (У) и исполнительного механизма (ИМ).

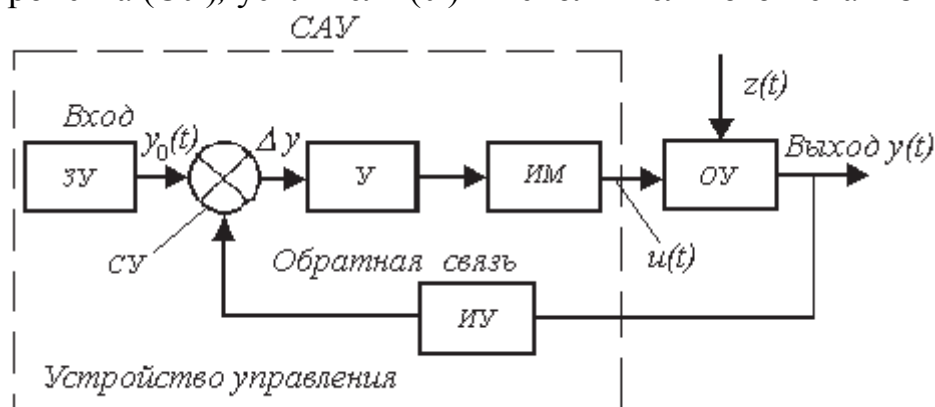


Рис. 1.5. Обобщенная структурная схема САУ

Элементы САУ передают посредством сигналов друг другу информацию о происходящих в них процессах. Информация всегда связана с матери-

альным носителем какой-либо физической величины. В технических системах материальные носители информации называют *носителями сигналов* (например, электрическое напряжение и ток, давление, механическое перемещение и др.), которые можно изменять в соответствии с передаваемой информацией. Конструктивные элементы системы должны преобразовывать одни физические величины (и соответствующие им сигналы) в другие. Этот процесс отражается в кибернетическом понятии звена системы.

**Звено** – элемент, входящий в САУ, в котором определенным образом преобразуется входной параметр в выходной.

**Объектом управления** (ОУ) называют производственный, технологический процесс или технический объект, участвующий в определенном взаимодействии с другими объектами или процессами, нуждающийся в специальном организованном управляющем воздействии. Объектом управления может быть отдельный механизм, машина, станок, агрегат, бригада рабочих или отдельный рабочий, цех или все предприятие в целом.

Любой производственный, технологический процесс или технический объект характеризуется определенными физическими параметрами (расходом вещества и энергии, режимами резания, температурой, давлением). Для обеспечения требуемого режима эти параметры необходимо поддерживать постоянными или изменять по определенному закону. Параметр производственного, технологического процесса или технического объекта, который необходимо поддерживать постоянным или изменять по определенному закону, называют *управляемым* (управляемой величиной). Значение управляемого параметра, которое, согласно заданию, должно быть в данный момент времени, называют *заданным значением управляемого параметра*.

Управляемая величина является выходной величиной системы. Физическая природа управляемой величины может быть различна (напряжение, число оборотов, угловое положение, курс, мощность). Например: толщина прокатываемой полосы должна находиться в заданных пределах; при тер-

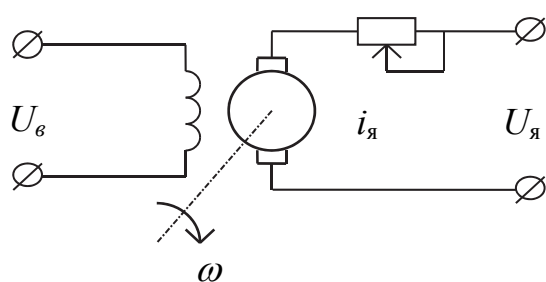


Рис. 1.6. Двигатель постоянного тока

мической обработке изделий нужно, чтобы температура изменялась по определенному закону с течением времени; в атомной энергетике необходимо постоянство мощности энергетического ядерного реактора.

Управляемые объекты, в зависимости от того, какой параметр выбирается в качестве управляемой величины, подразделяются на устойчивые, нейтральные, неустойчивые. Управление двигателем постоянного тока (рис. 1.6) осуществляется изменением напряжения  $U_я$ . Характер изменения угловой скорости  $\omega = d\theta/dt$

или угла поворота  $\theta = \int_0^t \omega dt$  при изменении напряжения  $U_y$  скачком показан на рис. 1.7. Двигатель является устойчивым объектом по отношению к угловой скорости ( $\omega$ ) и нейтральным по отношению к углу поворота ( $\theta$ ).

Каждый объект управления снабжен управляющим органом. **Управляющим органом** называется часть объекта управления, которая предназначена для изменения режима работы объекта. Органом управления является, например: обмотка возбуждения генератора и двигателя, руль корабля, стержни ядерного реактора и др.

**Задающее устройство** (ЗУ) оказывает управляющее воздействие ( $y_0$ ) на вход системы, которое может иметь постоянную заданную величину (при необходимости поддержания постоянного заданного значения управляемой величины) или же изменяться по определенному закону. ЗУ могут быть разнообразными в зависимости от природы управляемой величины. Всякое ЗУ является преобразователем управляемой величины в величину, удобную для преобразования или использования. Усилие, необходимое для установки заданного значения управляемой величины, как правило, мало. Величина, получаемая на выходе задающего элемента, должна быть той же физической природы, что и на выходе измерительного устройства. Характерным свойством ЗУ является малое потребление энергии.

**Измерительное устройство** (ИУ) – устройство для измерения действительного значения управляемой величины.

**Сравнивающее устройство** (СУ) предназначено для сравнения управляемой величины с ее заданным значением и выявления отклонения регулируемой величины от заданного значения. СУ обычно выполняет операцию вычитания двух величин, получаемых на входе и выходе системы. Выходная величина СУ пропорциональна отклонению регулируемой величины от заданного значения.

**Усилители** предназначены для усиления мощности сигнала ошибки. Усилитель питается от постороннего источника энергии. В устройствах управления используются электронные, гидравлические, пневматические, электрические или смешанные (например, механогидравлические, электрогидравлические, электропневматические и др.) усилители.

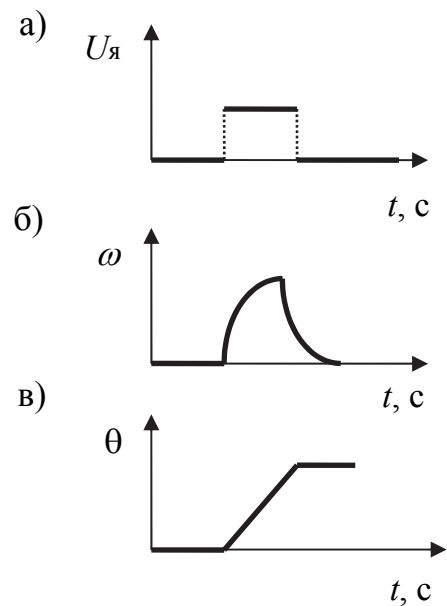


Рис. 1.7. Изменение угловой скорости (б) и угла поворота (в) при изменении  $U_y$  скачком (а)



**Исполнительный механизм** (ИМ) предназначен для воздействия на управляемый орган объекта управления. ИМ – это механизм, представляющий собой рычаг или передачу. В ряде САУ исполнительный орган может отсутствовать, в этом случае воздействие на управляемый объект осуществляется изменением состояния какой-либо величины (напряжения, силы тока) без помощи механического устройства. Мощность исполнительного устройства велика.

**Корректирующий элемент** (КЭ) предназначен для изменения свойств автоматических систем в нужном направлении. Корректирующие элементы используются для формирования управляющего воздействия, зависящего от задающего и возмущающего воздействий, что позволяет существенно повысить динамические свойства САУ.

Рассмотрим работу САУ (см. рис. 1.5). На ОУ воздействует возмущающее воздействие  $z(t)$  и управляющее воздействие  $u(t)$ . Управляемая величина  $y(t)$  и задающее воздействие  $y_0(t)$  преобразуются измерительным элементом и задающим элементом в величины одной физической природы с тем расчетом, чтобы их можно было сравнивать на суммирующем устройстве и получать разность ( $\Delta y$ ), используемую для осуществления процесса регулирования. Сигнал ошибки ( $\Delta y$ ) проходит через усилитель (У) и подается на ИМ. Исполнительный механизм изменяет режим работы ОУ.

Требуемый закон изменения управления  $u(t)$ , или **алгоритм управления**, не будет подобным алгоритму функционирования; он будет зависеть от алгоритма функционирования, динамических свойств и статических характеристик объекта управления.

Воздействие выхода системы управления на ее вход называют **обратной связью**. Введение обратной связи позволяет управлять при изменении параметров объекта управления и недостаточности наших знаний о его поведении.

**Система автоматического управления** – динамическая система, стремящаяся сохранить в допустимых пределах отклонения между требуемым и действительным изменением регулируемых переменных при помощи их сравнения на основе принципа обратной связи (замкнутого) цикла и использования полученных при этом сигналов для управления источниками энергии.

#### 1.4. Принципы управления

Объект управления подвержен воздействию различных внешних возмущений  $z(t)$ , вследствие чего управляемая величина  $y(t)$  отклоняется от заданного значения. Задача устройства управления – обеспечить соответствие управляемой величины  $y(t)$  заданному значению путем передачи на ОУ необходимого управляющего воздействия  $u(t)$ .

**Управление по заданному воздействию.** Существуют САУ, управляющие только по заданному воздействию  $y_0(t)$  (рис. 1.8), представляющему в этом случае команды программы. Такое управление называют жестким, так как при этом не учитываются действительные значения управляемой величины  $y(t)$  и возмущающего воздействия  $z(t)$  (параметры САУ и значения  $z(t)$  считаются постоянными). Подобные САУ дают удовлетворительное качество управления при выполнении трех условий: высокой стабильности параметров САУ, стабильности внешней среды и невысоких требованиях к точности. По структуре эти САУ являются разомкнутыми, так как не имеют обратной связи по управляемому параметру  $y(t)$  и не образуют замкнутого контура управления.

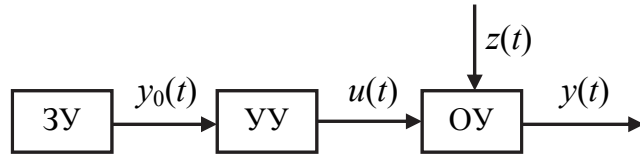


Рис. 1.8. Схема разомкнутого управления

**Принцип компенсации или управление по возмущению.** Управление по возмущению (рис. 1.9) основано на принципе компенсации возмущений (разомкнутое управление) и является исторически первым принципом автоматического управления. Управляемый параметр не изменяется, а используется информация о внешнем воздействии  $z(t)$ . При этом сначала выясняют, какое возмущающее воздействие является основным, а затем устанавливают, как необходимо менять значение управляемого параметра при изменении данного возмущающего воздействия, для того чтобы значение его поддерживать постоянным. Достоинство – имеется возможность полной компенсации возмущения. Недостаток – в случае преобладания неконтролируемых возмущений  $f(t)$  этот способ не дает требуемой точности.

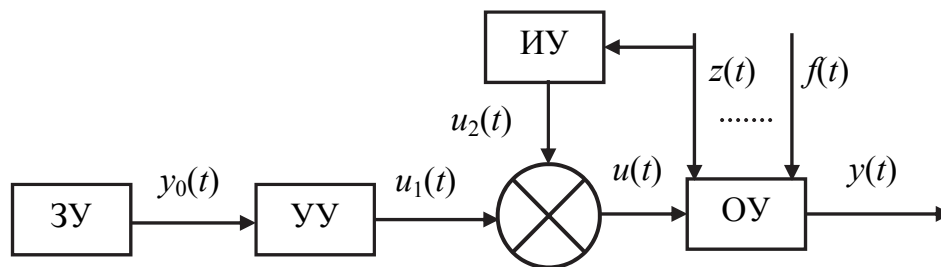


Рис. 1.9. Принцип компенсации или управление по возмущению

**Принцип обратной связи (управление по отклонению).** Более высокое качество управления позволяют получить замкнутые САУ (рис. 1.10), в которых используется информация об управляемой величине  $y(t)$  и задающем воздействии  $y_0(t)$ . Сначала измеряется  $y(t)$ , затем это значение сравнивается с заданным, и при наличии разности (сигнала рассогласования) вырабатывается управляющее воздействие  $\Delta u$ , направленное в сторону уменьшения сигнала рассогласования. При этом устройство

управления стремится компенсировать отклонение независимо от причин, вызвавших это отклонение.

Такое управление можно назвать гибким, так как учитывается действительное состояние объекта управления. Информация об  $y(t)$  передается в устройство управления, образуя контур главной обратной связи. Данный принцип иногда называют компенсационным принципом Ползунова-Уатта. Он является основным для большинства современных САУ.

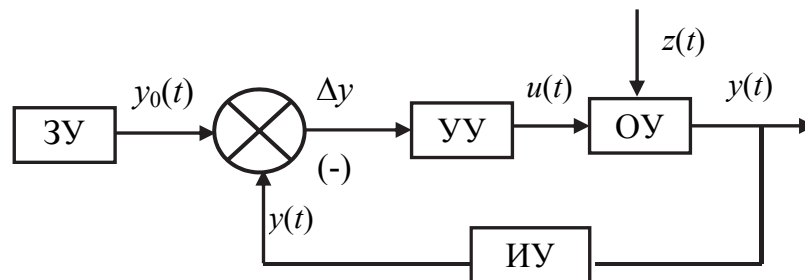


Рис. 1.10. Принцип обратной связи

Недостаток – затруднено управление быстродействующими системами управления, особенно это характерно для сложных инерционных объектов. Стремление повысить точность работы такой системы и увеличить коэффициент усиления приводит к потере устойчивости, что устраняется комбинированным управлением. На использовании текущей информации об управляющих воздействиях и переменных на выходе систем основан класс замкнутых систем управления с отрицательной обратной связью. В них можно обеспечить достижение заданных целей управления при большой неопределенности возмущающих воздействий и изменений во времени структуры и параметров системы за счет уменьшения чувствительности к этим возмущающим воздействиям, вариациям структуры и параметрам.

**Принцип комбинированного управления.** САУ, в которых используется информация одновременно о трех воздействиях:  $u(t)$ ,  $y_0(t)$  и  $z(t)$ , называют комбинированными (рис. 1.11).

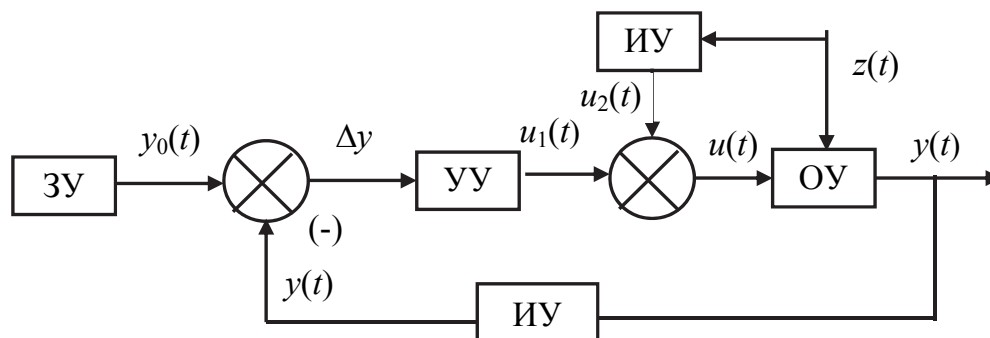


Рис. 1.11. Принцип комбинированного управления

Комбинированные САУ имеют более высокое качество управления, чем системы, работающие только по отклонению, так как информация о



значении возмущающего воздействия  $z(t)$  позволяет устройству управления работать с предвидением, т.е. начинать компенсацию внешнего возмущения, нарушающего нормальную работу объекта управления, раньше, чем возникнет достаточно большое отклонение. Одновременно это дает возможность повысить точность и быстродействие системы.

### 1.5. Классификация систем автоматического управления

Вид и способ формирования сигнала  $y_0(t)$  («уставкой», задатчиком) в значительной степени определяет способ построения регулятора.

В зависимости от вида  $y_0(t)$  принято классифицировать САУ по задачам управления следующим образом: системы стабилизации, системы программного управления, системы следящие.

**Системы стабилизации** предназначены для поддержания постоянного значения управляемой величины. Задающее устройство в таких системах вырабатывает управляющее воздействие определенной величины (т.е.  $y_0 = \text{const}$ ), с которой сравнивается управляемая величина при работе системы. Как правило, величина  $y_0$  задается в косвенном виде. Например, температура задается значением напряжения; давление – значением натяга пружины и т.п. Действие внешних возмущений (помех) на систему, благодаря постоянному задающему воздействию (стабилизации), резко уменьшается или полностью устраняется. Примерами таких систем являются стабилизаторы напряжения, температуры, скорости, углового перемещения.

**Системы программного управления** (СПУ) предназначены для изменения управляемой величины по известному закону в функции времени или какой-либо другой величины. Алгоритм функционирования таких систем заранее известен, т.е. есть задатчик программы, вырабатывающий программу  $y_0(t)$ . Системы программного управления делятся на системы с временной программой и системы с пространственной программой.

В СПУ с временной программой на выходе задатчика получают координату  $y_0(t)$ , например, программа изменения температуры в закалочной печи. В СПУ с пространственной программой на выходе получают величину  $u(t)$ , например, программа управления работой станка с ЧПУ. СПУ с пространственной программой делятся на системы, у которых закон движения не задается, и системы, в которых закон движения задается.

**Системы следящие** предназначены для изменения управляемой величины по заранее не известному закону. Задающая величина  $y_0(t)$  и алгоритм функционирования заранее не известны. Регулируемая величина должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. На месте задающего элемента помещается устройство слежения за изменением внешнего фактора. Задающее воздействие представляет случайную функцию времени. Отметим, что эти задачи являются усложняю-

щимися: управлять системой с заранее неизвестным  $y_0(t)$  сложнее, чем системой с заранее известным законом функционирования.

Примером следящей системы может являться любая система дистанционного управления перемещением, например, робот-манипулятор, управляемый специальным «джойстиком». В этом случае объект должен точно воспроизводить любые заранее не известные перемещения, причем, в условиях помех.

Принято считать, например, что современная экономика развивается по принципу обратной связи, обеспечивающей в данном случае устойчивость системы в целом при изменяющихся внешних условиях (природа). Следует, однако, отметить, что в этом случае не просто сформулировать задачу управления. Более точно такие системы описываются как системы оптимальные, когда в явном виде представлен некоторый критерий выгоды, и задача заключается в его максимизации.

### 1.6. Исследование систем автоматического управления

Методов исследования САУ много и имеется следующая их классификация (рис. 1.12), учитывающая способы математического описания.

**Стационарными** называются системы, если они при постоянных внешних воздействиях описываются уравнениями, не зависящими явно от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются.

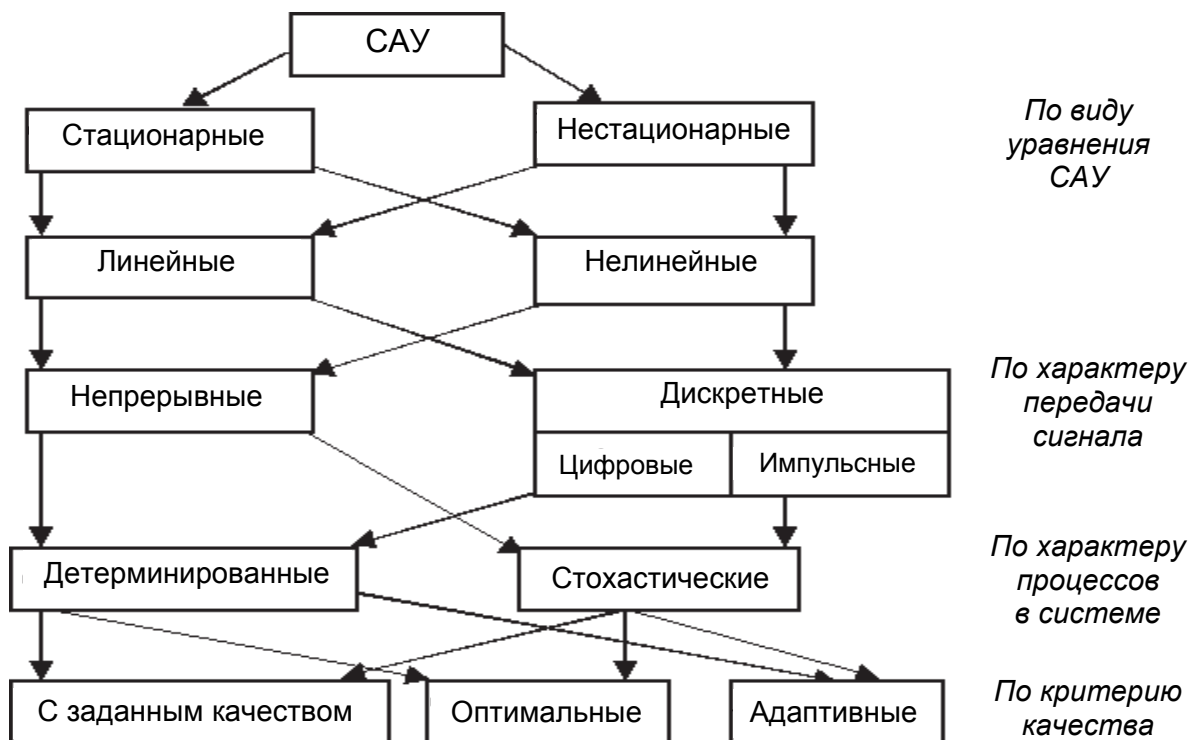


Рис. 1.12. Классификация САУ

**Нестационарными** называются системы, которые описываются нелинейными уравнениями с переменными коэффициентами. Эти системы зависят явно от времени.

В **непрерывных** системах управляющее воздействие представляет собой непрерывную функцию, обычно пропорциональную сигналу ошибки. Особенностью непрерывных САУ является то, что во всех элементах, составляющих систему, входные и выходные сигналы являются непрерывными функциями времени, при этом для передачи сигналов могут быть использованы амплитудно-модулированные, частотно-модулированные и фазово-модулированные колебания.

В **дискретных** системах управляющее воздействие зависит от отдельных дискретных значений сигнала ошибки. Особенностью импульсных систем является то, что для передачи сигнала используется один из видов импульсной модуляции, т.е. с помощью специального устройства, называемого измерительным элементом, непрерывный сигнал  $u(t)$  квантуется по времени.

В **детерминированных** САУ возмущения изменяются по определенному закону. Такое возмущающее воздействие характерно тем, что знание его в начальный момент времени определяет знание его во все последующие моменты времени. В **стохастических** САУ возмущающее воздействие изменяется случайно, т.е. знание его в начальный момент времени позволяет определить лишь вероятность того или иного значения в последующие промежутки времени.

Мы рассматриваем стационарные линейные непрерывные системы с заданным качеством. Под заданным качеством понимается обеспечение требуемых инженерных показателей по принципу «не хуже заданного».

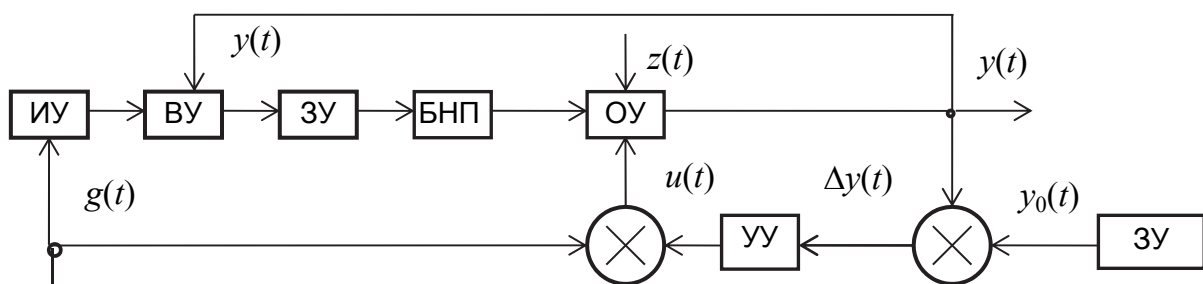


Рис. 1.13. Схема адаптивного управления

Система адаптивного управления (рис. 1.13) – это система, автоматически изменяющая значения своих параметров и структур при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы так, чтобы сохранилось заданное качество её работы.

В реальных условиях работы автоматических систем внешние воздействия приводят к изменению не только координат, но и параметров системы, т.е. коэффициентов уравнений. Изменение параметров, вышедших за

определенные границы, приводит не только к количественным ошибкам или ухудшению других показателей качества, но и зачастую к полной потере работоспособности системы. Эти потери качества невозможно устранить, находясь в рамках первоначально принятого фундаментального принципа управления. Это можно сделать лишь путем изменения параметра или структуры системы так, чтобы приблизить математическое ожидание потерпевшей изменение системы к ее исходной модели настолько, чтобы сохранить работоспособность первоначально принятого фундаментального принципа.

Адаптивная система содержит в качестве «ядра» схему, реализующую один из фундаментальных принципов управления, а контур адаптации пристраивается к ней как вторичный, осуществляющий коррекцию параметров. В контур адаптации (см. рис. 1.13) включен блок настройки параметров (БНП) и вычислительное устройство (ВУ).

Контур адаптации может быть разомкнут, если на его вход подается только входное воздействие, и замкнут, если на его вход подается и выходное воздействие.

Адаптивные системы делятся на самоподнастраивающиеся и самоорганизующиеся. Самоподнастраивающиеся системы – системы с изменением параметров, самоорганизующиеся системы – системы с изменением структуры и алгоритма управления.

### 1.7. Статические и астатические системы

Одной из существенных характеристик САУ является зависимость между значением управляемого параметра и величиной внешнего воздействия (нагрузкой) на объект управления. По виду зависимости между значением управляемого параметра и нагрузкой системы делят на статические и астатические (рис. 1.14).

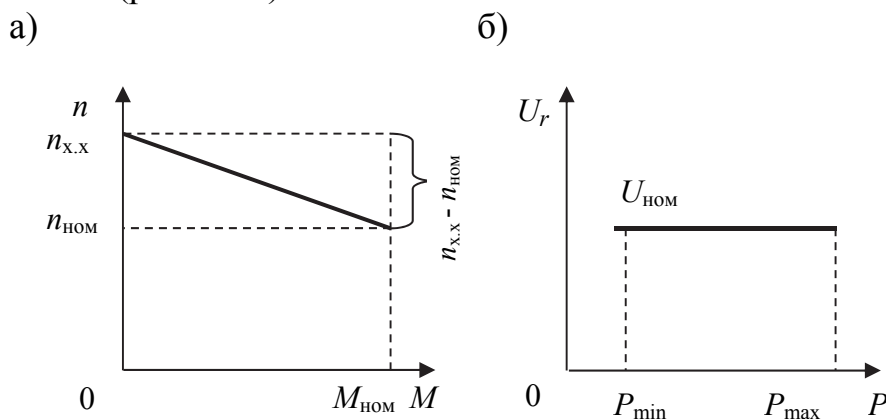


Рис. 1.14. Статическое (а) и астатическое (б) управление при изменении нагрузки от нуля до  $P_{max}$

Зависимость динамической ошибки ( $\varepsilon$ ) от времени ( $t$ ) для систем в установившемся режиме имеет вид

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t),$$

где  $u(t)$  – сигнал управления;  $y(t)$  – выходная характеристика.

При установившихся значениях  $\varepsilon_{уст}(t)$  и  $y_{уст}(t)$  ошибка системы:

$$\varepsilon_{уст}(t) = u_{уст}(t) - y_{уст}(t)$$

В зависимости от значения  $\varepsilon_{уст}(t)$  и определяют тип системы.

Систему называют **статической** по отношению к управляющему воздействию, если при воздействии, стремящемся с течением времени к некоторому значению, ошибка также стремится к постоянному значению, зависящему от значения управляющего воздействия, т.е. статическая система не может обеспечить постоянство управляемого параметра при переменной нагрузке.

Систему называют **астатической** по отношению к управляемому воздействию, если при воздействии, стремящемся к установившемуся значению, ошибка стремится к нулю независимо от значения воздействия.

Статические системы обычно имеют менее сложное конструктивное решение, чем астатические. Статические системы обладают погрешностью в поддержании постоянства значения управляемого параметра при разных «внешних» нагрузках. Изменение управляемого параметра, которое вызывает у статической системы перемещение управляемого органа из одного предельного положения в другое, является важнейшей характеристикой статической системы и называется его **неравномерностью**. Отношение этой неравномерности к номинальному значению управляемого параметра называют **степенью неравномерности** (коэффициентом статизма или статизмом).

Если при изменении нагрузки от нуля до номинального значения в статической системе значение управляемого параметра изменилось от  $n_{x,x}$  до  $n_{ном}$  (рис. 1.15), то статизмом системы будем называть отношение величины изменения управляемого параметра ( $n_{x,x} - n_{ном}$ ) к значению параметра в режиме рабочего хода, т.е.

$$s = (n_{x,x} - n_{ном})/n_{x,x} = 1 - n_{ном}/n_{x,x}.$$

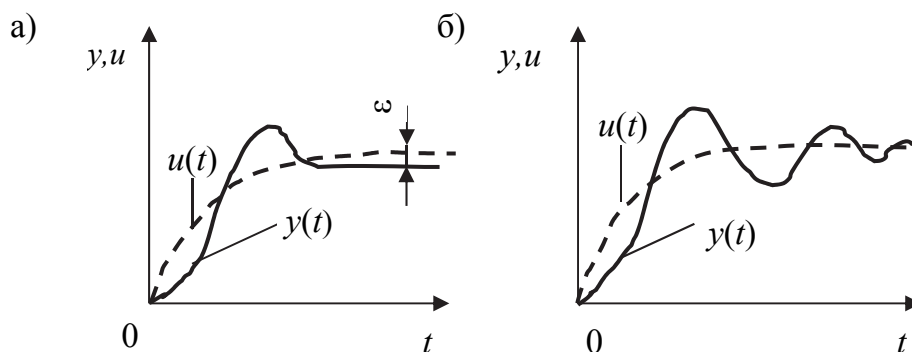


Рис. 1.15. Статическое (а) и астатическое (б) управление

Обычно статизм измеряют в процентах. В большинстве случаев статическая зависимость управляемого параметра от возмущающих воздействий является нежелательной, так как создается абсолютная статическая ошибка управления. Поэтому стремятся её значительно уменьшить или вообще исключить. Для этого можно увеличить коэффициент передачи системы, применить принцип управления по возмущению или использовать астатическую систему.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Задачи теории автоматического управления

Основными задачами ТАУ являются исследование статических или в общем случае установившихся и динамических свойств САУ и разработка систем, удовлетворяющих заданным техническим требованиям, а именно: анализ и синтез.

*Анализ* – это исследование процесса работы некоторой автоматической системы, заданной своей структурой и элементами, при различных параметрах этих элементов и различных воздействиях.

*Синтез* охватывает само построение автоматических систем управления, выбор схемы управляющего устройства, его отдельных элементов и параметров, обеспечивающих выполнение требований, предъявляемых к автоматическим системам.

### 2.2. Понятия о процессах, происходящих в системах автоматического управления

При анализе и синтезе САУ все элементы систем разделяют не по функциональному или конструктивному признаку, а по динамическим свойствам элементов. Это дает возможность разные элементы, имеющие различные принципы действия и конструктивные решения, описывать одинаковыми уравнениями. Например, центробежный регулятор частоты вращения и последовательный колебательный контур устроены различно, но обладают одинаковыми динамическими свойствами, и процессы, протекающие в них в переходном режиме, описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями второго порядка. Коэффициенты этих уравнений будут зависеть от массы шаров и свойств пружины в центробежном регуляторе, а также от индуктивности, емкости и сопротивления в колебательном контуре. Устройства будут представляться одним и тем же динамическим звеном.

*Динамическим звеном* называют часть САУ, переходный процесс которой описывается дифференциальным уравнением определенного вида.



Динамическим звеном может быть элемент, совокупность элементов и вся САУ в целом. В отличие от элемента системы динамическое звено не обязательно является конструктивно или схемно-оформленным устройством. Например, обмотки возбуждения, цепь якоря электродвигателей и т.п. часто рассматриваются как динамические звенья.

Процессы, происходящие в динамическом звене, делятся на два вида: переходный и установившийся (рис. 2.1).

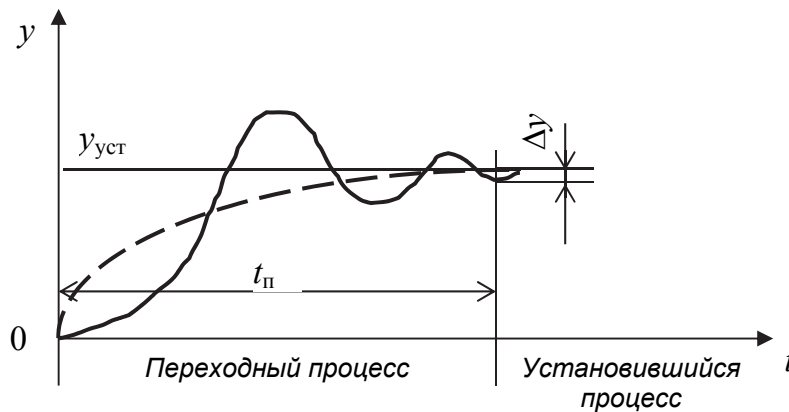


Рис. 2.1. Процессы, происходящие в САУ:  
 $\Delta y$  – область допустимых отклонений от заданного значения в установившемся процессе;  $t_p$  – время переходного процесса

**Переходный процесс** – это процесс, в котором происходит изменение управляемой величины во времени под действием произвольных воздействий, приложенных к системе. Характер переходного процесса зависит от воздействий и свойств системы. Переходный процесс звена или системы характеризуется переходной характеристикой, под которой понимается зависимость выходной величины от времени ( $t$ ).

К числу воздействий относятся: сигналы скачкообразного (или ступенчатого) характера и сигналы ударного действия, представляющие собой импульсы малой длительности по сравнению со временем переходного процесса.

Чтобы качественно выполнить задачу управления в различных изменяющихся условиях работы, САУ должна обладать заданным определенным запасом устойчивости.

В устойчивых САУ переходный процесс со временем затухает, и наступает установившееся состояние. **Установившийся процесс** – это равновесный процесс при постоянных воздействиях.

### 2.3. Статические и динамические характеристики звеньев

Для аналитического исследования процессов, происходящих в САУ, составляющие её элементы целесообразно разделять по виду их статических и динамических характеристик, что существенно упрощает исследование, расчет и её проектирование.

Зависимость выходной величины звена от входной в установившемся процессе называют *статической характеристикой*. Статическую характеристику обычно изображают графически. Её значение можно получить экспериментально или расчетным путем.

Системы автоматического управления, как правило, работают в неустойчивом, переходном режиме. Такой режим работы является следствием воздействия на систему непрерывно и случайно изменяющихся внешних факторов, приводящих к непрерывному изменению входной и выходной величин во всех ее звеньях. Поэтому одной из важных задач является изучение поведения динамических звеньев в переходных режимах.

*Динамической характеристикой* звена называют зависимость выходной величины от входной в переходном процессе. Физическая задача определения выходной величины звена при изменяющемся входном сигнале сводится к решению дифференциального уравнения того или иного вида, описывающего протекание переходных процессов в звене.

### 2.4. Понятие о моделировании

Свойства любой системы проявляются в процессе её функционирования. Для определения этих свойств следует подать на входы некоторые возмущающие воздействия и проанализировать выходы системы. Однако почти всегда проведение экспериментов с реальной системой экономически невыгодно, а с проектируемой системой невозможно. Поэтому эксперименты для изучения свойств системы проводят не с реальными системами, а с их моделями.

*Модель* – некоторая другая система, сохраняющая существенные черты оригинала и допускающая исследование физическими или математическими методами.

*Моделирование* – процесс проведения экспериментов на модели вместо прямых экспериментов на самой системе.

По способу построения модели можно разделить на физические и абстрактные.

*Физическая (натурная) модель* – это установка или устройство, позволяющее проводить исследование заменой изучаемого физического процесса подобным ему процессом с сохранением его физической природы. Физические модели используют тогда, когда из-за сложности системы или недостаточной априорной информации не удается построить адекват-



ную модель и когда даже с помощью моделирования на абстрактной модели получение удовлетворительных результатов невозможно.

В *абстрактных моделях* описание объектов и процессов осуществляется на каком-либо языке. В качестве языков моделирования можно использовать естественный язык, язык чертежей, схем, математический язык и др.

Описание объекта или процесса, выполненное на математическом языке, называют *математической моделью*. В простейших случаях для этой цели используют известные аналоги механических, электрических и других явлений.

## 2.5. Понятие о математическом моделировании

Математическое описание может быть: аналитическим (с помощью уравнений); табличным (с помощью таблиц); графическим (с помощью графиков); структурным (с помощью структурных схем). Математические модели должны отражать свойства оригинала и быть простыми.

Для анализа САУ необходимо располагать ее математическим описанием – дифференциальным или интегральным уравнениями.

Уравнение называют уравнением динамики, если оно описывает изменение входящих в них переменных во времени. Из уравнений динамики обычно можно получить уравнение статики, если положить все входящие в них производные и воздействия равными нулю или некоторым постоянным величинам.

При составлении дифференциальных уравнений динамики САУ последнюю обычно разбивают на отдельные элементы, или звенья, и записывают уравнение каждого элемента в отдельности. Уравнения всех звеньев образуют единую систему, которую можно преобразовать к одному уравнению путем исключения промежуточных переменных.

Уравнение звена должно быть составлено так, чтобы оно выражало зависимость между

входными и выходными сигналами данного звена. Звено (рис. 2.2) может иметь не одну входную величину, а несколько (например, при наличии дополнительных обратных связей). Кроме входных и выходных величин, звено может иметь внешнее возмущение.

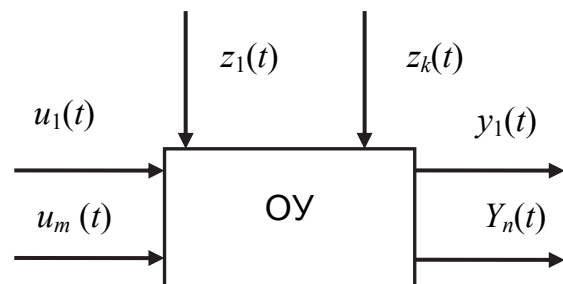


Рис. 2.2. Условное изображение звена:

ОУ – объект управления;

$u(t) = (u_1(t) \dots u_m(t))^T$  – входное, управляющее воздействие;

$y(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))^T$  – выходной сигнал, состояние объекта;

$z(t) = (z_1(t) \dots z_k(t))^T$  – вектор помех

Нетрудно видеть, что ступенчатое изменение входного сигнала ( $u$ ) приводит к ступенчатому же изменению выходного сигнала, т.е. отсутствуют переходные процессы. Поэтому для рассмотрения объектов, имеющих переходные процессы, необходимо использовать более сложные модели.

В общем случае нелинейное дифференциальное уравнение, связывающее входной и выходной сигнал, имеет вид:

$$F(y, y', y'' \dots y^{(n)}, u, u', \dots u^{(m)}) = 0. \quad (2.1)$$

Так как  $y$  и  $u$ , в свою очередь, являются векторами, то на самом деле уравнение (2.1) есть система нелинейных дифференциальных уравнений.

**Первым шагом** в составлении уравнений динамики элемента системы регулирования является: определение известных законов, определяющих его поведение. Такими законами являются: закон сохранения вещества, энергии, второй закон Ньютона и другие законы физики. Этот способ применяют в тех случаях, когда объект управления простой или система невысокого порядка, или когда объект очень сложный и вследствие его сложности можно воспользоваться законами статики. Математическое выражение соответствующего физического закона, который определяет процесс в данном элементе системы, является исходным дифференциальным уравнением этого элемента.

**Вторым шагом** является определение факторов, от которых зависят переменные, входящие в исходное уравнение, и установление выражений, характеризующих эту зависимость. Последние могут быть представлены аналитическими функциями или заданы графически. В большинстве случаев они являются нелинейными зависимостями. Подстановка найденных выражений в исходное уравнение дает нелинейное уравнение элемента (в частности, объекта управления).

Строго говоря, любая реальная динамическая система является нелинейной. Однако большинство непрерывных систем управления могут быть линеаризованы, т. е. заменены приближенно эквивалентными системами, переходные процессы в которых описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

## 2.6. Линеаризация дифференциальных уравнений

Достаточными признаками для проведения линеаризации обычно являются отсутствие разрывных, неоднозначных или резко изменяющихся характеристик и справедливость уравнения в течение всего интервала времени регулирования. **Линеаризацией** называют процесс перехода от исходного уравнения к линеаризованному. В нормально функционирующей САУ фактический режим ненамного отличается от заданного режима, отклонения входных и выходных величин входящих в нее звеньев от требуемых значений малы. Это позволяет производить линеаризацию зависимо-

сти выходной от входной величины путем разложения нелинейных функций, входящих в уравнение, в ряд Тейлора.

Различают графическую и аналитическую линейризацию.

**Графическая линейризация.** Графическая линейризация сводится к замене криволинейной характеристики на некотором участке  $AB$  (рис. 2.3) функции  $y = F(u)$ , который будем называть рабочим интервалом, отрезком прямой. Точка  $O$  с координатами  $(u_0, y_0)$  называется точкой равновесия, она является общей для исходной характеристики и для аппроксимирующей прямой.

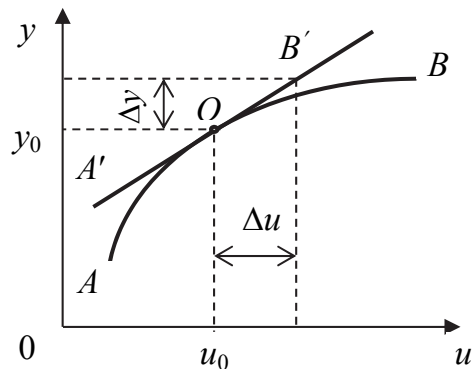


Рис. 2.3. Графическая интерпретация процедуры линейризации

**Аналитическая линейризация.** Пусть заданному режиму соответствуют координаты:

$$u = u_0; \quad u' = u'_0; \quad y = y_0; \quad y' = y'_0; \quad y'' = y''_0; \quad z = z_0.$$

Отклонения от заданного режима, обозначим:

$$\Delta u, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad \text{т.е.} \quad \Delta u = u - u_0; \quad \Delta y = y - y_0; \quad \Delta z = z - z_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u; \quad u' = u'_0 + \Delta u'; \\ y &= y_0 + \Delta y; \quad y' = y'_0 + \Delta y'; \quad y'' = y''_0 + \Delta y''; \quad z = z_0 + \Delta z. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение динамики:

$$F(y, y', y'', u, u') + z = 0$$

и, рассматривая  $F$  как функцию от независимых переменных  $u, u', y, y', y''$ , разложим её в ряд Тейлора в точке  $O$ , затем отбросим малые члены более высокого порядка, чем сами отклонения. Тогда уравнение динамики примет вид:

$$F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \Delta y'' + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)_0 \Delta u' + z_0 + \Delta z = 0. \quad (2.2)$$

Здесь индекс «0» обозначает, что соответствующие функции и производные вычисляются в точке  $O$ . Когда в системе устанавливается заданный режим, уравнение динамики принимает вид:

$$F_0 + z_0 = 0.$$

Вычтя это уравнение из (2.2), получим искомое уравнение звена в отклонениях:

$$A_0 \Delta y'' + A_1 \Delta y' + A_2 \Delta y - B_0 \Delta u' - B_1 \Delta u - C_0 \Delta z = 0, \quad (2.3)$$

где  $A_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0$ ,  $A_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0$ ,  $A_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$ ,  $B_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)_0$ ,  $B_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0$ ,  $C_0 = -1$ .

Если время  $t$  явно не входит в уравнение динамики и, кроме того, заданный режим является статическим – величины  $u_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  не зависят явно от времени, то коэффициенты линеаризованного уравнения (2.3) являются постоянными.

Индекс «ноль» означает, что производные вычисляются в заданной точке, которой соответствует определенный номинальный (заданный) процесс.

Полученное уравнение по отношению к исходному называют линеаризованным.

### 2.7. Общий вид дифференциального уравнения системы автоматического управления

Дифференциальное уравнение (ДУ) звена запишем в общем виде:

$$A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = B_0 \frac{d^m u}{dt^m} + B_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + B_{m-1} \frac{du}{dt} + B_m u, \quad (2.4)$$

где  $y$  – выходная величина звена (в отклонениях от состояния равновесия);  $u$  – входная величина звена (в отклонениях от состояния равновесия);  $A_n$ ,  $A_{n-1}$ , ...,  $A_1$ ,  $A_0$ ,  $B_m$ ,  $B_{m-1}$ , ...,  $B_1$ ,  $B_0$  – постоянные коэффициенты, зависящие от конструктивных особенностей и параметров звена.

### 2.8. Преобразования Лапласа

Так как аналитическое решение дифференциального уравнения в общем случае является трудоемкой задачей, то в современной теории управления широко используют средства описания динамических свойств системы через преобразование Лапласа, что удобнее для практического применения. Основанием для этого служит то обстоятельство, что такое преобразование существенно облегчает исследование сложных систем, заменяя дифференциальные уравнения алгебраическими.

В уравнение (2.4), содержащее функции времени  $y(t)$  и  $u(t)$ , введем функции  $Y(p)$  и  $U(p)$  комплексного переменного  $p = \sigma + j\omega$  и поставим условие, что эти функции связаны зависимостями:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt, \quad U(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt.$$

Функция  $y(t)$  называется оригиналом функции  $Y(p)$ , а функция  $u(t)$  – оригиналом функции  $U(p)$ . Операция перехода от исходной функции  $y(t)$  к

ее изображению  $Y(p)$  (нахождение изображения по оригиналу) называют преобразованием Лапласа. Математически прямое преобразование Лапласа записывают условно с помощью символа  $L\{y(t)\} = Y(p)$ . Операцию перехода от изображения  $Y(p)$  к искомой функции  $y(t)$  (нахождение оригинала по изображению) называют обратным преобразованием Лапласа. Математически обратное преобразование Лапласа записывают с помощью символа:

$$L^{-1}\{Y(p)\} = y(t).$$

Преобразование оригинала в изображение позволяет свести операции дифференцирования и интегрирования над оригиналами к более простым операциям над их изображениями.

### 2.9. Операторный метод

Формально переход от ДУ к алгебраическому операторному уравнению при нулевых начальных условиях (т.е. для  $t = 0$  значение самой функции  $y(t)$  и всех её производных равны нулю) получают путем замены символов дифференцирования оригиналов функций  $d^n/dt^n$ ,  $d^{n-1}/dt^{n-1}$ , ...,  $d/dt$  соответственно символами  $p^n$ ,  $p^{n-1}$ , ...,  $p$  и функции  $y(t)$  – их изображениями  $Y(p)$ . Запишем уравнение (2.4) в операторной форме:

$$\begin{aligned} A_0 p^n Y(p) + A_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + A_{n-1} p Y(p) + A_n Y(p) = \\ = B_0 p^m U(p) + B_1 p^{m-1} U(p) + \dots + B_{m-1} p U(p) + B_m U(p). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С оператором  $p$  можно, как и с другими членами алгебраического уравнения, производить различные действия (умножение, деление, вынесение за скобки и т.д.). Возможность записи дифференциального уравнения в операторной алгебраической форме значительно упрощает все расчеты.

Каждое звено САУ в общем случае описывается дифференциальным уравнением вида (2.4). Следовательно, при выводе дифференциального уравнения системы в целом необходимо совместно решить несколько дифференциальных уравнений высших порядков. Запись ДУ в операторной форме позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений. Запись дифференциальных уравнений звеньев системы в операторной форме дает возможность ввести удобное понятие передаточной функции, характеризующей звено системы.

### 2.10. Передаточная функция

С помощью передаточных функций расчет САУ еще более упрощается и становится доступным широкому кругу инженеров, не требуя применения сложного математического аппарата.

Вынесем в уравнении (2.5)  $Y(p)$  и  $U(p)$  за скобки и получим:

$$\begin{aligned} (A_0p^n + A_1p^{n-1} + \dots + A_{n-1}p + A_n)Y(p) = \\ = (B_0p^m + B_1p^{m-1} + \dots + B_{m-1}p + B_m)U(p). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Определим из уравнения (2.6) отношение изображения выходной величины к изображению входной

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{B_0p^m + B_1p^{m-1} + \dots + B_{m-1}p + B_m}{A_0p^n + A_1p^{n-1} + \dots + A_{n-1}p + A_n} = W(p). \quad (2.7)$$

Отношение  $W(p)$  изображения выходной величины системы к изображению его входной величины называют передаточной функцией системы. Соответственно отношение изображения выходной величины звена к изображению его входной величины называют передаточной функцией звена. Передаточная функция является дробно-рациональной функцией оператора  $p$ :

$$W(p) = Q(p)/R(p),$$

где  $R(p) = A_0p^n + A_1p^{n-1} + \dots + A_{n-1}p + A_n$  – оператор левой части ДУ (собственный оператор);  $Q(p) = B_0p^m + B_1p^{m-1} + \dots + B_{m-1}p + B_m$  – оператор правой части уравнения (оператор воздействия).

Из уравнения (2.7) следует, что передаточная функция звена системы  $W(p)$  и изображения его входной величины определяют изображение выходной величины:

$$Y(p) = W(p)U(p).$$

### 2.11. Стандартная форма записи дифференциального уравнения второго порядка

Большинство конструктивных элементов систем описывают уравнениями первого или второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами не выше второго порядка обычно записывают в стандартной форме. Каждая величина, входящая в уравнение, измеряется в своих единицах. Однако при исследовании САУ удобнее иметь уравнение в относительных единицах с безразмерными коэффициентами или коэффициентами, имеющими размерность времени в степени, равной порядку производной, при которой стоит данный коэффициент.

Правило записи: члены, содержащие выходную величину и ее производные, записывают в левой части уравнения, а все остальные члены – в правой части; коэффициент при выходной величине делают равным единице делением обеих частей уравнения на коэффициент при этом члене. Если в правой части содержатся производные, то члены, содержащие какую-либо входную величину и её производные, объединяют в одну группу и коэффициент при соответствующей входной величине выносят за скобки:



$$A_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_2 y = B_0 \frac{du}{dt} + B_1 u + C_0 z;$$

$$\frac{A_0}{A_2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{A_1}{A_2} \frac{dy}{dt} + y = \frac{B_1}{A_2} \left( \frac{B_0}{B_1} \frac{du}{dt} + u \right) + \frac{C_0}{A_2} z.$$

Коэффициенты при производных имеют размерность времени, и степень их совпадает с порядком производной. Эти коэффициенты называют постоянными времени  $T$ :

$$A_0/A_2 = T_0^2; \quad A_1/A_2 = T_1; \quad B_0/B_1 = T_2.$$

Коэффициенты  $K_1 = B_1/A_2$  и  $K_2 = C_0/A_2$  являются передаточными коэффициентами. В результате такого преобразования получаем запись:

$$(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(p) = K_1(T_2 p + 1)U(p) + K_2 Z(p).$$

Это и будет стандартная форма записи через постоянные времени и передаточные коэффициенты. Для элементов, описываемых уравнениями первого и второго порядка, введем классификацию звеньев на основе вида и порядка оператора. Первый признак оператора (порядок старшей производной) – нулевой, первый и второй. Второй признак – вид собственного оператора. По этому признаку введены следующие типовые звенья:

- пропорциональное (безынерционное)  $Y(p) = KU(p)$ ;
- инерционное (апериодическое, релаксационное)  $(Tp + 1)Y(p) = U(p)$ ;
- колебательное  $(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(p) = KU(p)$ ;
- интегрирующее звено  $Y(p) = (1/Tp)U(p)$ ;
- дифференцирующее  $Y(p) = TpU(p)$ ;
- запаздывающее  $Y(p) = e^{-p\tau}U(p)$ .

## 2.12. Структурные схемы

Структурная схема в ТАУ – это графическое изображение системы автоматического управления в виде соединения звеньев. Звено на схеме показывают прямоугольником (рис. 2.4), внутри прямоугольника ставится передаточная функция. В прямоугольник входят и выходят стрелки, над стрелками ставятся переменные, обозначающие соответственно входные и выходные величины. Входной и выходной сигналы в динамическом звене могут иметь различную физическую природу.

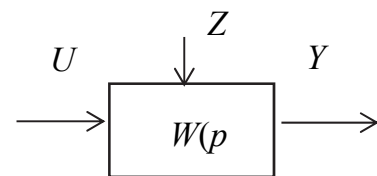


Рис. 2.4. Обозначение звена в структурной схеме

На схеме (рис. 2.5) также показывают сравнивающее (суммирующее) звено окружностью, разделенной на четыре сектора. В окружность входят две и выходит одна стрелка, над стрелками ставятся переменные, которые

складывают между собой или вычитают друг из друга в зависимости от того, какой знак стоит возле окружности.

Структурную схему используют на практике при исследовании и проектировании САУ, так как она дает наглядное представление о связях между звеньями, прохождении и преобразовании сигналов в системе.

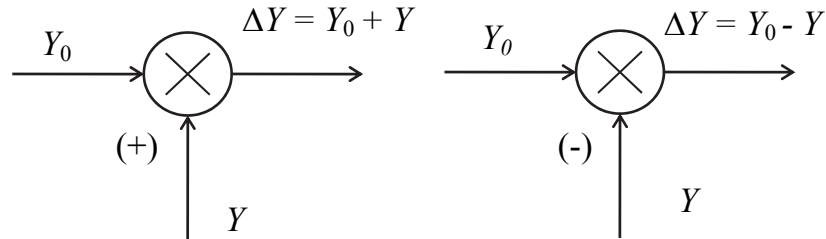


Рис. 2.5. Обозначение сравнивающего устройства

Структурная схема составляется на основе математического уравнения. Дальнейшие преобразования структурной схемы необходимы для получения конечных уравнений и передаточных функций. Структурная схема позволяет упростить и сделать наглядным процесс преобразования математических уравнений.

### Пример 2.1

Построить структурную схему САУ, описанную системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t) = B_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + B_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + B_2 x_2(t) + f(t); \\ A_3 \frac{dx_2(t)}{dt} + A_4 x_2(t) = B_3 x_1(t); \\ x_1(t) = x(t) - y(t), \end{cases}$$

где  $y(t)$  – выходная координата;  $x(t)$  – входная координата;  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – промежуточные координаты системы.

### Решение

*Действия с первым уравнением.* Произведем преобразование Лапласа и вынесем за скобки переменные, получим:

$$(A_0 p^2 + A_1 p + A_2)Y(p) = (B_0 p^2 + B_1 p + B_2)X_2(p) + F(p).$$

Выразим выходную координату  $Y(p)$  через  $X_2(p)$  и  $F(p)$ :

$$Y(p) = \frac{B_0 p^2 + B_1 p + B_2}{A_0 p^2 + A_1 p + A_2} X_2(p) + \frac{1}{A_0 p^2 + A_1 p + A_2} F(p)$$

или

$$Y(p) = W_1(p)X_2(p) + W_2(p)F(p),$$



где 
$$W_1(p) = \frac{B_0 p^2 + B_1 p + B_2}{A_0 p^2 + A_1 p + A_2}; \quad W_2(p) = \frac{1}{A_0 p^2 + A_1 p + A_2}.$$

Строим структурную схему (рис. 2.6, а).

*Действия со вторым уравнением.* Произведем преобразование Лапласа и вынесем за скобки переменные, получим:

$$(A_3 p + A_4) X_2(p) = B_3 X_1(p).$$

Выразим выходную координату  $X_2(p)$  через  $X_1(p)$ :

$$X_2(p) = \frac{B_3}{A_3 p + A_4} X_1(p)$$

или

$$X_2(p) = W_3 X_1(p),$$

где 
$$W_3(p) = \frac{B_3}{A_3 p + A_4}.$$

Строим структурную схему (рис. 2.6, б).

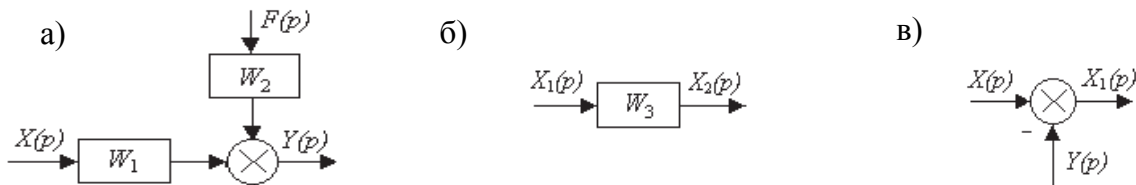


Рис. 2.6. Фрагменты структурной схемы к примеру 2.1

*Действия с третьим уравнением.* Третье уравнение является уравнением ошибки. Запишем его в операторной форме:

$$X_1(p) = X(p) - Y(p).$$

Строим структурную схему (см. рис. 2.6, в).

Построенные фрагменты схемы необходимо объединить (рис. 2.7).

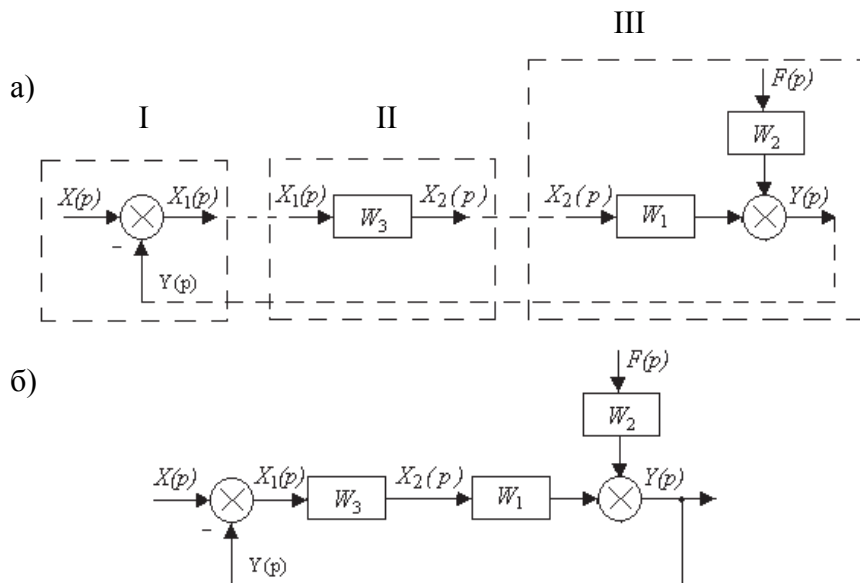


Рис. 2.7. Структурная схема к примеру 2.1:  
а – порядок построения; б – результат построения;  
I, II, III – номера действий при построении

I. Начнем построение с фрагмента схемы, построенной по уравнению ошибки (см. рис. 2.6, в). Здесь выходной величиной является  $X_1(p)$ .

II. Приставляем к нему фрагмент, построенный по второму уравнению, так как в нем входной величиной является  $X_1(p)$ .

III. Ко второму фрагменту пристраиваем фрагмент, построенный по первому уравнению, и соединяем выходное воздействие  $Y(t)$  с воздействием  $Y(t)$  третьего фрагмента.

### 2.13. Правило преобразования структурных схем

1) **Последовательное соединение звеньев.** При последовательном соединении звеньев (рис. 2.8, а) выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего звена. При преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном (рис. 2.8, б) с передаточной функцией  $W(p)$ , равной произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{Y_n}{Y_0}.$$

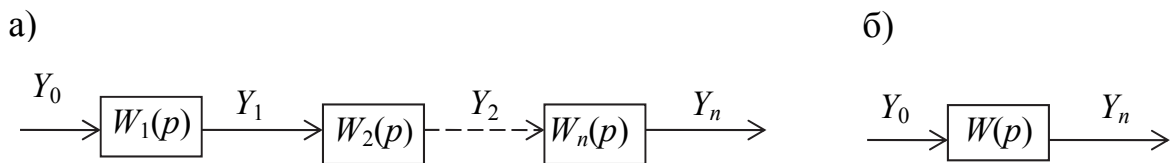


Рис. 2.8. Преобразование последовательно соединенных звеньев

2) **Параллельное соединение звеньев.** При параллельном соединении (рис. 2.9, а) на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные величины складываются.

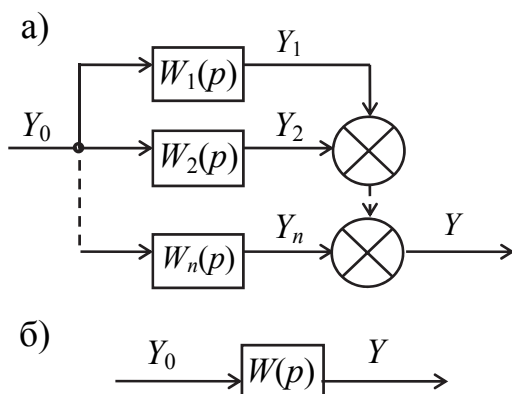


Рис. 2.9. Преобразование параллельно соединенных звеньев

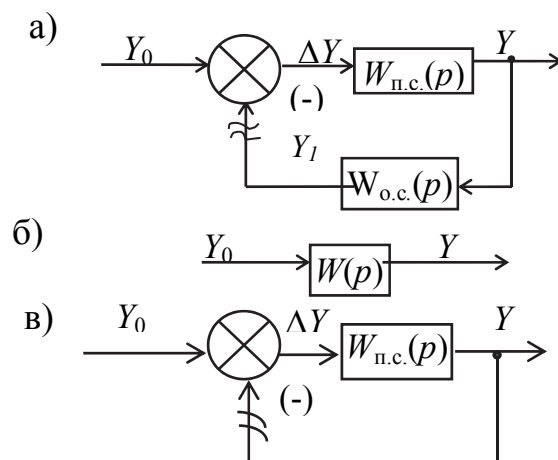


Рис. 2.10. Преобразование обратной связи

Цепь из параллельно соединенных звеньев можно заменить одним звеном (рис. 2.9, б) с передаточной функцией  $W(p)$ , равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев:

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p) = \frac{Y}{Y_0}.$$

3) **Звено, охваченное обратной связью.** Принято считать, что звено охвачено обратной связью (рис. 2.10, а), если его выходной сигнал через какое-либо другое звено подается на вход. При этом обратная связь считается отрицательной, если сигнал  $Y_1$  вычитается из входного сигнала  $y_0$ , т.е.

$$\Delta Y = Y_0 - Y_1.$$

Обратная связь считается положительной, если сигнал  $y_1$  складывается с входным сигналом  $Y_0$ , т.е.

$$\Delta Y = Y_0 + Y_1.$$

Разомкнем обратную связь перед сравнивающим звеном (рис. 2.10, а). Тогда получим цепь из двух последовательно соединенных звеньев. Передаточная функция разомкнутой цепи будет равна произведению передаточной функции  $W_{п.с}$  прямой цепи и передаточной функции  $W_{о.с}$  обратной связи:

$$W(p) = W_{п.с}(p) \cdot W_{о.с}(p).$$

Передаточная функция  $W_3(p)$  замкнутой цепи с отрицательной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_3(p) = W_{п.с}(p) / (1 + W_{п.с}(p)W_{о.с}(p)) = Y/Y_0.$$

Передаточная функция замкнутой цепи с положительной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция разомкнутой цепи:

$$W_3(p) = W_{п.с}(p) / (1 - W_{п.с}(p)W_{о.с}(p)) = Y/Y_0.$$

Если передаточная функция  $W_{о.с}(p) = 1$ , то обратная связь называется единичной, и структурная схема изображается, как показано на рис. 2.10, в. Передаточная функция при этом принимает вид:

- при отрицательной обратной связи

$$W_3(p) = W_{п.с}(p) / (1 + W_{п.с}(p));$$

- при положительной обратной связи

$$W_3(p) = W_{п.с}(p) / (1 - W_{п.с}(p)).$$

При преобразовании структурных схем возникает необходимость переноса и перестановки сумматоров и узлов.

Рассмотрим, какие изменения в схеме при этом нужно произвести.

4) **Правило переноса сумматора.** Легко показать, что при переносе сумматора (рис. 2.11) против хода сигнала необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 2.11, *а*). Если сумматор переносится по ходу сигнала, то необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 2.11, *б*).

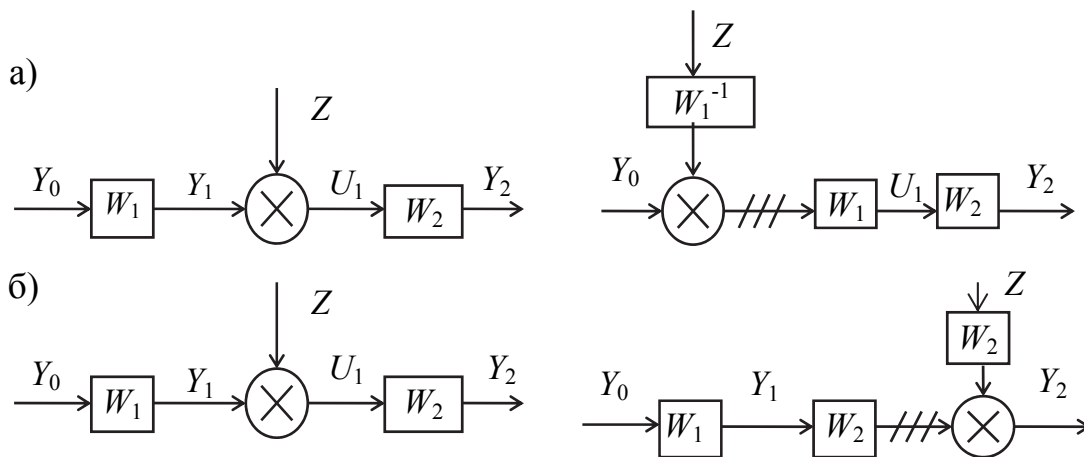


Рис. 2.11. Перенос сумматора через звено: *а* – влево; *б* – вправо

При переносе сумматора возникают неэквивалентные участки линии связи. Эти участки на рис. 2.11 заштрихованы.

5) **Перенос узла.** При переносе узла (рис. 2.12, *а*) также необходимо добавить звено (если узел переносится против хода сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 2.12, *б*).

Если узел переносится по ходу сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится (рис. 2.12, *в*).

6) **Перестановка узлов и сумматоров.** Узлы можно переставлять местами (рис. 2.13, *а*). Точно так же можно переставлять сумматоры, не добавляя звена (рис. 2.13, *б*). При перестановке узла и сумматора (перенос узла через сумматор) необходимо добавить звено – суммирующее или сравнивающее (рис. 2.13, *в*).

При переносе узла через сумматор, а также при перестановке сумматоров возникают неэквивалентные участки линии связи. Эти участки на схеме заштрихованы.

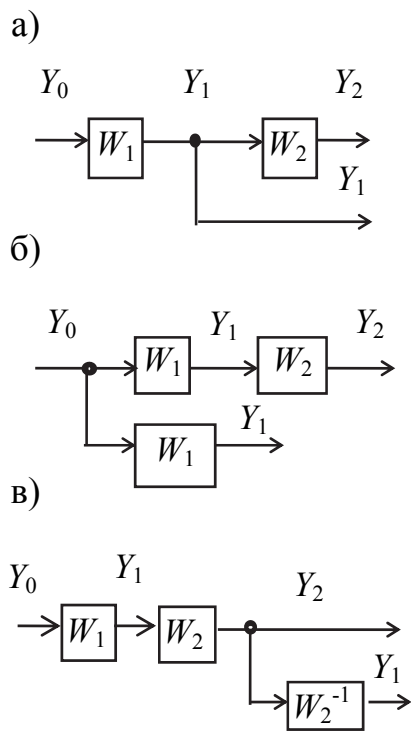


Рис. 2.12. Перенос узла

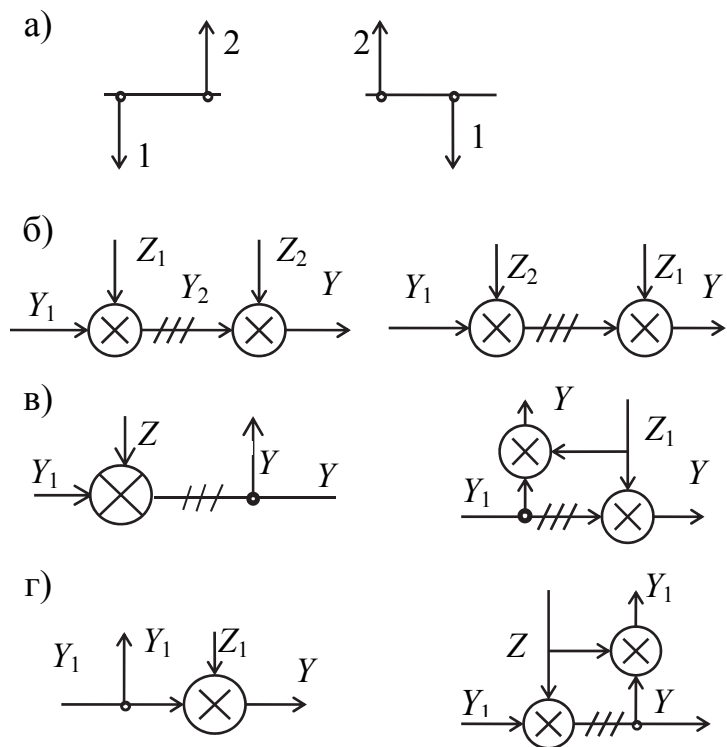


Рис. 2.13. Перенос узлов и сумматоров

### Пример 2.2

Используя правила эквивалентных преобразований, упростить схему (рис. 2.14, а) до одного звена с обратной связью.

*Первый шаг.* Преобразуем параллельно соединенные звенья  $W_1$ ;  $W_2$ ;  $W_3$  к одному звену (рис. 2.14, б) с передаточной функцией

$$W_8 = W_2 + W_3 + W_4.$$

*Второй шаг*

а) Преобразуем последовательно соединенные звенья  $W_1$ ,  $W_8$  к одному звену (рис. 2.14, в) с передаточной функцией

$$W_9 = W_1 (W_2 + W_3 + W_4).$$

б) Преобразуем обратную связь (рис. 2.14, в) к звену с передаточной функцией

$$W_{10} = W_1 (W_2 + W_3 + W_4) / (1 - W_1 W_5 (W_2 + W_3 + W_4)).$$

в) Преобразуем последовательно соединенные звенья  $W_{10}$  и  $W_6$  к одному звену (рис. 2.19, в) с передаточной функцией:

$$W_{11} = W_1 W_6 (W_2 + W_3 + W_4) / (1 - W_1 W_5 (W_2 + W_3 + W_4)).$$

*Третий шаг.* Перенесем левый сумматор влево через звено и поменяем сумматоры местами. (рис. 2.14, г).

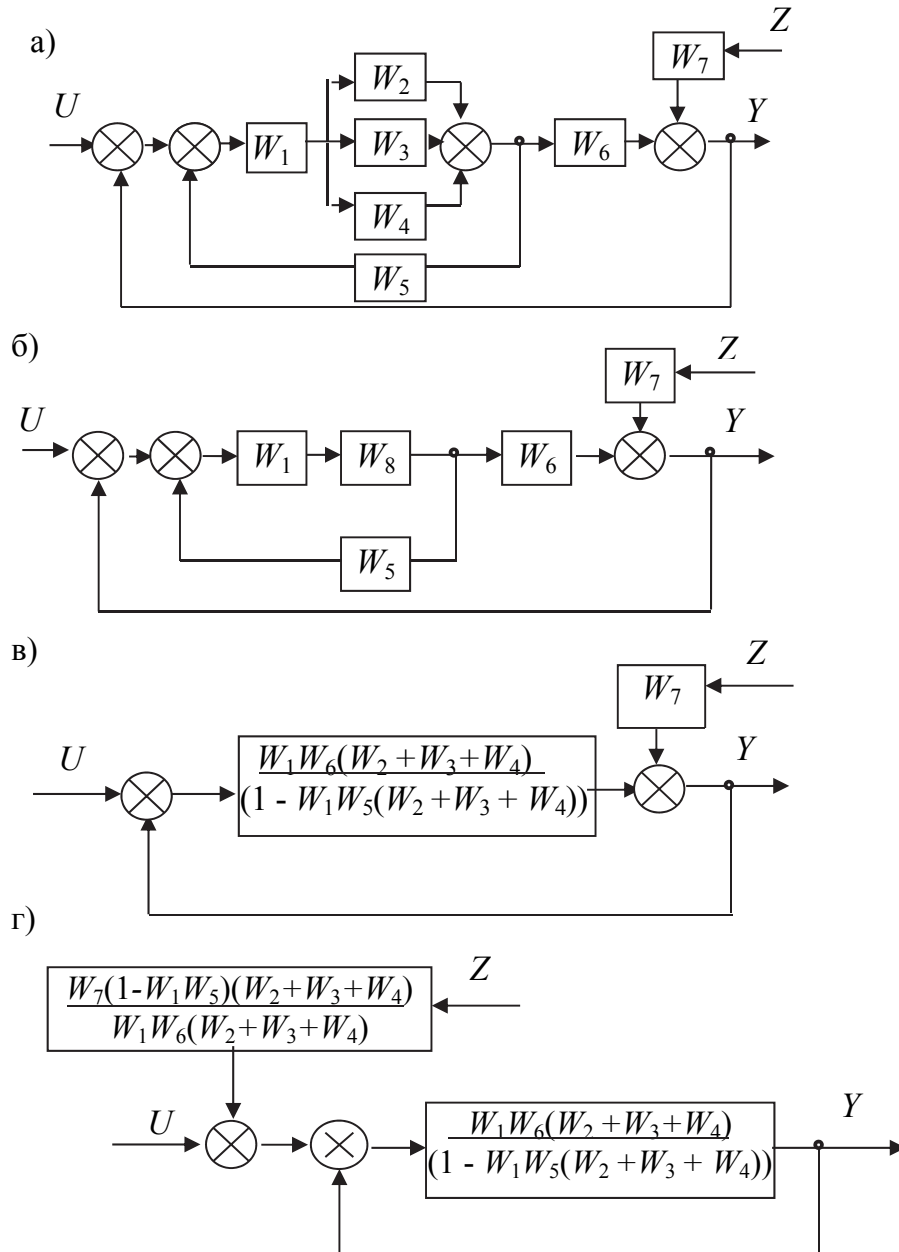


Рис. 2.14. Последовательность преобразования структурной схемы

### 2.14. Временные характеристики САУ

Временные характеристики являются важными характеристиками САУ. Временные характеристики звеньев – это переходные и импульсные переходные функции и их графики. В реальных условиях входные сигналы могут иметь произвольный характер. Для исследования динамических свойств элементов и систем следует выбрать такие типовые возмущения, которые, по возможности, близко отражали бы наиболее существенные особенности реальных возмущений.

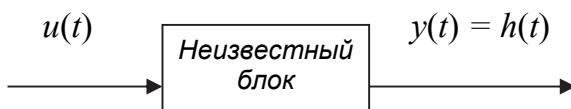


Рис. 2.15. Обозначение неизвестного звена

В теории САУ для определения динамических свойств звеньев (системы) в качестве входного сигнала применяют следующие типовые функции: скачок (ступенчатую функцию, например, подключение напряжения к звену или системе, начало обработки на станке, возмущение в виде ударов в механических системах и др.); единичный импульс (как правило, шумы, помехи); гармонический сигнал; степенные функции времени (линейные, квадратичные и др.).

Переходная функция системы (звена) – функция, описывающая изменение выходной величины системы (звена), когда на ее вход подается единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях (рис. 2.15). Переходную функцию обычно обозначают как  $h(t)$ . Иначе, переходная функция  $h(t)$  – функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Математически единичное ступенчатое воздействие описывается функцией:

$$1(t) = \begin{cases} 1; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$$

График переходной функции называют переходной характеристикой (рис. 2.16, а).

Импульсная переходная функция (весовая) системы (звена) – функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. График зависимости импульсной переходной функции  $\omega(t)$  от времени ( $t$ ) называют импульсной переходной характеристикой. При определении импульсной переходной функции используют понятие «единичный импульс».

Математически единичное импульсное воздействие описывается функцией  $\delta(t) = 1'(t)$ . График импульсной переходной функции называют импульсной переходной характеристикой. Физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс единичной площади (рис. 2.16, б).

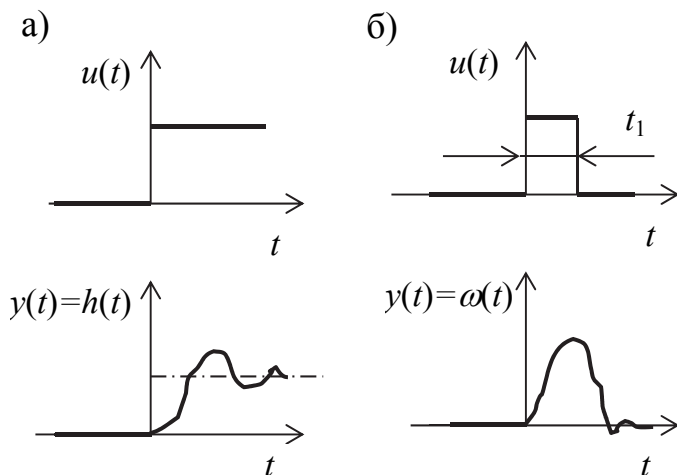


Рис. 2.16. Изменение выходной величины при разных воздействиях:  
а – ступенчатое; б – импульсное

### 2.15. Частотные характеристики звеньев

Частотными характеристиками называют формулы и графики, характеризующие реакцию звена на синусоидальное (гармоническое) воздействие в установившемся режиме, т.е. вынужденные синусоидальные колебания звена.

Для получения частотных характеристик пользуются принципом суперпозиции. Его сущность заключается в следующем: реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Это позволяет ограничиться изучением систем только с одним воздействием (входом).

В общем случае уравнение линейной стационарной системы с одним входом можно записать так:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) U(p).$$

Ее передаточная функция:

$$W(p) = Y(p)/U(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) / (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n).$$

Функцию  $W(j\omega)$ , которую получают из передаточной функции при подстановке в нее  $p = j\omega$ :

$$W(j\omega) = (b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (j\omega) + b_m) / (a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n),$$

называют частотной передаточной функцией. Частотная передаточная функция является комплекснозначной функцией от действительной переменной  $\omega$ .

Если на вход звена подается  $U = \sin \omega t$ , то на выходе будет (в установившемся режиме):

$$Y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда (точнее, усиление амплитуды), а  $\varphi$  – фаза (точнее, сдвиг по фазе). На рис. 2.17, *a* представлена графическая запись синусоидальных колебаний.

Принимается также символическая запись синусоидальных колебаний в виде:

$$U = e^{j\omega t}.$$

Строго говоря,  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ , что геометрически изображается вращающимся единичным вектором (рис. 2.17, *б*). Проекции последнего на прямоугольные оси дают  $\cos(\omega t)$  и  $\sin(\omega t)$ . Поэтому для суждения о вынужденных синусоидальных колебаниях звена достаточно формально исследовать реакцию звена на символический сигнал  $e^{j\omega t}$ .



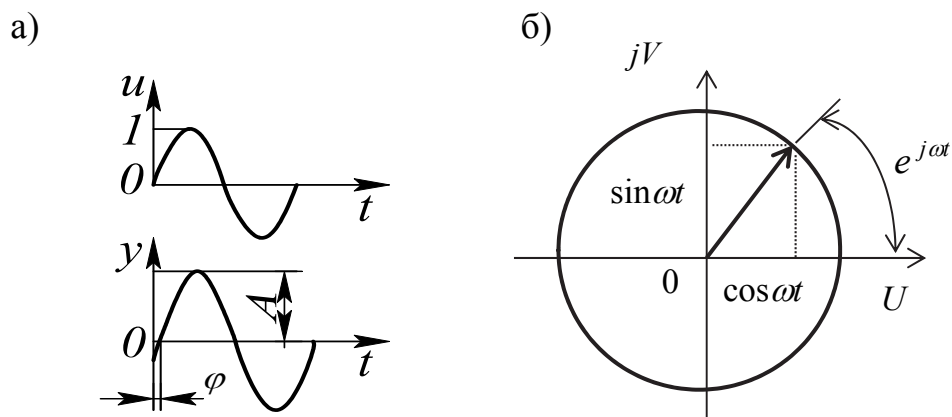


Рис. 2.17. Синусоидальные колебания

Частотную передаточную функцию (ЧПФ) называют комплекснозначной функцией от действительной переменной  $\omega$  (частоты). ЧПФ можно представить, как комплексную функцию, в алгебраической форме записи:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики системы.

Показательная форма записи:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $A(\omega)$  – модуль;  $\varphi(\omega)$  – аргумент.

Модуль вычисляется по формуле

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)},$$

где  $A(\omega)$  – амплитудно-частотная функция, ее график называют амплитудно-частотной характеристикой (рис. 2.18, а), которая выражает отношение амплитуды колебаний на выходе звена к амплитуде колебаний на его входе в зависимости от частоты выходного сигнала.

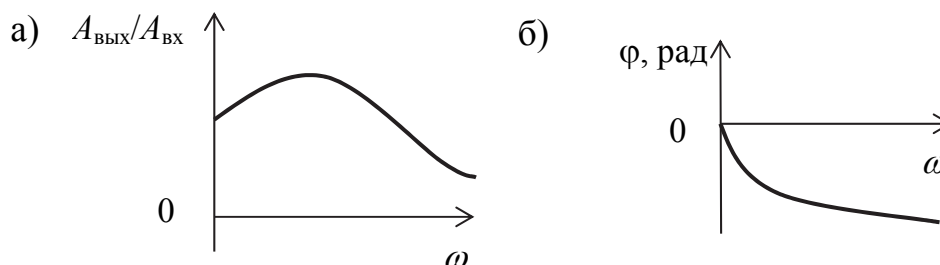


Рис. 2.18. Характеристики: а – амплитудно-частотная; б – фазочастотная

Аргумент равен:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + k\pi; \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3,$$

где  $\varphi(\omega)$  – фазочастотная функция, ее график называют фазочастотной характеристикой (рис. 2.18, б). Она выражает зависимость разности фаз между входными и выходными колебаниями звена от частоты входного сигнала. Опережению фазы соответствует  $\varphi > 0$ , а отставанию  $\varphi < 0$ .

В теории автоматического управления используют комплексную амплитудно-фазовую частотную характеристику, которая показывает соотношение между амплитудами выходного и входного сигналов и сдвигом фаз при изменении частоты колебаний входного сигнала от 0 до  $\infty$ .

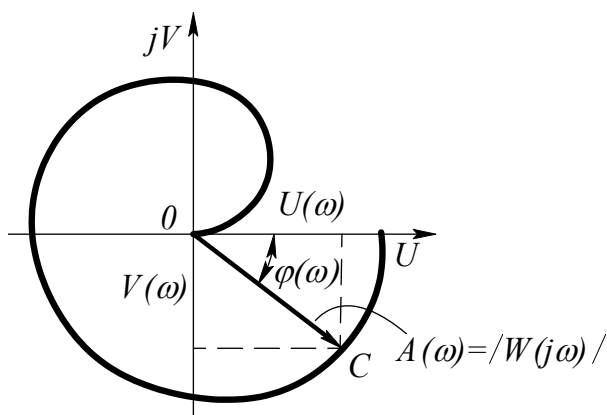


Рис. 2.19. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).

На комплекснозначной плоскости (рис. 2.19) частотную передаточную функцию определяет вектор  $OC$ , длина (модуль) которого равна амплитуде  $A(\omega)$ . Аргумент – угол  $\varphi(\omega)$ , образованный вектором  $OC$  и положительной действительной осью.

Кривую, которую описывает конец этого вектора в промежутке  $[-\infty; +\infty]$ , называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой.

Частотную передаточную функцию называют также амплитудно-фазовой частотной функцией. Ее действительную часть  $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$  и мнимую часть  $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$  называют соответственно вещественной и мнимой частотными функциями.

График зависимости  $U = U(\omega)$  называют действительной частотной характеристикой; график зависимости  $V = V(\omega)$  – мнимой частотной характеристикой.

Частотные методы анализа и частотные характеристики применимы только к линейным системам. Однако в ряде случаев их используют и в существенно нелинейных задачах в виде эквивалентных характеристик (метод гармонической линеаризации). Характеристики можно получить теоретически и экспериментально. Они могут быть использованы для описания свойств отдельных элементов и систем в целом.

### Пример 2.3

Рассмотрим построение амплитудно-частотной, фазочастотной и амплитудно-фазовой характеристик  $RC$ -цепи (рис. 2.20, а) простейшего инерционного (апериодического) звена.

На вход цепи ( $R = 100 \text{ кОм}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ ) поступает сигнал синусоидальной формы. Составляем уравнение электродвижущей силы (ЭДС) звена при единичном возмущении, т.е. при подаче на вход звена напряжения постоянного тока:  $U_{\text{ex}} = I \cdot R + U_{\text{вых}}$ .

Выражение для тока имеет вид:

$$I = CdU_{\text{вых}}/dt.$$

После выполнения преобразования Лапласа получим:

$$I = CpU_{\text{вых}},$$

откуда  $U_{\text{вх}} = (CRp + 1)U_{\text{вых}}$ .

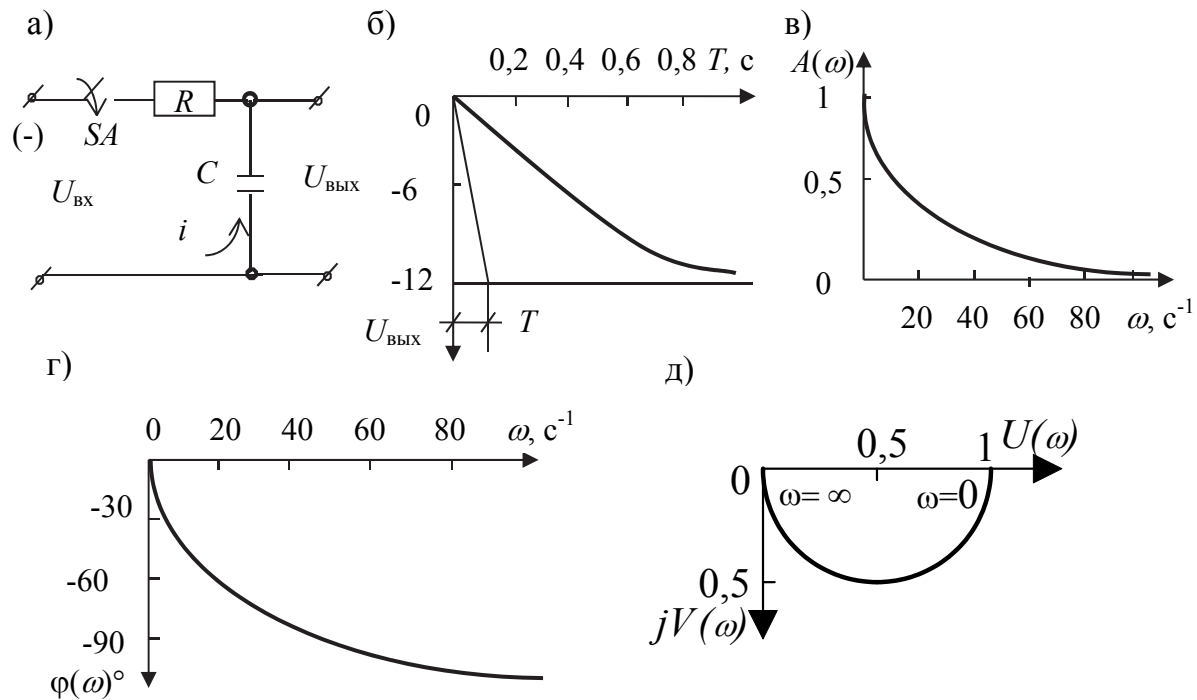


Рис. 2.20. RC – цепь: а – контур электрической цепи; б – диаграмма выходного напряжения; в – амплитудно-частотная характеристика; г – фазочастотная характеристика; д – амплитудно-фазовая частотная характеристика

Полагая  $CR = T$ , получим:

$$W(p) = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}} = 1/(Tp + 1).$$

Получим АФЧХ путем замены  $p$  в передаточной функции на  $j\omega$ .

$$W(j\omega) = 1/(Tj\omega + 1).$$

Выделим вещественную и мнимую части  $W(j\omega)$ , умножая числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю  $(1 - Tj\omega)$ :

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1 - Tj\omega}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)} = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

где  $T = RC = 10^5 \cdot 10^{-6} = 0,1 \text{ с}$ .

Тогда  $U(\omega) = 1 / (1 + 0,01 \omega^2)$ ;  $V(\omega) = 0,1 \omega / (1 + 0,01 \omega^2)$ .

Получим модуль:

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{(1 + T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(-\frac{T\omega}{(1 + T^2\omega^2)}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{T^2\omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

$$\text{аргумент} \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \left( -\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} \right) = -\arctg(T\omega).$$

Подставив числовые значения частоты, сделаем вычисления, результаты занесем в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Расчет характеристик RC-цепи

$\omega, \text{с}^{-1}$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	1,00	0	1,0000	0
1	0,99	-5°40'	0,9900	-0,10
5	0,89	-26°30'	0,8000	-0,48
10	0,71	-45°	0,5000	-0,50
20	0,50	-63°30'	0,2000	-0,40
40	0,25	-76°	0,0600	-0,23
100	0,10	-84°10'	0,0100	-0,10
1000	0,01	-89°20'	0,0001	-0,01
$\infty$	0	-90°	0	0

По полученным результатам построим АЧХ (рис. 2.20, в), ФЧХ (рис. 2.20, з), АФЧХ (рис. 2.20, д).

## 2.16. Логарифмические частотные характеристики

Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ)  $L(\omega)$  называют зависимость модуля частотной характеристики от частоты, представленной в логарифмическом масштабе. Для построения ЛАЧХ переходят к выражению:  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ , где  $L(\omega)$  – усилие в децибелах (дБ). Децибел является единицей логарифмической относительной величины. Изменение отношения двух величин в 10 раз соответствует изменению усиления на 20 дБ.

Так как амплитудно-частотная характеристика  $A(\omega)$  представляет отношение двух амплитуд: амплитуды колебаний на выходе и амплитуды колебаний на входе, то изменение усиления на 20 дБ соответствует изменению отношения двух амплитуд в 10 раз.

Если отношение двух величин равно 1, то усилие равно нулю, так как  $\lg 1 = 0$ . Это означает, что амплитуда выходных колебаний равна амплитуде входных колебаний.

В случае, когда отношение двух величин меньше единицы, усилие в логарифмическом масштабе будет отрицательным. Отрицательное усилие означает ослабление сигнала или уменьшение амплитуды выходных колебаний, по сравнению с амплитудой колебаний на выходе.

При построении ЛАЧХ (рис. 2.21) по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе, на отметке соответствующей значе-

нию  $\lg \omega$ , пишут само значение  $\omega$ , а не значение  $\lg \omega$ , а по оси ординат –  $L(\omega)$ . За единицу длины по оси абсцисс принимают октаву и декаду. Октава соответствует удвоенному значению частоты.

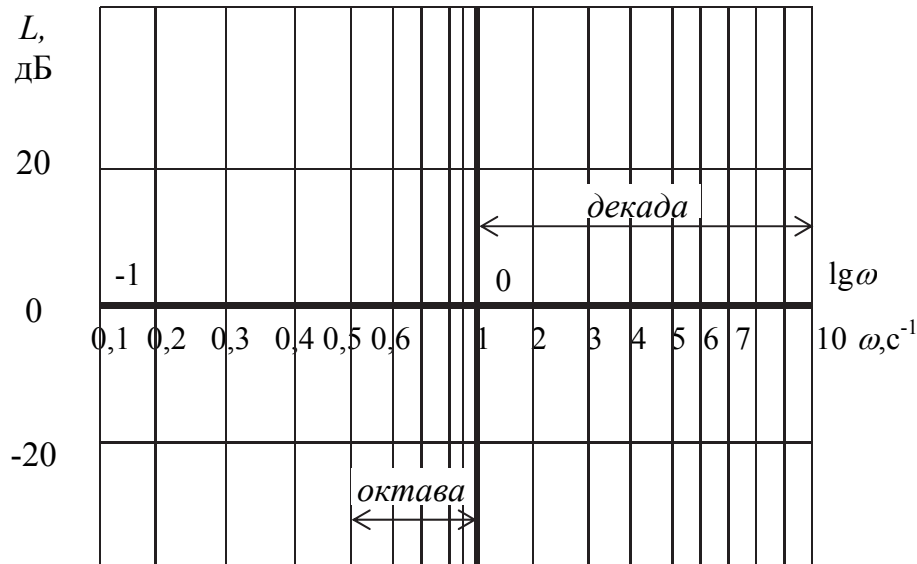


Рис. 2.21. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Длина отрезка на оси абсцисс, равного октаве, не зависит от частоты и определяется из выражения

$$\lg 2\omega - \lg \omega = \lg 2.$$

Декада соответствует удесятеренному значению частоты, а длина отрезка на оси абсцисс, равного декаде, также не зависит от частоты и определяется из выражения:

$$\lg 10\omega - \lg \omega = \lg 10 = 1.$$

Ось ординат при построении ЛАЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку  $\omega = 0$ , что соответствует бесконечно удаленной точке:

$$\lg \omega \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0.$$

Логарифмической фазочастотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости фазовой частотной функции  $\varphi(\omega)$  от логарифма частоты.

При построении ЛФЧХ по оси ординат откладывают углы в градусах и радианах, по оси абсцисс – частоту ( $\omega$ ) в логарифмическом масштабе в декадах (рис. 2.22).

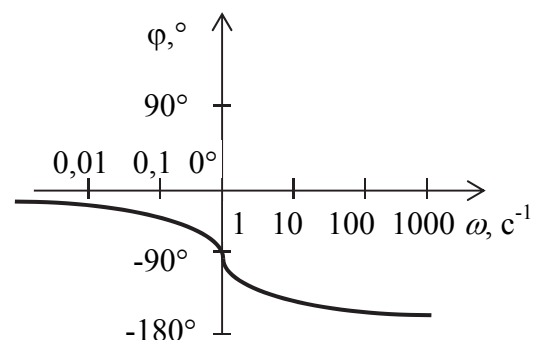


Рис. 2.22. Логарифмическая фазочастотная характеристика

### 2.17. Типовые динамические звенья систем автоматического регулирования

В теории автоматического регулирования можно выделить следующие типовые динамические звенья: безынерционное (пропорциональное), апериодическое (инерционное), дифференцирующее, интегрирующее, колебательное.

**Безынерционное звено.** Безынерционным (пропорциональным) называют звено (рис. 2.23), у которого выходная величина в каждый момент времени пропорциональна входной величине. Уравнение безынерционного звена:

$$y = kx,$$

где  $k$  – коэффициент передачи звена (в общем случае размерная величина).

Передаточная функция безынерционного звена:

$$W(p) = y(p) / x(p) = k.$$

Частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = k.$$

Амплитудно-частотная функция:

$$A(\omega) = k.$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg V(\omega) / U(\omega) = 0.$$

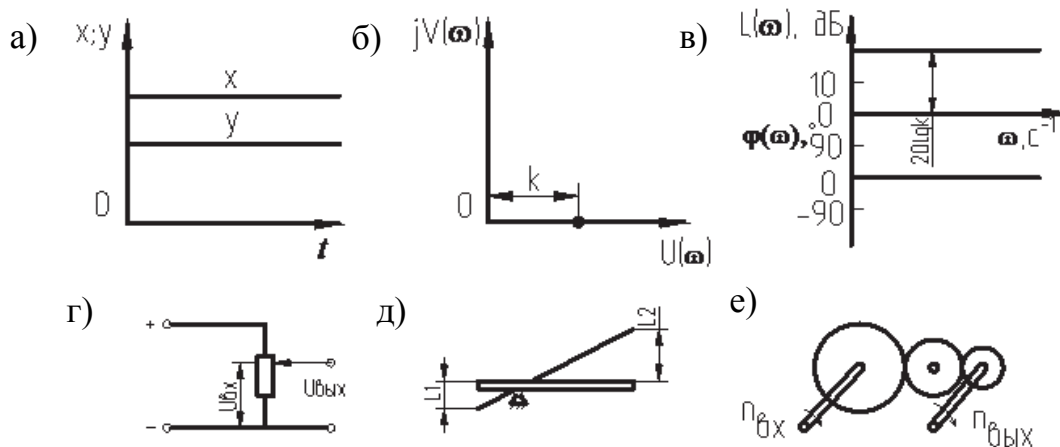


Рис. 2.23. Безынерционное звено: а – амплитудно-частотная характеристика; б – амплитудно-фазовая характеристика; в – логарифмические частотные характеристики; г - е – схемы безынерционных звеньев

Примерами безынерционного звена могут служить: потенциметрический датчик (рис. 2.23, г), преобразующий перемещение ползуна  $l$  в напряжение  $U$ , пропорционально этому перемещению; рычаг (рис. 2.23, д),

где входной и выходной величинами являются перемещения его плеч  $l_1$  и  $l_2$ , беззаярная зубчатая передача (рис. 2.23, е).

**Апериодическое звено.** Апериодическим (инерционным) называют звено (рис. 2.24), в котором при подаче на вход ступенчатого сигнала выходная величина апериодически (по экспоненте) стремится к новому установившемуся значению.

Уравнение апериодического звена:

$$Tdy / dt + y = kx ,$$

где  $T$  – постоянная времени звена, характеризующая инерционность звена, с.

В операторной форме:

$$TpY(p) + Y(p) = kX(p).$$

Передаточная функция:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k / (Tp + 1).$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Модуль:

$$A(\omega) = k / \sqrt{1 + \omega^2 T^2} .$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg k / \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} ;$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T .$$

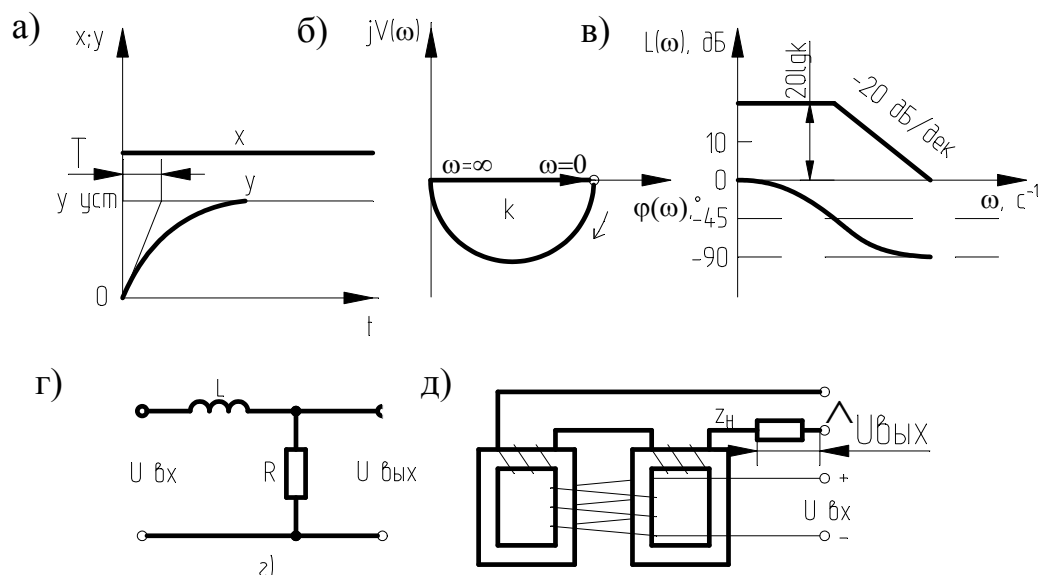


Рис. 2.24. Апериодическое звено: а – переходная характеристика; б – амплитудно-фазовая характеристика; в – логарифмические частотные характеристики; г, д – схемы апериодических звеньев



Апериодическое звено образуется из элемента, накапливающего энергию, и элемента, рассеивающего её. Например, в  $RL$ -цепи (см. рис. 2.24,  $\varepsilon$ ) магнитного усилителя входной величиной является напряжение  $U_{\text{вх}}$ , выходной – напряжение  $U_{\text{вых}}$  (см. рис. 2.24,  $\delta$ ).

**Дифференцирующее звено.** Дифференцирующим называют звено, в котором выходная величина пропорциональна производной во времени от входной величины. Различают идеальное и реальное дифференцирующие звенья.

Уравнение идеального дифференцирующего звена:

$$y = k dx / dt .$$

При подаче на вход звена ступенчатого сигнала на выходе получается мгновенный выходной импульс, теоретически имеющий бесконечно большую амплитуду, соответствующую бесконечно большой скорости входного сигнала в момент подачи.

Уравнение реального дифференцирующего звена:

$$T dy / dt + y = k T dx / dt ,$$

или в операторной форме:

$$TpY(p) + Y(p) = kTpX(p) .$$

Передаточная функция звена:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = kTp / (Tp + 1) .$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = [W(p)]_{p=j\omega} = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} + j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} .$$

Модуль:

$$A(\omega) = k\omega T / \sqrt{1 + T^2\omega^2} .$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega T / \sqrt{1 + T^2\omega^2} = 20 \lg kT\omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} ;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg 1 / T\omega = 90^\circ - \arctg \omega T .$$

Характеристики и пример реального дифференцирующего звена приведены на рис. 2.25,  $a$ ,  $b$ ,  $v$ . Примером реального дифференцирующего звена может служить  $RC$ -цепь (рис. 2.25,  $\varepsilon$ ), которая нашла широкое применение в промышленной электронике для преобразования прямоугольного импульса в импульсы более короткой длительности, предназначенные, например, для переброса триггера.

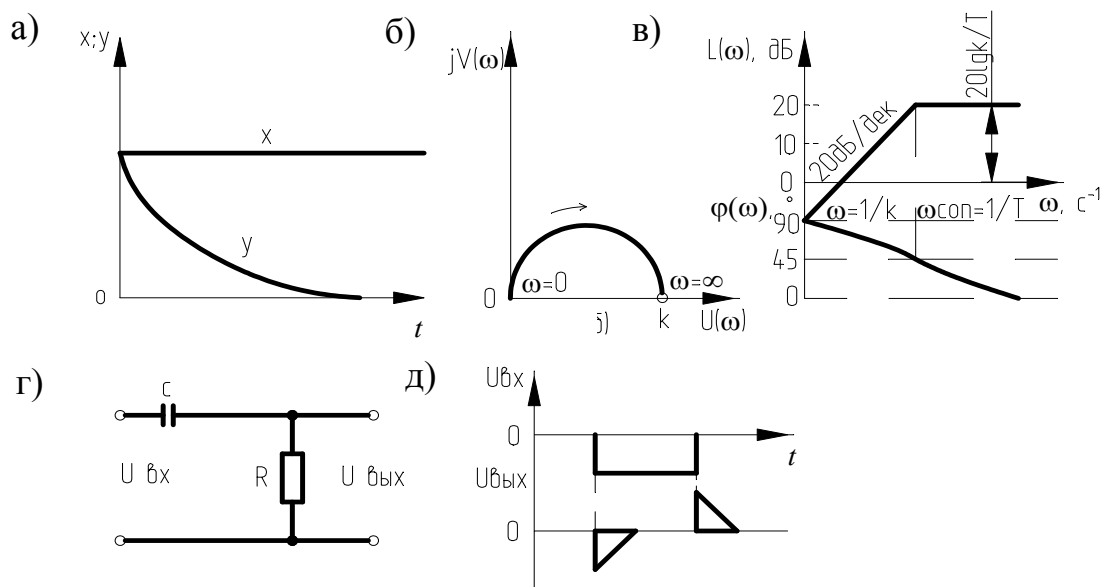


Рис. 2.25. Реальное дифференцирующее звено: а – переходная характеристика; б – амплитудно-фазовая характеристика; в – логарифмические частотные характеристики; г – дифференцирующая цепь; д – переходная характеристика RC-цепи

**Интегрирующее звено.** Интегрирующим называют звено, в котором выходная величина пропорциональна интегралу во времени от входной величины.

Уравнение интегрирующего звена:

$$y = k \int_0^t x dt .$$

При ступенчатом входном сигнале выходная величина линейно зависит от времени:

$$y = kxt = Kt ,$$

где  $K = kx$  – постоянная величина;  $t$  – время.

В интегрирующем звене скорость изменения выходной величины пропорциональна входной величине.

Уравнение звена в операторной форме:

$$Y(p) = kX(p) / p .$$

Передаточная функция:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k / p .$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = [W(p)]_{p=j\omega} = U(\omega) + jV(\omega) = k / j\omega = -jk / \omega .$$

Модуль:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k / \omega .$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{k/\omega}{0} = -\pi/2.$$

Характеристики интегрирующего звена приведены на рис. 2.26, а – в. Примером интегрирующего звена могут служить: резервуар, куда подается жидкость, напор воды  $Q_{\text{вх}}$  является входной величиной, а уровень воды в резервуаре  $h_{\text{вых}}$  выходной величиной (рис. 2.26, г); электрический двигатель (рис. 2.26, д), имеющий незначительные электромеханическую и электромагнитную постоянные времени, у которого частота вращения вала является выходной величиной, а напряжение, приложенное к цепи якоря,  $U_{\text{я}}$  – входной величиной. Инерционное звено можно приближенно считать интегрирующим при условии, что режим в инерционном звене далек от установившегося. Это происходит, когда сигналы на входе изменяются достаточно быстро по сравнению с величиной  $1/T$ . Следовательно,  $RC$ -цепь (см. рис. 2.20, а) может также служить примером интегрирующего звена.

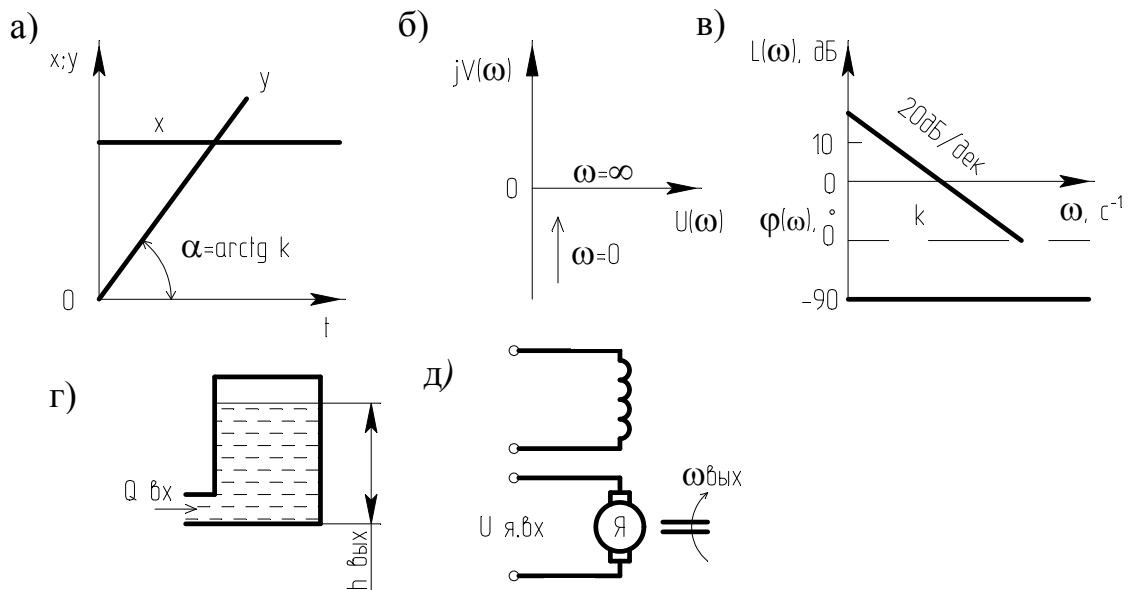


Рис. 2.26. Интегрирующее звено: а – переходная характеристика; б – амплитудно-фазовая характеристика; в – логарифмические частотные характеристики; г, д – примеры интегрирующего звена

**Колебательное звено.** Колебательным называют звено, у которого при ступенчатом изменении входной величины выходная величина стремится к новому установившемуся значению, совершая при этом колебания.

Уравнение колебательного звена:

$$T_2^2 d^2 y / dt^2 + T_1 dy / dt + y = kx,$$

или в операторной форме

$$T_2^2 p^2 Y(p) + T_1 p Y(p) + Y(p) = kX(p).$$

Передаточная функция:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k / (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1).$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} - j \frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Модуль:

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_1(\omega) / (1 - T_2^2 \omega^2).$$

Характеристики и примеры колебательного звена приведены на рис. 2.27, а, б, в. Колебательное звено образуется из двух элементов, способных запасать энергию и взаимно обмениваться этими запасами. Примером колебательного звена может служить электрическая цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора  $R$ , конденсатора  $C$  и катушки  $L$  (рис. 2.27, г). В этом случае  $U_{вх}$ ,  $U_{вых}$  – входная и выходная величины.

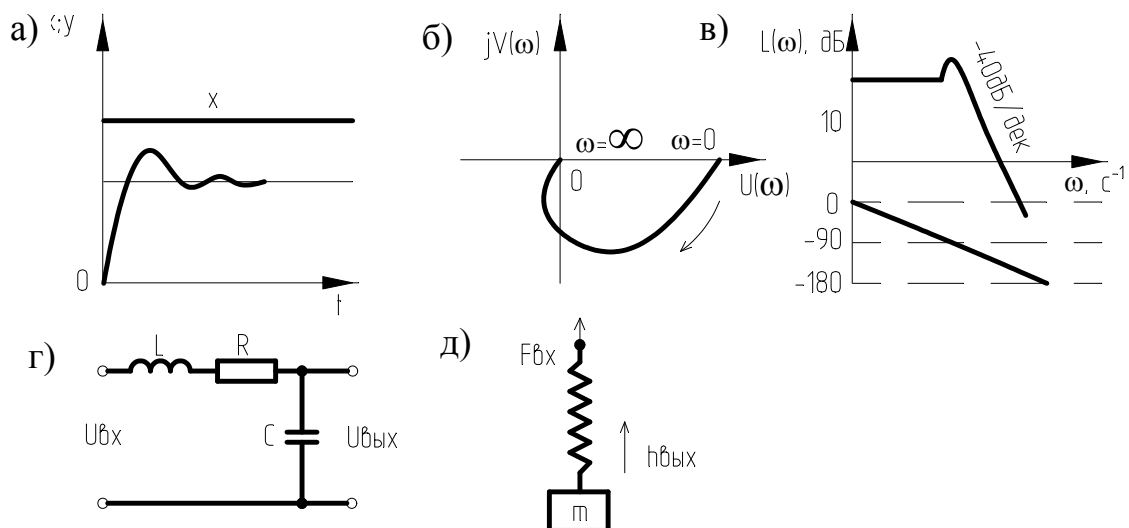


Рис. 2.27. Колебательное звено: а – переходная характеристика; б – амплитудно-фазовая характеристика; в – логарифмические частотные характеристики; г, д – примеры колебательного звена

Конденсатор способен запасать энергию электрического поля, катушка – энергию магнитного поля. При колебаниях происходит обмен

энергией, запасенной в этих элементах, с потерей на резисторе. Другой пример колебательного звена – масса  $m$  (рис. 2.27,  $d$ ), подвешенная на пружине. Если приложить к массе некоторую импульсную силу в вертикальном направлении, то она будет совершать колебания относительно нового установившегося значения. Входная величина в данном случае – сила ( $F$ ), выходная – перемещение ( $h$ ). Масса здесь запасает потенциальную энергию, пружина – кинетическую.

При наличии возмущающих факторов, нарушающих равновесие звена, возникают колебания. Причем, если в результате колебаний происходит потеря энергии в звене, то колебания затухают, и звено в этом случае является устойчивым. Если в колебательном звене нет потери энергии, то такое звено называют консервативным.

Уравнение консервативного звена

$$T_2^2 d^2 y / dt^2 + y = kx.$$

**Форсирующее звено.** Форсирующим звеном называют звено, которое описывается уравнением

$$y = k(Tp + 1)x,$$

где  $T$  – постоянная времени звена, характеризующая инерционность звена, с.

Передаточная функция:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k(Tp + 1).$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1).$$

Модуль:

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2};$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } \omega T.$$

**Запаздывающее звено.** Для любого устройства, служащего для передачи или преобразования информации, справедливо то, что выходная величина проявляется с некоторым запаздыванием на время  $\tau$  относительно момента поступления информации на вход устройства. В ряде случаев это запаздывание настолько мало, что им пренебрегают, полагая  $\tau = 0$ , и считают, что практически информация на входе и выходе возникает в один и тот же момент времени. Однако есть и такие устройства, где этот временной сдвиг играет существенную роль. Если устройство не поглощает энергию, то  $x(t)$  и  $y(t)$  совпадают по виду функциональных зависимостей. Звено определяется как запаздывающее (рис. 2.28), если оно описывается уравнением:

$$y(t) = x(t - \tau),$$

где  $\tau$  – время запаздывания.

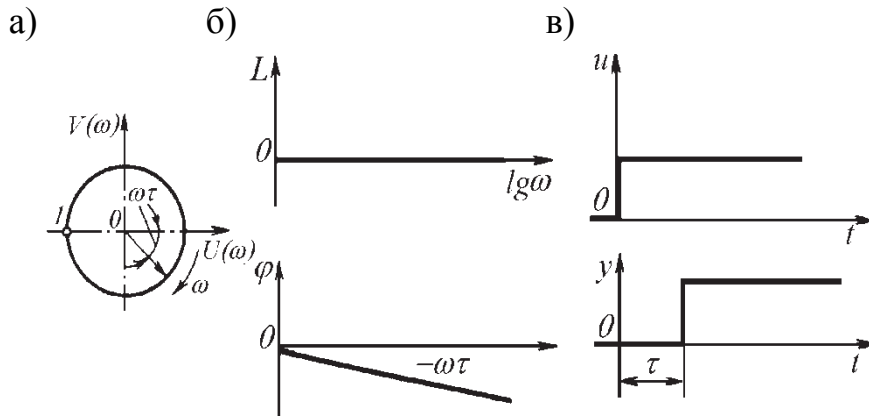


Рис. 2.28. Запздывающее звено: а – амплитудно-фазовая характеристика; б – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика и логарифмическая фазочастотная характеристика; в – переходная характеристика

Передаточная функция:

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}.$$

Модуль:

$$A(\omega) = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1.$$

Логарифмические частотные характеристики:

$$L(\omega) = 0;$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_1(\omega) / (1 - T_2^2 \omega^2).$$

## 2.18. Частотные характеристики разомкнутых систем

При исследовании и проектировании автоматических систем обычно используют амплитудно-фазовые и логарифмические частотные характеристики разомкнутых систем. Передаточные функции  $W(p)$  разомкнутых одноконтурных, а иногда и многоконтурных систем легко могут быть преобразованы к виду

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p), \quad (2.8)$$

где  $W_i(p)$  – передаточные функции элементарных звеньев.

В этом случае модули и аргументы частотных передаточных функций системы и звеньев

$$A(\omega) = |W(j\omega)|; A_i(\omega) = |W_i(j\omega)|; \varphi(\omega) = \arg W(j\omega); \varphi_i(\omega) = \arg W_i(j\omega)$$

в соответствии с правилом модулей и аргументов комплексных чисел связаны между собой соотношениями



$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega), \quad (2.9)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (2.10)$$

Вещественные и мнимые частотные функции системы определяются равенствами:

$$\begin{cases} U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{cases} \quad (2.11)$$

Пользуясь полученными соотношениями (2.8) – (2.11), можно построить АФЧХ.

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega), \quad (2.12)$$

где  $L(\omega)$  и  $L_i(\omega)$  – логарифмические амплитудные частотные функции и по определению  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  и  $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ .

Из (2.10) и (2.12) вытекает следующее правило построения ЛЧХ (ЛАЧХ и ЛФЧХ) систем, передаточные функции которых преобразованы к виду (2.12): строят ЛЧХ отдельных звеньев и затем их графически складывают.

На основании (2.12) можно также сформулировать несколько иной, более простой порядок построения ЛАЧХ. Проиллюстрируем это сначала на конкретном примере.

#### Пример 2.4

Пусть  $W(p) = (100(p + 1))/(p^\nu(10p + 1)(0,01p^2 + 0,1p + 1))$ . Необходимо построить ЛАЧХ для данной передаточной функции.

Передаточная функция  $W(p)$  равна произведению передаточных функций элементарных звеньев. В это выражение входят передаточные функции апериодического, форсирующего и колебательного звеньев.

Передаточная функция:

- апериодического звена

$$W(p) = p^{-\nu}/(10p + 1),$$

где  $K = p^{-\nu}$  – коэффициент усиления,  $T = 10$  с – период времени;

- форсирующего звена

$$W(p) = 100(p + 1),$$

где  $K = 100$  – передаточный коэффициент,  $T = 1$  с;

- колебательного звена

$$W(p) = 1/(0,01p^2 + 0,1p + 1),$$

где  $K = 1$ ;  $T = 0,1$  с.

Логарифмическая амплитудно-частотная функция равна произведению ЛАЧХ элементарных звеньев. ЛАЧХ апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно равны:

$$L_{\text{ап.зв}}(\omega) = 20 \lg p^{-\nu} - 20 \lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1} = -\nu 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1};$$

$$L_{\text{фор.зв}}(\omega) = 20\lg 100 + 20\lg \sqrt{(1\omega)^2 + 1} = 40 + 20\lg \sqrt{(\omega)^2 + 1};$$

$$\begin{aligned} L_{\text{кол.зв}}(\omega) &= 20\lg 1 - 20\lg \sqrt{1 - ((0,1)^2 \omega^2)^2 + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,1\omega)^2} = \\ &= -20\lg \sqrt{1 - ((0,1)^2 \omega^2)^2 + (2 \cdot 0,5 \cdot 0,1\omega)^2}. \end{aligned}$$

Логарифмическая амплитудно-частотная функция:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 40 - \nu 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1} + \\ &+ 20\lg \sqrt{(\omega)^2 + 1} - 20\lg \sqrt{1 - ((0,1)^2 \omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}. \end{aligned}$$

Асимптотическая ЛАЧХ рассматриваемой системы состоит из четырех асимптот (рис. 2.29) и строится следующим образом.

Вычисляем сопрягающие частоты и усиления  $20\lg K$ , где  $K = \prod_{i=1}^n K_i$  – передаточный коэффициент системы, равный произведению передаточных коэффициентов звеньев:

$$\omega_1 = 1 / 10 = 0,1; \quad \omega_2 = 1; \quad \omega_3 = 1 / 0,1 = 10;$$

$$K = p^{-\nu} \cdot 100 \cdot 1;$$

$$L(\omega) = 20\lg 100 p^{-\nu} = 20\lg 10^2 + 20\lg p^{-\nu} = 40 - \nu 20\lg \omega.$$

Особенность: при вычислении асимптотической ЛАЧХ элементарных звеньев при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают), а при частотах, больших сопрягающей частоты, – член с наивысшей степенью  $\omega$ .

Поэтому в рассматриваемом примере при  $\omega < \omega_1$ .

$$L(\omega) = 40 - \nu 20\lg \omega.$$

Это уравнение первой асимптоты. Строим первую асимптоту, которую проводим до первой сопрягающей частоты через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L(\omega) = 20\lg K$  с наклоном  $-\nu 20$  дБ/дек. Здесь  $\nu$  равен разности между числами интегрирующих и дифференцирующих звеньев. Характеристика кончается на первой сопрягающей частоте:

$$L(\omega) = 40 - \nu 20\lg \omega.$$

При  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$  аналогично имеем:

$$L(\omega) = 40 - \nu 20\lg \omega - 20\lg 10\omega = 20 - \nu 20\lg \omega - 20\lg \omega.$$

Это уравнение второй асимптоты. Её наклон изменяется на  $-40$  дБ/дек и вызван наличием апериодического звена. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты согласно ее уравнению с наклоном:

$$(-\nu 20 - 20) \text{ дБ/дек.}$$

При  $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$  имеем:

$$L(\omega) = 20 - \nu 20\lg \omega - 20\lg \omega + 20\lg \omega = 20 - \nu 20\lg \omega.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон изменяется на  $20$  дБ/дек и вызван наличием форсирующего звена. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты с наклоном  $-\nu 20$  дБ/дек.

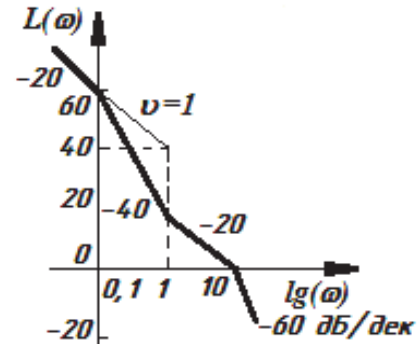


Рис. 2.29. Асимптотическая ЛАЧХ

При  $\omega > \omega_3$ :

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 - \nu 20 \lg \omega - 20 \lg 0,1^2 \omega^2 = 20 - \nu 20 \lg \omega - (20 \lg 0,1^2 + 20 \lg \omega^2) = \\ &= 60 - \nu 20 \lg \omega - 40 \lg \omega. \end{aligned}$$

Это уравнение последней четвертой асимптоты. Её наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на  $-40$  дБ/дек и вызван наличием колебательного звена.

Теперь нетрудно сформулировать общее правило построения асимптотической ЛАЧХ системы с передаточной функцией вида:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

где  $W_i(p)$  – передаточные функции элементарных звеньев.

Правило построения асимптотической ЛАЧХ:

1) Вычисляем сопрягающие частоты и усиления  $20 \lg K$ , где  $K = \prod_{i=1}^n K_i$  – передаточный коэффициент системы, равный произведению передаточных коэффициентов звеньев.

2) Строим первую асимптоту, которую проводим до первой сопрягающей частоты через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L(\omega) = 20 \lg K$  с наклоном  $-\nu 20$  дБ/дек. Здесь  $\nu$  равен разности между числами интегрирующих и дифференцирующих звеньев.

3) Проводим вторую асимптоту от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты. Её наклон изменяется на  $20$ ;  $-20$ ;  $40$  или  $-40$  дБ/дек в зависимости от того, является ли  $\omega_i$  сопрягающей частотой форсирующего, аperiodического, форсирующего второго порядка или колебательного звена соответственно.

4) Строим каждую последующую асимптоту аналогично второй. Изменение наклона  $(i + 1)$ -й асимптоты зависит от того, сопрягающей частотой какого элементарного звена является  $\omega_i$ .

Если какая-либо сопрягающая частота является кратной 1, т.е. имеется  $l$  одинаковых элементарных звеньев, то изменение наклона при этой частоте в  $l$  раз больше, чем при соответствующей простой частоте.

Для колебательных звеньев с малым коэффициентом демпфирования ( $\xi < 0,4$ ) асимптотическая ЛАЧХ должна быть скорректирована в окрестности сопрягающей частоты по точным формулам или с помощью кривых поправок.

## 2.19. Методы описания процессов в САУ

Для получения математической модели в теории автоматического управления используют один из двух путей:

1) получение системы дифференциальных уравнений на основе аналитического анализа процессов (физических, механических и др.) или экспериментальным путем;

2) получение косвенных оценок динамических процессов, к которым относятся передаточные функции, временные характеристики, частотные характеристики.

### Описание процессов с помощью дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения являются основным математическим аппаратом линейных детерминированных систем. Необходимость использования этого аппарата обусловлена тем, что большинство физических элементов САУ обладают свойством в одни моменты времени накапливать, а в другие моменты времени отдавать энергию и различные вещества.

Опишем, например, процесс резания, сопровождающийся упругими деформациями элементов технологической системы при наличии трения и инерционных масс, дифференциальными уравнениями.

В общем случае при осуществлении движения подачи в технологической системе появляются силы, вызывающие деформации; детали системы в процессе резания стремятся вернуться в свое исходное состояние, преодолевая при этом силы сопротивления вязкой среды. Наличие масс и нелинейностей усложняет рассмотрение протекания процесса, однако влиянием масс можно в ряде случаев пренебречь. При этом условии процесс в основном определяется упругими деформациями и вязким трением.

С некоторой степенью приближения при малых отклонениях технологическая система может быть линеаризована, если в ней нет существенных нелинейностей, например, зазоров, свободного хода и др. При оценке динамических свойств системы в качестве входной величины удобно рассматривать подачу режущего инструмента. Выходной величиной могут быть различные перемещения, что подсказывается удобством встраивания первичного чувствительного элемента – датчика.

В случае обработки вала на токарном станке при отсчете входной и выходной величины от одной и той же базы (рис. 2.30), например относительно станины станка, можно отметить, что, если бы система была статична (т.е. не происходило бы резания), то для подачи резцедержателя на величину  $x_{вх}$  потребовалась бы сила  $F_{вх}$ , пропорциональная этому перемещению для преодоления упругих сил, развиваемых в результате изгиба резца с жесткостью  $j_2$ . Жесткость заготовки несоизмеримо больше, и поэтому полагаем, что при  $j_1 = \infty$   $F_{вх} = j_2 x_{вх}$ .

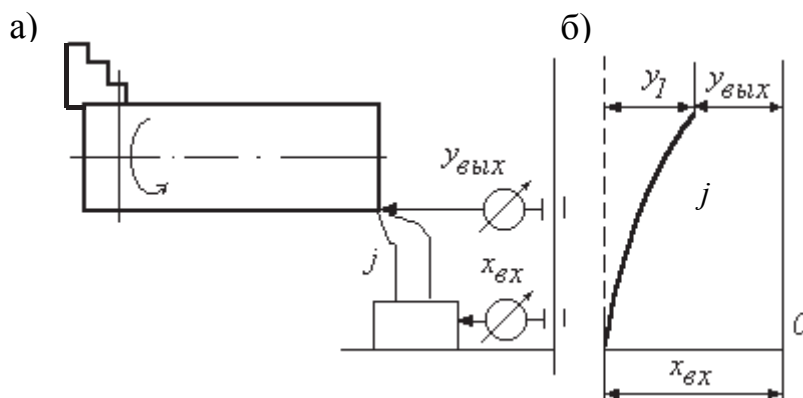


Рис. 2.30. Модель механической обработки резанием на токарном станке

Но для любого момента времени, вследствие динамики явления, сила, вызывающая деформирование резца (рис. 2.30, *a*), оказывается пропорциональной величине  $y_1 = x_{\text{вх}} - y_{\text{вых}}$ , являющейся стрелой прогиба резца, закрепленного как консоль (рис. 2.30, *б*).

Таким образом, для любого момента времени к резцу приложена сила

$$F_{\text{вх}} = j_2 y_1 = j_2(x_{\text{вх}} - y_{\text{вых}}).$$

Силой, направленной в обратном направлении, является, прежде всего, сила резания, пропорциональная при прочих равных условиях производной от величины  $y_{\text{вых}}$ :

$$P = C dy_{\text{вых}}/dt,$$

где  $C$  – коэффициент пропорциональности, значение которого подлежит дальнейшему уточнению;  $y_{\text{вых}}$  – текущая величина.

В системе, строго говоря, действует и сила инерции, обусловленная наличием некоторой массы:

$$f = m d^2 y_{\text{вых}}/dt^2,$$

где  $m$  – некоторая приведенная масса системы «резец – резцедержатель»;  $d^2 y_{\text{вых}}/dt^2$  – ускорение в точке;  $y_{\text{вых}}$  – текущая величина.

Уравнение сил в общем виде:

$$F_1 = P + f \quad \text{или} \quad F_1 = j_2(x_{\text{вх}} - y_{\text{вых}}) = C dy_{\text{вых}}/dt + m d^2 y_{\text{вых}}/dt^2.$$

При токарной обработке осевая сила (датчики контролируют перемещения в осевом направлении):

$$P_x = C_{P_x} t^{x_{P_x}} S^{y_{P_x}} V^{n_{P_x}} K_{M_{P_x}} \cdot 9,81.$$

Если  $y_{P_x} = 1$ , а продольная подача на оборот детали  $S = K dy_{\text{вых}}/dt$ , то при условии, что  $C_{P_x}$ ,  $K_{M_{P_x}}$ ,  $x_{P_x}$ ,  $n_{P_x}$  приняты постоянными, определяемыми режимом обработки, материалами детали и резца и другими условиями, имеем:

$$P_x = C_{P_x} t^{x_{P_x}} K_{M_{P_x}} K,$$

где  $K$  – некоторая постоянная величина.

Из уравнения сил получим:

$$j_2 x_{\text{вх}} = m d^2 y_{\text{вых}}/dt^2 + C dy_{\text{вых}}/dt + j_2 y_{\text{вых}}$$

и после деления на  $j$  с введением обозначений  $m/j_2 = T_1$  и  $C/j_2 = T$  имеем:

$$x_{\text{вх}} = T_1 d^2 y_{\text{вых}}/dt^2 + T dy_{\text{вых}}/dt + y_{\text{вых}}.$$

Полученное дифференциальное уравнение указывает на то, что рассматриваемая технологическая система представляет собой звено второго порядка. Это теоретически означает возможность появления затухающего колебательного переходного процесса, но на практике вследствие малости приведенной массы ( $m$ ) и иногда возникающих незначительных ускорений величиной  $T_1 d^2 y_{\text{вых}}/dt^2$  вполне можно пренебречь, на что указывают экспе-

риментальные данные, полученные в результате осциллографирования процесса токарной обработки.

Уравнение движения поэтому может быть переписано так:

$$x_{\text{вх}} = T dy_{\text{вых}}/dt + y_{\text{вых}}.$$

Это указывает на возможность представления рассматриваемой технологической системы как некоторого апериодического звена с передаточным коэффициентом  $K = 1$  и постоянной времени  $T = C/j_2$ .

Конечные результаты выполнения технологических процессов механической обработки во многом зависят от динамических качеств станочных систем. К основным показателям качества относятся запас устойчивости, реакция системы на внешние воздействия, быстродействие, продолжительность переходных процессов и др. Потеря устойчивости характеризуется изменением режима работы станка (появлением вибраций, неравномерных, скачкообразных перемещений узлов).

При обработке происходит силовой контакт между режущим инструментом и заготовкой при одновременном изменении их взаимного положения. Под действием силы резания и других сил, сопутствующих процессу обработки, а также создаваемых ими моментов детали, входящие в технологическую систему, деформируются. При этом изменение относительной деформации между инструментом и заготовкой при изменении их взаимного положения непосредственно влияет на геометрическую точность получаемой детали и, следовательно, на точность станка.

В зависимости от связи колебательных систем узлов станка, механизма главного движения и механизма движения подач детали могут колебаться независимо друг от друга или оказывать влияние друг на друга.

Для того чтобы станок работал точно и его колебания были минимальны, следует проектировать систему «станок – приспособление – инструмент – заготовка» так, чтобы статические и динамические изменения в измерительных звеньях были такими же, как и между инструментом и заготовкой. Допустимое значение этой разности определяют исходя из заданной геометрической и рабочей точности и динамической устойчивости станка в зависимости от положения инструмента и заданной мощности резания. На основании этого определяют необходимую статическую и динамическую жесткость станка.

Рассмотрим методику определения вынужденных колебаний, например, плоскошлифовального станка. Введем допущение: заготовка обладает бесконечно большей жесткостью, по сравнению с жесткостью шлифовального круга, в направлении, перпендикулярном к обрабатываемой поверхности. Входными воздействиями на систему станка являются: силовое воздействие  $u(t)$  на заготовку от дисбаланса шлифовального круга и изменение  $y_f(t)$  глубины резания вследствие эксцентриситета круга. В этом случае станок можно представить в виде системы с одной степенью свободы

(рис. 2.31), где переменной состояния является величина  $q(t)$  относительно положения шлифовального круга и заготовки по нормали к поверхности заготовки.

На основании принципа Даламбера поведение системы описывает система обычных дифференциальных уравнений вида

$$m\ddot{q}(t) + h\dot{q}(t) + jq(t) = P(t) + u(t);$$

$$P(t) = K[y_i(t) - q(t)],$$

где  $m$  – приведенная масса;  $h$  – коэффициент демпфирования;  $j$  – жесткость подсистемы шлифовального круга;  $P(t)$  – изменение силы резания;  $K$  – коэффициент пропорциональности (характеристика процесса резания).

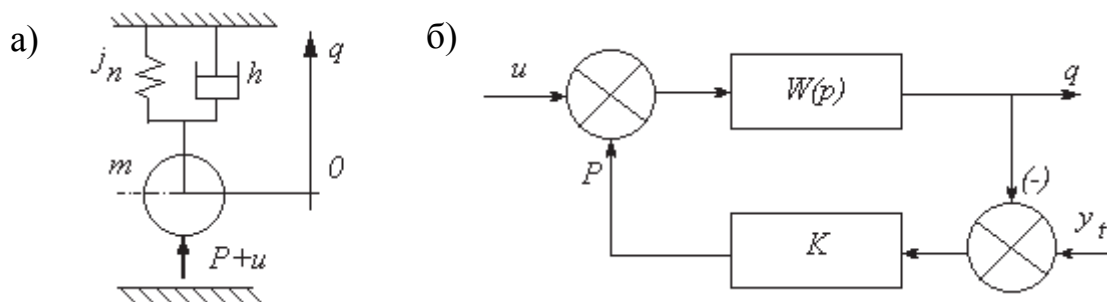


Рис. 2.41. Расчетная (а) и структурная (б) схемы динамической системы станка

Используя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, это уравнение приводят к виду

$$\left(\frac{m}{j}p^2 + \frac{h}{j}p + 1\right)q(p) = [P(p) + u(p)]\frac{1}{j},$$

$$P(p) = K[y_i(p) - q(p)],$$

где  $q(p)$ ,  $P(p)$ ,  $u(p)$ ,  $y_i(p)$  – преобразование Лапласа переменных  $q(t)$ ,  $P(t)$ ,  $u(t)$ ;  $p$  – комплексная переменная.

Подставим в полученную систему выражения

$$\sqrt{m/j} = T^2, \quad h/j = 2\xi_d T,$$

где  $\xi_d$  – коэффициент демпфирования;  $1/j = k$ .

После преобразований найдем передаточную функцию  $q$  системы  $W(p)$ :

$$q(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi_d T p + 1} [P(p) + u(p)] = W(p) [P(p) + u(p)];$$

$$P(p) = K[y_i(p) - q(p)].$$

Звенья системы станка представляют в виде передаточных функций. Запись уравнений в такой форме дает возможность представить структуру рассматриваемой динамической системы станка в виде совокупности упругой системы и процесса резания, взаимодействующих между собой (рис. 2.31, б).





Частотные характеристики строят на основе передаточной функции с заменой параметра  $p$  на  $j\omega$ , где  $j$  – мнимая единица;  $\omega$  – частота. Для передаточной функции  $W(p)$  частотная характеристика имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi_d T\omega}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$W(j\omega) = \frac{k}{((1 - T^2\omega^2) + j2\xi_d T\omega)} \cdot \frac{((1 - T^2\omega^2) - j2\xi_d T\omega)}{((1 - T^2\omega^2) - j2\xi_d T\omega)}.$$

После умножения передаточная функция примет вид

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi_d^2 T^2\omega^2} - j \frac{2k\xi_d T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi_d^2 T^2\omega^2}.$$

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость – свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия. Устойчивая САУ способна возвращаться с определенной точностью в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из состояния равновесия. Неустойчивая САУ не возвращается в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из возмущения, а либо удаляется от него, либо совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Рассмотрим различные состояния САУ, по аналогии шара, находящегося на различных поверхностях. **Устойчивое равновесие** (рис. 3.1, а): при всяком отклонении шара от положения равновесия, например в точке  $A_1$ , он будет стремиться снова возвратиться к положению равновесия в точку  $A_0$  (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области, окружающей положение равновесия, например в точке  $A_2$  (при наличии сил трения). **Неустойчивое состояние равновесия** (рис. 3.1, б): при всяком отклонении шара от состояния равновесия в точке  $A_1$  в которую внешняя сила привела шар и прекратила свое действие, шар удаляется от состояния равновесия. **Безразличное состояние равновесия** (рис. 3.1, в): при всяком отклонении шара от состояния равновесия в точке  $A_1$ , в которую внешняя сила привела шар и прекратила свое действие, шар останется в новом состоянии равновесия. Промежуточный случай (рис. 3.1, г): состояние равновесия устойчиво лишь до тех пор, пока отклонение не вышло за некоторую границу, определяемую точкой В. Выйдя за эту границу, шар уже не вернется в точку  $A_0$ , а будет двигаться вправо от точки В либо все

время удаляясь, либо до нового состояния равновесия в зависимости от формы поверхности, т.е., в конечном счете, в зависимости от уравнений движения шара. *Состояние равновесия «полуустойчивое»* изображено на рис. 3.1, д.

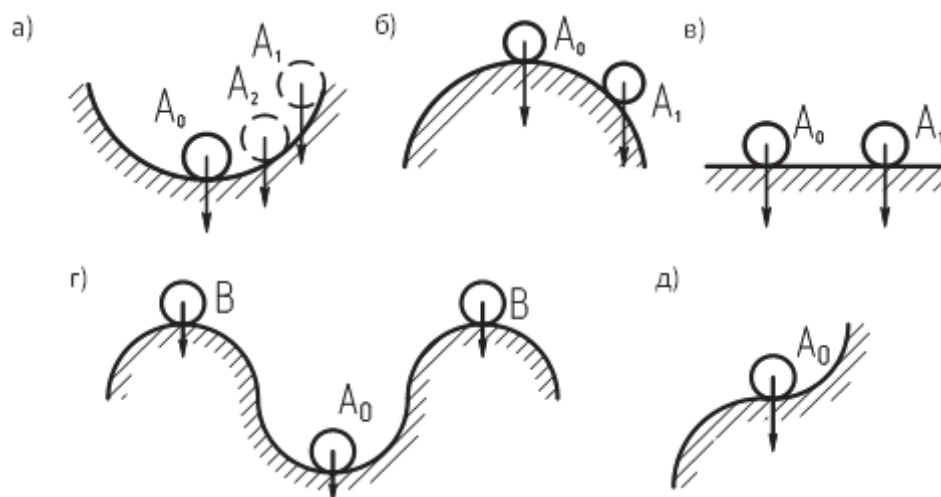


Рис. 3.1. Возможные состояния шара, находящегося на различных поверхностях: а – устойчивое равновесие; б – неустойчивое равновесие; в – безразличное равновесие; г – промежуточный случай; д – полуустойчивое равновесие

Для рассмотрения нелинейных систем вводят понятие устойчивости «в малом», «в большом» и «в целом».

Систему называют устойчивой в «малом», если констатируют лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо образом ее границы.

Систему называют устойчивой «в большом», когда определены границы области устойчивости, т.е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области.

Система называется устойчивой «в целом», когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях (рис. 3.1, а). Рис. 3.1, г может соответствовать либо устойчивости «в большом», либо устойчивости «в малом». Система, устойчивая «в целом», будет устойчива «в большом» и «в малом». Система, устойчивая в большом, «будет устойчива «в малом»».

Устойчивость – простейшее свойство системы, без которого система неработоспособна, может быть выражена числовыми показателями, которые непосредственно связаны со всеми другими показателями качества и точности системы. С инженерной точки зрения устойчивость понимается так: малое изменение исходных данных должно приводить к малому же изменению результатов.

### 3.1. Математический признак устойчивости

Рассмотрим условие устойчивости линейной САУ. Уравнение замкнутой (линеаризованной) системы при наличии внешнего воздействия  $Z(p)$  и управляющего воздействия  $U(p)$  относительно выходной координаты  $Y(p)$  в операторной форме имеет вид:

$$(A_0p^n + A_1p^{n-1} + \dots + A_{n-1}p + A_n)Y(p) = (B_0p^m + B_1p^{m-1} + \dots + B_{m-1}p + B_m)U(p) + (C_0p^k + C_1p^{k-1} + \dots + C_{k-1}p + C_k)Z(p), \quad (3.1)$$

где  $p \equiv \frac{d}{dt}$  – оператор (символ дифференцирования);  $A$ ;  $B$ ;  $C$  – коэффициенты операторных многочленов.

Уравнение (3.1) можно представить в виде:

$$L(p)Y(p) = N(p)U(p) + S(p)Z(p),$$

где  $L(p)$ ;  $S(p)$ ;  $N(p)$  – операторные многочлены.

САУ, как любая динамическая система, характеризуется переходным процессом, возникающим в ней при нарушении ее равновесия каким-либо воздействием (могут быть сигналы управления, настройки, помехи и т.д.).

Переходный процесс  $y'(t)$  зависит как от свойств системы, так и от вида возмущения. В переходном процессе всегда следует различать две составляющие: свободные движения системы, определяемые начальными условиями и свойствами самой системы  $y_c(t)$ ; вынужденные движения, определяемые возмущающим воздействием и свойствами системы  $y_b(t)$ , т.е.  $y'(t) = y_c(t) + y_b(t)$ .

Чтобы САУ могла правильно реагировать на сигнал управления, настройки или изменения нагрузки, в переходном процессе свободная составляющая с течением времени должна стремиться к нулю, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) \rightarrow 0$ , так как характер свободного движения системы определяет её устойчивость или неустойчивость. Возможные виды кривых переходного процесса свободной составляющей  $y_c(t)$  приведены на рис. 3.2.

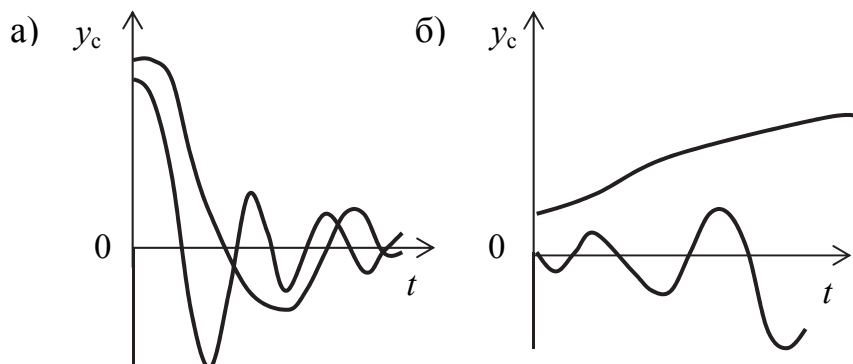


Рис. 3.2. Виды кривых переходных процессов:  
а – устойчивой САУ; б – неустойчивой САУ

При аналитическом исследовании динамических свойств системы автоматического регулирования необходимо найти её дифференциальное уравнение и затем его проинтегрировать, т.е. найти закон изменения во времени интересующей величины.

Рассмотрим дифференциальное уравнение линейной системы автоматического регулирования. В соответствии с определением устойчивости системы она характеризуется свободным движением системы. Так как свободное движение линейной системы описывается однородным дифференциальным уравнением, т.е. уравнением без правой части, то, следовательно, для определения устойчивости системы и надлежит исследовать такое однородное уравнение. Уравнение свободного движения линейной САУ, решаемое относительно исследуемой величины (обычно относительно отклонения регулируемого параметра от заданного значения), можно записать так:

$$A_0 \frac{d^n y_c}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_c}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy_c}{dt} + A_n y_c = 0, \quad (3.2)$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами САУ.

Решение уравнения (3.2) находят как  $y_c(t) = Ce^{\lambda t}$ . Дифференцируя это выражение  $n$  раз и подставляя в (3.2), после сокращения на общий множитель  $Ce^{\lambda t}$  получим:

$$A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0. \quad (3.3)$$

Полученное алгебраическое уравнение (3.3) называют *характеристическим уравнением*. Его корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  будут определять характер переходного процесса в системе. Нетрудно заметить, что по своему виду левая часть уравнения (3.3) совпадает с дифференциальным оператором при выходной величине в уравнении (3.1), поэтому характеристическое уравнение получают обычно, приравнявая к нулю дифференциальный оператор при выходной величине в исходном дифференциальном уравнении (3.1), т.е.

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0. \quad (3.4)$$

Следует заметить, однако, что в характеристическом уравнении (3.4) комплексное число  $p$  не является символом дифференцирования, оно может быть заменено на  $\lambda$ . Из этой формулы делаем основной вывод: чтобы переходный процесс заканчивался, необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней  $p_k$  характеристического уравнения  $n$ -го порядка были отрицательные, в этом случае имеются затухающие по экспоненте решения.

Решение характеристического уравнения степени  $n$  содержит  $n$  корней. Корни характеристического уравнения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами могут быть веществен-

ными, комплексными, попарно-сопряженными, мнимыми попарно-сопряженными, нулевыми. В общем случае  $p_i = u_i \pm jv_i$ .

На рис. 3.3 показаны возможные положения корней  $p$  на комплексной плоскости при

$$\begin{aligned} p_1 = u_1; \quad p_2 = u_2 + jv_2; \quad p_3 = u_3 - jv_3; \quad p_4 = 0; \\ p_5 = -u_5; \quad p_6 = -u_6 + jv_6; \quad p_7 = -u_7 - jv_7. \end{aligned}$$

Корни с отрицательными вещественными частями называют левыми, поскольку они в комплексной плоскости расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями – правыми.

Условие устойчивости линейной системы: для того чтобы линейная система была устойчива, т.е. чтобы переходный процесс заканчивался, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.4) были левыми.

К недостаткам данного метода относится то, что вычисление корней весьма просто лишь для характеристических уравнений первой и второй степени. Существуют общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степени, но эти выражения громоздки и практически мало пригодны. Что же касается уравнений более высоких степеней, то для них вообще невозможно написать общие выражения для корней через коэффициенты.

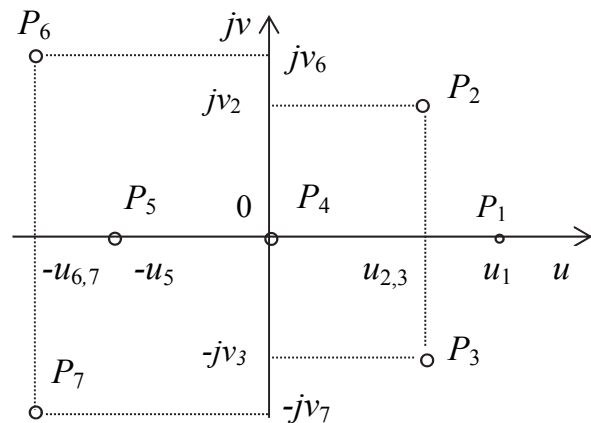


Рис. 3.3. Расположение корней на комплексной плоскости

### 3.2. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения:

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (3.5)$$

Из алгебраических критериев устойчивости наиболее широкое распространение получили критерии устойчивости Рауса и Гурвица.

Прежде чем познакомиться с ними, заметим, что необходимым условием устойчивости системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения:  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ , ...,  $a_n > 0$ .

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным условием устойчивости, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако для систем третьего и высших

порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но недостаточным. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения (если они есть) левые, комплексные же корни могут быть и правыми.

Критерии устойчивости Рауса и Гурвица позволяют по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней сделать вывод об устойчивости системы.

**Критерий устойчивости Гурвица.** В 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составленных из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Из коэффициентов характеристического уравнения строят сначала главный определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 a_7 \dots 0 \\ a_0 a_2 a_4 a_6 \dots 0 \\ 0 a_1 a_3 a_5 \dots 0 \\ 0 a_0 a_2 a_4 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 0 0 0 0 \dots a_n \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

по следующему правилу: по главной диагонали слева направо выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На месте коэффициентов с индексами больше  $n$  ( $n$  – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

Очерчивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получаем определители Гурвица низкого порядка:

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 a_1 a_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \dots \\ a_0 a_2 a_4 \dots \\ 0 a_1 a_3 \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots a_n \end{vmatrix}.$$

*Номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляют данный определитель.*

Критерий устойчивости Гурвица: для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаками первого коэффициента характеристического уравнения  $a_0$ , т.е. при  $a_0 > 0$  были положи-



тельными. Таким образом, при  $a_0 > 0$  для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 \ a_1 a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \dots\dots \\ a_0 a_2 a_4 \dots\dots \\ 0 \ a_1 a_3 \dots\dots \\ \dots\dots \dots\dots \\ \dots\dots \dots a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Раскрывая определители Гурвица для характеристических уравнений первого, второго, третьего и четвертого порядков, можно получить следующее условие устойчивости для уравнения:

первого порядка ( $n = 1$ ), т.е.  $L(p) = a_0 p + a_1$ ,

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0;$$

второго порядка ( $n = 2$ ), т.е.  $L(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ ,

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0;$$

третьего порядка ( $n = 3$ ), т.е.  $L(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ ,

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0;$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \tag{3.7}$$

четвертого порядка ( $n = 4$ ), т.е.  $L(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$ ,

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0;$$

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \tag{3.8}$$

### Вывод:

1) необходимым и достаточным условием устойчивости для систем первого и второго порядков является положительность коэффициентов характеристического уравнения;

2) для уравнений третьего и четвертого порядков, кроме положительных коэффициентов, необходимо соблюдение дополнительных неравенств (3.7), (3.8);

3) при  $n \geq 5$  число подобных дополнительных неравенств возрастает, процесс раскрытия определителей становится довольно трудоемким и громоздким. Поэтому критерий устойчивости Гурвица обычно применяют при  $n \leq 4$ .

В последнем столбце главного определителя Гурвица (3.6) отличен от нуля только один коэффициент  $a_n$ , поэтому

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{3.9}$$

Из (3.9) видно, что при  $a_n > 0$  для проверки устойчивости системы достаточно найти только определители Гурвица от  $\Delta_1$  до  $\Delta_{n-1}$ . Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится на границе устойчивости, когда главный определитель равен нулю:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{3.10}$$

Равенство (3.10) возможно в двух случаях: при  $a_n = 0$  или  $\Delta_{n-1} = 0$ . В первом случае система находится на границе аperiodической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю); во втором случае – на границе колебательной устойчивости (два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси).

Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах принять за неизвестный какой-либо один параметр (например, коэффициент усиления, постоянную времени и т.д.) и определить его предельное критическое значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

### Пример 3.1

Используя критерий Гурвица, определить, устойчива ли САУ, описанная характеристическим уравнением третьего порядка:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

где  $a_0 = 18$ ;  $a_1 = 0,3$ ;  $a_2 = 14$ ;  $a_3 = 1$ .

**Решение:**

Условия устойчивости:  $a_0 > 0$ ;  $a_1 > 0$ ;  $a_2 > 0$ ;  $a_3 > 0$ ;  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Проверим выполнение этих условий:

$$a_0 = 18 > 0; \quad a_1 = 0,3 > 0; \quad a_2 = 14 > 0; \quad a_3 = 1 > 0.$$

Выразим определители Гурвица:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,3 & 1 \\ 18 & 14 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,3 \cdot 14 - 18 \cdot 1 = -13,8 < 0.$$

Вывод: условие  $\Delta_2 > 0$  не выполняется, следовательно, система неустойчива.

**Критерий устойчивости Рауса.** Этот критерий устойчивости был предложен в 1877 г. английским математиком Э. Раусом в виде некоторого правила (алгоритма), которое просто поясняется в табл. 3.1.

В первой строке таблицы записывают в порядке возрастания индексов коэффициенты характеристического уравнения, имеющие четный индекс:  $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$ ; во второй строке – коэффициенты уравнения (3.5) с нечетными индексами:  $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ .

Таблица 3.1

Таблица Рауса

Коэффициент $r_i$	Строка	Столбец			
		1	2	3	4
-	1	$a_0 = c_{11}$	$a_2 = c_{21}$	$a_4 = c_{31}$	...
-	2	$a_1 = c_{12}$	$a_3 = c_{22}$	$a_5 = c_{32}$	...
$r_3 = a_0/a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_3 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_3 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_3 a_7$	...
$r_4 = a_1/c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_4 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_4 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_4 c_{43}$	...
$r_5 = c_{13}/c_{14}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$	...
.....	...	.....	.....	.....	...
$r_i$	$i$	$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$	...
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как:

$$C_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1},$$

где  $k$  – индекс, обозначающий номер столбца,  $i$  – индекс, обозначающий номер строки;  $r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$ .

Заметим, что число строк таблиц Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единица ( $n + 1$ ).

После того как таблица Рауса заполнена, по ней можно сделать суждение об устойчивости системы.

Условие устойчивости Рауса: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т.е. при  $a_0 > 0$  были положительны:

$$a_0 = c_{11} > 0; \quad a_1 = c_{12} > 0; \quad c_{13} > 0; \quad \dots; \quad c_{1,n+1} > 0.$$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Критерий Рауса особенно удобен, когда заданы численные значения коэффициентов характеристического уравнения.

### Пример 3.2

Пусть задано характеристическое уравнение:

$$D(p) = a_0 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6 = 0,$$

где  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 6$ ;  $a_2 = 21$ ;  $a_3 = 44$ ;  $a_4 = 62$ ;  $a_5 = 52$ ;  $a_6 = 100$ .

Составим таблицу коэффициентов Рауса (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Таблица Рауса для примера 3.2

Коэффициент $r_i$	Столбец			
	1	2	3	4
-	$a_0 = 1$	$a_2 = 21$	$a_4 = 62$	$a_6 = 100$
-	$a_1 = 6$	$a_3 = 44$	$a_5 = 52$	$a_7 = 0$
$r_0 = 0,167$	$c_{13} = 13,65$	$c_{23} = 53,3$	$c_{33} = 100$	0
$r_1 = 0,44$	$c_{14} = 20,6$	$c_{24} = 8$	$c_{34} = 0$	0
$r_2 = 0,66$	$c_{15} = 48$	$c_{25} = 100$	0	0
$r_3 = 0,43$	$c_{16} = -35$	$c_{26} = 0$	0	0
$r_4 = -0,137$	$c_{17} = 100$	0	0	0

Вычислим коэффициенты первой строки:

$$r_0 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{6} = 0,167;$$

$$c_{13} = a_2 - r_0 \cdot a_4 = 21 - 0,167 \cdot 44 = 13,65;$$

$$c_{23} = a_4 - r_0 \cdot a_5 = 62 - 0,167 \cdot 52 = 53,3;$$

$$c_{33} = a_6 - r_0 \cdot 0 = 100 - 0,167 \cdot 0 = 100.$$

Вычислим коэффициенты второй строки:

$$r_1 = \frac{a_1}{c_{13}} = \frac{6}{13,65} = 0,44;$$

$$c_{14} = a_3 - r_1 \cdot c_{23} = 44 - 0,44 \cdot 53,3 = 20,6;$$

$$c_{24} = a_5 - r_1 \cdot c_{33} = 52 - 0,44 \cdot 100 = 8;$$

$$c_{34} = a_7 - r_1 \cdot c_{43} = 0 - 0,44 \cdot 0 = 0.$$

Вычислим коэффициенты третьей строки:

$$r_2 = \frac{c_{13}}{c_{14}} = \frac{13,65}{20,6} = 0,66;$$

$$c_{15} = c_{23} - r_2 \cdot c_{24} = 53,3 - 0,66 \cdot 8 = 48;$$

$$c_{25} = c_{33} - r_2 \cdot c_{34} = 100 - 0,66 \cdot 0 = 100.$$

Вычислим коэффициенты четвертой строки:

$$r_3 = \frac{c_{14}}{c_{15}} = \frac{20,6}{48} = 0,43;$$

$$c_{16} = c_{24} - r_3 \cdot c_{25} = 8 - 0,43 \cdot 100 = -35;$$

$$c_{26} = c_{35} - r_3 \cdot c_{36} = 0 - 0,44 \cdot 0 = 0.$$

Вычислим коэффициенты пятой строки:

$$r_4 = \frac{c_{14}}{c_{16}} = \frac{48}{-35} = -1,37;$$

$$c_{17} = c_{25} - r_4 \cdot c_{26} = 100 - (-1,37) \cdot 0 = 100.$$

**Вывод:** имеются две перемены знака коэффициентов первого столбца, следовательно, система неустойчива, а характеристическое уравнение имеет два правых корня.

### 3.3. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Критерий устойчивости Михайлова связывает характер переходного процесса системы с амплитудой и фазой вынужденных колебаний, устанавливающихся в системе при синусоидальном воздействии. Анализ устойчивости системы этим методом сводится к построению по характеристическому многочлену замкнутой системы (знаменатель передаточной функции) комплексной частотной характеристики, по виду которой можно судить об устойчивости системы.

Пусть дано характеристическое уравнение системы:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Обозначим  $p = j\omega$ , запишем:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = u(\omega) + jv(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega \pm \infty$  повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол  $\pi n/2$ , где  $n$  – порядок характеристического уравнения.

Критерию Михайлова можно дать более простое определение. Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты ( $\omega$ ) от 0 до  $\pm \infty$ , начинаясь при  $\omega = 0$  на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно  $n$  квадрантов координатной плоскости, где  $n$  – порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиральную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

На рис. 3.4 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого ( $n = 1$ ) до пятого ( $n = 5$ ) порядка. Для удобства сравнения коэффициенты  $a_n$  во всех случаях приняты одинаковыми.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора  $D(j\omega)$  оказывается меньше, чем  $\pi n/2$ .

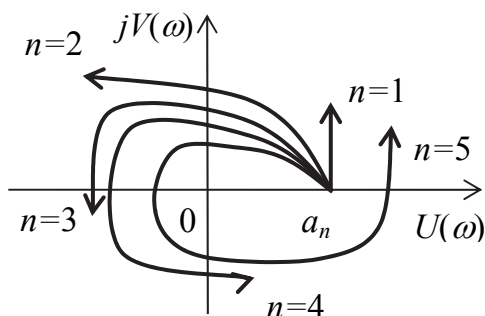


Рис. 3.4. Кривые Михайлова

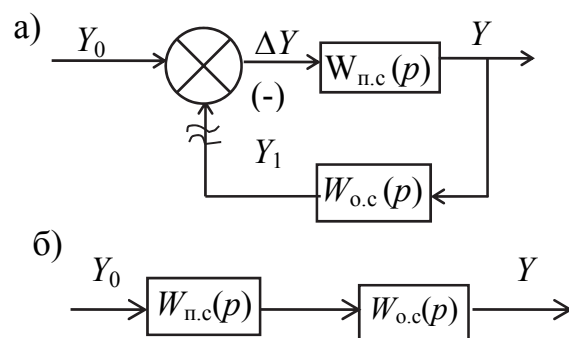


Рис. 3.5. Структурная схема:

а – обратная связь; б – прямая связь

**Критерий устойчивости Найквиста.** Этот частотный критерий устойчивости, разработанный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой САУ (рис. 3.5, а) по

виду амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы (рис. 3.5, б).

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{\text{замк.с}}(p) = W_{\text{п.с}}(p)/(1 + W_{\text{п.с}}(p) \cdot W_{\text{о.с}}(p)) = Y/Y_0.$$

Разомкнутой системой являются все последовательно соединенные звенья, входящие в замкнутый контур, от входа системы до точки замыкания обратной связи:

$$W_{\text{разомк.с}}(p) = W_{\text{п.с}}(p) W_{\text{о.с}}(p).$$

Если разомкнутая система устойчива, то имеем следующий критерий: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф устойчивой разомкнутой системы «не охватывал» точку  $(-1; j0)$  (рис. 3.6, а).

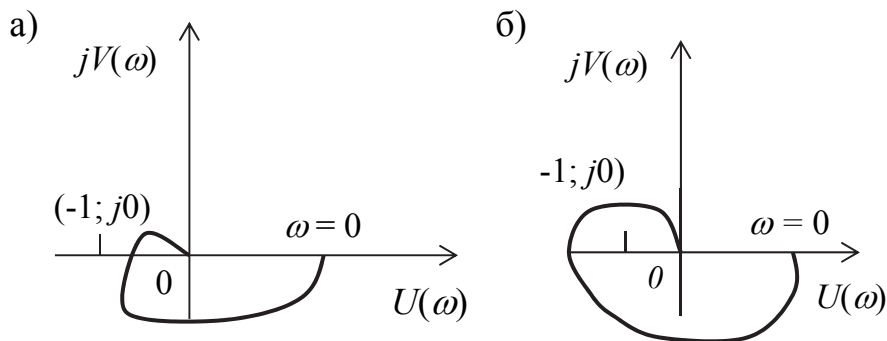


Рис. 3.6. Амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых систем: а – устойчивой; б – неустойчивой

Уточним понятие «охват точки»  $(-1, j0)$  годографом Найквиста. Так как понятие охвата является нечетко сформулированным, вводим абсолютно точное правило переходов: положительным считается переход годографа левее  $(-1, j0)$  снизу вверх, отрицательным считается переход годографа левее  $(-1, j0)$  сверху вниз.

Охват означает, что положительных переходов больше, чем отрицательных. Если годограф начинается на отрицательной полуоси при  $\omega = 0$  или заканчивается на ней при  $\omega = \infty$ , то в этих случаях считают, что он совершает полперехода.

**Критерий Найквиста** (полная формулировка). Эта формулировка применима и в случае неустойчивой разомкнутой системы: Пусть разомкнутая система имеет  $m$  неустойчивых корней, тогда для устойчивой замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста разомкнутой системы охватил точку  $(-1; j0)$   $m/2$  раз.

Одним из достоинств критерия Найквиста является то, что он может быть применен и в тех практически важных случаях, когда не известны уравнения некоторых звеньев системы либо даже неизвестно уравнение

всей разомкнутой системы в целом, но амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы может быть получена экспериментально. Кроме того, критерий Найквиста позволяет, как это будет показано далее, довольно просто исследовать устойчивость систем с запаздыванием.

Поскольку параметры системы определяют обычно приближенно, и в процессе работы они могут изменять свою величину, то большое значение имеет оценка удаления амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы  $W(j\omega)$  от точки  $(-1; j0)$ . Это удаление определяет запас устойчивости, который характеризуется двумя величинами: запасом устойчивости по фазе и запасом устойчивости по амплитуде.

**Запас устойчивости по фазе** определяют как величину угла  $\Delta\varphi = \pi - |\varphi_c|$  для частоты  $\omega_c$ , при которой  $|W(\omega_c)| = 1$ ; **запас устойчивости по амплитуде** – как величину отрезка оси абсцисс, заключенного между критической точкой  $(-1; j0)$  и амплитудно-фазовой характеристикой (рис. 3.7).

С ростом коэффициента усиления разомкнутой системы модуль амплитудно-фазовой характеристики также растет и при некотором значении коэффициента усиления  $K = K_{кр}$ , называемого критическим коэффициентом усиления, амплитудно-фазовая характеристика пройдет через точку  $(-1; j0)$ , т.е. система будет на границе устойчивости. При  $K > K_{кр}$  система будет неустойчива.

Таким образом, запасы устойчивости системы есть данные на проектирование САУ. Нетрудно видеть, что выразить запасы устойчивости можно также и на языке ЛАЧХ и ФЧХ.

### 3.4. Устойчивость по логарифмическим частотным характеристикам

Устойчивость по логарифмическим частотным характеристикам определяют с использованием критерия устойчивости Найквиста. Критической точке, где модуль амплитудно-фазовой характеристики равен единице, соответствует точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс на частоте среза  $\omega_c$ , а точке, в которой фазовый сдвиг равен  $180^\circ$ , соответствует точка пересечения ЛФЧХ с линией  $-\pi$ .

Замкнутая система устойчива, если на частоте  $\omega$ , для которой  $\varphi = -\pi$ , ордината ЛАЧХ разомкнутой системы отрицательна, т.е.  $L(\omega) < 0$  (рис. 3.8, а). Если разомкнутая система устойчива, а ЛФЧХ пересекает

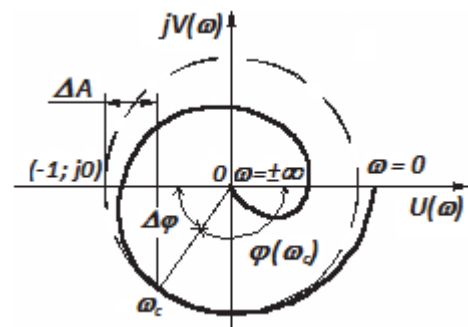


Рис. 3.7. АФЧХ для определения запаса устойчивости



линию  $-\pi$  в нескольких точках, то замкнутая система будет устойчивой, когда  $L(\omega) < 0$  при  $\varphi = -\pi$  для конечной правой из точек пересечения (рис. 3.8, б).

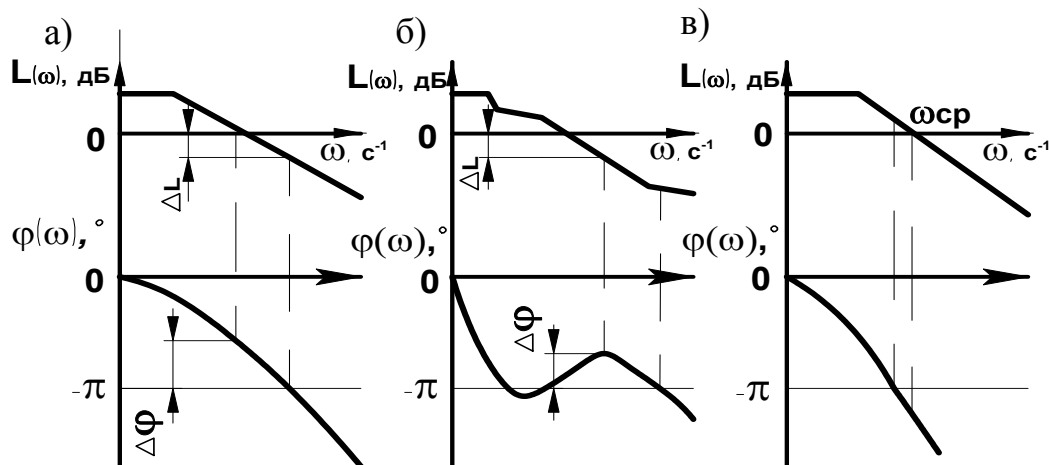


Рис. 3.8. Логарифмические частотные характеристики, используемые для определения устойчивости систем:  
а, б – системы устойчивы; в – система неустойчива

Чтобы оценить, насколько система автоматического регулирования далека от устойчивого состояния, используют понятия запаса устойчивости по амплитуде и фазе. Запас устойчивости по амплитуде ( $\Delta L$ ) есть число децибел, на которое нужно увеличить коэффициент усиления на частоте, соответствующей фазовому сдвигу  $\varphi = -\pi$ , чтобы система потеряла устойчивость. На ЛАЧХ  $\Delta L$  представляет собой отрезок, заключенный между осью абсцисс и ординатой ЛАЧХ при частоте, соответствующей фазовому сдвигу  $-\pi$ .

Запас устойчивости по фазе есть угол  $\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$ . На ЛФЧХ – это угол превышения фазовой характеристики над линией  $\varphi = -\pi$  при частоте среза ( $\omega_c$ ).

Для удовлетворительного качества регулирования должны выполняться следующие условия:  $\Delta L \geq 10 \dots 15$  дБ;  $\Delta\varphi \geq 30 \dots 60^\circ$ .

Обычно для определения устойчивости системы используют приближенную ЛАЧХ, представляющую собой ломаную линию, отдельные участки которой имеют определенный наклон, а точки изломов определяются сопрягающими частотами  $\omega_c$ . Значения этих частот находят из постоянных времени отдельных звеньев разомкнутой системы.

При построении ЛАЧХ следует воспользоваться следующими указаниями:

1) Определить значения сопрягаемых частот  $\omega_{ci}$ , в которых ЛАЧХ имеет изломы. По оси абсцисс в логарифмическом масштабе откладывают

значения сопрягающих частот, полученных из выражения  $\omega_c = 1/T_i$ , где  $T_i$  – постоянная времени соответствующего звена.

2) Построить низкочастотную прямую ЛАЧХ для  $\omega < \omega_{ci}$  с наклоном  $-20\mu$ , где  $\mu$  – число интегрирующих звеньев в главной цепи системы. Эта прямая при  $\omega = 1$  должна иметь ординату, равную  $20\lg k$ , где  $k$  – передаточный коэффициент системы.

3) Для каждой из сопрягающих частот  $\omega_{ci}$  изменить наклон ЛАЧХ по отношению к предшествующему участку, причем наклон характеристики зависит от вида звена для данной сопрягаемой частоты. Для дифференцирующего звена наклон изменяется на  $+20$  дБ/дек, для апериодического и интегрирующего на  $-20$  дБ/дек и для колебательного на  $-40$  дБ/дек.

Для построения ЛФЧХ следует помнить, что каждое звено дает сдвиг по фазе выходных сигналов по отношению к входным: апериодическое ( $-\arctg \omega t$ ); идеальное дифференцирующее  $\pi/2$ ; реальное дифференцирующее ( $\pi/2 - \arctg \omega t$ ); интегрирующее ( $-\pi/2$ ); колебательное [ $-\arctg \omega/(1 - T_2^2 \omega^2)$ ].

### Пример 3.3

По логарифмическим частотным характеристикам требуется определить устойчивость и запасы устойчивости по амплитуде и фазе для системы автоматического регулирования частотой вращения двигателя постоянного тока. Структурные схемы системы приведены на рис. 3.9.

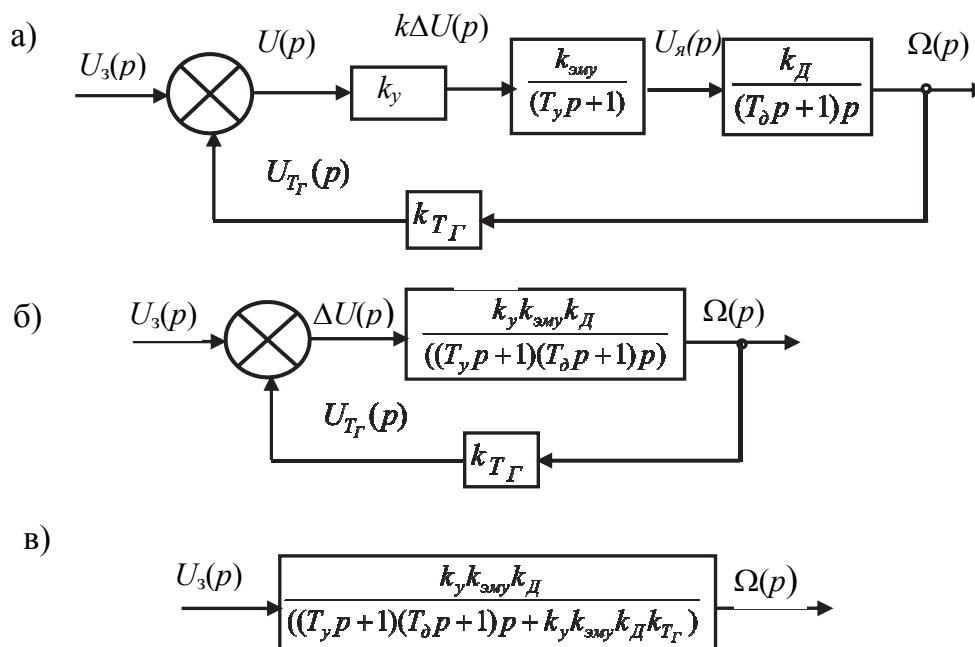


Рис. 3.9. Структурные схемы системы автоматического регулирования частотой вращения двигателя постоянного тока:  
а – исходная; б, в – преобразованные

На рис. 3.9  $k_y$  – коэффициент усиления усилителя;  $k_{эм\mu}$  – коэффициент усиления электромагнитного усилителя;  $k_D$  – коэффициент пропорциональности частоты вращения двигателя величине напряжения на якоре;  $T_y$  – постоянная времени об-

мотки управления ЭМУ;  $T_d$  – электромеханическая постоянная времени двигателя с учетом инерции нагрузки;  $K_{TГ}$  – коэффициент пропорциональности между напряжением на якоре и частотой вращения тахогенератора;  $U_3(p)$  – задающее напряжение;  $U_{TГ}(p)$  – напряжение тахогенератора;  $\Omega(p)$  – частота вращения двигателя;  $U_{я}(p)$  – напряжение в цепи якоря.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = K / (T_y p + 1) (T_d p + 1) p,$$

где  $K = k_y k_{эм} k_d = 100^\circ / (\text{В} \cdot \text{с})$ ;  $T_y = 0,01 \text{ с}$ ;  $T_d = 0,1 \text{ с}$ .

**Решение.** Определим значения сопрягающих частот:

$$\omega_{соп1} = 1/T_d; \omega_{соп2} = 1/T_y; \omega_{соп1} = 1 \text{ с}^{-1}; \omega_{соп2} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

ЛАЧХ представляет собой ломаную линию, состоящую из трех прямых участков с наклонами -20, -40, -60 дБ/дек. Для построения первой прямой определим значение  $L(\omega)$  при частоте  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ :

$$L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40 \text{ дБ}.$$

Следовательно, при  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$   $\Delta L(\omega) = 40 \text{ дБ}$  и ЛАЧХ имеет наклон -20 дБ/дек. В точке  $\omega_{соп1} = 10 \text{ с}^{-1}$  крутизна ЛАЧХ изменяется до -40 дБ/дек. Последняя прямая с наклоном -60 дБ/дек начинается от точки с частотой  $\omega_{соп2} = 100 \text{ с}^{-1}$ .

Находим выражение для построения ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } \omega T_y - \text{arctg } \omega T_d - \pi/2.$$

Задаваясь значениями частоты  $\omega$  от 1 до  $100 \text{ с}^{-1}$ , найдем соответствующие значения  $\varphi$ :

$\omega, \text{с}^{-1}$ .....	1	10	20	32	100
$\varphi(\omega), ^\circ$ .....	-96°40'	-140°40'	-165°50'	-180°	-219°18'

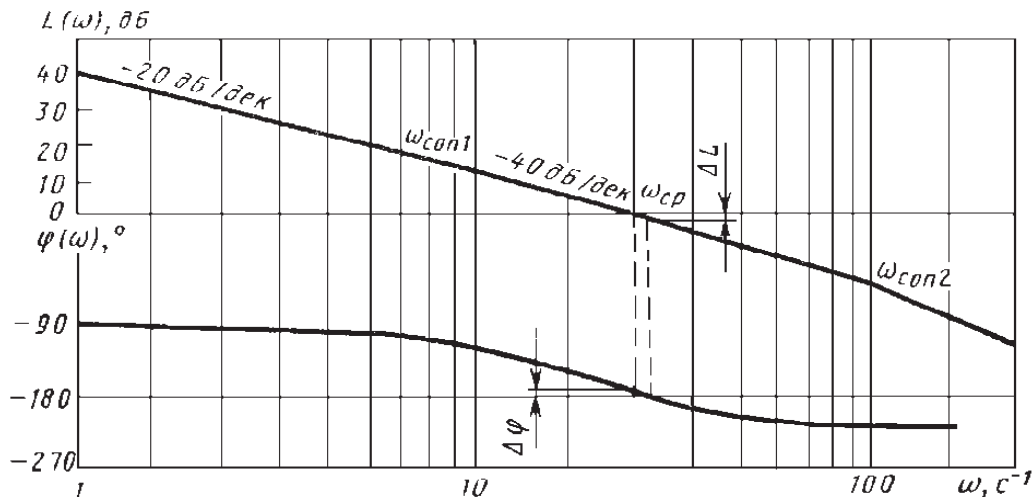


Рис. 3.10. Логарифмические частотные характеристики системы (к примеру 3.3)

По результатам вычислений построим логарифмические частотные характеристики рассматриваемой системы (рис. 3.10). Система устойчива. Запас устойчивости по амплитуде  $\Delta L(\omega) = 1 \text{ дБ}$ , по фазе  $\Delta \varphi = 1,5^\circ$ .

## 4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 4.1. Общие положения

При исследовании систем автоматического регулирования приходится решать задачу обеспечения требуемых показателей качества переходного процесса: быстродействия, колебательности, перерегулирования, характеризующих точность и плавность протекания процесса. Будем, как и в предыдущих разделах, предполагать, что система автоматического регулирования описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При изменении воздействия  $u(t)$  на входе системы (рис. 4.1) выходную величину  $y(t)$  можно записать:

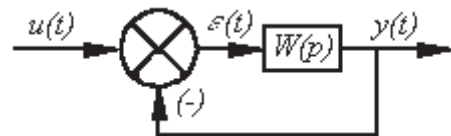


Рис. 4.1. Линейная система

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{в}}(t), \quad (4.1)$$

где  $y(t)$  – решение дифференциального уравнения, описывающего систему;  $y_{\text{св}}(t)$  – общее решение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению;  $y_{\text{в}}(t)$  – вынужденная составляющая переходного процесса, обусловленная законом изменения  $u(t)$ .

Если уравнение (4.1) не имеет кратных корней, то

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t},$$

где  $C_i$  – постоянная интегрирования, величину которой определяют параметры системы и начальные условия;  $p_i$  – корни характеристического уравнения замкнутой системы  $D(p) = 0$ .

Из уравнения (4.1) видно, что качество переходного процесса можно оценить по его составляющим  $y_{\text{св}}(t)$  и  $y_{\text{в}}(t)$ . В этом смысле различают две группы показателей: первая группа – показатели качества переходного процесса  $y_{\text{св}}(t)$ ; вторая – показатели, характеризующие вынужденную (установившуюся) составляющую  $y_{\text{в}}(t)$ , по которой определяют точность системы.

Показатели качества, определяемые непосредственно по кривой переходного процесса, называют прямыми оценками качества. Кривая переходного процесса может быть получена теоретически или экспериментально, но чаще всего получение кривых переходного процесса бывает связано с большими трудностями, так как его расчет в системах высокого порядка сложен и эксперимент не всегда осуществим. Поэтому используют косвенные оценки качества, полученные иным путем, не требующим нахождения кривой переходного процесса.

Существующие косвенные методы оценки качества регулирования в линейных непрерывных системах можно разделить на три группы: корневые, интегральные и частотные.

#### 4.2. Оценка качества переходного процесса при воздействии ступенчатой функции

Переходный процесс в системе является ее реакцией на внешнее воздействие, которое в общем случае может быть сложной функцией времени. Обычно рассматривают поведение системы при следующих типовых воздействиях: единичной ступенчатой  $1(t)$ , импульсной  $\delta(t)$  и гармонической функций. Чаще всего прямые оценки качества получают по кривой переходной характеристики, т.е. при воздействии единичной ступенчатой функции:  $u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t \leq 0 \end{cases}$  и нулевых начальных условиях.

Эта характеристика может быть построена для выходной величины  $y(t)$  (рис. 4.2). К прямым оценкам качества относят:

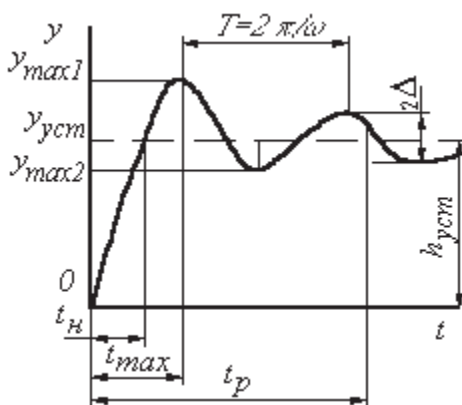


Рис. 4.2. Переходная характеристика

• время регулирования ( $t_p$ ) – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью:

$$|y - y_{уст}| \leq \Delta,$$

где  $\Delta$  – постоянная величина, значение которой нужно оговаривать (задается величина  $\Delta$  в процентах от установившегося значения выходной величины  $y_{уст}$ );

• перерегулирование ( $\sigma$ ) – максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{y_{\max 1} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100,$$

где  $y_{\max 1}$  – значение первого максимума. Допустимое значение перерегулирования в каждом конкретном случае будет подсказано опытом эксплуатации системы, обычно  $\sigma = 10...30\%$ , но в некоторых случаях допускается и до  $70\%$ . Иногда перерегулирование недопустимо совсем;

• частоту колебаний  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  – период колебаний для колебательных переходных характеристик;

- число колебаний ( $n$ ), которое имеет переходная характеристика  $y(t)$  или за время регулирования ( $t_p$ ). При проектировании систем чаще всего допускают  $n = 1...2$ , а иногда и до  $3...4$ , но в некоторых случаях колебания в системе не допустимы;
- время достижения первого максимума ( $t_{\max}$ );
- время нарастания переходного процесса ( $t_n$ ) – абсцисса первой точки пересечения кривой переходной характеристики  $y(t)$  с уровнем установившегося значения ( $y_{уст}$ );
- декремент затухания ( $\chi$ ), равный отношению модулей двух смежных перегулирований:

$$\chi = \frac{|y_{\max 1} - y_{уст}|}{|y_{\max 2} - y_{уст}|}.$$

Перечисленные показатели качества могут быть дополнены другими, но это обусловлено спецификой конкретной системы.

Переходные процессы, возникающие в системах при скачкообразных воздействиях, принято делить на три группы: монотонные, апериодические, колебательные.

У монотонных процессов первая производная выходной величины  $\dot{y}(t)$  не меняет знак (рис. 4.3, кривая  $a$ ), у апериодических знак производной  $\dot{y}(t)$  меняется не более одного раза (рис. 4.3, кривая  $b$ ), а у колебательных первая производная  $\dot{y}(t)$  меняет свой знак периодически, теоретически бесконечное число раз (рис. 4.3, кривая  $v$ ).

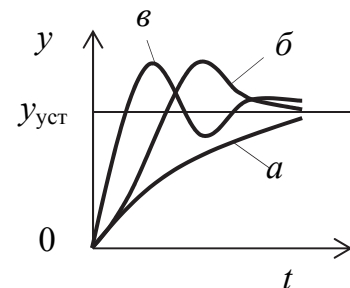


Рис. 4.3. Графики переходных процессов

Нужно отметить, что в настоящее время при бурном развитии вычислительной техники трудности, связанные с расчетом переходных процессов и выбором возможных вариаций параметров системы, существенно уменьшаются, поэтому роль прямых оценок качества при проектировании систем автоматического регулирования возрастает.

### 4.3. Оценка качества регулирования при гармонических воздействиях

При гармонических воздействиях качество системы принято оценивать по амплитудно-фазовой, амплитудно-частотной, фазочастотной и логарифмическим частотным характеристикам.

Для оценки качества переходного процесса системы можно использовать следующие величины: показатель колебательности ( $M$ ); резонансную (собственную) частоту ( $\omega_p$ ); полосу пропускания системы ( $\omega_0$ ); частоту среза ( $\omega_{cp}$ ); запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Показатель колебательности ( $M$ ) – это соотношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики  $A_{3\max}(\omega)$  замкнутой системы к её значению при  $\omega = 0$  (рис. 4.4):

$$M = A_{3\max}(\omega) / A_3(0),$$

при  $A_3(0) = 1$   $M = A_{3\max}(\omega)$ .

Показатель колебательности характеризует склонность системы к колебаниям. Чем выше  $M$ , тем менее качественна система при прочих равных условиях. Далее мы рассмотрим связь между показателем колебательности и перерегулированием ( $\sigma$ ).

Частоту ( $\omega_p$ ), при которой амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы имеет максимум, называют резонансной частотой системы (рис. 4.4), т.е. на этой частоте гармонические колебания проходят через систему с наибольшим усилением.

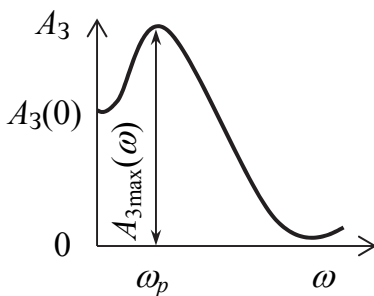


Рис. 4.4. Амплитудно-частотная характеристика

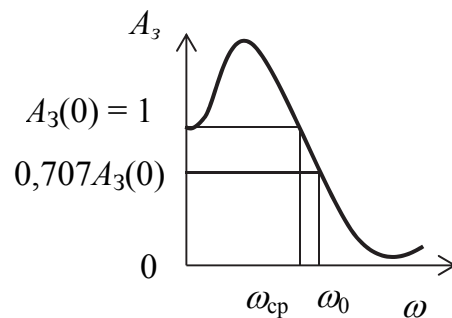


Рис. 4.5. АЧХ с полосой пропускания

Полоса пропускания системы (рис. 4.5) – это интервал частот от  $\omega = 0$  до  $\omega_0$ , при которой выполняется условие:

$$A_3(\omega_0) \leq 0,707 A_3(0),$$

или при  $A_3(0) = 1$  величина  $A_3(\omega_0) \leq 0,707$ . Полоса пропускания не должна быть слишком широкой, иначе система будет воспроизводить высокочастотные помехи.

Частота среза ( $\omega_{cp}$ ) – частота, при которой амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное 1, т.е.  $A_3(\omega_0) = 1$ . Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса. Чем меньше частота среза, тем хуже быстродействие системы:

$$t_p \cong (1 \dots 2) 2\pi / \omega_{cp}.$$

Если переходный процесс имеет одно-два колебания, то время достижения переходной характеристикой первого максимума:

$$t_{\max} \cong \pi / \omega_{cp}.$$



Склонность системы к колебаниям характеризуется величинами ее запасов устойчивости по модулю и по фазе. Запасы устойчивости рассчитывают по амплитудно-фазовым и логарифмическим частотным характеристикам (см. раздел 3).

В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде колеблется в пределах от 6 до 20 дБ, а запас по фазе – от 30 до 60°.

Так как рассмотренные показатели косвенно определяют быстродействие, перерегулирование и т.п., то они могут быть использованы и для расчета систем, находящихся под воздействием неперiodических возмущений.

#### 4.4. Оценка качества регулирования в установившемся режиме (коэффициенты ошибок)

Рассмотрим показатели качества, характеризующие вынужденную составляющую ошибки  $\varepsilon_B(t)$  системы. Если на входе системы (рис. 4.1) действует сигнал  $u(t)$ , то установившаяся ошибка регулирования системы

$$\varepsilon_B(t) = y_B(t) - u(t),$$

где  $y_B(t)$  – вынужденная составляющая регулируемой величины.

Если  $u(t)$  дифференцируема во всем интервале  $0 \leq t \leq \infty$ , то ошибка системы  $\varepsilon_B(t)$  может быть представлена в виде ряда:

$$\varepsilon_B(t) = C_0 u(t) + C_1 du(t)/dt + \frac{1}{2!} C_2 d^2 u(t)/dt^2 + \dots + \frac{1}{m!} C_m d^m u(t)/dt^m,$$

где коэффициенты  $C_0, C_1, C_2, \dots$  принято называть коэффициентами ошибок.

#### 4.5. Косвенный метод определения показателей качества переходного процесса по распределению корней характеристического уравнения

Этот метод основан на определении границ области расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости и установлении связи переходного процесса с показателями указанных границ. Он позволяет наглядно и достаточно просто оценить быстродействие системы и ее колебательность.

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + A_n = 0.$$

Если  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни этого уравнения, а переменная  $y$  характеризует процесс управления, то

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}.$$

Требуется написать условия, при которых величина  $y$  за время регулирования  $t_p$  стала бы равной  $1/m$  установившегося значения. Таким образом, косвенно задается время стабилизации переходного процесса.

В этом случае все корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  характеристического уравнения должны удовлетворять не только условиям устойчивости, но и иметь отрицательную вещественную часть по абсолютному значению не меньше  $\alpha$ . Величину  $\alpha$ , определяемую на комплексной плоскости корней, как расстояние от мнимой оси до ближайшего к ней корня, находят из соотношения:  $1/m = e^{-\alpha t_p}$ , откуда, логарифмируя это выражение, получим:

$$\alpha = \ln(m/t_p).$$

Следовательно, чтобы отклонение управляемого параметра уменьшилось за время  $t_p$  в  $m$  раз, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой полуплоскости на расстоянии не меньше чем  $\ln m/t_p$  от мнимой оси.

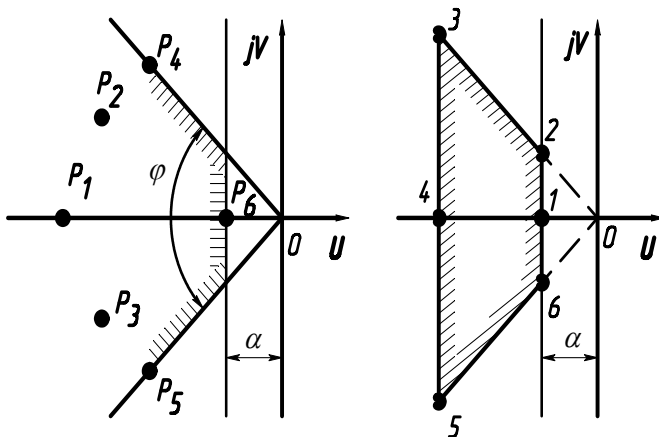


Рис. 4.6. Области расположения корней с заданными значениями  $\alpha$  и  $\beta$

Распределение корней на комплексной плоскости можно характеризовать не одной, а несколькими величинами: расстоянием ( $\alpha$ ) ближайшего корня от мнимой оси и углом ( $\varphi$ ), в который вписываются наиболее отдаленные от мнимой оси комплексные корни (рис. 4.6).

Величину  $\cos\varphi/2 = \beta$  называют колебательностью системы (коэффициентом затухания колебаний). Угол  $\varphi$  для сокращения колебательности следует уменьшить. Время регулирования зависит также от  $\alpha$ : чем больше  $\alpha$ , тем меньше время регулирования. Величина  $\beta$  – колебательность системы; чем меньше  $\beta$ , тем более система склонна к колебаниям. Следовательно, для одновременного обеспечения заданного времени затухания процесса регулирования и заданной колебательности нужно, чтобы все корни характеристического уравнения лежали внутри заштрихованной области (рис. 4.6).

#### 4.6. Интегральные оценки качества переходных процессов

Интегральные оценки качества переходных процессов позволяют одним числом оценивать и величину отклонения регулируемой величины от установившегося процесса, и время затухания переходного процесса.

Метод основан на вычислении определенных интегралов вида:

$$I_0 = \int_0^{\infty} y(t) dt; \quad I_1 = \int_0^{\infty} (\Delta y(t))^2 dt,$$

где  $\Delta y$  – отклонение регулируемого параметра от заданного значения (рис. 4.7).

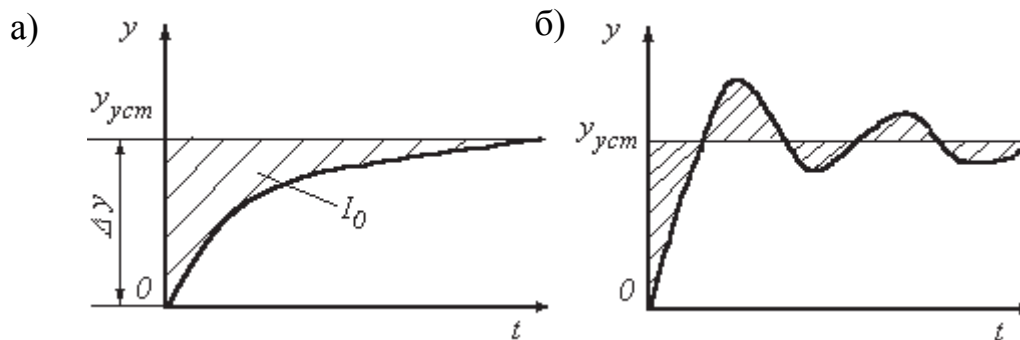


Рис. 4.7. Кривые переходного процесса системы автоматического регулирования: а – без перерегулирования; б – с перерегулированием

Интегралы  $I_0$ ,  $I_1$  представляют собой площадь, заключенную между кривой переходного процесса и установившимся значением регулируемой величины. Чем меньше значения  $I_0$ ,  $I_1$ , тем ближе переходный процесс к идеальному.

#### 4.7. Частотная оценка качества регулирования

Метод частотной оценки основан на оценке качества по вещественным частотным характеристикам. Время регулирования ( $t_p$ ) и величину перерегулирования ( $\sigma$ ) можно оценить по виду вещественной частотной характеристики замкнутой цепи (рис. 4.8). Время регулирования переходного процесса системы заключено в пределах:

$$\pi/\omega_{с.ч} < t_p < 4\pi/\omega_{с.ч},$$

где  $\omega_{с.ч}$  – существенная частота.

Наибольшее значение перерегулирования ( $\sigma_{\max}$ ) переходного процесса по максимуму вещественной частотной характеристики  $U(\omega)$  (рис. 4.8):

$$\sigma_{\max} = [1,18U_{\max} - U(0)]/U(0),$$

где  $U_{\max}$  – максимальное значение вещественной функции  $U(\omega)$ ;  $U(0)$  – начальное значение вещественной функции  $U(\omega = 0)$ .

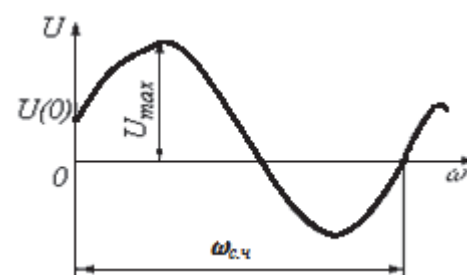


Рис. 4.8. Вещественная частотная характеристика замкнутой системы

#### 4.8. Синтез систем

При исследовании САУ приходится иметь дело с двумя задачами: 1) при заданной САУ требуется найти переходные процессы, возникающие в ней (задача анализа); 2) при заданном объекте управления требуется построить такое управляющее устройство, при котором система удовлетворяет заданным требованиям к ее качеству (задача синтеза).

Обе задачи имеют много общего и в значительной мере связаны друг с другом. Однако задача синтеза значительно сложнее, так как она не является однозначной. Одни и те же требования, предъявляемые к САУ, можно удовлетворить различными путями.

Возможны две постановки задачи синтеза:

1) структура управляющего устройства и, следовательно, структура системы заданы; необходимо, исходя из заданных требований к системе, определить параметры управляющего устройства или параметры и корректирующие устройства;

2) структура системы не задана, и надо синтезировать управляющее устройство (его структуру и параметры), обеспечивающее заданные требования к качеству системы.

Для первой постановки задачи корректирующее устройство должно быть технически осуществимо. Чаще задача синтеза сужается: при заданной основной схеме управления корректирующее устройство вследствие его простой технической осуществимости должно состоять только из каких-либо стандартных дополнительных корректирующих звеньев, например, в электрических системах – из пассивных черырѐхполюсников. Поэтому в таких случаях обычно ограничиваются лишь определением вида и параметров корректирующего устройства, которые в сочетании с основной частью системы обеспечили бы требуемые динамические характеристики в целом. Иначе говоря, чаще рассматривают не синтез системы в целом, а лишь синтез корректирующего устройства, входящего в систему.

#### 4.9. Коррекция системы автоматического управления

Целью коррекции динамических свойств САУ является удовлетворение требований, предъявляемых к ней по устойчивости (запасам устойчивости) и показателям качества переходных процессов (быстродействию, перерегулированию, колебательности и т.п.). Когда эти требования не могут быть выполнены простым изменением параметров системы (коэффициентов усиления, постоянных времени отдельных звеньев), тогда эту задачу решают введением в систему дополнительных специальных устройств, называемых корректирующими.

Существуют три основных вида коррекции: последовательная, с помощью дополнительных обратных связей и смешанная.

Вопрос выбора схемы включения корректирующих устройств решают исходя из преимуществ и недостатков, свойственных каждому из видов коррекции. При выборе схемы включения корректирующих устройств следует иметь в виду, что последовательное включение в основную цепь системы увеличивает скорость воздействия на систему, но одновременно при этом усиливается вредное воздействие на систему высокочастотных возмущений. Кроме того, повышение скорости воздействия требует повышения мощности системы и ее прочности.

Введение интегрирующего звена в систему делает её астатической и, следовательно, устраняет статическую ошибку. Вместе с тем для стабилизации астатических систем приходится значительно усложнять их схему.

При включении корректирующих устройств в цепь обратной связи система становится менее чувствительной к внешним воздействиям и изменениям параметров основной цепи регулирования.

## 5. ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

### 5.1. Технические средства сбора и регистрации информации

Контроль того или иного параметра технологического процесса с целью использования полученной информации для управления последним выполняется первичными преобразователями (датчиками). Эти устройства осуществляют преобразование одной физической величины (малых перемещений, момента, силы, температуры и др.), неудобной для последующего использования в качестве воздействия на объект управления, в другую физическую величину, пригодную для последующих преобразований с целью управления объектом. Такими величинами чаще всего являются напряжение, сила тока, коэффициент самоиндукции, активное сопротивление, емкость.

Датчики, таким образом, могут быть подразделены по двум признакам: по назначению (или роду контролируемой величины) и по принципу действия (по виду величины, получаемой на выходе датчика).

К датчикам предъявляют следующие основные требования.

1) Датчики должны обладать возможно большей крутизной ( $S$ ) преобразования (дифференциальная чувствительность). Эта величина определяется как частная производная выходной величины по входной:  $S = dy/dx$ . Это выражение может быть приблизительно заменено отношением конечного приращения выходной величины к конечному приращению входной при условии, что последняя достаточно мала:  $S = \Delta y/\Delta x$ .

Рассматриваем частную производную, потому что показание (или выходная величина) является функцией не только контролируемого параметра (или входной величины), но и целого ряда других побочных факторов. Например, при контроле линейных величин изменение температуры или появление вибраций влияют на показания датчика. Частная производная при всех значениях  $u$  не должна менять своего знака, иначе возможна многозначность  $x$ .

2) Исполнение датчика должно исключать влияние побочных факторов.

3) Датчик не должен, по возможности, влиять на состояние контролируемого объекта. Это значит, что энергетические уровни, действующие на входе датчика, должны быть возможно низкими. Поскольку датчик является преобразователем и, как правило, не содержит в своем составе каких-либо активных элементов, то выходная величина характеризуется еще более низким энергетическим уровнем. Поэтому в САУ даже в измерительном тракте, как правило, предусматривают усилительные устройства.

4) Датчики должны быть простыми по конструкции, обладать высокой надежностью в эксплуатации, отличаться невысокой стоимостью.

**Контроль мощности.** Контроль потребляемой мощности проще всего осуществить путем измерения мощности ( $N_0$ ), подводимой к двигателю. При этом необходимо из общей мощности вычитать мощность холостого хода ( $N_{х.х}$ ), под которой понимают ту часть мощности, которая необходима для функционирования станка при отсутствии резания. Эту задачу решают следующим образом: измеряют мощность в режиме холостого хода ( $N_{х.х}$ ), ее уровень фиксируют и затем этот уровень вычитают из общей подводимой мощности уже при резании; остающуюся часть можно считать мощностью резания. Однако при этом возможны ошибки, так как  $N_{х.х}$ , как правило, меняется из-за прогрева станка, изменения условий смазывания и ряда других причин.

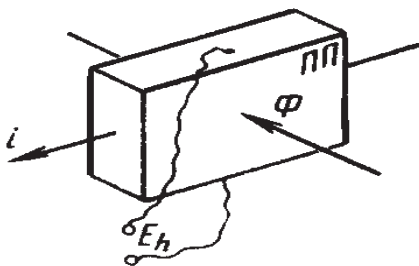


Рис. 5.1. Эффект Холла

Для контроля мощности, потребляемой технологической системой, можно использовать два датчика ЭДС Холла, включенных по схеме двух ваттметров (схема Арона). Для получения информации о потребляемой мощности показания двух ваттметров следует просуммировать. Эффект Холла заключается в следующем (рис. 5.1). Если по полупроводнику  $ПП$  течет ток силой  $i$  и ортогонально направлению тока действует магнитный поток  $\Phi$ , то на свободных гранях появляется разность потенциалов, которую принято называть ЭДС Холла:

$$E_h = ki\Phi.$$



Если считать, что амплитудные значения силы тока  $i$  и потока  $\Phi$ , даже при условии, что  $i$  и  $\Phi$  описываются гармоническими процессами и сдвиг по фазе между ними равен  $\varphi$ , то появляющаяся постоянная составляющая ЭДС Холла:

$$E'_h = ki\Phi.$$

Очевидно, что достаточно просто реализовать такие условия, при которых  $i = k_1 i_{лн}$ , а  $\Phi = k_2 U_{лн}$ , следовательно, при сложении постоянных составляющих двух датчиков ЭДС Холла получим:

$$E = E_1 + E_2 = ci_{лн} U_{лн} \cos\varphi,$$

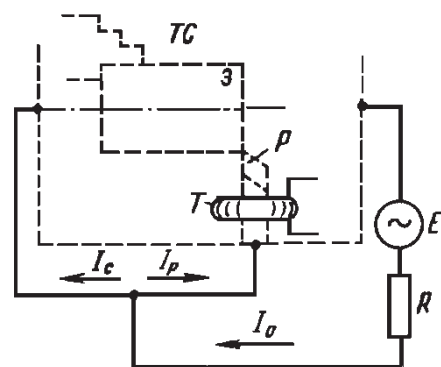
где  $c$  – коэффициент пропорциональности;  $i_{лн}$  и  $U_{лн}$  – амплитудные значения линейных силы тока и напряжения. Далее, компенсируя мощность  $N_{х.х.}$ , можно контролировать мощность резания.

Рассмотрим один из способов определения момента, когда возникает контакт инструмента с обрабатываемой заготовкой, и момента, когда контакт прекращается. Этот способ может быть использован для осуществления автоматической коррекции измерительной схемы по уровню мощности  $N_{х.х.}$ . Известно, что вокруг проводника с током возникает кольцевое магнитное поле. Если по проводнику течет переменный ток, то и возникающее поле оказывается также переменным. Если же проводник с током пропустить через отверстие ферромагнитного тора, несущего на себе обмотку, то в обмотке будет возникать переменная ЭДС, обусловленная наличием переменного магнитного поля, пронизывающего витки тороидальной обмотки.

Для определения момента контакта инструмента с заготовкой (рис. 5.2) на резец (или в другом удобном месте) устанавливают тороидальную обмотку, а к станку  $ТС$  через резистор достаточно большого сопротивления подводят напряжение повышенной звуковой или даже ультразвуковой частоты. Резистор обеспечивает работу источника звуковой частоты в режиме генератора тока, что необходимо ввиду малого сопротивления нагрузки.

Рис. 5.2. Принципиальная схема устройства для определения наличия контакта инструмента с заготовкой:

$ТС$  – технологическая система;  $З$  – заготовка;  $Р$  – резец;  $Т$  – тороидальная намотка, размещаемая на резце;  $E$  – генератор;  $R$  – добавочный резистор;  $I_c$  – сила тока, текущего по элементам станка;  $I_p$  – сила тока, текущего по резцу при наличии контакта резца с заготовкой





В момент контакта инструмента с обрабатываемой заготовкой образуется электрическая цепь, по которой начинает течь ток. Вокруг резца появляется поле, замыкающееся через ферритовый сердечник, в обмотке тора Т появляется ЭДС, которая фиксируется, показывая наличие или отсутствие контакта.

Так как сила тока  $I_0 = I_c + I_p$ , то в разомкнутом состоянии  $I_p = 0$  и  $I_0 = I_c$ , а в замкнутом состоянии  $I_p = I_0 - I_c \neq 0$ .

**Контроль упругих перемещений.** При эксплуатации САУ хорошо себя зарекомендовали индуктивные преобразователи. Принцип действия

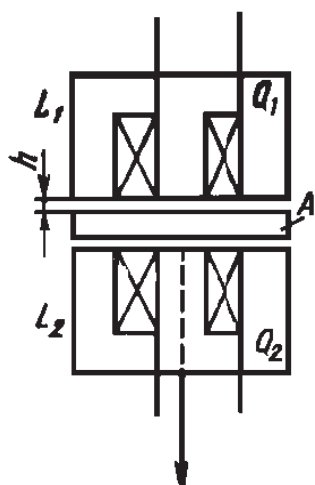


Рис. 5.3. Схема дифференциального индуктивного преобразователя

дифференциального индуктивного датчика заключается в изменении коэффициента самоиндукции ( $L$ ) катушки с незамкнутым ферромагнитным сердечником, если изменяется воздушный зазор в магнитопроводе катушки. Рассмотрим (рис. 5.3) две катушки, имеющие соответственно индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ , с незамкнутыми сердечниками  $Q_1$  и  $Q_2$ , между которыми расположен подвижный якорь  $A$ , выполненный из ферромагнитного материала.

Коэффициент самоиндукции каждой катушки функционально связан с воздушным зазором  $h$ . При изменении зазора  $h$  изменяется и коэффициент самоиндукции  $L$ , причем с уменьшением зазора коэффициент самоиндукции растет.

И, если для одной из катушек при перемещении якоря самоиндукция растет, то для другой уменьшается. Если начальные зазоры малы, то даже самые незначительные перемещения якоря приводят к весьма заметным изменениям коэффициентов самоиндукции.

Для контроля линейных величин якорь соединяют с измерительным штоком.

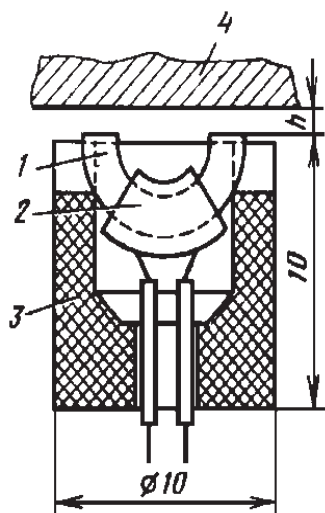


Рис. 5.4. Бесконтактный индуктивный преобразователь

Для уменьшения потерь сердечники, как правило, набирают из листового материала (трансформаторной стали, пермалля) или же изготавливают из ферритов.

Возможности индуктивного метода очень широки, поэтому его используют для контроля самых различных величин. Удобен в применении бесконтактный индуктивный преобразователь (рис. 5.4). При бесконтактных измерениях якорем является сам контролируемый объект. Катушку с незамкнутым ферромагнитным сердечником, расположенным в бакелитовом корпусе 3, помещают

на некотором расстоянии от контролируемого объекта 4, и при прохождении по обмотке 2 переменного тока возникает переменный магнитный поток, замыкающийся по сердечнику 1 через два воздушных зазора и через тепло контролируемого объекта, который обладает достаточно большой магнитной проницаемостью.

В этом случае полное магнитное сопротивление:

$$R_T = \sum R_{\text{м.ж}} + \sum R_{\text{м.в}}$$

где  $\sum R_{\text{м.ж}}$  – сумма магнитных сопротивлений участков с «железом»;  $\sum R_{\text{м.в}}$  – сумма сопротивлений воздушных участков.

Для контроля упругих перемещений иногда используют датчики, работающие и на других принципах: тензометрические проволочные, пневматические, оптико-электрические, емкостные.

**Контроль крутящего момента.** При нагружении вала крутящим моментом ( $M_{\text{кр}}$ ) происходит его скручивание. И хотя угол скручивания, как правило, невелик, оказывается возможным измерение момента на вращающихся валах с достаточной для целей управления степенью точности.

Для контроля крутящего момента в том случае, если длинная часть вала свободна (рис. 5.5), на некотором расстоянии друг от друга на валу 1 закрепляют пластины, к одной из которых прикреплен длинный стержень с ферромагнитным наконечником 2. На другой пластине смонтирован высокочастотный генератор с автономным питанием от небольшой батареи на транзисторе с контуром, индуктивность которого изменяется за счет изменения зазора между сердечником катушки 3 и наконечником 2.

Частота генерируемых колебаний:

$$f = 1/2\pi \sqrt{LC},$$

где  $L$  – коэффициент самоиндукции контурной катушки;  $C$  – емкость.

Изменение  $L$  за счет изменения зазора между сердечником и якорем приводит к изменению частоты  $f$ . Излучаемые при этом электромагнитные колебания – частотно-модулированные, и по значению частоты можно судить о крутящем моменте. Такой вид модуляции является наиболее помехозащищенным, и использование радиоканала позволяет передавать информацию на несколько десятков метров, практически не засоряя эфир.

Для измерения крутящего момента используют также тензометрические датчики. Под действием крутящего момента ( $M_{\text{кр}}$ ) под углом  $45^\circ$  к об-

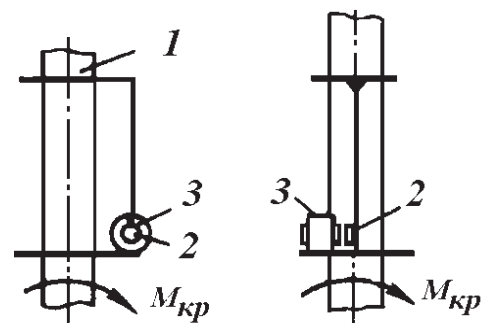


Рис. 5.5. Принцип действия датчика контроля крутящего момента

разующей вала действуют в одном направлении растягивающие силы, а в другом – сжимающие (рис. 5.6). Если по этим направлениям наклеить проволочные тензометрические датчики, то их сопротивления будут изменяться: у одного датчика сопротивление возрастает, а у другого – уменьшается.

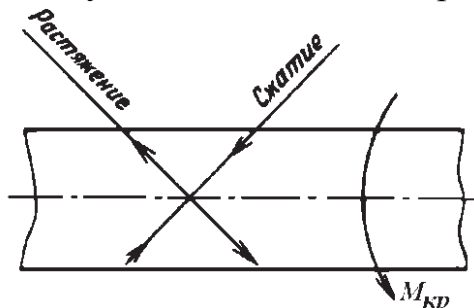


Рис. 5.6. Напряжения, возникающие под действием крутящего момента

Тензометрический проволочный датчик представляет собой бумажную основу, на которой петлеобразно уложена тонкая проволока из константана диаметром 0,015...0,050 мм. Такой преобразователь наклеивают на деформируемый объект. При деформировании исследуемого объекта изменяется длина проволоки датчика (происходит и некоторое изменение ее поперечного сече-

ния и удельного сопротивления), а значит, изменяется и его сопротивление, поскольку сопротивление ( $R$ ), длина ( $l$ ), поперечное сечение ( $S_{\text{п}}$ ) и удельное сопротивление ( $\rho$ ) при неизменной температуре связаны соотношением:

$$R = \rho l / S_{\text{п}}$$

При использовании проволочных датчиков допустимое относительное удлинение  $\Delta l / l$  не должно превышать 0,01, а если вместо проволоки используют высечку из фольги, то  $\Delta l / l \leq 0,02$ , так как в противном случае могут появиться остаточные деформации токонесущей части датчика. Концы проволоки армируют фольгой, что облегчает подключение тензометрического датчика к электрической схеме.

Для исключения влияния температуры датчик изготавливают из константана, имеющего сравнительно малый температурный коэффициент сопротивления, кроме того, датчики рекомендуется включать по мостовой схеме, что в значительной мере снижает действие помех. Серьезным недостатком при использовании таких датчиков на вращающихся валах является то, что необходимо использовать токосъемные устройства в виде колец, изолированных от вала и щетки. Такой трущийся контакт усложняет конструкцию и не надежен.

Для решения задачи по бесконтактному контролю крутящего момента на вращающихся валах может быть использован обратный магнитоstrictionный эффект. Его суть заключается в том, что во многих конструкционных сталях наблюдается изменение магнитной проницаемости под действием внутренних напряжений. Магнитная проницаемость материала возрастает в направлении действия растягивающих сил и уменьшается при сжатии материала.

Таким образом, если к валу приложен момент, то вал становится магнитоанизотропным: в направлении растягивающих напряжений магнитная проницаемость возрастает, а в направлении сжимающих, наоборот, падает.

Если около такого вала разместить индуктивные бесконтактные преобразователи, ориентированные вдоль главных векторов растягивающих и сжимающих сил, то их самоиндукция будет изменяться в разных направлениях тем больше, чем больший момент приложен к валу. Для исключения влияния продольного изгиба такие преобразователи можно разместить с двух противоположных сторон вала. Использование описанного способа ограничивается влиянием таких побочных факторов, как биение вала, неоднородность материала, продольный изгиб и пр.

**Контроль температуры в зоне обработки.** Иногда, например, при решении задач оптимизации процесса обработки по критерию себестоимости, необходимо поддерживать постоянную температуру в зоне резания. Стойкость инструмента зависит от скорости резания ( $V$ ), которая определяет температуру в зоне резания. Например, установлено, что при использовании твердосплавных резцов оптимальная скорость износа инструмента наблюдается при таком значении  $V$ , когда температура в зоне резания составляет примерно 800 °С.

При использовании однолезвийного инструмента контролировать температуру в зоне контакта инструмента с объектом обработки можно путем измерения термо-ЭДС, возникающей в термопаре «инструмент – объект обработки». Обработываемый объект и инструмент выполняют из различных токопроводящих материалов. Место их контакта является горячим спаем образовавшейся термопары; место, откуда снимается термо-ЭДС, является холодным спаем и имеет температуру окружающей среды.

Установлено, что для пары «конструкционная сталь – твердосплавный резец» при температуре горячего спая 800 °С термо-ЭДС равна примерно 13 мВ. Это значит, что при исполнении САУ, где управляемой величиной является скорость резания, удастся поддерживать заданный температурный режим в зоне обработки с точностью до 2 – 3 %, что вполне приемлемо при решении задачи по оптимизации процесса.

При создании САУ ходом технологического процесса обработки на металлорежущих станках можно использовать и первичные преобразователи, работающие на многих других известных принципах.

## 5.2. Усилительно-преобразовательные устройства

Усилителем принято называть устройство, повышающее энергетический уровень (мощность, напряжение, силу тока, силу и т.п.) некоторой информационной посылки за счет, как правило, энергии постороннего источника, которая модулируется в соответствии с сигналом, поступающим на вход устройства. Поскольку такие устройства используют и для преобразования информации, то их, в отличие от датчиков, называют *вторичными преобразователями*.

Необходимость применения усилительно-преобразовательных устройств обусловлена тем, что информация о состоянии объекта имеет малый энергетический уровень, так как в противном случае первичный преобразователь заметно влиял бы на состояние контролируемого объекта, а для управления объектом с целью обеспечения необходимого режима требуется, как правило, значительная мощность. Например, мощность приводных двигателей в металлорежущих станках в среднем равна примерно 1,5 кВт, а мощность на выходе моста, составленного из тензометрических проволочных датчиков, примерно 0,1 мВт. Очевидно, что в этом случае необходимо устройство с коэффициентом усиления по мощности  $k_p = 15 \cdot 10^6$ . Даже в схемах сравнения, которые являются необходимым элементом САУ, для большей эффективности имеет смысл сравнивать на больших уровнях опорный сигнал и сигнал, пришедший по измерительному тракту. Необходимость в использовании усилителей после сравнивающего устройства диктуется и тем, что сигнал рассогласования, определяемый как разность между опорным сигналом и сигналом о состоянии объекта управления, мал.

Не исключена и такая ситуация, при которой информация о состоянии объекта имеет такую природу, когда сравнение сигналов, да и управление исполнительным устройством лучше выполнять, используя энергию другой природы. Если измерения лучше производить, скажем, на переменном токе, то сравнение сигналов лучше производить на постоянном токе.

Принципы действия усилителей различны. Наряду с электрическими усилителями, используют усилители, работающие на неэлектрических принципах. Усилители, работающие на электрических принципах, в целом ряде случаев предпочтительнее, чем неэлектрические. Достоинствами электрических усилителей являются: возможность получения больших коэффициентов усиления; малая инерционность; возможность в ряде случаев складывать и вычитать сигналы; способность преобразовывать сигналы и др.

Неэлектрические усилители работают на гидравлических и пневматических принципах, сюда же можно отнести условно и такие механические конструкции, как рычаг, редуктор или мультипликатор, благодаря которым можно увеличить либо силу, либо перемещение.



Неэлектрические усилители позволяют плавно изменять выходную величину (например, скорость перемещения какого-либо элемента) в очень широком диапазоне. Так, система генератор-электродвигатель позволяет изменять скорость примерно в 20 раз, а гидропривод – в 200 раз. Наиболее часто в САУ используют различные электрические усилители.

**Полупроводниковые усилители.** К ним относят различные усилительные устройства, построенные на полупроводниковых приборах. Существенным недостатком полупроводниковых усилителей является сравнительно малый диапазон температур, при которых они сохраняют свою работоспособность. Температурные влияния оказываются настолько сильными, что при изменении температуры от  $+20$  до  $+40$  °С их основные параметры изменяются почти в два раза. Полупроводниковые усилители являются практически безынерционными устройствами и способны усиливать сигналы на частотах, превышающих 10 МГц.

Задачи, решаемые полупроводниковыми усилителями, не ограничиваются лишь функциями усиления напряжения, силы тока или мощности. Класс усилителей, называемых операционными, позволяет успешно моделировать и математические операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование и др.).

**Тиристорные преобразователи.** В системах, где необходимо управление различными электрическими приводами, работающими как на постоянном, так и на переменном токе, широко используют тиристорные преобразователи (рис. 5.7). Сам тиристор представляет собой полупроводниковый прибор, являющийся, по сути, управляемым диодом. При отсутствии тока ( $i_y$ ) в цепи управления вольт-амперная характеристика имеет некоторый порог, и при подаче на тиристор переменного напряжения, амплитудное значение которого меньше порогового значения, тиристор практически не обладает вентильными свойствами и одинаково плохо проводит ток как в прямом, так и в обратном направлениях. Но если амплитудное значение напряжения превышает пороговое, то при достижении порогового значения тиристор отжимается, и наблюдается резкий скачок силы тока. Если затем приложенное к тиристору напряжение уменьшается, то изменяется сила тока, проходящего через тиристор. Иными словами, его характеристика в это время практически не отличается от характеристики обычного диода.

Пороговым напряжением можно управлять путем подачи тока на управляющий электрод и при некотором значении силы этого тока порог исчезает, а характеристика становится аналогичной характеристике обыч-

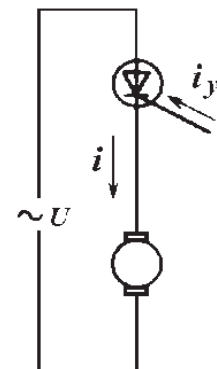


Рис. 5.7. Тиристорный преобразователь

ного диода. Способы управления могут быть различными. Можно, например, для управления использовать переменное напряжение, фаза которого сдвигается относительно фазы основного переменного напряжения, приложенного к тиристорному, последовательно соединенному с потребителем, токовый режим которого необходимо менять. В качестве управляющих сигналов можно использовать гамму импульсов, сдвигаемую во времени. В этом случае тиристор открывается лишь в моменты прихода импульса управления, который, так сказать, «убирает» порог характеристики.

Для управления частотой вращения асинхронных двигателей необходимо изменять частоту переменного тока, обтекающего его обмотки. В этом случае используют тиристоры, с помощью которых формируются прямоугольные биполярные импульсы различной длительности. Достоинства тиристоров: отсутствие инерционности, малое внутреннее сопротивление в открытом состоянии. Последнее означает, что действующее на них падение напряжения мало, оно на порядок меньше, чем для таких газовых приборов, как тиратроны.

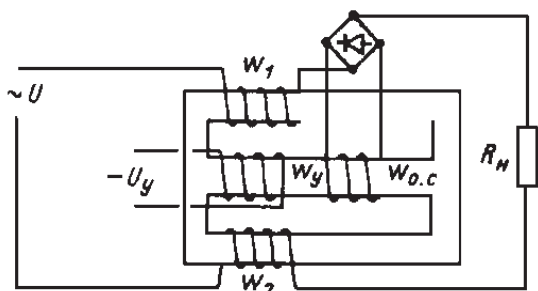


Рис. 5.8. Схема магнитного усилителя с внешней обратной связью

действие которого основано на использовании нелинейности кривой намагничивания ферромагнитного материала. На сердечнике магнитного усилителя (рис. 5.8) размещены: обмотка управления ( $w_y$ ), обтекаемая постоянным током; две одинаковые обмотки, включаемые последовательно с нагрузкой  $R_H$  ( $w_1$  и  $w_2$ ); обмотка внешней обратной связи ( $w_{o.c.}$ ).

При прохождении тока по обмотке управления  $w_y$  создаются ампервитки намагничивания, что приводит к изменению эффективной магнитной проницаемости  $\mu$  сердечника, а, следовательно, и к изменению индуктивного сопротивления обмоток  $w_1$  и  $w_2$ . Эти обмотки включены таким образом, что наличие каких-либо гармонических составляющих в обмотке управления не приводит к появлению трансформаторного эффекта. Изменение индуктивности сопротивления обмоток  $w_1$  и  $w_2$  за счет изменения  $\mu$  приводит к изменению тока нагрузки.

Преимущества магнитных усилителей: надежность, высокий коэффициент усиления по мощности, возможность складывать сигналы управ-

#### Магнитные усилители.

Магнитные усилители представляют собой, главным образом, выходные каскады усилителей, имеющих выходную мощность от единиц до сотен ватт. Магнитные усилители хорошо сопрягаются с нагрузкой в виде двигателей переменного тока. Каскады предварительного усиления выполняют обычно на полупроводниковых элементах. Магнитный усилитель – устройство,



ления, а значит их сравнивать, сравнительно высокий КПД. Недостатки: большая инерционность (постоянная времени равна нескольким секундам), зависимость коэффициента от рабочей частоты.

Магнитные усилители обычно используют для управления мощностями от нескольких (до десяти) ватт до нескольких киловатт. Рабочая частота обычно не превышает 400 Гц, особенно часто их используют при работе на промышленной частоте. Магнитные усилители используют реже, чем полупроводниковые и тиристорные преобразователи.

### 5.3. Исполнительные устройства

Под исполнительными устройствами обычно понимают последний каскад в САУ, воздействующий либо непосредственно, либо через какое-либо согласующее устройство на регулирующий элемент или объект системы. Это может быть, например, реостат в цепи возбуждения двигателя, серводвигатель, с помощью которого изменяется состояние регулирующего клапана гидросистемы, и др.

Исполнительные устройства могут иметь различные по природе выходные величины (механические, электрические, световые и др.). Рассмотрим только серводвигатели, т.е. двигатели небольшой мощности, с помощью которых осуществляется механическое воздействие на регулирующий элемент.

Серводвигатели могут иметь разное исполнение, но, как правило, все они обладают реверсивными свойствами. Известно, что изменение направления вращения двигателя постоянного тока осуществляется либо за счет изменения направления тока, проходящего через якорь, либо за счет изменения направления потока возбуждения. В серводвигателях сервисного типа (рис. 5.9) для осуществления реверсирования предусматривают две обмотки возбуждения ОВ1 и ОВ2. В зависимости от того, какая из них задействована, двигатель вращается в ту или другую сторону. Обычно такой двигатель управляется релейным элементом в виде, например, перекидного контакта  $K$ .

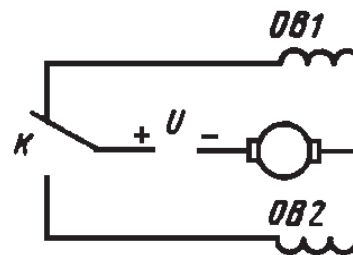


Рис. 5.9. Схема включения реверсивного серводвигателя

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Дана система уравнений, описывающих поведение некой системы автоматического управления:

$$\begin{cases} A_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A_2 \frac{dy(t)}{dt} + A_3 y(t) = B_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + B_2 x_2(t) + f(t); \\ A_4 \frac{dx_2(t)}{dt} + A_5 x_2(t) = B_3 \frac{dx_1(t)}{dt} + B_4 x_1(t) - B_5 \frac{dy(t)}{dt}; \\ x_1(t) = x(t) - y(t), \end{cases}$$

где  $x(t)$  – входное воздействие (координата);  $y(t)$  – выходное воздействие (координата);  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – промежуточные координаты системы;  $f(t)$  – возмущающее воздействие;  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  – постоянные коэффициенты.

$$A_1 = 0,06; \quad A_2 = 0,1; \quad A_3 = 3; \quad A_4 = 0,8; \quad A_5 = 6;$$

$$B_1 = 0,1; \quad B_2 = 3; \quad B_3 = 0,8; \quad B_4 = 6; \quad B_5 = 0,1.$$

Последовательность выполнения исследования:

1) Используя преобразования Лапласа, представить уравнения в операторной форме, определить передаточные функции и построить структурную схему.

2) Используя правила эквивалентных преобразований, упростить схему, полученную в результате выполнения этапа 1, до одного звена с обратной связью и определить передаточные функции по задающему и возмущающему воздействиям замкнутой и разомкнутой систем по цепи обратной связи, а также определить коэффициент усиления.

3) Используя передаточные функции, полученные в результате выполнения этапа 2, построить амплитудно-фазовую, амплитудную и фазовую частотные характеристики системы.

4) Используя характеристические уравнения, полученные в результате выполнения этапа 2, провести анализ устойчивости системы с помощью одного из алгебраических критериев устойчивости и одного из частотных. Если система неустойчива, то определить пути достижения устойчивости.

5) Используя для расчета передаточные функции, полученные в результате выполнения этапа 2, и приняв  $f(t) = 0$ , определить значения установившейся ошибки системы. В случае неустойчивой системы пункт не выполнять.

**Этап 1.** Используя преобразования Лапласа, представить уравнения в операторной форме, определить передаточные функции и построить структурную схему.

1) Строим структурную схему для первого уравнения системы:

$$A_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + A_2 \frac{dy(t)}{dt} + A_3 y(t) = B_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + B_2 x_2(t) + f(t);$$

$$\frac{d}{dt} \equiv p;$$

$$(A_1 p^2 + A_2 p + A_3) Y(p) = (B_1 p + B_2) X_2(p) + F(p).$$

$$\text{Тогда } Y(p) = \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} X_2(p) + \frac{1}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \cdot F(p);$$

$$W_1(p) = \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3};$$

$$W_2(p) = \frac{1}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3}.$$

Отсюда

$$Y(p) = W_1(p) X_2(p) + W_2(p) F(p).$$

Строим структурную схему (рис. 6.1).

2) Строим структурную схему для второго уравнения:

$$A_4 p X_2(p) + A_5 X_2(p) = B_3 p X_1(p) + B_4 X_1(p) - B_5 p Y(p);$$

$$(A_4 p + A_5) X_2(p) = (B_3 p + B_4) X_1(p) - B_5 p Y(p);$$

$$X_2(p) = \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5} X_1(p) - \frac{B_5 p}{A_4 p + A_5} Y(p);$$

$$W_3(p) = \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5}; \quad W_4(p) = \frac{B_5 p}{A_4 p + A_5};$$

$$X_2(p) = W_3(p) X_1(p) - W_4(p) Y(p).$$

Строим структурную схему (рис. 6.2).

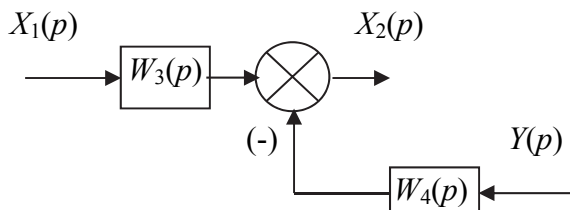


Рис. 6.2. Структурная схема ко второму уравнению

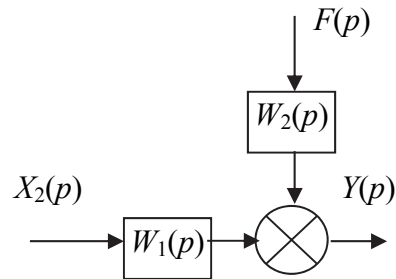


Рис. 6.1. Структурная схема к первому уравнению

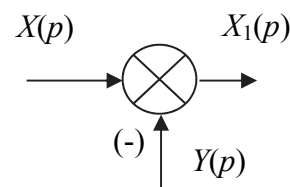


Рис. 6.3. Структурная схема к третьему уравнению

3) Строим структурную схему для третьего уравнения:

$$X_1(p) = X(p) - Y(p).$$

Строим структурную схему (рис. 6.3).

Соединяем входы и выходы полученных трех структурных схем между собой и получаем структурную схему системы уравнений (рис. 6.4).

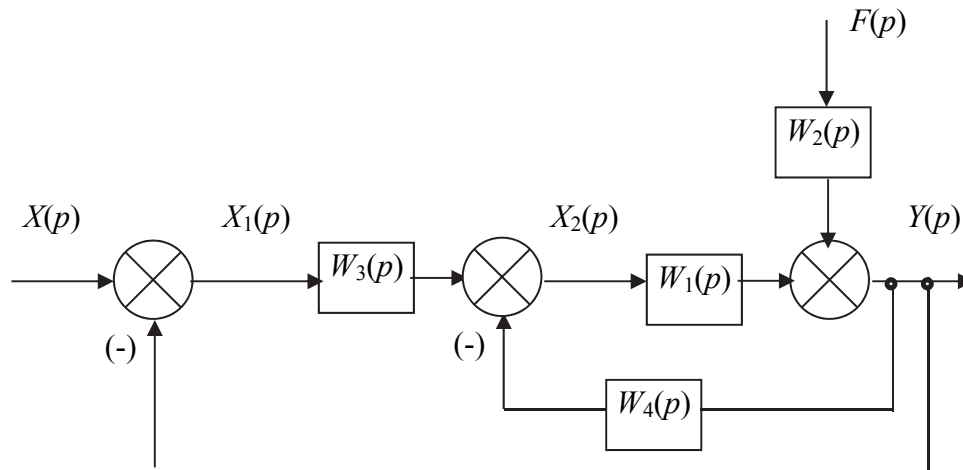


Рис. 6.4. Структурная схема системы

**Этап 2.** Используя правила эквивалентных преобразований, упростить схему, полученную в результате выполнения пункта 1, до одного звена с обратной связью и определить передаточные функции по задающему и возмущающему воздействиям замкнутой и разомкнутой систем по цепи обратной связи, а также определить коэффициент усиления.

*Первый шаг преобразований.* Переносим сумматор через звено  $W_1(p)$  влево и сумматоры поменяем местами:  $W_5(p) = W_2(p)/W_1(p)$  (рис. 6.5).

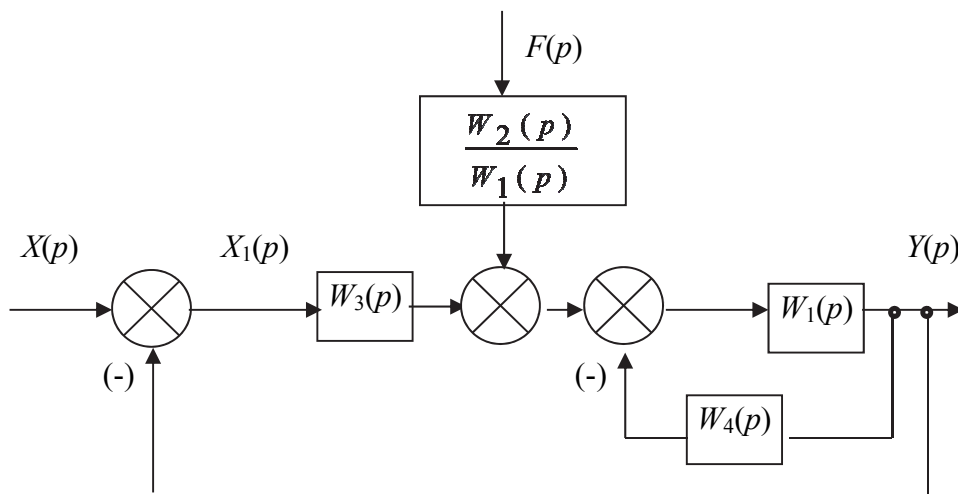


Рис. 6.5. Структурная схема после первого действия

Второй шаг преобразований. Упростим обратную связь (рис. 6.6):

$$W_6(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)}.$$

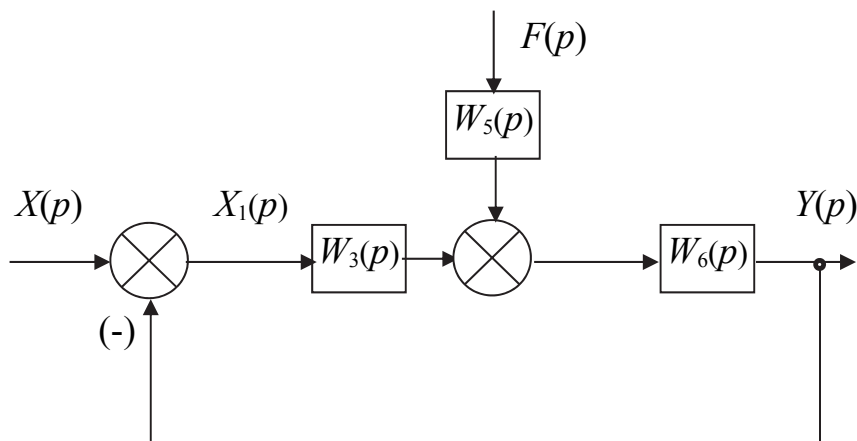


Рис. 6.6. Структурная схема после второго шага преобразований

Третий шаг преобразований. Переносим сумматор через звено  $W_3(p)$  влево:

$$W_7(p) = W_2(p)/(W_1(p) \cdot W_3(p)),$$

последовательно соединенные звенья  $W_3(p)$  и  $W_6(p)$  объединяем в одно звено с передаточной функцией  $W_8(p)$  (рис. 6.7):

$$W_8(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)}.$$

Запишем уравнение для определения выходной координаты  $Y(p)$  замкнутой системы (рис. 6.7):

$$\begin{aligned} Y(p) &= [X(p) + F(p) \cdot \left( \frac{W_2(p)}{W_1(p) \cdot W_3(p)} \right)] \times \left( \frac{\frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)}}{1 + \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)}} \right) = \\ &= [X(p) + F(p) \cdot \left( \frac{W_2(p)}{W_1(p) \cdot W_3(p)} \right)] \times \left( \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_4(p)} \right) = \\ &= \left( \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_4(p)} \right) \cdot X(p) + \\ &+ \left( \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_4(p)} \right) \cdot F(p). \end{aligned}$$

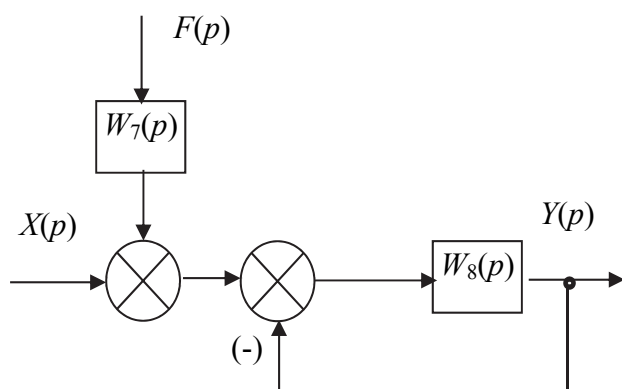


Рис. 6.7. Структурная схема после третьего шага преобразований. Замкнутая система

Используя принцип суперпозиции, найдем передаточную функцию замкнутой системы сначала по задающему воздействию, а затем по возмущающему воздействию:

$$F(p) = 0; W_{XY}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_8(p)}{1 + W_8(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_4(p)};$$

$$X(p) = 0; W_{FY} = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_3(p) + W_1(p) \cdot W_4(p)};$$

$$W_1(p) = \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} = \frac{0,1 p + 3}{0,06 p^2 + 0,1 p + 3};$$

$$W_2(p) = \frac{1}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} = \frac{1}{0,06 p^2 + 0,1 p + 3};$$

$$W_3(p) = \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5} = \frac{3 p + 5}{3 p + 5} = 1; W_4(p) = \frac{B_5 p}{A_4 p + A_5} = \frac{0,1 p}{0,8 p + 6}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{XY}(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p) + W_1(p) \cdot W_3(p)} = \\ &= \frac{\left( \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5} \right)}{1 + \left( \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_5 p}{A_4 p + A_5} \right) + \left( \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5} \right)} = \\ &= \frac{(B_1 p + B_2) \cdot (B_3 p + B_4)}{(A_1 p^2 + A_2 p + A_3) \cdot (A_4 p + A_5) + (B_1 p + B_2) \cdot B_5 p + (B_1 p + B_2) \cdot (B_3 p + B_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(0,1p + 3) \cdot (0,8p + 6)}{(0,06p^2 + 0,1p + 3) \cdot (0,8p + 6) + (0,1p + 3) \cdot 0,1p + (0,1p + 3) \cdot (0,8p + 6)} = \\
&= \frac{0,08p^2 + 3p + 18}{0,048p^3 + 0,53p^2 + 6,3p + 18}; \\
W_{FY}(p) &= \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p) + W_1(p) \cdot W_3(p)} = \\
&= \frac{\left( \frac{1}{A_1p^2 + A_2p + A_3} \right)}{1 + \left( \frac{B_1p + B_2}{A_1p^2 + A_2p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_5p}{A_4p + A_5} \right) + \left( \frac{B_1p + B_2}{A_1p^2 + A_2p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_3p + B_4}{A_4p + A_5} \right)} = \\
&= \frac{(A_4p + A_5)}{(A_1p^2 + A_2p + A_3) \cdot (A_4p + A_5) + (B_1p + B_2) \cdot B_5p + (B_1p + B_2) \cdot (B_3p + B_4)} = \\
&= \frac{(0,8p + 6)}{(0,06p^2 + 0,1p + 3) \cdot (0,8p + 6) + (0,1p + 3) \cdot 0,1p + (0,1p + 3) \cdot (0,8p + 6)} = \\
&= \frac{0,08p + 6}{0,048p^3 + 0,53p^2 + 6,3p + 18};
\end{aligned}$$

Запишем уравнение для определения выходной координаты  $Y(p)$  разомкнутой системы, для этого в структурной схеме, представленной на рис. 6.7, разомкнем обратную связь (рис. 6.8):

$$Y(p) = [X(p) + F(p) \cdot \left( \frac{W_2(p)}{W_1(p) \cdot W_3(p)} \right)] \times \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)};$$

Используя принцип суперпозиции, найдем передаточную функцию разомкнутой системы сначала по возмущающему воздействию, а затем по задающему воздействию. Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 6.8) **по возмущающему воздействию**:

$$\begin{aligned}
X(p) = 0; W_{FY}(p) &= \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)} = \\
&= \frac{1}{A_1p^2 + A_2p + A_3} = \\
&= \frac{1}{1 + \left( \frac{B_1p + B_2}{A_1p^2 + A_2p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_5p}{A_4p + A_5} \right)} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{A_4 p + A_5}{(A_1 p^2 + A_2 p + A_3) \cdot (A_4 p + A_5) + (B_1 p + B_2) \cdot B_5 p} = \\
&= \frac{0,8 p + 6}{(0,06 p^2 + 0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6) + (0,1 p + 3) \cdot 0,1 p} = \\
&= \frac{0,8 p + 6}{0,048 p^3 + 0,45 p^2 + 3,3 p + 18};
\end{aligned}$$

Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 6.8) *по задающему воздействию*:

$$\begin{aligned}
F(p) &= 0; \\
W_{XY}(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_4(p)} = \frac{\left( \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_3 p + B_4}{A_4 p + A_5} \right)}{1 + \left( \frac{B_1 p + B_2}{A_1 p^2 + A_2 p + A_3} \right) \cdot \left( \frac{B_5 p}{A_4 p + A_5} \right)} = \\
&= \frac{(B_1 p + B_2) \cdot (B_3 p + B_4)}{(A_1 p^2 + A_2 p + A_3) \cdot (A_4 p + A_5) + (B_1 p + B_2) \cdot B_5 p} = \\
&= \frac{(0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6)}{(0,06 p^2 + 0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6) + (0,1 p + 3) \cdot 0,1 p} = \\
&= \frac{0,08 p^2 + 3 p + 18}{0,048 p^3 + 0,45 p^2 + 3,3 p + 18}; \\
W_{разXY}(0) &= \frac{B_2 \cdot B_4}{A_3 \cdot A_5} = 18/18 = 1.
\end{aligned}$$

**Этап 3.** Используя передаточные функции, полученные в результате выполнения этапа 2, построить АФЧХ, АЧХ и ФЧХ частотные характеристики системы.

Общий вид уравнения передаточной функции разомкнутой системы *по задающему воздействию*:

$$\begin{aligned}
W_{XY}(p) &= \frac{(B_1 p + B_2) \cdot (B_3 p + B_4)}{(A_1 p^2 + A_2 p + A_3) \cdot (A_4 p + A_5) + (B_1 p + B_2) \cdot B_5 p}; \\
W_{XY}(p) &= \frac{(0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6)}{(0,06 p^2 + 0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6) + (0,1 p + 3) \cdot 0,1 p};
\end{aligned}$$

Получим АФЧХ путем замены  $p$  в передаточной функции на  $(j\omega)$ .  
Получим комплекснозначную функцию:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{(0,1(j\omega) + 3) \cdot (0,8(j\omega) + 6)}{(0,06(j\omega)^2 + 0,1(j\omega) + 3) \cdot (0,8(j\omega) + 6) + (0,1(j\omega) + 3) \cdot 0,1(j\omega)} = \\ &= 6,67 \cdot \frac{2 \cdot \omega^2 - 75 \cdot j \cdot \omega - 450}{8 \cdot j \cdot \omega^3 + 75 \cdot \omega^2 - 550 \cdot j \cdot \omega - 3000} = \\ &6,67 \cdot \frac{2 \cdot \omega^2 - 75 \cdot j \cdot \omega - 450}{(75 \cdot \omega^2 - 3000) + j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega)}. \end{aligned}$$

Для построения АФЧХ на комплексной плоскости необходимо в уравнении передаточной функции выделить действительную и мнимую части, для этого числитель и знаменатель последнего выражения умножаем на сопряженное выражение знаменателю, т.е. на  $((75 \cdot \omega^2 - 3000) - j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega))$ . При расчетах помним, что  $j = \sqrt{-1}$ ;  $j^2 = -1$ ;  $j^3 = -j$ .

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \\ &= 6,67 \cdot \frac{(2 \cdot \omega^2 - 75 \cdot j \cdot \omega - 450) \cdot ((75 \cdot \omega^2 - 3000) - j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega))}{((75 \cdot \omega^2 - 3000) + j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega)) \cdot ((75 \cdot \omega^2 - 3000) - j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega))} = \\ &= 6,67 \cdot \frac{(2 \cdot \omega^2 - 75 \cdot j \cdot \omega - 450) \cdot ((75 \cdot \omega^2 - 3000) - j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega))}{(75 \cdot \omega^2 - 3000)^2 - (j \cdot (8 \cdot \omega^3 - 550 \cdot \omega))^2} = \\ &= -6,67 \left( \frac{16 \cdot j \cdot \omega^5 + 450 \cdot \omega^4 + 925 \cdot j \cdot \omega^3 - 1500 \cdot \omega^2 + 22500 \cdot j \cdot \omega - 1350000}{64\omega^6 - 3175 \cdot \omega^4 - 147500 \cdot \omega^2 + 9000000} \right). \end{aligned}$$

Вместо  $j$  в формулу подставляем  $j = \sqrt{-1}$ ;  $j^2 = -1$ , получим:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= -6,67 \left( \frac{450 \cdot \omega^4 - 1500 \cdot \omega^2 - 1350000}{64\omega^6 - 3175 \cdot \omega^4 - 147500 \cdot \omega^2 + 9000000} + \right. \\ &\left. + \frac{j \cdot (16 \cdot \omega^5 + 925 \cdot \omega^3 + 22500 \cdot \omega)}{64\omega^6 - 3175 \cdot \omega^4 - 147500 \cdot \omega^2 + 9000000} \right). \end{aligned}$$

Модуль:

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}(W(j\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(W(j\omega)))^2};$$

Аргумент:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(W(j\omega))}{\operatorname{Re}(W(j\omega))}\right),$$

где  $Re(W(j\omega))$  – действительная часть частотной передаточной функции;  
 $Im(W(j\omega))$  – мнимая часть частотной передаточной функции.

Подставим числовые значения частоты  $\omega = 0, 0.1, \dots, 1000$ , выполним расчеты и построим частотные характеристики АФЧХ, АЧХ и ФЧХ (рис. 6.9).

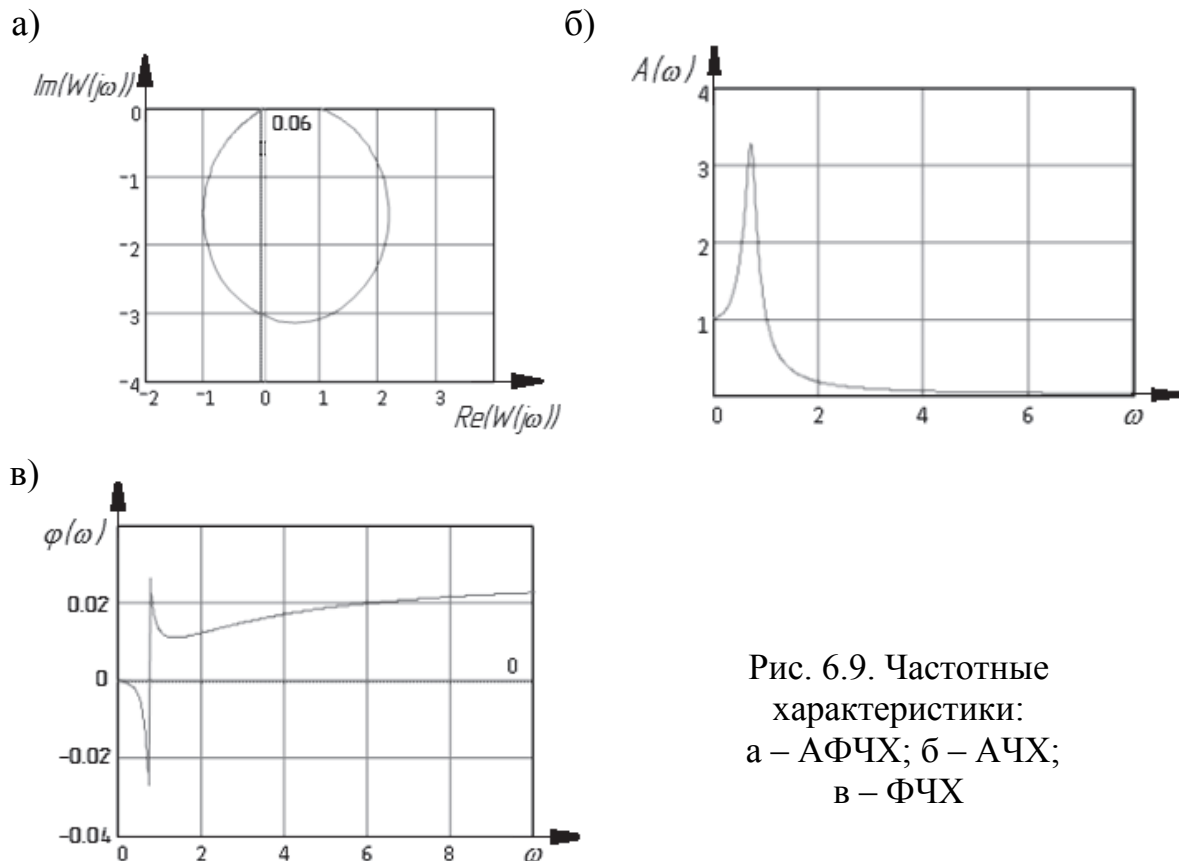


Рис. 6.9. Частотные характеристики:  
 а – АФЧХ; б – АЧХ;  
 в – ФЧХ

Расчеты и построение графиков выполнено в программе MATHCAD.

**Этап 4.** Используя характеристические уравнения, полученные в результате выполнения этапа 2, провести анализ устойчивости системы с помощью одного из алгебраических критериев устойчивости и одного из частотных. Если система неустойчива, то определить пути достижения устойчивости.

#### Анализ устойчивости по алгебраическому критерию Гурвица

Характеристическое уравнение разомкнутой системы по задающему воздействию  $X(p)$  (знаменатель передаточной функции, см. этап 2):

$$D(p) = 0,048p^3 + 0,45p^2 + 3,3p + 18 = 0,$$

где  $a_0 = 0,048$ ;  $a_1 = 0,45$ ;  $a_2 = 3,3$ ;  $a_3 = 18$ .

Составим матрицу:

$$\begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 a_1 a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,45 & 18 & 0 \\ 0,048 & 3,3 & 0 \\ 0 & 0,45 & 18 \end{vmatrix}$$

Условия устойчивости:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Проверим выполнение этих условий.

$$a_0 = 0,048 > 0; \quad a_1 = 0,45 > 0; \quad a_2 = 3,3 > 0; \quad a_3 = 18 > 0.$$

Выразим определители Гурвица:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,45 & 18 \\ 0,048 & 3,3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,45 \cdot 3,3 - (0,048 \cdot 18) = 0,621 > 0.$$

**Вывод.** Условие  $\Delta_2 > 0$  выполняется, следовательно, система устойчива в разомкнутом состоянии по задающему воздействию.

### Анализ устойчивости по критерию Михайлова

Анализ устойчивости системы этим методом сводится к построению по характеристическому многочлену замкнутой системы (знаменатель передаточной функции) комплексной частотной функции. Запишем знаменатель передаточной функции замкнутой системы по задающему воздействию (см. этап 2).

$$\begin{aligned} D(p) &= (A_1 p^2 + A_2 p + A_3) \cdot (A_4 p + A_5) + (B_1 p + B_2) \cdot B_3 p + \\ &\quad + (B_1 p + B_2) \cdot (B_2 p + B_4) = \\ &= (0,06 p^2 + 0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6) + (0,1 p + 3) \cdot 0,1 p + (0,1 p + 3) \cdot (0,8 p + 6). \end{aligned}$$

Обозначим:  $p = i\omega$ , запишем:

$$\begin{aligned} D(i\omega) &= (0,06 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 0,1 \cdot (j \cdot \omega) + 3) \cdot (0,8 \cdot (j \cdot \omega) + 6) + (0,1 \cdot (j \cdot \omega) + 3) \cdot 0,1 \cdot (j \cdot \omega) + \\ &\quad + (0,1 \cdot (j \cdot \omega) + 3) \cdot (0,8 \cdot (j \cdot \omega) + 6). \end{aligned}$$

Так как  $j = \sqrt{-1}$ ;  $j^2 = -1$ ;  $j^3 = -j$ , то с учетом этого получим:

$$D(j\omega) = -0,048 j \cdot \omega^3 - 0,53 \cdot \omega^2 + 6,3 j \cdot \omega + 36;$$

Выделим действительную и мнимую часть комплекснозначной функции:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= (-0,53 \cdot \omega^2 + 36) + j \cdot (6,3 \cdot \omega - 0,048 \cdot \omega^3); \\ D(\omega) &= u(\omega) + j \cdot v(\omega); \end{aligned}$$

$$u(\omega) = \operatorname{Re}(D(\omega)); \quad v(\omega) = \operatorname{Im}(D(\omega)).$$

Подставим числовые значения частоты  $\omega = 0, 0,1..1000$ , выполним расчеты и построим АФЧХ (рис. 6.10). Расчеты и построение графиков выполнены в программе MATHCAD.

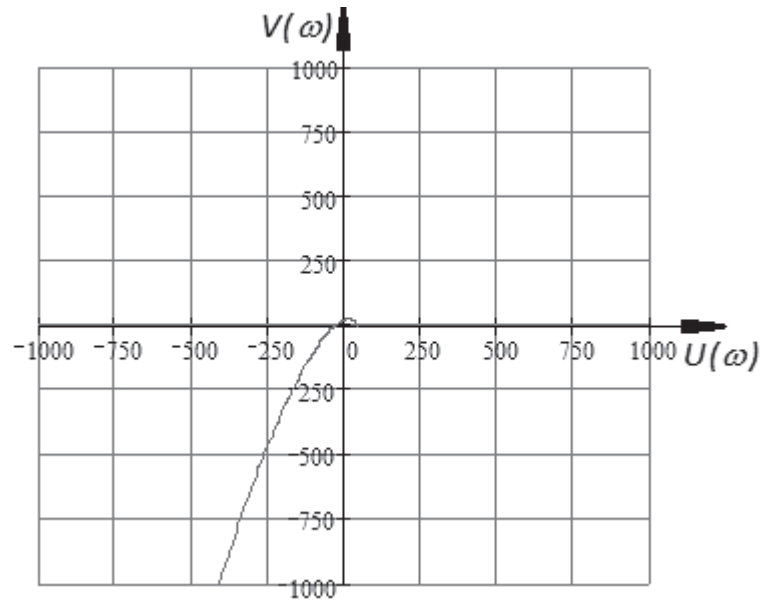


Рис. 6.10. Амплитудно-фазовая частотная характеристика замкнутой системы

**Вывод.** Система автоматического управления в замкнутом состоянии устойчива, так как годограф Михайлова при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности, начинаясь при  $\omega = 0$  на вещественной положительной полуоси, обходит последовательно только против часовой стрелки три квадранта координатной плоскости (так как порядок характеристического уравнения третий), и уходит в бесконечность в третьем квадранте координатной плоскости.

**Этап 5.** Используя для расчета передаточные функции, полученные в результате выполнения этапа 2, и приняв  $f(t) = 0$ , определить значения установившейся ошибки системы. В случае неустойчивой системы пункт не выполнять.

Найдём значение установившейся ошибки, принимая  $p = 0$ :

$$K_{\text{зам}} = W_{\text{замкХУ}}(0) = 18/36 = 1/2;$$

$$K_{\text{раз}} = W_{\text{разХУ}}(0) = 18/18 = 1.$$

Ошибка:

$$E = \frac{1}{1 + K_{\text{раз}}}; \quad E = 1/2.$$

## ЗАКЛУЧЕНИЕ

Современное машиностроение развивается в условиях жесткой конкуренции, развитие его идет в направлениях существенного повышения качества продукции; сокращения времени обработки на новых станках за счет технических усовершенствований; повышения интеллектуальной оснащенности машиностроительной отрасли.

Каждые 10 лет развития науки и техники характеризуются усложнением технических объектов в 2 – 3 раза. Учитывая, что период освоения новых технологических процессов в промышленности составляет значительный период (5 и более лет) и эффективность процессов обработки растет также медленно, главным резервом повышения экономических показателей машиностроительного производства остается повышение степени непрерывности рабочего процесса, в первую очередь, за счет сокращения вспомогательного времени и подготовительно-заключительного времени. Эта задача в машиностроении решается главным образом путем автоматизации производственного процесса и совершенствованием управления производственным процессом.

Современная стратегия развития машиностроительного производства в мире предполагает создание принципиально новых материалов, существенное повышение уровня автоматизации производственного процесса и управления с целью обеспечения выпуска продукции требуемого качества в заданный срок при минимальных затратах.

Для достижения целей социально-экономического развития производственных систем необходим комплекс мероприятий в каждом из направлений:

- совершенствование принципов организации и методов планирования производства;
- внедрение новых и совершенствование существующих технологических процессов;
- повышение уровня автоматизации проектирования и изготовления.

При этом необходимо продвижение по всем указанным стратегическим направлениям, так как ни одно из них само по себе не является достаточным.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Кузьмин, А. В. Теория систем автоматического управления : учеб. для вузов по направлению "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств" / А. В. Кузьмин, А. Г. Схиртладзе. – Старый Оскол : ТНТ, 2009. – 224 с.
2. Мирошник, И. В. Теория систем автоматического управления : учеб. для вузов / И. В. Мирошник. – М. : Питер, 2009. – 336 с.
3. Петраков, Ю. В. Теория автоматического управления : учеб. пособие / Ю. В. Петраков, О. И. Драчев. – М. : Машиностроение; 2008. – 336 с.
4. Головенков, М. Ю. Основы автоматики и автоматического регулирования станков с программным управлением : учеб. для машиностроительных техникумов / М. Ю. Головенков, С. В. Сироткин. – М. : Машиностроение, 1988. – 288 с.
5. Думлер, С. А. Управление производством и кибернетика / С. А. Думлер. – М. : Машиностроение, 1969. – 323 с.
6. Егоров, К. В. Основы теории автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / К. В. Егоров. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Энергия, 1967. – 648 с.
7. Иващенко, Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем / Н. Н. Иващенко. – 4 изд. перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1978. – 737 с.
8. Кудинов, В. А. Динамика станков / В. А. Кудинов – М. : Машиностроение, 1985. – 256 с.
9. Основы автоматизации управления производством : учеб. пособие. / под общ. ред. И. М. Макарова. – М. : Высш. шк., 1983. – 504 с.
10. Палк, К. И. Системы управления механической обработкой на станках / К. И. Палк. – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1984. – 215 с.
11. Пронин, А. И. Теория автоматического управления : учеб. пособие / А. И. Пронин, Е. Б. Щелкунов. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2006. – 95 с.
12. Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – М. : Машиностроение, 1985. – 536 с.
13. Сборник задач по теории автоматического управления и регулирования / под ред. В. А. Бессекерского. – М. : Наука, 1979. – 587 с.
14. Теория автоматического управления : учеб. пособие. / под ред. Ю. М. Соломенцева. – М. : Высш. шк., 2000. – 268 с.
15. Теория автоматического управления: в 2 ч. /под ред. А. А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 1-2.
16. Юревич, Е. И. Теория автоматического управления / Е. И. Юревич. – 2 изд., перераб. и доп. – Л. : Энергия, 1975. – 416 с.



