Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Н. Л. Катунцева

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 512(07)
ББК 22.151.5я7
К297

Рецензенты:

Кафедра математики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», зав. кафедрой кандидат технических наук А. М. Севастьянов;

А. Н. Анисимов, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой информационной безопасности, информационных систем и физики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет»

Катунцева, Н. Л.

К297 Практикум по математике. Векторная алгебра : учеб. пособие / Н. Л. Катунцева. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 80 с.

ISBN 978-5-7765-1140-0

Данное пособие содержит основные теоретические сведения из курса векторной алгебры. Большое внимание уделяется разбору примеров и задач, иллюстрирующих основной теоретический материал. Каждый раздел содержит наборы задач для практических занятий и самостоятельных работ. В пособии также приведены варианты расчетно–графического задания, типовой вариант контрольной работы и вариант теста.

Учебное пособие предназначено для бакалавров очной формы обучения по направлениям 21.03.02 – «Землеустройство и кадастры», 07.03.03 – «Дизайн архитектурной среды», 08.03.01 – «Строительство».

УДК 512(07)
ББК 22.151.5я7

ISBN 978-5-7765-1140-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие является частью учебно–методического комплекса по дидактической единице «Векторная алгебра». Оно служит дополнением к базовым учебникам и учебным пособиям, которые указаны в списке основной учебной литературы рабочей программы. Учебное пособие предназначено для проведения практических аудиторных занятий, контрольных и самостоятельных работ, тестирования и выдачи расчетно–графического задания.

Цель настоящего учебного пособия – оказание помощи студенту в приобретении навыков решения типовых задач по дидактической единице «Векторная алгебра». Описание основных методов решения сопровождается не только необходимыми теоретическими сведениями, но и подробными решениями соответствующих задач, что в значительной степени облегчает подготовку студентов к контрольной или самостоятельной работам, а также к тестированию. Подробное решение типового варианта расчетно–графического задания окажет существенную помощь в решении и оформлении своего варианта.

В данном учебном пособии приведены краткие теоретические сведения из курса векторной алгебры – понятие вектора, линейные операции над векторами, проекция вектора на ось, координаты вектора, длина вектора, деление отрезка в данном отношении, линейная комбинация векторов, базис, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и их приложения.

Работа содержит достаточное количество задач, снабженных подробными решениями. Задачи подобны тем, что предлагаются в наборах задач для аудиторных (практических) занятий, самостоятельных работ и в расчетно–графических заданиях. В конце пособия предложен типовой вариант контрольной работы с подробным решением, в котором содержатся задачи по всем разделам и образец теста (с ответами).

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Определение 1.1. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B называется вектором. Обозначается одной строчной буквой или двумя заглавными буквами латинского алфавита со стрелкой сверху: $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}\ldots$

Определение 1.2. Если точки A и B совпадают, то вектор называется нулевым. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Определение 1.3. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение 1.4. Два вектора называются сонаправленными, если они коллинеарны и направлены в одну сторону.

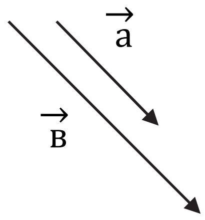
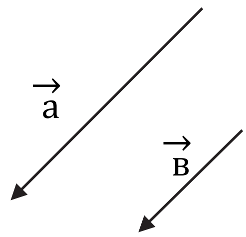
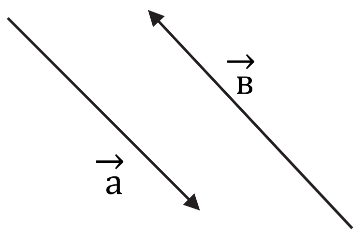
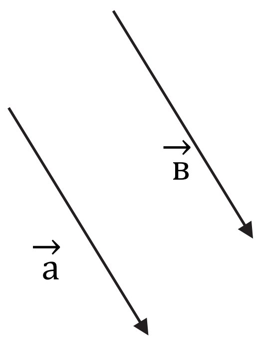
Определение 1.5. Два вектора называются противоположно направленными, если они коллинеарны и направлены в противоположные стороны.

Определение 1.6. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение 1.7. Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Классификация векторов представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Наименование векторов	Пример их расположения на плоскости	Обозначение
Нулевой вектор	•	$\vec{a}$
Коллинеарные векторы		$\vec{a}\parallel\vec{в}$
Сонаправленные векторы		$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{в}$
Противоположно направленные векторы		$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{в}$
Равные векторы		$\vec{a}=\vec{в}$

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами являются умножение вектора на число и сложение векторов.

Определение 1.8. Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{c}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство (правило треугольника): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 1).

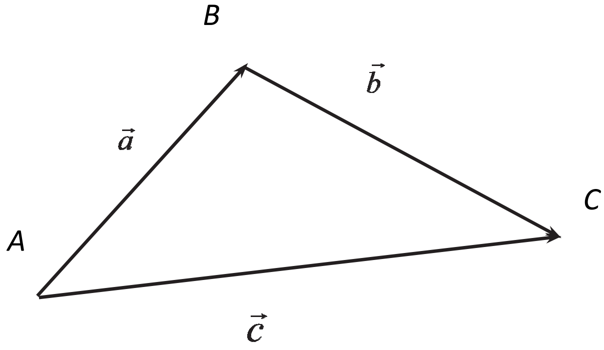


Рис. 1

Определение 1.9. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Разность векторов можно определить также равенством: $\vec{c} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

На рис. 2 изображена сумма и разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

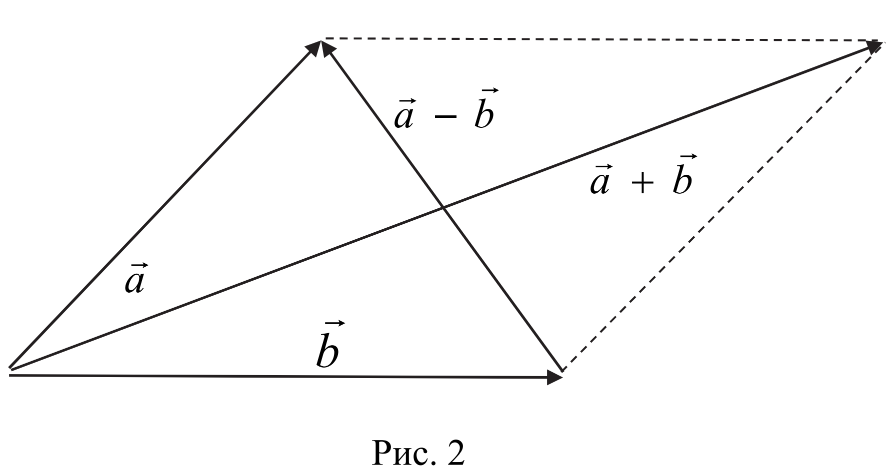


Рис. 2

Определение 1.10. Произведением $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется новый вектор $\bar{b}$, который обладает свойствами:

1° длина вектора $\bar{b}$ в $|\lambda|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$:

$$\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|;$$

2° векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\lambda > 0$ (рис. 3, *а*) и противоположно направленны, если $\lambda < 0$ (рис. 3, *б*).

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,
$\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a}$,
$(\lambda > 0)$

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,
$\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a}$,
$(\lambda < 0)$

Рис. 3

Свойства линейных операций над векторами:

1) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = (\lambda\vec{a})\mu$;

2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

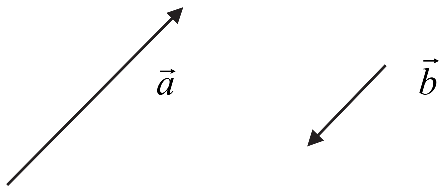
4) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

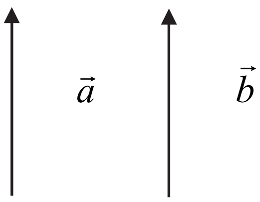
5) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

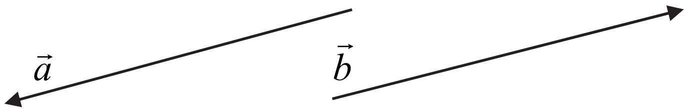
6) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

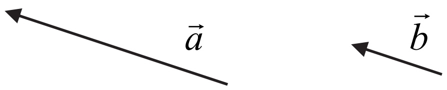
1.1.1. Практическое занятие

1) Укажите, какими являются следующие пары векторов:

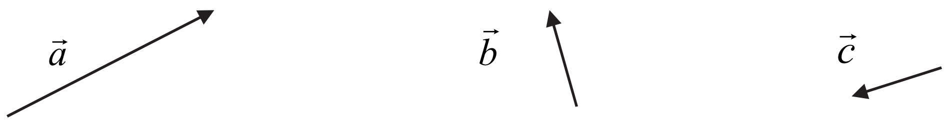
а) 

б) 

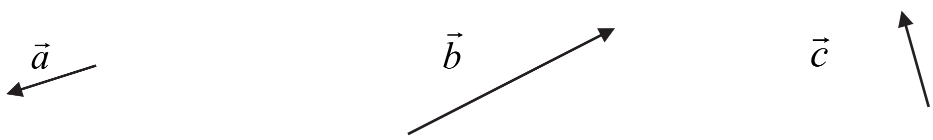
в) 

г) 

2) Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить следующие вектора: $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}$, $3\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$.



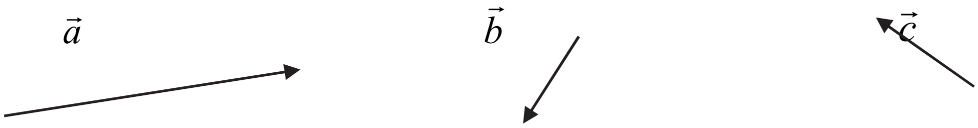
3) Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить следующие вектора: $\vec{c}-\vec{b}$, $2\vec{a}$, $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}$, $3\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$.



1.1.2. Самостоятельная работа

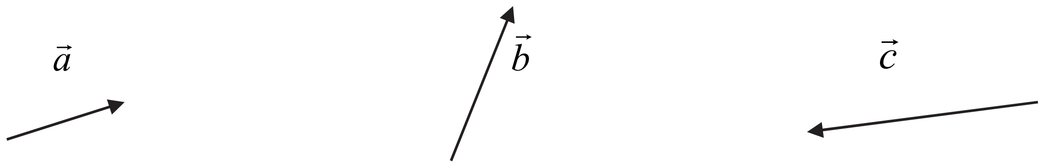
Вариант 1

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить следующие вектора: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{c}+2\vec{a}-\vec{b}$.



Вариант 2

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построить следующие вектора: $\vec{c}+\vec{b}$, $2\vec{c}-\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b}$.



1.2. Проекция вектора на ось. Координаты вектора

Определение 1.11. Осью называется прямая с заданным началом отсчета и направлением (направление на рисунках указывается стрелкой).

Определение 1.12. Проекцией вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось $0u$ называется число, равное:

$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось $0u$ одинаково направлены (рис. 4, *а*);

$-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось $0u$ направлены противоположно (рис. 4, *б*);

0, если вектор $\vec{a}$ и ось $0u$ перпендикулярны.

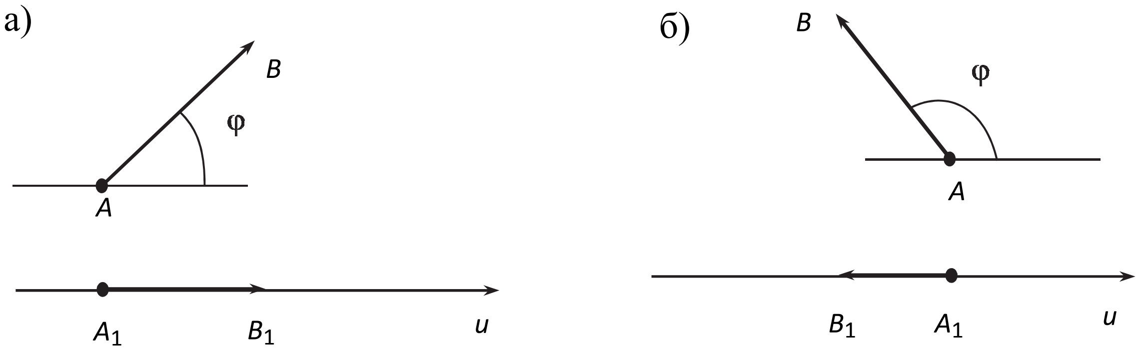


Рис. 4

Обозначается проекция вектора на ось 0*u* символом: $\text{пр}_u\vec{a}$. Из определения следует, что $\text{пр}_u\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между положительным направлением оси 0*u* и вектором $\vec{a}$.

Определение 1.13. Единичный вектор $\vec{e}$, направление которого совпадает с направлением оси 0*u*, называется направляющим вектором этой оси или ортом оси.

Свойства проекции:

1) При умножении вектора на число, его проекция также умножается на это число.

2) При сложении векторов, их проекции складываются.

Координаты вектора

Если заданы координаты начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ можно вычислить по формуле

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1\}.$$

Координаты вектора записываются в фигурные скобки через запятую или точку с запятой.

Рассмотрим декартову систему координат, т.е. три взаимно перпендикулярных, пересекающихся в точке 0, оси 0*x*, 0*y*, 0*z*. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные направляющие векторы этих осей и $\vec{a}$ – произвольный вектор. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и обозначим a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие оси координат (рис. 5).

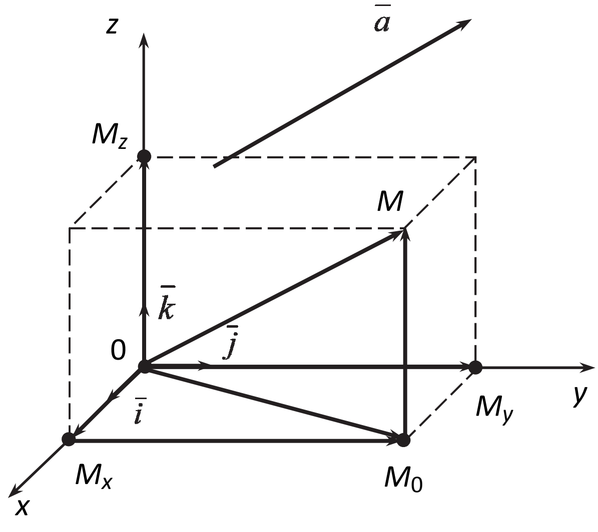


Рис. 5

Определение 1.14. Проекции вектора на оси координат называются координатами вектора. Координатная запись вектора $\vec{a}$ имеет вид:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

Пусть $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда правила сложения векторов и умножения вектора на число выражаются формулами:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \qquad \lambda\cdot\vec{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Пример 1.1. По данным точкам $A(2,\ 1,\ -1)$, $B(4,\ -3,\ 1)$, $C(2,\ 1,\ 0)$ найти координаты вектора $\vec{c} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$:

Решение:

Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{4-2, -3-1, 1-(-1)\} = \{2, -4, 2\};$$

$$BC = \{2-4, 1-(-3), 0-1\} = \{-2, 4, -1\}.$$

Теперь найдем координаты вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 3\cdot\{2, -4, 2\} - 2\cdot\{-2, 4, -1\} =$$

$$= \{6, -12, 6\} - \{-4, 8, -2\} = \{6-(-4), -12-8, 6-(-2)\} =$$

$$= \{10, -20, 8\}.$$

Ответ: $\vec{c}\{10, -20, 8\}$.

Пример 1.2. Даны координаты точек $A(-5, 1, 6)$, $B(1, 4, 3)$ и $C(6, 3{,}9)$.

Найти проекцию вектора $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Решение:

$$\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}.$$

Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{c}=\overrightarrow{BC} = \{5, -1, 6\}$$

$$\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\{6, 3, -3\},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=30-3-18=9,$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c} = \frac{9}{\sqrt{54}}.$$

1.2.1. Практическое занятие

1) Даны точки $M_1(3,4,1)$, $M_2(1,-2,3)$ и вектор $\vec{a}=\{1,4,8\}$. Найти $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) По данным точкам найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-4\overrightarrow{\mathrm{BC}}$:

$A(1, 4, -3)$, $B(0, -2, 1)$, $C(2, 3, 0)$;

$A(-1, -7, -1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-1, 2, -1)$;

$A(0, -5, 2)$, $B(-4, -4, 6)$, $C(0, 6, 1)$;

$A(2, -2, 4)$, $B(2, -1, 5)$, $C(-6, 6, -1)$.

3) Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(2, -3, 5)$, $B(-1, -1, 6)$, $C(0, 2, 1)$.

1.2.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Даны точки $M_1(2,0,6)$, $M_2(2,-2,0)$ и вектор $\vec{a}=\{-2,3,4\}$. Найти $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) По данным точкам найти координаты векторов $2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$:

$A(-1, 0, -8)$, $B(9, 0, -1)$, $C(3, -1, 2)$;

$A(5, -4, 2)$, $B(0, -2, 1)$, $C(2, 0, 0)$;

$A(-8 , -7, -3)$, $B(0, -2, 4)$, $C(-1, -1, 5)$.

3) Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(1, -4, 2)$, $B(-2, -1, 1)$, $C(2, 0, 1)$.

Вариант 2

1) Даны точки $M_1(3,2,-1)$, $M_2(-1,-3,2)$ и вектор $\vec{a}=\{2,2,5\}$. Найти $пр_{\vec{a}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

2) По данным точкам найти координаты векторов $-5\overrightarrow{\mathrm{CB}}-3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+6\overrightarrow{\mathrm{BC}}$:

$A(2, 4, -4)$, $B(2, 0, -4)$, $C(-2, 7, 2)$;

$A(-9, 2, -2)$, $B(-1, 2, -2)$, $C(0, -1, 4)$;

$A(4, 8, 1)$, $B(1, 5, 4)$, $C(3, 0, -1)$.

3) Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, если известны координаты точек $A(3, -2, 1)$, $B(-5, -2, 6)$, $C(4, 1, 0)$.

1.3. Длина вектора. Деление отрезка в данном отношении

Определение 1.15. Длина отрезка AB называется длиной, или модулем вектора, и обозначается: $\left|\overrightarrow{AB}\right|, |\vec{a}|$.

Нулевой вектор не имеет направления и длина его равна нулю.

Определение 1.16. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным и обозначается $\vec{e}$, т.е. $|\vec{e}|=1$.

Длина вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ .$$

Если заданы координаты начала и конца вектора $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Тогда длина вектора равна:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

Условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

Пример 1.3. Вычислить модуль вектора $|\vec{a}|$, если

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} - \frac{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{2} .$$

Приведем подобные в координатной записи вектора $|\vec{a}|$:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} - \left(\frac{2\vec{i}}{2} - \frac{\vec{j}}{2} - \frac{\vec{k}}{2} \right) =$$

$$= 2\vec{i} - \vec{i} - 3\vec{j} + \frac{\vec{j}}{2} - \vec{k} + \frac{\vec{k}}{2} = \vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} .$$

Коэффициенты векторов $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathrm{k}}$ и есть координаты вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{a} = \left\{1, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

Таким образом, длина вектора $\vec{a}$ равна:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+25+1}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{30}.$$

Ответ: $\left|\vec{a}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30}$ ед.

Пример 1.4. Проверить коллинеарность векторов

$$\overline{a} = \{2, -1, 3\} \text{ и } \overline{b} = \{-6, 3, -9\}.$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их координаты должны быть пропорциональны. Проверим это.

$$\frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9},$$

т.е. коэффициент пропорциональности существует и равен $-\frac{1}{3}$.

Следовательно, $\vec{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

Пример 1.5. Даны координаты точек $(-5, 1, 6), B(1, 4, 3)$ и $C(6, 3, 9)$.

Найти модуль вектора $\vec{a}=4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Решение:

Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{6, 3, -3\},$$
$$\overrightarrow{BC} = \{5, -1, 6\}.$$

Найдем координаты вектора $4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$:

$$4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4 \cdot \{6, 3, -3\} + \{5, -1, 6\} =$$
$$= \{24, 12, -12\} + \{5, -1, 6\} = \{29, 11, -6\}.$$

Тогда

$$\left|4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}.$$

Деление отрезка в данном отношении

Определение 1.17. Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} ;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} ;$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} .$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$, и внешним, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2, λ не может принимать значение –1, т.е. $\lambda \neq -1$.

Пример 1.6. Известны координаты концов отрезка AB: $A(2, 4, 1)$, $B(1, 0, 5)$. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении 1:4.

Имеем: $\lambda = \frac{1}{4}$, $r_M = \frac{\mathrm{r_A} + \lambda \mathrm{r_B}}{1+\lambda}$, где $r = x, y, z$.

Следовательно,

$$x_M = \frac{2 + \frac{1}{4} \cdot 1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{5} ;$$

$$y_M = \frac{4 + \frac{1}{4} \cdot 0}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{16}{5};$$

$$z_M = \frac{1 + \frac{1}{4} \cdot 5}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{5};$$

$$M\left(\frac{9}{5}; \frac{16}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

1.3.1. Практическое занятие

1) Вычислить модуль вектора $|\vec{a}|$, если

а) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + \dfrac{i - 2j + 4k}{2}$;

б) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} + \dfrac{3i - 6j + 9k}{3}$.

2) Установите правильное соответствие: при каком значении α длина вектора $\vec{a}$ в два раза меньше длины вектора $\vec{b}$, если известны координаты этих векторов?

а)	$\vec{a}\{2,3,\alpha\}$ $\vec{b}\{5,0,-3\}$	1) $\alpha = 1$
б)	$\vec{a}\{3,-1,1\}$ $\vec{b}\{3,\alpha,2\}$	2) $\alpha = -3$
в)	$\vec{a}\{2,\alpha,2\}$ $\vec{b}\{-1,4,-1\}$	3) $\alpha = 0$
г)	$\vec{a}\{1,\alpha,1\}$ $\vec{b}\{0,-2,0\}$	4) $\alpha = 5$
д)	$\vec{a}\{4,5,0\}$ $\vec{b}\{\alpha,4,-9\}$	5) $\alpha = -2$

3) Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении λ, если:

а) $A(4, -3, 0)$, $B(2, -1, -2)$, $\lambda = \frac{2}{3}$;

б) $A(0, 1, 1)$, $B(-1, 2, -3)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

1.3.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Вычислить модуль вектора $|\vec{a}|$, если $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} - \dfrac{\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}}{3}$.

2) Найдите значение α, при котором длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут равны, если известны координаты этих векторов:

а) $\vec{a}\{12, 3, \alpha\}$ $\vec{b}\{4, 1, -3\}$;

б) $\vec{a}\{2, 5, 1\}$ $\vec{b}\{4, \alpha, 2\}$;

в) $\vec{a}\{1, \alpha, 1\}$ $\vec{b}\{-1, 1, -1\}$.

3) Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении λ, если:

а) $A(2, -2, 1)$, $B(4, -5, -1)$, $\lambda = \frac{1}{3}$;

б) $A(1, 2, 0)$, $B(-3, 3, -3)$, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Вариант 2

1) Вычислить модуль вектора $|\vec{a}|$, если $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} + \dfrac{2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}}{4}$.

2) Найдите значение α, при котором длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут равны, если известны координаты этих векторов.

а) $\vec{a}\,\{1,\alpha,1\}$ $\vec{b}\,\{-1,1,-1\}$;

б) $\vec{a}\,\{10,\alpha,1\}$ $\vec{b}\,\{-1,-2,-10\}$;

в) $\vec{a}\,\{4,6,\alpha\}$ $\vec{b}\,\{7,2,-2\}$.

3) Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении λ, если:

а) $A(0, -6, 4)$, $B(1, 2, -2)$, $\lambda = \frac{1}{5}$;

б) $A(9, 3, 2)$, $B(-2, 0, -1)$, $\lambda = -\frac{4}{3}$.

1.4. Линейная комбинация векторов. Базис

Определение 1.18. Линейной комбинацией $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n$ называется вектор $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \overline{a}_k$, где числа c_k – коэффициенты линейной комбинации.

Определение 1.19. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство нулевому вектору их линейной комбинации возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \overrightarrow{a_k} = \vec{0}$ верна, если $c_k = 0$ для $\forall$ *k*.

В противном случае, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n$ – линейно зависимы.

Замечание. Если $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n$ – линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных.

Утверждение: любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми.

Пример 1.7. Разложить вектор $\overline{c} = \{9, 4\}$ по векторам $\overline{a} = \{2, -3\}$ и $\overline{b} = \{1, 2\}$.

Найдем коэффициенты α и β в разложении: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Запишем эту формулу в координатах. Сначала вычислим координаты правой части:

$$\alpha\,\overline{a}\;+\beta\,\overline{b}=\{2\alpha;\,-3\alpha\}+\{1\beta;\,2\beta\}=\{2\alpha+\beta;\,-3\alpha+2\beta\}.$$

Эти координаты должны быть равны соответствующим координатам вектора $\overline{c}$, т.е. $\{9,\,4\}=\{2\alpha+\beta;\,-3\alpha+2\beta\}$.

Следовательно,

$$\begin{cases} 9=2\alpha+\beta \\ 4=-3\alpha+2\beta. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом исключения переменных:

$$\begin{cases} \beta=9-2\alpha \\ 4=-3\alpha+2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=9-2\alpha \\ 7\alpha=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=5. \end{cases}$$

Ответ: $\overline{c}=2\overline{a}+5\overline{b}$.

Базис

Определение 1.20. Набор векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n$ образует базис в некотором пространстве векторов, если:

1) эти векторы линейно независимы;

2) любой другой вектор данного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса, то есть для $\forall$ (любого) вектора $\overline{b}$ из данного множества векторов:

$$\exists\, x_1,x_2,\cdots,x_n\in R:\overline{b}=x_1\overline{a}_1+x_2\overline{a}_2+\cdots x_n\overline{a}_n.$$

Вывод 1: на множестве векторов, расположенных на прямой, базис может быть образован с помощью одного ненулевого вектора.

Вывод 2: в пространстве векторов на плоскости базис может состоять из двух неколлинеарных векторов.

Вывод 3: в трехмерном пространстве базис могут образовать любые три некомпланарных вектора.

Пример 1.8. Даны векторы: $\vec{a}\{3,-2,1\},\vec{b}\{-1,1,-2\},\vec{c}\{2,1,-5\}$, $\vec{d}\{11,-6,5\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Составим определитель Δ из координат векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и вычислим его разложением, например, по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot 1^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-3+2) + 2 \cdot (3+4) + (-1-2) = 8 .$$

Так как $\Delta \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. числовые коэффициенты d_1, d_2, d_3 разложения

$$\vec{d} = d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b} + d_3 \vec{c} .$$

Последнее векторное равенство можно записать в виде системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3d_1 - d_2 + 2d_3 = 11, \\ -2d_1 + d_2 + d_3 = -6, \\ d_1 - 2d_2 - 3d_3 = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, например, по формулам Крамера, находим:

$$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 1.$$

Ответ: $\vec{d}\{\,2,\ 3, 1\,\}$.

1.4.1. Практическое занятие

1) Найти разложение вектора $\vec{a} = \{-11; -12\}$ по векторам $\vec{p} = \{-1; -3\}$ и $\vec{q} = \{3; 2\}$.

2) Найти разложение вектора $\vec{a} = \{4; 3\}$ по векторам $\vec{p} = \{-2; -1\}$ и $\vec{q} = \{4; 1\}$.

3) Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{a} = \{-11; -12\}$, $\vec{p} = \{-1; -3\}$ и $\vec{q} = \{3; 2\}$.

4) Даны векторы: $\vec{a}\{3, -2, 1\}, \vec{b}\{-1, 1, -2\}, \vec{c}\{2, 1, -5\}$, $\vec{d}\{11, -6, 5\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1.4.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Найти разложение вектора $\vec{a}=\{1;\,2\}$ по векторам $\vec{p}=\{11;\,0\}$ и $\vec{q}=\{-2;\,-2\}$.

2) Найти координаты вектора $\vec{a}=\{-1;\,2;\,5\}$ в базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, где $\vec{p}=\{2;\,-1;\,3\}$, $\vec{q}=\{3;\,0;\,-1\}$ и $\vec{r}=\{-2;\,3;\,1\}$.

3) Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{a}=\{-1;\,-2\}$, $\vec{p}=\{-2;\,-3\}$ и $\vec{q}=\{3;\,4\}$.

Вариант 2

1) Найти разложение вектора $\vec{a}=\{-2;\,0\}$ по векторам $\vec{p}=\{-1;\,-3\}$, $\vec{q}=\{0;\,3\}$.

2) Найти координаты вектора $\vec{a}=\{-2;\,0;\,9\}$ в базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, где $\vec{p}=\{0;\,-1;\,2\}$, $\vec{q}=\{1;\,0;\,-1\}$ и $\vec{r}=\{-1;\,2;\,4\}$.

3) Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{a}=\{-11;\,-12\}$, $\vec{p}=\{-1;\,-3\}$ и $\vec{q}=\{3;\,2\}$.

1.5. Скалярное произведение векторов и его свойства. Приложение скалярного произведения векторов

Определение 1.21. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Выражение скалярного произведения векторов $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ через координаты сомножителей:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1° $\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi$ прямой угол ($\vec{a}\perp\vec{b}$),

$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ – острый угол,

$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ – тупой угол;

2° $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

3° $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

4° $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Если $\vec{a} = \vec{b}$, то по определению $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Определение 1.22. Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$.

Используя свойства 1° – 4°, легко получить формулу для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ через координаты сомножителей. Скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Пример 1.9. Даны координаты точек $(-5, 1, 6)$, $B(1, 4, 3)$ и $C(6, 3, 9)$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

Решение:

Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{6, 3, -3\},$$

$$\overrightarrow{BC} = \{5, -1, 6\}.$$

Найдем координаты вектора $4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$:

$$4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\cdot\{6, 3, -3\} + \{5, -1, 6\} =$$

$$= \{24, 12, -12\} + \{5, -1, 6\} = \{29, 11, -6\}.$$

Следовательно,

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \{29, 11, -6\},$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\{5,-1,6\}.$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=29\cdot5+11\cdot(-1)+(-6)\cdot6=98.$$

Пример 1.10. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

а) находим: $3\vec{b}=-3\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}$,

$$\vec{a}\cdot3\vec{b}=4(-3)+0\cdot9+4\cdot6=12;$$

б) так как $\vec{a}=\{4,0,4\}$, $\vec{b}=\{-1,3,2\}$ и $\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{4}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Поскольку

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4(-1)+0\cdot3+4\cdot2=-4+0+8=4\neq0,$$

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не ортогональны.

Приложение скалярного произведения векторов

1) Вычисление угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\Leftrightarrow\quad a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

3) Вычисление проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Пример 1.11. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \{3, 0, 4\}$ и $\vec{b} = \{7, 0, 1\}$.

Пусть φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Найдем скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1 = 21 + 0 + 4 = 25.$$

Найдем модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{49+0+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Найдем $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 1.12. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2;\ |\vec{n}| = 5;\ \left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = 2\pi/3$.

Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) проекцию вектора $\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$ на вектор $\vec{b}$;

в) $\cos(\widehat{2\vec{b} - \vec{a}, 4\vec{b}})$.

Решение.

а) Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вычисляем $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-\vec{m} + 6\vec{n})\cdot(3\vec{m} + 4\vec{n}) =$$

$$= -\vec{m}\cdot 3\vec{m} - \vec{m}\cdot 4\vec{n} + 6\vec{n}\cdot 3\vec{m} + 6\vec{n}\cdot 4\vec{n} =$$

$$= -3\vec{m}\cdot\vec{m} - 4\vec{m}\cdot\vec{n} + 18\vec{m}\cdot\vec{n} + 24\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= -3\vec{m}\cdot\vec{m} + 14\vec{m}\cdot\vec{n} + 24\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= -3|\vec{m}|^2 + 14\,|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 24|\vec{n}|^2 =$$

$$= -3\,\cdot\,2^2 + 14\,\cdot 2\,\cdot 5\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 24\,\cdot\,5^2 = 518.$$

Получили $\vec{a}\cdot\vec{b} = 518.$

б) Найдем проекцию вектора $\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$ на вектор $\vec{b}$, т.е. $\text{пр}_{\vec{b}}\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$.

Согласно формуле $\text{пр}_{\vec{b}}\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right) = \frac{(4\vec{a}-5\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Выразим вектор $\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = 4\cdot(-\vec{m} + 6\vec{n}) - 5\cdot(3\vec{m} + 4\vec{n}) =$$

$$= -4\vec{m} + 24\vec{n} - 15\vec{m} - 20\vec{n} = -19\vec{m} + 4\vec{n}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)$ и $\vec{b}$:

$$\left(4\vec{a} - 5\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = (-19\vec{m} + 4\vec{n})\cdot(3\vec{m} + 4\vec{n}) =$$

$$= -57\vec{m}\cdot\vec{m} + 12\vec{n}\cdot\vec{m} - 76\vec{m}\cdot\vec{n} + 16\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= -57\vec{m}\cdot\vec{m} - 64\vec{m}\cdot\vec{n} + 16\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= -57|\vec{m}|^2 - 64|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 16|\vec{n}|^2 =$$

$$= -57\cdot 2^2 - 64\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 16\cdot 5^2 = -148;$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{(3\vec{m} + 4\vec{n})\cdot(3\vec{m} + 4\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{9\vec{m}\cdot\vec{m} + 12\vec{m}\cdot\vec{n} + 12\vec{n}\cdot\vec{m} + 16\vec{n}\cdot\vec{n}} =$$

$$= \sqrt{9\vec{m}\cdot\vec{m} + 24\vec{m}\cdot\vec{n} + 16\vec{n}\cdot\vec{n}} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{m}|^2 + 24|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 16|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 2^2 + 24\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 16\cdot 5^2} = \sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\vec{b}}(4\vec{a}–5\vec{b})=-\frac{148}{\sqrt{316}}.$$

в) Найдем $\cos(\widehat{2\vec{b}-\vec{a},4\vec{b}})$.

$$\cos\left(\widehat{2\vec{b}-\vec{a},4\vec{b}}\right)=\frac{\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot 4\vec{b}}{\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|\ \cdot\ \left|4\vec{b}\right|}.$$

Выразим векторы $\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)$ и $4\vec{b}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$2\vec{b}-\vec{a}=2\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})-(-m+6n)=$$

$$=6\vec{m}+8\vec{n}+\vec{m}-6\vec{n}=7\vec{m}+2\vec{n},$$

$$4\vec{b}=4\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})=12\vec{m}+16\vec{n}.$$

Тогда

$$\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot 4\vec{b}=(7\vec{m}+2\vec{n})\cdot(12\vec{m}+16\vec{n})=$$

$$=84\vec{m}\cdot\vec{m}+24\vec{n}\cdot\vec{m}+112\vec{m}\cdot\vec{n}+32\vec{n}\cdot\vec{n}=$$

$$=84\vec{m}\cdot\vec{m}+136\vec{m}\cdot\vec{n}+32\vec{n}\cdot\vec{n}=$$

$$=84|\vec{m}|^2+136|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\ \cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)+32|\vec{n}|^2=$$

$$=84\cdot 2^2+136\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+32\cdot 5^2=456;$$

$$\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{(7\vec{m}+2\vec{n})\cdot(7\vec{m}+2\vec{n})}=$$

$$=\sqrt{49\vec{m}\cdot\vec{m}+28\vec{m}\cdot\vec{n}+4\vec{n}\cdot\vec{n}}=$$

$$=\sqrt{49|\vec{m}|^2+28|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\ \cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)+4|\vec{n}|^2}=$$

$$=\sqrt{49\cdot 2^2+28\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot 5^2}=\sqrt{156};$$

$$\left|4\vec{b}\right| = \sqrt{(12\vec{m}+16\vec{n})\cdot(12\vec{m}+16\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{144\vec{m}\cdot\vec{m} + 384\vec{m}\cdot\vec{n} + 256\vec{n}\cdot\vec{n}} =$$

$$= \sqrt{144|\vec{m}|^2 + 384\,|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 256|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{144\cdot 2^2 + 384\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 256\cdot 5^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2\vec{b}–\vec{a}, 4\vec{b}}) = \frac{456}{\sqrt{156}\cdot\sqrt{5056}} = \frac{456}{\sqrt{788736}} \approx 0{,}5.$$

1.5.1. Практическое занятие

1) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3;\ -2; 1; 3; -3\}$ и $\vec{b} = \{6; 0; -3; 2;\ -1\}$.

2) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 4;\ 0; -1\}$ и $\vec{b} = \{4; 3; 2; 9;\ -3\}$.

3) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(2; –2; 3)$, $B(1; –1; 2)$, $C(4; –4; 5)$.

4) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(–2; 4; –6)$, $B(0; 2; – 4)$, $C(–6; 8; –10)$.

5) Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут перпендикулярными, если известны координаты этих векторов?

а) $\vec{a}\,\{12,3,\alpha\}$ $\vec{b}\,\{4,1,-3\}$;

б) $\vec{a}\,\{2,5,1\}$ $\vec{b}\,\{4,\alpha,2\}$.

1.5.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1;\ -1; 0; 5; -3\}$ и $\vec{b} = \{5; 2; 9; -2;\ -1\}$.

2) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3;\ -3; 6; 0; -2\}$ и $\vec{b} = \{2; 4; -1; 3;\ -3\}$.

3) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(1; –1; 5)$, $B(2; –1; 1)$, $C(5; –4; 4)$.

4) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(-6; 2; -4)$, $B(2; 0; -4)$, $C(-8; 10; -6)$.

5) Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут перпендикулярными, если известны координаты этих векторов:

а) $\vec{a}\,\{1,\alpha,1\}$ $\vec{b}\,\{-1, 1, -1\}$;

б) $\vec{a}\,\{10,\alpha,1\}$ $\vec{b}\,\{-1, -2, -10\}$.

Вариант 2

1) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 8;\ 0; -3\}$ и $\vec{b} = \{3; 1; 0; 11;\ -6\}$.

2) Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1;\ -3;\ 14;\ 1; -2\}$ и $\vec{b} = \{-4; 1; 0; 9;\ -1\}$.

3) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(0; -4; 3)$, $B(2; -2; 1)$, $C(3; -4; 0)$.

4) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если известны координаты точек $A(-1; 2; -2)$, $B(1; 0; -4)$, $C(-2; 7; -1)$.

5) Вычислить, при каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут перпендикулярными, если известны координаты этих векторов:

а) $\vec{a}\,\{1, 2, \alpha\}$ $\vec{b}\,\{4, 0, -3\}$;

б) $\vec{a}\,\{3, 5, 6\}$ $\vec{b}\,\{1, \alpha, 0\}$.

1.6. Векторное произведение векторов и его свойства. Приложение векторного произведения векторов

Определение 1.23. Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если кратчайший поворот первого вектора ко второму виден из конца третьего вектора против часовой стрелки, в противном случае тройка векторов называется левой.

Определение 1.24. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

а) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi;$$

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая.

Обозначение: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ или $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Выражение векторного произведения векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ через координаты сомножителей:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$;
2) $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$;
3) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$;
4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Пример 1.13. Даны векторы $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.

Найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$.

Решение:

Поскольку $3\vec{c} = 9\vec{i} + 15\vec{j}$, то

$$3\vec{c} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\vec{i} + 27\vec{k} + 15\vec{k} - 18\vec{j} = 30\vec{i} - 18\vec{j} + 42\vec{k}.$$

А следовательно, модуль векторного произведения равен:

$$\left|3\vec{c} \times \vec{b}\right| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988}.$$

Приложение векторного произведения векторов

1) Вычисление площади параллелограмма:

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Вычисление площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|,$$

где S – площадь треугольника с вершинами в точках A, B, C, $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$ (рис. 6).

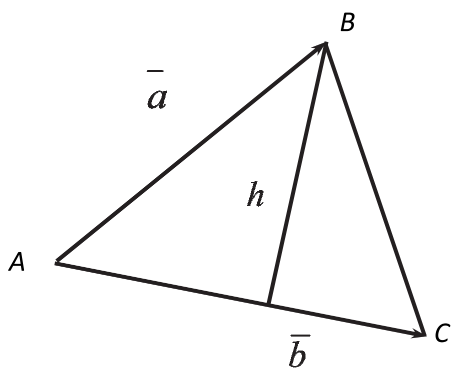


Рис. 6

Пример 1.14. Найти вектор $\overline{c}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}$ = {2, –2, –3} и $\overline{b}$ = {4, 0, 6}.

Решение:

Так как $\overline{c} \perp \overline{a}$ и $\overline{c} \perp \overline{b}$, то $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ (векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$).

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\overline{i} - 24\overline{j} + 8\overline{k}\ .$$

Таким образом, получили координаты вектора $\overline{c}$.

Ответ: $\overline{c}$ = {–12, –24, 8}.

Пример 1.15. Вычислить площадь параллелограмма *ABDC* и треугольника *ABC*, если *A*(0, 2, 2), *B*(1, –2, 3), *C*(–1, 2, 1), *D*(0, –2, 2).

Решение.

Найдем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB}$ = { 1, –4, 1},

$\overline{AC}$ = {–1, 0, –1}.

Найдем векторное произведение полученных векторов:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\overline{i} - 0\overline{j} + (-4)\overline{k}\ .$$

Найдем площадь параллелограмма *ABDC*, как длину полученного вектора

$$S_{ABCD} = \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{4^4 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 0 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ .$$

Зная площадь параллелограмма, найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $S_{ABDC} = 4\sqrt{2}$ кв. ед., $S_{ABC} = 2\sqrt{2}$ кв. ед.

1.6.1. Практическое занятие

1) Вычислить площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(2, 4, -2)$, $B(-1, 6, -3)$ и $C(1, 4, -1)$.

2) Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если известны координаты трех его вершин $A(-2, 1, 0)$, $B(2, 5, -2)$, $C(-1, 3, -1)$.

3) Вычислить значение α, при котором векторы $\vec{p}=4\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{q}=9\vec{b}-12\vec{a}$ будут коллинеарны, где $\vec{a}\{-13, -13, \alpha\}$, $\vec{b}\{39, 39, -105\}$.

4) Вычислить значение α, при котором векторы $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{b}-3\vec{a}$ будут коллинеарны, где $\vec{a}\{1, 2, \alpha\}$, $\vec{b}\{2, -1, 0\}$.

1.6.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Вычислить площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 3)$ и $C(5, 2, 6)$.

2) Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если известны координаты трех его вершин $A(-1, 2, -3)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-2, 4, -1)$.

3) Установите правильное соответствие, при каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарными, если известны координаты этих векторов:

а)	$\vec{a}\{12, -3, \alpha\}$ $\vec{b}\{-4, 1, -3\}$	1) –9
б)	$\vec{a}\{-2, 5, 1\}$ $\vec{b}\{4, \alpha, -2\}$	2) 9
в)	$\vec{a}\{1, \alpha, 1\}$ $\vec{b}\{-1, 1, -1\}$	3) 10
г)	$\vec{a}\{2, -5, -1\}$ $\vec{b}\{-4, \alpha, 2\}$	4) –10
д)	$\vec{a}\{-63, -18, \alpha\}$ $\vec{b}\{7, 3, 1\}$	5) –1
		6) 1

Вариант 2

1) Вычислить площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-3, -2, 1)$, $B(-2, 2, -1)$, $C(-4, 2, -1)$.

2) Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если известны координаты трех его вершин $A(-2, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(-1, 1, -3)$.

3) Установите правильное соответствие, при каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарными, если известны координаты этих векторов:

а)	$\vec{a}\{12,3,\alpha\}$ $\vec{b}\{4,1,-3\}$	1) 10
б)	$\vec{a}\{2,5,1\}$ $\vec{b}\{4,\alpha,2\}$	2) –8
в)	$\vec{a}\{2,-6,1\}$ $\vec{b}\{4,\alpha,2\}$	3) –9
г)	$\vec{a}\{-2,\alpha,-2\}$ $\vec{b}\{-1,1,-1\}$	4) 2
д)	$\vec{a}\{14,6,\alpha\}$ $\vec{b}\{7,3,-4\}$	5) –12
		6) 8

1.7. Смешанное произведение векторов и его свойства. Приложение смешанного произведения векторов

Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – три произвольных вектора.

Определение 1.25. **Смешанным произведением** векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$, т.е. $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Так как выполняется свойство $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$, то смешанное произведение можно обозначать проще: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Выражение смешанного произведения векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ через координаты сомножителей:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_y \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения векторов:

1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

2) Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{b}$$
$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{b} \cdot \overline{a} \cdot \overline{c}$$
$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{c} \cdot \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

3) Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. лежат в одной или параллельных плоскостях.

Пример 1.16. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.
Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение:

а) так как $5\vec{c} = 15\vec{i} + 25\vec{j}$, то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot 5\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0. Вычисляем

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т.е. векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

Ответ: а) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot 5\vec{c} = -480$; б) $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – не компланарны.

Приложения смешанного произведения векторов

1) Условие компланарности векторов:

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \ -\text{компланарны.}$$

2) Вычисление объема тетраэдра (параллелепипеда), построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рис. 7). Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарны, то

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| \quad \left(V_{\text{пар}} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|\right).$$

Пример 1.17. Найти объем пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

Решение

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = \{3, 6, 3\}$,

$\overline{AC} = \{1, 3, -2\}$,

$\overline{AD} = \{2, 2, 2\}$.

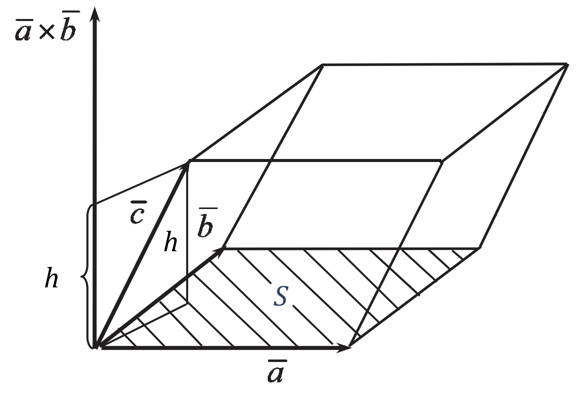


Рис. 7

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(6+4) - 6(2+4) + 3(2-6) = -18 .$$

Найдем объем пирамиды:

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}V_{п.п.} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|-18\right| = \frac{18}{6} = 3 .$$

Ответ: $V_{пир.} = 3$ куб. ед.

Пример 1.18. Проверить компланарность векторов $\overline{a}$ = {2, 3, –1}, $\overline{b}$ = {1, –1, 3} и $\overline{c}$ = {1, 9, –11}.

Решение

Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(11-27) - 3(-11-3) + (-1)(9+1) =$$

$$= 2(-16) - 3(-11-3) - 1\cdot 10 = -32 + 42 - 10 = 0 .$$

Так как $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – компланарны.

Ответ: $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – компланарны.

1.7.1. Практическое занятие

1) Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$ {2; 0; 1}, $\vec{b}$ {1; 0; 2} и $\vec{c}$ {3; 2; 1}.

2) Вычислить смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если A(–2, 6, 9), B(1, 0, –4), C(4, 3, 8).

3) Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин A(2, 1, 4), B(4, 3, 8), C(1, 1, 3), D(0, 2, –2).

4) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если известны координаты его вершин A(–1, –1, 1), B(–1, 3, –1), C(–2, –1, 5), D(4, 4, –2).

1.7.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}\{3,\ 0,\ 1\}$, $\vec{b}\{-1, 0, 2\}$ и $\vec{c}\{-2, 0, -1\}$.

2) Вычислить смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(3, 2, 1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(1, 0, 2)$.

3) Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(7, 7, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(3, 7, 3)$, $D(4, 1, -1)$.

4) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если известны координаты его вершин $A(-3, -2, 1)$, $B(-2, 2, -1)$, $C(-4, 2, -1)$, $D(6, 5, -2)$.

Вариант 2

1) Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}\{-1, 1, 0\}$, $\vec{b}\{10, -6, 0\}$ и $\vec{c}\{2, -4, 0\}$.

2) Вычислить смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(-1, 2, -3)$, $B(1, 0, -1)$, $C(-2, 4, -1)$.

3) Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(2, -2, 1)$, $B(-2, -4, -1)$, $C(5, 0, 5)$, $D(-4, 0, 1)$.

4) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если известны координаты его вершин $A(-2, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(2, 1, 1)$.

2. РАСЧЕТНО–ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Выбор варианта по расчетно–графическому заданию осуществляется в соответствии с порядковым номером студента в списке согласно групповому журналу.

2.1. Расчетно–графическое задание

Вариант 1

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}\{3,\ 2,\ 2\}$, $\vec{b}\{2,\ 3,\ 1\}$, $\vec{c}\{1,\ 1,\ 3\}$ и $\vec{d}\{5, 1, 11\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -5\vec{m} - 4\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 6\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}|=5$, $\left(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}\right) = \frac{5}{3}\pi$.

Найти:

а) $\left(-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i}+8\vec{j} - 7\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i} - 4\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$ и $D(6, -4, 1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середины ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(2, 4, 0)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(4, 6, 7)$, $B(2, -4, 1)$ и $C(-3, -4, 2)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:3.

Вариант 2

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {1, 2, 3}, $\vec{b}$ {–2, 3, –2}, $\vec{c}$ {3, –4, –5} и $\vec{d}$ {6, 20, 6} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}|$=1, $|\vec{n}|$=3, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \pi$. Найти:

а) $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 4\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\overrightarrow{-2a} + 4\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 4\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -9\vec{i}+4\vec{k}$, $\vec{b}= 2\vec{i} - 4\vec{j}+6\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$.
Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(4, 2, 3), B(–5, –4, 2), C(5, 7, –4) и D(6, 4, –7). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (4, 7, –3) приложена к точке A(5, –4, 2). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(8, 5, –4);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(3, 5, 4)$, $B(4, 2, -3)$ и $C(-2, 4, 7)$.
Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:2.

Вариант 3

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {4, 2, 5}, $\vec{b}$ {–3, 5, 6}, $\vec{c}$ {2, –3, –2} и $\vec{d}$ {9, 4, 18} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{b} = -3\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}|$=4, $|\vec{n}|$=5, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{4}{3}\pi$. Найти:

а) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 5\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\overline{-a} + 5\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 5\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(3, 5, 3), B(–3, 2, 8), C(–3, –2, 6) и D(7, 8, –2). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (–5, 4, 4) приложена к точке A(3, 7, –5). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(2, –4, 1);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-3, -5, 6)$, $B(3, 5, -4)$ и $C(2, 6, 4)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4:3.

Вариант 4

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ $\{1, 2, 4\}$, $\vec{b}$ $\{1, –1, 1\}$, $\vec{c}$ $\{2, 2, 4\}$ и $\vec{d}$ $\{–1, –4, –2\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = -6\vec{m} - 4\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=3, $|\vec{n}|$=2, $\left(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}\right) = \frac{5}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 3\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}$=$3\vec{i} - \vec{j}$+$5\vec{k}$, $\vec{b}$ =$2\vec{i} - 4\vec{j}$+$6\vec{k}$ и $\vec{c}$=$\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(–9, –7, 4), B(–4, 3, –1), C(5, –4, 2) и D(3, 4, 4). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (6, 5, –7) приложена к точке A(7, –6, 4). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(4, 9, –6);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(6, 5, -4)$, $B(-5, -2, 2)$ и $C(3, 3, 2)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 3:2.

Вариант 5

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {2, 3, 3}, $\vec{b}$ {–1, 4, –2}, $\vec{c}$ {–1, –2, 4} и $\vec{d}$ {4, 11, 11} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{b} = -4\vec{m} + 5\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{1}{3}\pi$. Найти:

а) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\overrightarrow{5a} + \vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(5\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i}+4\vec{j} - \vec{k}$.
Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(4, 3, 1), B(2, 7, 5), C(–4, –2, 4) и D(2, –3, –5). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (–9, 5, 7) приложена к точке A(1, 6, –3). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(4, –3, 5);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(6,4,5)$, $B(-7,1,8)$ и $C(2,-2,-7)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки *M*, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:4.

Вариант 6

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {3, 2, 1}, $\vec{b}$ {4, –1, 5}, $\vec{c}$ {2, –3, 1} и $\vec{d}$ {8, –4, 0} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{m}-3\vec{n}$ и $\vec{b}=4\vec{m}+2\vec{n}$, где $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=1$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}})=\frac{2}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$ и *D*4, 6, –5). Вычислить:

а) площадь грани *ABC*;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер *AB*, *AC*, *AD*;

в) объем пирамиды *ABCD*.

Задача 5. Сила $F = (5, 4, 11)$ приложена к точке $A(6, 1, -5)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(4, 2, -6)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-5, 4, 3), B(4, 5, 2)$ и $C(2, 7, -4)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 3:1.

Вариант 7

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ $\{1, 8, 4\}$, $\vec{b}$ $\{1, 3, 1\}$, $\vec{c}$ $\{-1, -6, -3\}$ и $\vec{d}$ $\{1, 2, 3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 6\vec{n}$ и $\vec{b} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=6$, $|\vec{n}|=3$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{5}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i} - \vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c}=6\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$ и $D(7, -9, 1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (3, -5, 7)$ приложена к точке $A(2, 3, -5)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(0, 4, 3)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(4, 3, 2), B(-4, -3, 5)$ и $C(6, 4, -3)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:3.

Вариант 8

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ $\{1, 3, 3\}$, $\vec{b}$ $\{-4, 1, -5\}$, $\vec{c}$ $\{-2, 1, -6\}$ и $\vec{d}$ $\{-3, 5, -9\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{а} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{в} = -2\vec{m} - 4\vec{n}$, где $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{7}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-6, -3, -5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$ и $D(4, -2, 9)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (4, 11, -6)$ приложена к точке $A(3, 5, 1)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(4, -2, -3)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(3, 4, 1)$, $B(5, -2, 6)$ и $C(4, 2, -7)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:5.

Вариант 9

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}\ \{7, 4, 2\}$, $\vec{b}\ \{-5, 0, 3\}$, $\vec{c}\ \{0, 11, 4\}$ и $\vec{d}\ \{31, -43, -20\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 4\vec{m} + 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=5$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{3}{2}\pi$. Найти:

а) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$;

в) $\cos(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}})$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}$=$7\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}$=$\vec{i}-11\vec{j}$+$3\vec{k}$ и $\vec{c}$=$5\vec{i}$+$5\vec{j}+3\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$ и $D(2, 1, 4)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (-4, 5, -7)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(7, 0, -3)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$ и $C(2,-5,4)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4:3.

Вариант 10

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}\ \{1, 5, 3\}$, $\vec{b}\ \{2, 1, -1\}$, $\vec{c}\ \{4, 2, 1\}$ и $\vec{d}\ \{31, 20, 9\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=-2\vec{m}+3\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=2, $|\vec{n}|$=5, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}})=2\pi$. Найти:

а) $(-3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\overrightarrow{2a} + 3\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 3\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}$=$2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath}$+$5\vec{k}$, $\vec{b}$=$-\vec{\imath}$+$2\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ и $\vec{c}$=$3\vec{\imath}$+$2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$ и $D(1, -5, 2)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (2, 19, -4)$ приложена к точке $A(5, 3, 4)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(6, -4, -1)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(3, 4, 6)$, $B(-4, 6, 4)$ и $C(5, -2, -3)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4:3.

Вариант 11

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ $\{-1, 4, 3\}$, $\vec{b}$ $\{-2, -7, 1\}$, $\vec{c}$ $\{3, 2, -4\}$ и $\vec{d}$ $\{6, 20, -3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=4, $|\vec{n}|$=7, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{4}{3}\pi$. Найти:

а) $(-3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\overline{2a} - \vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -9\vec{\imath}+4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}+4\vec{k}$ и $\vec{c} = -5\vec{\imath}+10\vec{\jmath} - 20\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$ и $D(-3, -5, 2)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (-3, 1, -9)$ приложена к точке $A(6, -3, 5)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(9, 5, -7)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(5, 4, 4)$, $B(-5, 2, 3)$ и $C(4, 2, -5)$.

Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{3BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:3.

Вариант 12

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {–3, 1, 3}, $\vec{b}$ {5, 7, –2}, $\vec{c}$ {1, –4, 6} и $\vec{d}$ {14, 9, –1} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = -5\vec{m} + 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=5, $|\vec{n}|$=4, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \pi$. Найти:

а) $\left(-3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{-\vec{a};\ \vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(–7, –6, –5), B(5, 1, –3), C(8, –4, 0) и D(3, 4, –7). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (5, –3, 9) приложена к точке A(3, 4, –6). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(2, 6, 5);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-4, -2, -5)$, $B(3, 7, 2)$ и $C(4, 6, -3)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4:3.

Вариант 13

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {–2, –4, 3}, $\vec{b}$ {0, –2, 3}, $\vec{c}$ {1, –3, 1} и $\vec{d}$ {–8, –10, 13} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} - 2\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=2, $|\vec{n}|$=5, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{1}{2}\pi$. Найти:

а) $\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ -2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = 9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 21\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках *A*(5, –4, 4), *B*(–4, –6, 5), *C*(3, 2, –7) и *D*(6, 2, –9). Вычислить:

а) площадь грани *ABC*;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер *AB*, *AC*, *AD*;

в) объем пирамиды *ABCD*.

Задача 5. Сила *F* = (4, 4, 18) приложена к точке *A*(8, 4, –6). Вычислить:

а) работу силы *F* в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* в положение *B*(4, 8, 0);

б) модуль момента силы *F* относительно точки *B*.

Задача 6. Даны координаты точек $A(2, 4, 6), B(-3, 5, 1)$ и $C(4, -5, -4)$.

Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:5.

Вариант 14

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {1, 3, 1}, $\vec{b}$ {–3, –6, 7}, $\vec{c}$ {4, 5, 1} и $\vec{d}$ {19, 33, 0} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = 7\vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=3, $|\vec{n}|$=4, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{5}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{2\vec{a};\ \vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = -9\vec{i} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(5, 3, 6), B(–3, –4, 4), C(5, –6, 8) и D(4, 0, –3). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (8, 14, –6) приложена к точке A(10, –8, 4). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(16, 10, –8);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(4, 5, 3)$, $B(-4, 2, 3)$ и $C(5, -6, -2)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 2:3.

Вариант 15

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {4, –5, –1}, $\vec{b}$ {–2, 4, 1}, $\vec{c}$ {3, –1, 2} и $\vec{d}$ {–5, 11, 1} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=6, $|\vec{n}|$=3, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}})=\frac{2}{3}\pi$. Найти:

а) $(2\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}+2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{i}+8\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{c}=8\vec{i}+12\vec{j}-8\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках A(–6, 4, 5), B(5, –7, 3), C(4, 2, –8) и D(2, 8, –3). Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (–10, 8, 8) приложена к точке A(6, 14, –10). Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(4, –8, 1);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-2, 3, -4), B(3, -1, 2)$ и $C(4, 2, 4)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 5:3.

Вариант 16

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {2, 3, 4}, $\vec{b}$ {–4, 3, –1}, $\vec{c}$ {3, 1, 2} и $\vec{d}$ {14, 14, 20} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=1, $|\vec{n}|$=6, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{3}{2}\pi$. Найти:

а) $(4\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} - 2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a}; -2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5, 2, 4)$, $B(–3, 5, –7)$, $C(1, –5, 8)$ и $D(9, –3, 5)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (12, 10, –14)$ приложена к точке $A(14, –12, 8)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(8, 18, –12)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(3, 2, 4), B(-2, 1, 3)$ и $C(2, -2, -1)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 5:2.

Вариант 17

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {4, –3, 2}, $\vec{b}$ {–2, 5, 1}, $\vec{c}$ {3, 2, –7} и $\vec{d}$ {–4, 22, –13} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{m}+6\vec{n}$ и $\vec{b}=4\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=7$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}})=\frac{1}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{3\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=-4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$ и $D(6, -1, 5)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (-18, 10, 14)$ приложена к точке $A(2, 12, -6)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(8, -6, 10)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(10, 6, 3)$, $B(-2, 4, 5)$ и $C(3, -4, -6)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 5:4.

Вариант 18

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}\ \{-6, 4, 5\}$, $\vec{b}\ \{-5, 3, -1\}$, $\vec{c}\ \{1, 2, 3\}$ и $\vec{d}\ \{-4, 11, 20\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{в} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=6$, $|\vec{n}|=3$, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \frac{5}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(-2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(3\vec{a}+2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{3\vec{a};\ 2\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=-5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{\imath}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$ и $D(3, 2, 1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила $F = (10, 8, 22)$ приложена к точке $A(12, 2, -10)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(8, 4, -12)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$ и $C(3,-3,3)$.

Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 4:3.

Вариант 19

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}\ \{3, -5, 6\}$, $\vec{b}\ \{-4, 3, -4\}$, $\vec{c}\ \{7, 2, 1\}$ и $\vec{d}\ \{-1, 18, -16\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = -\vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 6\vec{m} - 7\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=2, $|\vec{n}|$=6, $\left(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}\right) = \frac{4}{3}\pi$. Найти:

а) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 4\vec{b}\right)$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}\left(\vec{a} + 4\vec{b}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{\vec{a};\ 4\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7, 4, 9)$, $B(1, –2, –3)$, $C(–5, –3, 0)$ и $D(1, –3, 4)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Задача 5. Сила F = (6, –10, 14) приложена к точке $A(4, 6, –10)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(0, 8, 6)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-2, -3, -2)$, $B(1, 4, 2)$ и $C(1, -3, 3)$.

Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 5:4.

Вариант 20

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ {4, –7, 4}, $\vec{b}$ {–3, 2, 1}, $\vec{c}$ {9, 5, 3} и $\vec{d}$ {–10, –13, 8} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{m} - 6\vec{n}$ и $\vec{b} = -3\vec{m} + 4\vec{n}$, где $|\vec{m}|$=4, $|\vec{n}|$=5, $(\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}) = \pi$. Найти:

а) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} - \vec{b})$;

б) $\text{пр}_{\vec{b}}(-3\vec{a} - 2\vec{b})$;

в) $\cos\left(\widehat{-3\vec{a};\ -\vec{b}}\right)$.

Задача 3. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках *A*(3, –5, –2), *B*(–4, 2, 3), *C*(1, 5, 7) и *D*(–2, –4, 5). Вычислить:

а) площадь грани *ABC*;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребер *AB, AC, AD*;

в) объем пирамиды *ABCD*.

Задача 5. Сила *F* = (–8, 10, 14) приложена к точке *A*(8, –4, 6). Вычислить:

а) работу силы *F* в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* в положение *B*(7, 0, –3);

б) модуль момента силы *F* относительно точки *B*.

Задача 6. Даны координаты точек $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$ и $C(1,4,5)$.
Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$=$4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$=$4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;
в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;
г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 5:2.

2.2. Решение типового варианта

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}=\{3,-1,0\}, \vec{b}=\{2,3,1\}, \vec{c}=\{-1,4,3\}$ и $\vec{d}=\{2,\ 3,7\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение:

Вычисляем определитель, составленный из координат векторов базиса

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Так как определитель отличен от нуля, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, и вектор $\vec{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}.$$

Подставляем вместо векторов их координаты:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\alpha+2\beta-\gamma \\ -\alpha+3\beta+4\gamma \\ \beta+3\gamma \end{pmatrix}.$$

Меняем местами правую и левую часть. Из равенства матриц получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta-\gamma=2, \\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3, \\ \beta+3\gamma=7. \end{cases}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера.

Находим $\Delta=22$ (найден ранее)

$$\Delta(\alpha)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=66,$$

$$\Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \frac{\Delta(\alpha)}{\Delta} = 3,$$

$$\beta = \frac{\Delta(\beta)}{\Delta} = -2,$$

$$\gamma = \frac{\Delta(\gamma)}{\Delta} = 3,$$

поэтому $\vec{d}=\{3,-2,3\}$ или $\vec{d}= 3\vec{a} - 2\vec{b}+3\vec{c}$.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{m}+6\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+4\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$; $|\vec{n}| = 5$; $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 2\pi/3$.

Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) проекцию вектора $(4\vec{a} - 5\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$;

в) $\cos(\widehat{2\vec{b} - \vec{a}, 4\vec{b}})$.

Решение.

а) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вычисляем $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=(-\vec{m}+6\vec{n}) \cdot (3\vec{m}+4\vec{n})=$$

$$= -\vec{m} \cdot 3\vec{m} - \vec{m} \cdot 4\vec{n} + 6\vec{n} \cdot 3\vec{m} + 6\vec{n} \cdot 4\vec{n} =$$

$$= -3\vec{m} \cdot \vec{m} - 4\vec{m} \cdot \vec{n} + 18\vec{m} \cdot \vec{n} + 24\vec{n} \cdot \vec{n} =$$

$$= -3\vec{m} \cdot \vec{m} + 14\vec{m} \cdot \vec{n} + 24\vec{n} \cdot \vec{n} =$$

$$= -3|\vec{m}|^2 + 14\,|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|\,\cos(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) + 24|\vec{n}|^2 =$$

$$= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 24 \cdot 5^2 = 518.$$

Получили $\vec{a} \cdot \vec{b} = 518$.

б) Найти проекцию вектора $\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$ на вектор $\vec{b}$, т.е. $\text{пр}_{\vec{b}}\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$.

Согласно формуле $\text{пр}_{\vec{b}}\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)=\frac{\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Выразим вектор $\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$4\vec{a}-5\vec{b}=4\cdot(-\vec{m}+6\vec{n})-5\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})=$$
$$=-4\vec{m}+24\vec{n}-15\vec{m}-20\vec{n}=-19\vec{m}+4\vec{n}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$ и $\vec{b}$:

$$\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=(-19\vec{m}+4\vec{n})\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})=$$
$$=-57\vec{m}\cdot\vec{m}+12\vec{n}\cdot\vec{m}-76\vec{m}\cdot\vec{n}+16\vec{n}\cdot\vec{n}=$$
$$=-57\vec{m}\cdot\vec{m}-64\vec{m}\cdot\vec{n}+16\vec{n}\cdot\vec{n}=$$
$$=-57|\vec{m}|^2-64|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)+16|\vec{n}|^2=$$
$$=-57\cdot 2^2-64\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+16\cdot 5^2=-148.$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{(3\vec{m}+4\vec{n})\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})}=$$
$$=\sqrt{9\vec{m}\cdot\vec{m}+12\vec{m}\cdot\vec{n}+12\vec{n}\cdot\vec{m}+16\vec{n}\cdot\vec{n}}=$$
$$=\sqrt{9\vec{m}\cdot\vec{m}+24\vec{m}\cdot\vec{n}+16\vec{n}\cdot\vec{n}}=$$
$$=\sqrt{9|\vec{m}|^2+24|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\,\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)+16|\vec{n}|^2}=$$
$$\sqrt{9\cdot 2^2+24\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+16\cdot 5^2}=\sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\vec{b}}(4\vec{a}-5\vec{b})=-\frac{148}{\sqrt{316}}.$$

в) Найти $\cos(\widehat{2\vec{b}-\vec{a},4\vec{b}})$:

$$\cos\left(\widehat{2\vec{b}-\vec{a},4\vec{b}}\right)=\frac{\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot 4\vec{b}}{\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|\cdot\left|4\vec{b}\right|}.$$

Выразим векторы $\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)$ и $4\vec{b}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$2\vec{b}-\vec{a}=2\cdot(3\vec{m}+4\vec{n})-(-m+6n)=$$
$$=6\vec{m}+8\vec{n}+\vec{m}-6\vec{n}=7\vec{m}+2\vec{n},$$

$$4\vec{b} = 4\cdot(3\vec{m}+4\vec{n}) = 12\vec{m}+16\vec{n}.$$

Тогда

$$\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot 4\vec{b}=(7\vec{m}+2\vec{n})\cdot(12\vec{m}+16\vec{n})=$$

$$= 84\vec{m}\cdot\vec{m} + 24\vec{n}\cdot\vec{m} + 112\vec{m}\cdot\vec{n} + 32\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= 84\vec{m}\cdot\vec{m} + 136\vec{m}\cdot\vec{n} + 32\vec{n}\cdot\vec{n} =$$

$$= 84|\vec{m}|^2 + 136|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\ \cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 32|\vec{n}|^2 =$$

$$= 84\cdot 2^2 + 136\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 32\cdot 5^2 = 456;$$

$$\left|2\vec{b}-\vec{a}\right| = \sqrt{(7\vec{m}+2\vec{n})\cdot(7\vec{m}+2\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{49\vec{m}\cdot\vec{m} + 28\vec{m}\cdot\vec{n} + 4\vec{n}\cdot\vec{n}} =$$

$$= \sqrt{49|\vec{m}|^2 + 28|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\ \cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 4|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{49\cdot 2^2 + 28\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot 5^2} = \sqrt{156};$$

$$\left|4\vec{b}\right| = \sqrt{(12\vec{m}+16\vec{n})\cdot(12\vec{m}+16\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{144\vec{m}\cdot\vec{m} + 384\vec{m}\cdot\vec{n} + 256\vec{n}\cdot\vec{n}} =$$

$$= \sqrt{144|\vec{m}|^2 + 384\,|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\ \cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) + 256|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{144\cdot 2^2 + 384\cdot 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 256\cdot 5^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2\vec{b}-\vec{a}, 4\vec{b}}) = \frac{456}{\sqrt{156}\cdot\sqrt{5056}} = \frac{456}{\sqrt{788736}} \approx 0{,}5.$$

Задача 3. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{\imath}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+2\vec{k}$ и $\vec{c}=3\vec{\imath}+5\vec{\jmath}$. Необходимо:

а) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $5\vec{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\vec{c}$ и $\vec{b}$;

в) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $3\vec{b}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение:

а) Так как $5\vec{c}$=$15\vec{\imath}$+$25\vec{\jmath}$, то

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot5\vec{c}=\begin{vmatrix}4&0&4\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}=-100-180-200=-480.$$

б) Поскольку $3\vec{c}$=$9\vec{\imath}$+$15\vec{\jmath}$, то

$$3\vec{c}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\9&15&0\\-1&3&2\end{vmatrix}=30\vec{\imath}+27\vec{k}+15\vec{k}-18\vec{\jmath}=30\vec{\imath}-18\vec{\jmath}+42\vec{k},$$

$$\left|3\vec{c}\times\vec{b}\right|=\sqrt{30^2+(-18)^2+42^2}=\sqrt{2988.}$$

в) Находим: $3\vec{b}=-3\vec{\imath}+9\vec{\jmath}+6\vec{k}$,

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{3b}=4(-3)+0\cdot9+4\cdot6=12.$$

г) Так как $\vec{a}$={4, 0, 4}, $\vec{b}$={−1, 3, 2} и $\frac{4}{-1}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{4}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Поскольку

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4(-1)+0\cdot3+4\cdot2\neq0,$$

то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не ортогональны;

д) векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0. Вычисляем

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}4&0&4\\-1&3&2\\3&5&0\end{vmatrix}=-20-36-40\neq0,$$

т.е. векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

Задача 4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить:

а) площадь грани ABC;

б) площадь сечения, проходящего через середины ребер AB, AC, AD;

в) объем пирамиды $ABCD$.

Решение:

а) Известно, что $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,4,-1\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{-1,-1,-2\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2+5^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{110}.$$

б) Середины ребер *AB*, *BC* и *AD* находятся в точках *K*, *M* и *N*.

Координаты середины отрезка есть полусумма координат концов этого отрезка. Таким образом, получаем:

$$K(3;\,5;\,3{,}5),\ M(1{,}5;\,2{,}5;\,3),\ N(0;\,1{,}5;\,1{,}5).$$

Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}\right|.$$

Находим координаты векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KN}$:

$$\overrightarrow{KM}=\{-1{,}5;\ -2{,}5;\ -0{,}5\},$$

$$\overrightarrow{KN}=\{-3;\ -3{,}5;\ -2\},$$

$$\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5\\ -3 & -3{,}5 & -2\end{vmatrix}=3{,}25\vec{i}-1{,}5\vec{j}-2{,}25\vec{k},$$

$$S_{\text{сеч}}=\frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2+(-1{,}5)^2+(-2{,}25)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17{,}875.}$$

в) Поскольку $V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,4,-1\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{-1,-1,-2\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{-4,-3,-5\},$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=11,$$

то $V=\frac{11}{6}$.

Задача 5. Сила $F = (2, 3, -5)$ приложена к точке $A(1, -2, 2)$. Вычислить:

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1, 4, 0)$;

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Решение:

а) Так как $A=F\cdot s$,

$$s=\overrightarrow{AB}=\{0,6,-2\},$$

то

$$F\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot 0+3\cdot 6+(-5)(-2)=28,$$
$$A=28.$$

б) Момент силы $M=\overrightarrow{BA}\times F$, $\overrightarrow{BA}=\{0,-6,2\}$,

$$\overrightarrow{BA}\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=24\vec{i}+4\vec{j}+12\vec{k}.$$

Следовательно, $|M|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{46}.$

Задача 6. Даны координаты точек $A(-5,1,6), B(1,4,3)$ и $C(6,3,9)$. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}=\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:3.

Решение:

а) Зная координаты точек A, B и C, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{6,3,-3\},$$

$$\overrightarrow{BC}=\{5,-1,6\}.$$

Найдем координаты вектора $4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$:

$$4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=4\cdot\{6,3,-3\}+\{5,-1,6\}=$$
$$=\{24,12,-12\}+\{5,-1,6\}=\{29,11,-6\}.$$

Тогда

$$\left|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998}.$$

б) Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\{29,11,-6\},\qquad \vec{b}=\overrightarrow{BC}=\{5,-1,6\}.$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}=29\cdot5+11\cdot(-1)+(-6)\cdot6=98.$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|},$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{BC}=\{5,-1,6\},\quad \vec{d}=\overrightarrow{AB}=\{6,3,-3\},$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=30-3-18=9,\quad \left|\vec{d}\right|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}.$$

То

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}=\frac{9}{\sqrt{54}}.$$

г) Имеем: $\lambda=\frac{1}{3}$, $r_M=\frac{r_A+\lambda r_B}{1+\lambda}$.

Следовательно,

$$x_M=\frac{-5+\frac{1}{3}\cdot1}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{7}{2}\ ;$$

$$y_M=\frac{1+4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{7}{4};$$

$$z_M=\frac{6+\frac{1}{3}\cdot3}{1+\frac{1}{3}}=\frac{21}{4};$$

$$M\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{4};\frac{21}{4}\right).$$

3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

3.1. Типовой вариант контрольной работы

Здесь приведены два типовых варианта контрольной работы по дидактической единице «Векторная алгебра».

Вариант 1

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1;+2;3\}$, $\vec{b}=\{-3;0;-1\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+\vec{b}$?

Задача 2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1;3;-1\}$, $\vec{b}=\{3;-2;3\}$?

Задача 3. Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=\{-2;3;+1\}$, $\vec{b}=\{1;+1;-3\}$, $\vec{c}=\{1;-9;1\}$?

Задача 4. При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны, если $A(\alpha;-2;3), B(0;-1;2), C(3;-4;5)$.

Задача 5. Даны координаты точек $A(-1;2;1), B(-1;3;-4), C(0;1;-2)$.

Вычислить:

1) $\text{пр}_{(\vec{AB}+\vec{CB})}(2\vec{AC}+3\vec{CB})$;

2) модуль вектора $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;

3) угол между векторами $\angle\left((\vec{AB}-\vec{CB}),\vec{AB}\right)$;

4) орт вектора $\vec{AB}$;

5) скалярное произведение векторов $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;

6) векторное произведение векторов $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;

7) смешанное произведение векторов $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$.

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A(1; -1;1)$, $B(-1; 2; -4)$, $C(2;0;-6)$; $D(-2; 5; 1)$.

Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC.

Вариант 2

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1;0;1\}$, $\vec{b}=\{-2;3;5\}$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$?

Задача 2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\{2;1;4\}$, $\vec{b}=\{4;1;3\}$?

Задача 3. Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;1\}$, $\vec{c}=\{3;-1;-2\}$?

Задача 4. При каком значении α векторы $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$ перпендикулярны, если $A(0;-3;\alpha)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$?

Задача 5. Даны координаты точек $A(0;1;2)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;2;5)$.

Вычислить:

1) пр$_{(A\vec{B}+C\vec{B})}(2A\vec{C}+3C\vec{B})$;

2) модуль вектора $\left|A\vec{B}+4B\vec{C}\right|$;

3) угол между векторами $\angle\left((A\vec{B}-C\vec{B}), A\vec{B}\right)$;

4) орт вектора $A\vec{B}$;

5) скалярное произведение векторов $\left(\left(A\vec{B}+4B\vec{C}\right),\left(B\vec{A}-A\vec{C}\right)\right)$;

6) векторное произведение векторов $\left[\left(A\vec{B}+2B\vec{C}\right),\left(C\vec{B}-A\vec{B}\right)\right]$;

7) смешанное произведение векторов $A\vec{B}\cdot B\vec{C}\cdot A\vec{C}$.

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A(0;5;0)$, $B(2;3;-4)$, $C(0;0;6)$, $D(-3;1;-1)$.

Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC.

3.2. Решение типового варианта контрольной работы

Задача 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \{2;-1;5\}$, $\vec{b} = \{7;1;-3\}$?

Решение:

Вычислим координаты векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$:

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} = \{5\cdot 2 + 3\cdot 7; 5\cdot(-1) + 3\cdot 1; 5\cdot 5 + 3\cdot(-3)\} = \{31;-2;16\},$$

$$\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b} = \{4\cdot 2 + 7; 4\cdot(-1) + 1; 4\cdot 5 + (-3)\} = \{15;-3;17\}.$$

Два вектора коллинеарны, если их координаты пропорциональны, следовательно, проверим:

$$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2} = \frac{31}{15} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{16}{17}, \Rightarrow \vec{c}_1, \vec{c}_2 \text{ не коллинеарны.}$$

Задача 2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = \{-7;1;2\}$, $\vec{b} = \{3;2;-1\}$?

Решение: Два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0.

Скалярное произведение векторов, заданных в координатах, вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

Вычислим скалярное произведение:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-7\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot(-1)=-21\neq 0\Rightarrow$$

Следовательно, векторы не перпендикулярны.

Задача 3. Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{0;2;1\},\vec{c}=\{2;0;3\}$?

Решение: Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0.

Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}\Rightarrow$$

Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-6+4+0-(-4)-0-0=2\neq 0\Rightarrow$$

Векторы не компланарны.

Задача 4. При каком значении α векторы $A\vec{B},A\vec{C}$ перпендикулярны, если $A(2;1;\alpha),B(3;1;4),C(2;5;3)$?

Решение:
Для определения α, при котором векторы перпендикулярны, необходимо использовать условие перпендикулярности двух векторов (это условие было рассмотрено в задаче 2) $\Rightarrow \alpha$ мы сможем найти из условия:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

Для этого найдем координаты векторов $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$, заданных координатами точек начала и конца вектора. В этом случае координаты равны разности координат точек, задающих конец и начало вектора $\Rightarrow$ $A\vec{B}=\{3-2;1-1;4-\alpha\}=\{1;0;4-\alpha\},A\vec{C}=\{2-2;5-1;3-\alpha\}=\{0;4;3-\alpha\}\Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 0 + 0\cdot 4 + (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) =$$

$$= 0 + 0 + (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) = (4-\alpha)\cdot(3-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 4, \alpha = 3.$$

Ответ: векторы $A\vec{B}$ и $A\vec{C}$ перпендикулярны при $\alpha = 4$ и при $\alpha = 3$.

Задача 5. Даны точки: $A(1;0;-1), B(0;1;3), C(2;0;1)$.

Найти:

1) пр$_{\left(A\vec{B}+C\vec{B}\right)}\left(2A\vec{C}+3C\vec{B}\right)$;
2) модуль вектора $\left|A\vec{B}+4B\vec{C}\right|$;
3) угол между векторами $\angle\left(A\vec{B}-C\vec{B}, A\vec{B}\right)$;
4) орт вектора $A\vec{B}$;
5) скалярное произведение векторов $\left(\left(A\vec{B}+4B\vec{C}\right),\left(B\vec{A}-A\vec{C}\right)\right)$;
6) векторное произведение векторов $\left[\left(A\vec{B}+2B\vec{C}\right),\left(C\vec{B}-A\vec{B}\right)\right]$;
7) смешанное произведение векторов $A\vec{B}\cdot B\vec{C}\cdot A\vec{C}$.

Решение:

1) Из определения скалярного произведения следует, что проекцию вектора на вектор можно вычислить по формуле

$$\text{пр}_{B\vec{C}}A\vec{B} = \frac{\left(A\vec{B}, B\vec{C}\right)}{\left|B\vec{C}\right|},$$

где скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z, \text{ где } \vec{a} = \left\{a_x;a_y;a_z\right\}, \vec{b} = \left\{b_x;b_y;b_z\right\},$$

и длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} \Rightarrow$ в нашем случае формула получаем:

$$np_{A\vec{B}+C\vec{B}}\left(2A\vec{C}+3C\vec{B}\right) = \frac{\left(\left(2A\vec{C}+3C\vec{B}\right),\left(A\vec{B}+C\vec{B}\right)\right)}{\left|\left(A\vec{B}+C\vec{B}\right)\right|}.$$

Для нахождения $np_{\left(A\vec{B}+C\vec{B}\right)}\left(2A\vec{C}+3C\vec{B}\right)$ необходимо найти координаты векторов, заданных координатами точек начала и конца векторов, скалярное произведение и длину соответствующего вектора:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$$
$$\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$$
$$\vec{AB}+\vec{CB}=\{(-1)+(-2);1+1;4+2\}=\{-3;2;6\},$$
$$2\vec{AC}=\{2\cdot 1;2\cdot 0;2\cdot 2\}=\{2;0;4\},3\vec{CB}=\{3\cdot(-2);3\cdot 1;3\cdot 2\}=\{-6;3;6\},$$
$$2\vec{AC}+3\vec{CB}=\{2+(-6);0+3;4+6\}=\{-4;3;10\},$$
$$\left(\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right),\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)\right)=(-3)\cdot(-4)+2\cdot 3+6\cdot 10=12+6+60=78,$$
$$\left|\vec{AB}+\vec{CB}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7\Rightarrow$$

на основании формулы, написанной выше, получим:

$$np_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{\left(\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right),\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right)}{\left|\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right|}=\frac{78}{7},$$

$$\Rightarrow \text{пр}_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{78}{7}.$$

2) Для нахождения длины вектора воспользуемся формулой

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2},\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}.$$

Для этого найдем координаты векторов, также найдем сумму векторов по правилу сложения векторов, заданных координатами:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$$
$$4\vec{BC}=\{4\cdot 2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\},$$
$$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\};$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{7^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{49+9+16}=\sqrt{74}.$$

Итак, $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{74}.$

3) Угол между векторами можно найти из определения скалярного произведения:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=arc\cos\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow$$

в нашем случае формула принимает вид:

$$\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}\ \Rightarrow$$

находим координаты векторов, вычисляем скалярное произведение векторов, вычисляем длины векторов:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$$

$$\vec{AB}-\vec{CB}=\{(-1)-(-2);1-1;4-2\}=\{1;0;2\},$$

$$\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=1\cdot(-1)+0\cdot1+2\cdot4=7,$$

$$\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5},$$

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}.$$

$$\Rightarrow \angle\left(\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right),\overrightarrow{AB}\right)=arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}.$$

Итак, $\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\dfrac{7}{3\sqrt{10}}.$

4) Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α, β, γ, образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$. Мы имеем вектор единичной длины, такой вектор называется ортом. Для нахождения орта вектора необходимо каждую проекцию вектора на оси координат разделить на его длину $\Rightarrow$

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},$$
$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\,.$$

орт вектора $\vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$.

Итак, орт вектора $\vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}$.

5) Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z,\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}\,.$$

Вычислим координаты векторов и скалярное произведение векторов:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$$
$$4\vec{BC}=\{4\cdot 2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\},$$
$$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\},$$
$$\vec{BA}=-\vec{AB}=\{(-1)\cdot(-1);(-1)\cdot 1;(-1)\cdot 4\}=\{1;-1;-4\},\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$$
$$\vec{BA}-\vec{AC}=\{1-1;-1-0;-4-2\}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$$
$$\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=7\cdot 0+(-3)\cdot(-1)+(-4)\cdot(-6)=0+3+24=27.$$

Итак, скалярное произведение векторов равно:

$$\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=27.$$

6) Векторное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

где $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}\Rightarrow$

Находим координаты векторов:

$$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1-2\},$$
$$2\vec{BC}=\{2\cdot 2;2\cdot(-1);2\cdot(-2)\}=\{4;-2;-4\},$$
$$\vec{AB}+2\vec{BC}=\{-1+4;1+(-2);4+(-4)\}=\{3;-1;0\}, \vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1;\}=\{-2;1;2\},$$
$$\vec{CB}-\vec{AB}=\{-2-(-1);1-1;2-4\}=\{-1;0;-2\}\Rightarrow$$

$$\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)\cdot(-2)+\vec{j}\cdot 0\cdot(-1)+\vec{k}\cdot 3\cdot 0-\vec{k}\cdot(-1)\cdot(-1)-$$
$$\vec{i}\cdot 0\cdot 0-\vec{j}\cdot(-2)\cdot 3=$$
$$2\vec{i}+0\vec{j}-0\vec{k}-\vec{k}-0\vec{i}+6\vec{j}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$$

Итак, векторное произведение векторов равно:

$$\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$$

7) Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

где $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}\Rightarrow$.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=\{0-1,1-0,3-(-1)\}=\{-1,1,4\},$$

$$\overrightarrow{BC}=\{2-0,0-1,1-3\}=\{2,-1,-2\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{2-1,0-0,1-(-1)\}=\{1,0,2\}.$$

Тогда:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + (-2) + 0 - (-4) - 0 - 4 = 0.$$

Итак, смешанное произведение равно

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды:

$$A(1;4;3), B(2;3;1), C(-2;1;3), D(0;1;2).$$

Вычислить:
1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB;
3) площадь грани ABC.

Решение:

1) Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения $\Rightarrow$ объем параллелепипеда, построенного на векторах как на ребрах, равен:

$$V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|, \vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}, \vec{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}, \vec{c} = \left\{c_x; c_y; c_z\right\},$$

Найдем координаты векторов:

$$A\vec{B} = \{2-1; 3-4; 1-3\} = \{1; -1; -2\}, A\vec{C} = \{-2-1; 1-4; 3-3\} = \{-3; -3; 0\},$$
$$A\vec{D} = \{0-1; 1-4; 2-3\} = \{-1; -3; -1\},$$

тогда объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{6}\left|A\vec{B} \cdot A\vec{C} \cdot A\vec{D}\right|.$$

Вычислим объем по указанной формуле

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{6}|3+0-18+6-0+3|=\frac{1}{6}|-6|=1.$$

2) Длина ребра

$$AB=\left|\vec{AB}\right|\Rightarrow \vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}\Rightarrow$$

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

3) Площадь грани ABC вычисляется по формуле

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\|$, так как грань $ABC-$ треугольник, а площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, а площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов, на которых построен параллелограмм на основании свойств векторного произведения. Найдем координаты векторов:

$$\vec{AB}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\},\vec{AC}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\}$$

$$\Rightarrow\ S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right|\ =\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

4. ВАРИАНТ ТЕСТА С ОТВЕТАМИ

1 Коллинеарные векторы – это векторы, которые лежат на одной или … прямых.

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

а) разных,
б) одинаковых,
в) параллельных,
г) компланарных.

2 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(7, -1, 1)$, $B(-2, 5, 4)$.

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

а) $\{-9, 6, 3\}$;

б) $\{9, 6, -3\}$;

в) $\{5, 4, 5\}$;

г) $\{-5, -6, -3\}$.

3 Даны векторы $\vec{a}\{2, 2, -1\}$ и $\vec{b}\{7, 5, -2\}$, тогда их векторное произведение имеет вид:

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

а) $9\vec{i} - 11\vec{j} - 4\vec{k}$;

б) $\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$;

в) $-9\vec{i} + 11\vec{j} - 4\vec{k}$;

г) $\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

4 Формула скалярного произведения векторов в координатной форме имеет вид:

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \quad \cdot b \quad + a \quad \cdot b \quad + a \quad \cdot b$;

$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$;

$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y + a_z \times b_z$.

5 Упростить выражение: $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

а) $3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{b} \times \vec{b}$;

б) $3\vec{a}^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2$;

в) $-5\vec{b} \times \vec{a}$;

г) $3\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}$.

6 Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются:

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):
а) ортонормированными,
б) коллинеарными,
в) компланарными,
г) ортогональными.

7 Если $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются:

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):
а) ортонормированными,
б) коллинеарными,
в) компланарными,
г) ортогональными.

8 Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}\{3, 0, 0\}$, $\vec{b}\{3, 2, 1\}$, $\vec{c}\{1, 0, -1\}$ равен:

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ):
а) -4;
б) 4;
в) -6;
г) 6.

9 Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\sqrt{2}, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$.

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):
а) $\frac{\pi}{4}$;
б) $\frac{3\pi}{4}$;
в) π;
г) $\frac{\pi}{3}$.

10 Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}\{3, 0, 0\}$ и $\vec{b}\{3, 2, 1\}$ равен:

Варианты ответов: (выберите один правильный ответ):

а) $\frac{3}{2}$;

б) 3;

в) 5;

г) $\frac{5}{2}$.

Ответы к тесту

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант ответа	3	1	2	1	3	4	2	4	1	4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Векторная алгебра является одним из важнейших разделов современной математики. Основные понятия и методы этой дисциплины находят широкое применение в различных областях знаний, в первую очередь в естественных и технических науках.

Изложенные в данном учебном пособии методы и алгоритмы решения задач векторной алгебры могут послужить введением к освоению многочисленных приложений, таких как аналитическая и дифференциальная геометрия, теория поля. Векторная алгебра широко используется во многих разделах физики и механики, в кристаллографии, геодезии. Без векторов немыслима не только классическая математика, но и многие другие науки.

Учебное пособие «Векторная алгебра» отличается от других пособий подобных изданий большим количеством подробно решенных примеров, а также содержательным набором заданий для практических занятий, самостоятельных работ и расчетно–графического задания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2003. – 304 с.
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 304 с.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис–пресс, 2007. – 288 с.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Академическая книга, 2005. – 272 с.
6. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 2005. – 480 с.