Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Н. В. Минеева, М. В. Сташкевич

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Утверждено в качестве учебного пособия
Учёным советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 512.64(076.5)
ББК 22.143я7
М616

Рецензенты:

Кафедра математики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», и.о. зав. кафедрой Г. Н. Сумина;
А. Н. Анисимов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности, информационных систем и физики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет»

Минеева, Н. В.

М616 Практикум по математике. Линейная алгебра : учеб. пособие / Н. В. Минеева, М. В. Сташкевич. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 75 с.

ISBN 978-5-7765-1139-4

В учебном пособии излагаются традиционные разделы курса линейной алгебры – элементы алгебры матриц, теории определителей и систем линейных уравнений. Большое внимание уделяется разбору примеров и задач, иллюстрирующих основной теоретический материал. Каждый раздел содержит наборы задач для практических занятий и самостоятельных работ. Также в пособии приведены варианты индивидуальных домашних заданий, типовой вариант контрольной работы и вариант теста.

Учебное пособие предназначено для бакалавров по направлениям 151600 – «Прикладная механика», 230700 – «Прикладная информатика», 080500 – «Бизнес-информатика», 230100 – «Информатика и вычислительная техника», 230400 – «Информационные системы и технологии» (очная форма обучения).

УДК 512.64(076.5)
ББК 22.143я7

ISBN 978-5-7765-1139-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ **4**
ВВЕДЕНИЕ **4**
1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ **5**
1.1. Понятие матрицы. Операции над матрицами 5
1.1.1. Практическое занятие 10
1.1.2. Самостоятельная работа 12
1.2. Понятие определителей 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей. Методы вычисления определителей n-го порядка 12
1.2.1. Практическое занятие 18
1.2.2. Самостоятельная работа 19
1.3. Понятие обратной матрицы 20
1.3.1. Практическое занятие 22
1.3.2. Самостоятельная работа 23
1.4. Ранг матрицы 23
1.4.1. Практическое занятие 27
1.4.2. Самостоятельная работа 27
2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ **28**
2.1. Исследование совместности систем 28
2.1.1. Практическое занятие 31
2.1.2. Самостоятельная работа 32
2.2. Решение систем по формулам Крамера и матричным методом 32
2.2.1. Практическое занятие 35
2.2.2. Самостоятельная работа 35
2.3. Решение систем методом Гаусса 35
2.3.1. Практическое занятие 39
2.3.2. Самостоятельная работа 39
2.4. Решение однородных систем 40
2.4.1. Практическое занятие 43
2.4.2. Самостоятельная работа 43
3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ **44**
3.1. Индивидуальное домашнее задание 1 44
3.2. Индивидуальное домашнее задание 2 57
4. ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ **67**
5. ТИПОВОЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (С РЕШЕНИЕМ) **69**
6. ВАРИАНТ ТЕСТА (С ОТВЕТАМИ) **72**
ЗАКЛЮЧЕНИЕ **74**
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК **74**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Практикум по математике. Линейная алгебра» является первой книгой из серии учебных пособий под общим названием «Практикум по математике», написанного в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Данное учебное пособие является частью учебно-методического комплекса по дидактической единице «Линейная алгебра». Оно служит дополнением к базовым учебникам и учебным пособиям, указанным в списке основной учебной литературы рабочей программы. Учебное пособие предназначено для проведения практических аудиторных занятий, контрольных и самостоятельных работ, тестирования и выдачи индивидуальных домашних заданий.

Цель настоящего учебного пособия – оказание помощи студенту в приобретении навыков решения типовых задач по дидактической единице. Описание основных методов решения сопровождается необходимыми теоретическими сведениями, подробным решением задач, что в значительной степени облегчает подготовку к контрольной или самостоятельной работе, тестированию. Подробное решение типового варианта окажет помощь при решении и оформлении индивидуального домашнего задания.

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии приведены краткие теоретические сведения из курса линейной алгебры – элементы алгебры матриц (операции над матрицами, понятие обратной матрицы, методы вычисления обратной матрицы, понятие ранга матрицы, методы нахождения ранга матрицы), элементы теории определителей (понятия определителей второго и третьего порядков, понятие определителя n-го порядка, методы вычисления определителей произвольного порядка) и систем линейных уравнений (методы решения однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений).

Изложение теоретического материала иллюстрируется подробно решенными задачами, аналогичными тем, которые предлагаются в наборах задач для аудиторных (практических) занятий и в индивидуальных домашних заданиях. Предлагаются варианты самостоятельных работ по всем разделам, типовой вариант контрольной работы и образец теста.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Понятие матрицы. Операции над матрицами

***Определение 1.1*. Матрицей A размера $m \times n$** называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых элементами матрицы), где $i = 1,2,3,\ldots,m$, $j = 1,2,3,\ldots,n$:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A = \left(a_{ij}\right), \quad i = 1,2,3,\ldots,m,\ j = 1,2,3,\ldots,n.$$

Математическое понятие «матрица» имеет многочисленные приложения (применение) в механике, дискретной математике, теории графов, теории кодов, экономике и т.д.

С помощью матриц легко записывать некоторые экономические зависимости, например таблицы распределения ресурсов по отраслям экономики.

Пример 1.1. Предположим, некоторая фирма-поставщик производит и реализует два вида товаров T_1 и T_2. Поставки производятся ежемесячно четырем фирмам-покупателям: $Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$ и $Ф_4$. Товар T_1 поставляется фирмам $Ф_1$–$Ф_4$ в количестве 2, 1, 4 и 3 тыс. шт. соответственно, а товар T_2 – в количестве 5, 3, 3 и 2 тыс. шт. Для контроля поставок удобно составить следующую таблицу.

Таблица 1.1

Товар	Количество товара, поставляемого фирме, тыс. шт.			
	$Ф_1$	$Ф_2$	$Ф_3$	$Ф_4$
T_1	2	1	4	3
T_2	5	3	3	2

Табл. 1.1 можно записать в сокращенной форме, оставив только числовые значения. В результате получится матрица порядка 2×4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что фирма $Ф_2$ обанкротилась. Это приведет к исчезновению третьего столбца табл. 1.1, и в результате получится новая матрица порядка 2×3:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.2. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = 1,2,3,\ldots,m,\ j = 1,2,3,\ldots,n$.

Определение 1.3. Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется **квадратной порядка *n***, а в противном случае **прямоугольной.**

Определение 1.4. Переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется **транспонированием** матрицы.

Пример 1.2. Табл. 1.1 представим в другой форме: заменим строки столбцами и наоборот. От такой замены смысл таблицы не изменится.

Таблица 1.2

Фирма	Количество поставляемого товара (тыс. шт.)	
	T_1	T_2
$Ф_1$	2	5
$Ф_2$	1	3
$Ф_3$	4	3
$Ф_4$	3	2

Если в табл. 1.2 убрать названия строк и столбцов, то оставшаяся часть таблицы будет являться транспонированной матрицей A^T:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T = A^T.$$

Определение 1.5. Элементы квадратной матрицы порядка n с одинаковыми индексами называются **элементами главной диагонали**, т.е. это элементы $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ldots,a_{nn}$.

Определение 1.6. Элементы квадратной матрицы порядка n называются **элементами побочной диагонали**, если сумма их индексов равна $n+1$, т.е. это элементы $a_{n1},\ a_{n-1,2},\ a_{n-2,3},\ldots,a_{1n}$.

Классификация матриц представлена в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Наименование матрицы	Размер	Вид
Квадратная	3×3	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 23 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
Прямоугольная	2×5	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$
Треугольная	3×3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
Диагональная	3×3	$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Единичная	3×3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Нулевая	3×3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Матрица-строка	1×4	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
Матрица-столбец	3×1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Операции над матрицами

1^0. Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинакового размера называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$, элементы которой определяются равенством $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($i = 1,2,3,\ldots,m,\ j = 1,2,3,\ldots,n$).

Свойства операции сложения матриц:

Для любых матриц A, B, C одного размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность),
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

2^0. **Произведением матрицы** $A=\left(a_{ij}\right)$ **на число** λ называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij}=\lambda \cdot a_{ij}$ (i = 1,2,3,…,m, j = 1,2,3,…,n).

Свойства операции умножения матрицы на число:

Для любых матриц A и B одного размера и для любых чисел λ и μ выполняются равенства:

1) $\lambda\cdot(\mu A) = (\lambda \cdot \mu)A$ (ассоциативность умножения);

2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность умножения относительно сложения матриц);

3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность умножения относительно сложения чисел).

Определение 1.7. **Линейной комбинацией матриц** $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β – произвольные числа.

3^0. **Произведением** $\boldsymbol{A\cdot B}$ **матриц** A и B соответственно размеров $m\times n$ и $n\times k$ называется матрица C размера $m\times k$, такая, что элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B, т.е. $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}$.

Произведение AB существует только в том случае, если число строк матрицы A совпадает с числом столбцов матрицы B (взаимосогласованность).

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (ассоциативность умножения);

2) $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$ (дистрибутивность умножения относительно сложения матриц);

3) $A\cdot(B+C) = A\cdot B+A\cdot C$ (дистрибутивность умножения относительно сложения матриц);

4) $A\cdot B \neq B\cdot A$ (некоммутативность).

Определение 1.8. Матрицы A и B, для которых выполняется равенство $A\cdot B = B\cdot A$, называются **коммутирующими** или **перестановочными**.

Умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу не меняет матрицу.

Использование операции умножения матриц продемонстрируем на примере теории кодов.

Кодирование используется для защиты важной или секретной информации, для обеспечения конфиденциальности переписки и т.п.

В последние десятилетия широко используются компьютеры для хранения и передачи данных, поэтому коды могут быть представлены ***бинарными строками***, т.е. строками из нулей и единиц. Для кодирования информации могут использоваться матрицы, называемые порождающими матрицами. Например, порождающая матрица может иметь вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Любой символ, букву, цифру (бинарную строку) можно зашифровать (закодировать) путем умножения на порождающую матрицу G.

Пусть необходимо закодировать символ 110.

Введем операцию сложения, так что $0+0=0$, $1+1=0$, $0+1=1$, $1+0=1$; введем операцию умножения, так что $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$.

Закодируем символ 110, умножив матрицу-строку $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ справа на матрицу G:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, закодированный символ имеет вид 110011.

Определение 1.9. **Элементарными преобразованиями матриц** называются следующие операции:

1) перемена местами двух строк (столбцов);
2) умножение каждого элемента строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

Определение 1.10. Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется **эквивалентной** (обозначается $B \sim A$).

Пример 1.3. Найти линейную комбинацию матриц $2A^T - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 10 & 0 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ -8 & 0 & 11 \end{pmatrix}$,

$2A^T = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 14 \\ -16 & 0 & 22 \end{pmatrix}$, $\quad -3B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -21 \\ -27 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$$2A^T - 3B = 2A^T + (-3B) = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 14 \\ -16 & 0 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 & -21 \\ -27 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+3 & 20-9 & 14-21 \\ -16-27 & 0+0 & 22+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & -7 \\ -43 & 0 & 28 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Найти произведение матриц $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,

где $c_{11} = 1\cdot 4 + 0\cdot 8 + (-3)\cdot 0 = 4;\quad c_{12} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-2) + (-3)\cdot 5 = -12;$

$c_{21} = 2\cdot 4 + (-1)\cdot 8 + 7\cdot 0 = 0;\quad c_{22} = 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 7\cdot 5 = 43.$

В результате получим $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ 0 & 43 \end{pmatrix}$.

1.1.1. Практическое занятие

1) Указать порядок матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найти произведение элементов $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) Найти сумму элементов главной диагонали и произведение элементов побочной диагонали матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Даны матрицы A и B. Найти $A+B$, $A-3B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Даны матрицы A и B. Найти $3B-A^T$, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Решить матричное уравнение $5A-2X-B=0$, где

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7) Указать взаимосогласованные матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8) Найти элемент c_{32} матрицы $C=A\cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

9) Найти все возможные произведения матриц A, B и C, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=(1)$.

10) Найти $(A+B)^2$, A^2-B^2, если $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Являются ли матрицы A и B перестановочными?

11) Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^3, A^{10}.

12) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot A^T$; A^3.

1.1.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Найти $A + 2B$, $3A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Найти $C = A^2 - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1) Найти $2A + B$, $A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Найти $C = 3A + B^2$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Понятие определителей 2-го и 3-го порядков. Свойства определителей. Методы вычисления определителей *n*-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определение 1.11. **Определителем**, или **детерминантом**, **второго порядка**, соответствующим матрице (1.1), называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих на побочной диагонали (определитель обозначается $|A|$ или $\det A$).

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример 1.5. 1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7\cdot 2 - 5\cdot 3 = -1$, 2) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1 - 7\cdot(-3) = 26$.

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:

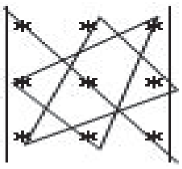
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Определение 1.12. **Определителем**, или **детерминантом**, **третьего порядка**, соответствующим матрице (1.2), называется число, равное

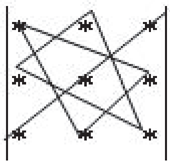
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для запоминания знаков слагаемых и сомножителей в каждом слагаемом удобно пользоваться ***правилом треугольников***, которое символически можно представить следующим образом:

слагаемые со знаком «+»:



слагаемые со знаком «–»:



Пример 1.6. Вычислим определитель 3-го порядка по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 5\cdot 2\cdot 6 + 1\cdot 7\cdot(-2) - (-2)\cdot(-3)\cdot 6 - 1\cdot 5\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot 7 =$$

$$= 27 + 60 - 14 - 36 + 15 - 42 = 10.$$

Определение 1.13. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент, т.е. i-й строки и j-го столбца.

Определение 1.14. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Для вычисления алгебраических дополнений элементов определителей третьего порядка знаки легко запомнить по следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Например: $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=1\cdot(-5)-0\cdot 5=-5-0=-5;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)\cdot(-5)=5.$$

Свойства определителей

1⁰. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2⁰. Перестановка двух строк или столбцов определителя равносильна умножению его на (-1).

3⁰. Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

4⁰. Умножение всех элементов строки или столбца определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5⁰. Если все элементы некоторого столбца или строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6⁰. Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7⁰. Если каждый элемент любого столбца или любой строки определителя представлен в виде двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$ аналогично для определителей 2-го порядка.

8⁰. Если к элементам некоторой строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на любой общий множитель λ, то величина определителя не изменится.

9⁰. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Например: $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$.

10⁰. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или строки равна нулю.

Например: $a_{12}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$ или $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{2j} = 0$.

Основываясь на понятиях определителей второго и третьего порядков, можно аналогично ввести понятие определителя порядка *n*. Определители порядка выше третьего вычисляются, как правило, с использованием свойств определителей, которые справедливы для определителей любого порядка.

Используя свойство определителей 9^0, введем понятие определителя 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}A_{1j}.$$

Аналогично вводится понятие определителя 5-го, 6-го и т.д. порядка. Следовательно, определитель порядка *n*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

Все свойства определителей 2-го и 3-го порядков, рассмотренные раннее, справедливы и для определителей n-го порядка.

Рассмотрим основные методы вычисления определителей n-го порядка.

1 ***Метод понижения порядка определителя***.

Метод основан на следующем соотношении (i – фиксированное число): $|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$, где A_{ik} - алгебраические дополнения к a_{ik} (разложение определителя по i-й строке). Либо $|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$ (разложение по j-му столбцу).

Замечание: прежде чем применять этот метод, полезно, используя основные свойства определителей, обратить в нуль все, кроме одного, элементы его некоторой строки или столбца – м***етод эффективного понижения порядка***.

2 ***Метод приведения к треугольному виду***.

Метод заключается в таком преобразовании определителя, когда все его элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, становятся равными нулю. В этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.7. Вычислить определитель, разложив его по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Имеем: $|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$.

Вычислим алгебраические дополнения элементов второй строки:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{3}\cdot(-1\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 6\cdot 2+(-4)\cdot(-1)\cdot 3-$$

$$-2\cdot(-3)\cdot 3-(-4)\cdot 1\cdot 2-(-1)\cdot 6\cdot(-1))=-1\cdot(6+12+12+18+8-6)=-50;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{4}\cdot(2\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 6\cdot 1+3\cdot(-1)\cdot 3-$$

$$-1\cdot(-3)\cdot 3-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 6\cdot(-1))=-12+6-9+9-6+12=0;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -4 & 6\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot(2\cdot(-4)\cdot 2+(-1)\cdot 6\cdot 1+3\cdot 2\cdot 3-$$

$$-1\cdot(-4)\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot 6\cdot 2)=-1\cdot(-16-6+18+12+6-24)=10;$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -4 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot(2\cdot(-4)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1-$$

$$-1\cdot(-4)\cdot 1-3\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot(-3)\cdot 2)=8+3+6+4-3+12=30.$$

Тогда определитель равен:

$$|A|=-1\cdot(-50)+(-3)\cdot 0+(-2)\cdot 10+4\cdot 30=50+0-20+120=150.$$

Пример 1.8. Вычислить определитель, используя метод эффективного понижения порядка.

$$\begin{vmatrix}30 & 10 & -10 & 40\\ -3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Решение. По свойству 4^0 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать первую строку на -2 и на 2 и складывать соответственно со второй и с третьей строками (свойство 8^0).

$$|A|=10\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 4\\ -3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ +1стр\times(-2)\\ +1стр\times 2\\ \\ \end{matrix}=10\cdot\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 4\\ -9 & 0 & 3 & -8\\ 8 & 0 & -1 & 12\\ 4 & 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Он будет сведен к определителю третьего порядка, который вычисляется по правилу треугольников.

$$|A|=10\cdot 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-9 & 3 & -8\\ 8 & -1 & 12\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-10\cdot(-9\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 12\cdot 4+8\cdot(-1)\cdot(-8)-4\cdot(-1)\cdot(-8)-8\cdot 2\cdot 3-$$

$$-(-9)\cdot(-1)\cdot 12)=-10\cdot(18+144+64-32-48-108)=-380.$$

Пример 1.9. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +1стр \\ +1стр \\ +1стр \\ +1стр \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

1.2.1. Практическое занятие

1) Вычислить определитель второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2) Вычислить определитель третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ являться вырожденной?

4) Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

5) Найти минор элемента a_{23} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7) Вычислить определитель, используя метод разложения по элементам первой строки:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 14 & 7 \\ 8 & 6 & 18 \end{vmatrix}$.

9) Вычислить определитель четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 60 \\ 2 & 6 & 2 & 20 \end{vmatrix}$.

1.2.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Найти миноры и алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

2) Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Вариант 2

1) Найти миноры и алгебраические дополнения всех элементов определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2) Вычислить определитель:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3. Понятие обратной матрицы

Определение 1.15. Квадратная матрица A порядка n называется **невырожденной,** если ее определитель $|A| \neq 0$. В случае, когда $|A| = 0$, матрица A называется **вырожденной.**

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы A^{-1}.

Определение 1.16. Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной невырожденной матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица порядка n.

Метод нахождения обратной матрицы

Если A – квадратная невырожденная матрица, то для нее существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*}, \text{ где } A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Определение 1.17. Матрица A^{*} называется **присоединенной**, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} транспонированной матрицы A^{T}.

Пример 1.10. Дана матрица A. Убедиться, что она невырожденная, и найти обратную матрицу A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 6 - 1 - 3 - 4 = 1 \neq 0$.

Следовательно, матрица невырожденная.

Найдем обратную матрицу. Составим алгебраические дополнения элементов матрицы А.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3.$$

Подставляя в формулу (1.3), получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-1&0&1\\5&-1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&3&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-2+2+1&-4+1+3&-2+1+1\\-1+0+1&-2+0+3&-1+0+1\\5-2-3&10-1-9&5-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Решение матричных уравнений

Иногда требуется решить матричное уравнение вида

$$X\cdot A=B. \tag{1.4}$$

Если A – квадратная невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (1.4) справа на A^{-1}, получим $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$. Учитывая, что $A\cdot A^{-1}=E$ и умножение на единичную матрицу не меняет матрицу, получаем решение матричного уравнения (1.4):

$$X=B\cdot A^{-1}.$$

Если же матричное уравнение имеет вид $A\cdot X=B$, то, умножив обе его части слева на A^{-1}, получим формулу решения $X=A^{-1}\cdot B$.

Пример 1.11. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решением этого матричного уравнения является матрица $X_{2\times 2}$, которая определяется по формуле $X = B \cdot A^{-1}$. Найдем A^{-1}.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 8 + 15 = 23 \neq 0$. Следовательно, матрица невырожденная.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$

Получаем $A^{-1} = \dfrac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, тогда

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) & 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -16 & 11 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$X \cdot A = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -16 & 11 \\ 23 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -32 + 55 & 48 + 44 \\ 46 + 0 & -69 + 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 23 & 92 \\ 46 & -69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = B.$$

1.3.1. Практическое занятие

1) Найти матрицу, обратную к заданной матрице. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

2) Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1) Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

2) Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4. Ранг матрицы

Для решения многих задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

Определение 1.18. В матрице $A_{m\times n}$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \le \min(m;n)$. Определители таких матриц называются **минорами *k*-го порядка матрицы** $A_{m\times n}$.

Определение 1.19. **Рангом** матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок ненулевых миноров этой матрицы.

Обозначается *rang A* или *r(A)*.

Из определения следует:

1) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из её размеров;

2) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. A – нулевая матрица;

3) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A имеет определитель, отличный от нуля.

Определение 1.20. **Базисным минором матрицы** называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Пример 1.12. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ и указать какой-либо ее базисный минор.

Решение. Матрица имеет четвертый порядок, но $|A| = 0$. Все миноры 3-го порядка тоже равны нулю, так как содержат хотя бы один нулевой столбец (свойство 5^0 определителя). Все миноры 2-го порядка тоже равны нулю, так как содержат либо нулевой столбец, либо пропорциональные столбцы (свойство 6^0). Значит, $r(A) = 1$, т.к. есть элементы, отличные от нуля. Любой такой элемент можно принять за базисный минор, например, $a_{11} = 4$.

Пример 1.13. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и указать какой-либо ее базисный минор.

Решение. $A_{3\times 4}$, значит $r(A) \le 3$. Вычислим миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 14 - 3 + 7 - 2 - 24 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 10 - 1 + 5 + 2 - 8 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -8 & -7 & -5 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 10 + 7 - 15 + 8 - 14 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3+5+7-15-1+7=0\,.$$

Итак, все миноры третьего порядка равны нулю. Среди миноров второго порядка есть ненулевые, например, $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8+2=-6\neq 0$. Следовательно, *r(A)* = 2. В качестве базисного минора можно взять $M = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Рассмотрим некоторые методы, облегчающие нахождение ранга матрицы.

1) ***Метод окаймляющих миноров.***

Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется **окаймляющим** минор M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1}=0$, то $r(A)=k$.

Применим этот метод к матрице из примера 1.13. Имеем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут лишь два минора третьего порядка, а именно:

$$M_3 = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ и } M_3^* = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оба они равны нулю, поэтому *r(A)* = 2.

2) ***Метод приведения к трапециевидной (ступенчатой) форме.***

Элементарные преобразования матрицы сохраняют её ранг.

Напомним, что ***к элементарным преобразованиям матриц относятся:***

1) умножение всех элементов строки или столбца матрицы на число, отличное от нуля;

2) изменение порядка строк или столбцов матрицы;

3) прибавление к каждому элементу одной строки или столбца соответствующих элементов другой строки или столбца, умноженных на любое число.

С помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов можно привести матрицу к трапециевидному или ступенчатому виду, когда определение её ранга не составляет труда.

Определение 1.21. **Трапециевидной**, или **ступенчатой**, называется матрица вида:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1r} & t_{1,r+1} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2r} & t_{2,r+1} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3r} & t_{3,r+1} & \ldots & t_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{rr} & t_{r,r+1} & \ldots & t_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $t_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,3,\ldots,r), \quad r \leq n.$

Ранг трапециевидной, или ступенчатой, матрицы равен количеству ненулевых строк.

Пример 1.14. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2стр\times(-3) \\ \\ +2стр\times(6) \\ +2стр\times(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -13 & -6 & -8 & -11 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 18 & 15 & 11 & 22 \\ 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \quad\downarrow \\ \quad\uparrow \\ +1стр\times 2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -13 & -6 & -8 & -11 \\ 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3стр\times(-1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -13 & -6 & -8 & -11 \\ 0 & -8 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поменяв местами второй и пятый столбцы, получим трапециевидную форму матрицы:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & -6 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3.$$

1.4.1. Практическое занятие

Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 3 & 12 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & -7 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Самостоятельная работа

Вариант 1
Найти ранг матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2
Найти ранг матрицы:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Исследование совместности систем

Определение 2.1. **Системой линейных алгебраических уравнений**, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где числа a_{ij} (i = 1,2,3,…,m, j = 1,2,3,…,n) называются **коэффициентами системы**. Они образуют матрицу системы, называемую **основной матрицей**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа b_i (i = 1,2,3,…,m) называются **свободными членами**, а x_j (j = 1,2,3,…,n) – **неизвестными**, подлежащими нахождению. Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) может быть записана в **матричной форме**:

$$A \cdot X = B.$$

Наряду с основной рассматривается **расширенная матрица системы** $\widetilde{A}$, пополненная столбцом свободных членов:

$$\widetilde{A} = \left(A \mid B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Определение 2.2. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система (2.1) называется **однородной**. Если же хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля, то система **неоднородная**.

Определение 2.3. **Решением системы линейных уравнений** вида (2.1) называется *n* значение неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Определение 2.4. Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Определение 2.5. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Вопрос о разрешимости системы уравнений в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема (Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы, $rang\, A = rang\, \widetilde{A}$.

Для определения рангов обеих матриц достаточно привести расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов (кроме последнего).

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие утверждения:

- Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, т.е. $r(A) = n$, то система уравнений (2.1) имеет единственное решение (система определенная).
- Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$, то система (2.1) имеет бесконечное множество решений (система неопределенная).

Схема исследования системы *m* уравнений с *n* неизвестными

Система совместная,
если $r(A) = r(\widetilde{A}) = r$.

Система несовместная,
если $r(A) \neq r(\widetilde{A})$.
Ответ: нет решений.

Система определенная,
если $r = n$.
Ответ: единственное решение.

Система неопределенная,
если $r < n$.
Ответ: бесконечное множество решений.

Пример 2.1. Исследовать систему на совместность:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель этой системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 6 + 3 + 12 - 27 - 4 - 2 = -12 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$, причем $r(A) = n$, поэтому система совместна и имеет единственное решение.

Пример 2.2. Исследовать систему на совместность:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель этой системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-3) \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-3 \cdot (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot (-2) \cdot (-3) = -4 - 6 + 45 - 5 - 18 - 12 = 0.$$

Так как $|A| = 0$, то система либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. Получим нули ниже главной диагонали матрицы A.

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2стр \times (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр \times 3 \sim \\ +1стр \times 5 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & -22 & 18 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр \times (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Получили $r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3$, откуда $r(A) \neq r(\widetilde{A})$, следовательно, исходная система уравнений несовместна. Решений нет.

Пример 2.3. Исследовать систему на совместность:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. Получим нули ниже главной диагонали матрицы A.

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -9 & 6 & 7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр \times (-2) \sim \\ +1стр \times (-4) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 7 & -2 & -5 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр \times (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2 < 4$, следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

2.1.1. Практическое занятие

Исследовать систему на совместность:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_3 = 9. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

2.1.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

Исследовать систему на совместность:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

Вариант 2

Исследовать систему на совместность:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

2.2. Решение систем по формулам Крамера и матричным методом

Рассмотрим частный случай системы (2.1), когда $m=n$. Тогда матрица A – квадратная, и справедлива следующая теорема.

Теорема (Крамера). Если $\Delta = |A| \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое определяется равенствами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{2.2}$$

где Δ_j (j = 1,2,3,…, n) – определитель матрицы, которая получается из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Формулы (2.2) называются **формулами Крамера**.

Пример 2.4. Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы этой системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) \cdot 2 -$$

$$- 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -10 - 4 + 12 + 10 + 3 - 16 = -5.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение.

Последовательно заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -11 & -5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 4 + (-11) \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) \cdot 2 -$$

$$-(-11) \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 4 = 10 - 16 - 44 + 40 - 11 + 16 = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & -11 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-11) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-11) \cdot 2 -$$

$$- 3 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 4 = -22 - 8 + 24 + 22 + 6 - 32 = -10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -11 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 4 + 1 \cdot (-11) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-5) \cdot (-2) -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot (-11) - 3 \cdot (-1) \cdot 4 = -40 + 11 - 12 - 10 + 44 + 12 = 5.$$

Подставим значения определителей в формулы (2.2):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$

В случае системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей возможно также решение **средствами матричного исчисления.**

Рассмотрим матричную форму записи системы (2.1):

$$A \cdot X = B.$$

Пусть $|A| \neq 0$, тогда данное матричное уравнение имеет единственное решение, которое находится по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (2.3)$$

Таким образом, чтобы найти решение системы, нужно обратную матрицу умножить на столбец свободных членов справа.

Пример 2.5. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица была найдена в примере 1.10 из п. 1.3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по формуле $X = A^{-1} \cdot B$ получаем

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1+2 \\ -1+0+2 \\ 5+1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$

Ответ: $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$

Как было отмечено выше, формулы Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей. Но и в этом частном случае решение линейных алгебраических уравнений указанными методами удобно производить для уравнений, когда вычисление определителей не представляет трудностей. В случае же систем большого числа уравнений более выгодно пользоваться методом Гаусса, который является универсальным и подходит также для произвольных систем с прямоугольной матрицей.

2.2.1. Практическое занятие

Доказать совместность системы и найти ее решение, используя: 1) формулы Крамера, 2) матричный метод.

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

2.2.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

Доказать совместность системы и найти ее решение, используя: 1) формулы Крамера, 2) матричный метод.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант 2

Доказать совместность системы и найти ее решение, используя: 1) формулы Крамера, 2) матричный метод.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

2.3. Решение систем методом Гаусса

Рассмотрим один из самых простых методов решения систем уравнений, заключающийся в последовательном исключении неизвестных и называемый методом Гаусса. Данный метод заключается в том, что с помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов расширенной матрицы система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних по номеру переменных, находятся все остальные. Метод Гаусса имеет ряд преимуществ:

1) значительно менее трудоёмкий;
2) позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае её совместности найти её решения (единственное или бесконечное множество);
3) дает возможность определить ранг матрицы системы.

С помощью элементарных преобразований над строками приведем расширенную матрицу системы (2.1) $(A \mid B)$ к ступенчатому виду $(A' \mid B')$:

$$
(A' \mid B') = \left(\begin{array}{cccccccc}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & \mid \; b'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & \mid \; b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & \mid \; b'_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mid \; b'_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mid \; b'_m
\end{array} \right),
$$

где $a'_{ii} \neq 0$ при $i \leq r$.

Полученной расширенной матрице $(A' \mid B')$ соответствует система линейных уравнений, эквивалентная системе (2.1). При этом $r(A) = r(A')$, $r(A \mid B) = r(A' \mid B')$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и является определенной (неопределенной), верны и для системы (2.1).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ отлично от нуля, то система линейных уравнений несовместна.

Если же $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, то система совместна, и ее ранг равен r. Очевидно, что минор, стоящий на пересечении первых r строк и r столбцов, не равен нулю, следовательно, его можно принять за базисный. Назовем переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ базисными, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - свободными. Отбрасывая строки с нулевыми элементами, получаем систему из r уравнений:

$$
\begin{cases}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\
\qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\
\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad \qquad a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r.
\end{cases}
$$

Если $r = n$, то матрица этой системы треугольная, все переменные – базисные, и их значения определяются однозначно.

Если $r < n$, то из системы легко выразить базисные переменные через свободные переменные. Придавая свободным переменным произвольные значения:

$$x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2,\ \dots,\ x_n = c_{n-r},$$

последовательно получаем выражения для базисных переменных

$$x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}), \quad x_2(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}), \dots, x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}).$$

Определение 2.6. Решение, задаваемое формулами

$x_1 = x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}),\quad x_2 = x_2(c_1, c_2, ..., c_{n-r}), \dots , x_r = x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-r}),$

$x_{r+1} = c_1, \dots , x_n = c_{n-r},$

где $c_1, c_2, \dots , c_{n-r}$ – любые действительные числа, называется **общим решением системы** (2.1).

Пример 2.6. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -5, \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -6, \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & -7 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -10 & -9 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр\times 2 \sim \\ +1стр\times 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр\times(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2 < 4$, следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -5, \\ \qquad x_2 - x_3 + 9x_4 = -16. \end{cases}$$

Решим ее. $M = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, этот минор можно принять за базисный. Тогда x_1, x_2 – базисные переменные, а остальные x_3, x_4 – свободные переменные.

Задавая свободным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -5 - 3c_1 - 6c_2, \\ x_2 = -16 + c_1 - 9c_2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = c_1 - 9c_2 - 16, \\ x_1 = \left(-5 - 3c_1 - 6c_2 + 2(c_1 - 9c_2 - 16)\right)/2 = -37/2 - 1/2\,c_1 - 12c_2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -37/2 - 1/2\,c_1 - 12c_2$, $x_2 = c_1 - 9c_2 - 16$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, где $c_1, c_2 \in R$.

Пример 2.7. Для изготовления трех видов изделий (*A*, *B* и *C*) фабрика расходует в качестве сырья сталь, чугун и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Необходимые характеристики производства указаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия, усл. ед.			Запасы сырья на 1 день, усл. ед.
	A	*B*	*C*	
Сталь	5	9	7	400
Чугун	1	3	2	110
Цветные металлы	3	4	3	190

Требуется определить ежедневный объем выпуска каждого вида изделий.

Решение. Пусть фабрика выпускает ежедневно x_1 изделий вида *A*, x_2 изделий вида *B* и x_3 изделий вида *C*. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 400, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 110, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 190. \end{cases} \quad \text{Составим} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 400 \\ 110 \\ 190 \end{pmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. Предварительно поменяем местами первую и вторую строки (если первый столбец содержит единицу, целесообразно переместить ее в первую строку):

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 7 & 400 \\ 1 & 3 & 2 & 110 \\ 3 & 4 & 3 & 190 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 110 \\ 5 & 9 & 7 & 400 \\ 3 & 4 & 3 & 190 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр\times(-5) \\ +1стр\times(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 110 \\ 0 & -6 & -3 & -150 \\ 0 & -5 & -3 & -140 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-6) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 110 \\ 0 & -6 & -3 & -150 \\ 0 & 30 & 18 & 840 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр\times 5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 110 \\ 0 & -6 & -3 & -150 \\ 0 & 0 & 3 & 90 \end{array}\right).$$

Для последней матрицы система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 110, \\ \quad -6x_2 - 3x_3 = -150, \\ \qquad\quad 3x_3 = 90, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20, \\ x_2 = 10, \\ x_3 = 30. \end{cases}$$

Ответ: фабрика выпускает ежедневно 20 изделий вида A, 10 изделий вида B и 30 изделий вида C.

2.3.1. Практическое занятие

Решить систему методом исключения неизвестных (методом Гаусса):

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

2.3.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

Вариант 2

Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.4. Решение однородных систем

Однородная система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Если в системе (2.4) $m = n$, а определитель матрицы коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из формул Крамера. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа неизвестных, или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Теорема 1. Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов при неизвестных меньше числа неизвестных, т.е. при $rang(A) < n$.

Обозначим решение системы (2.4) $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$ в виде столбца $E_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами.

1) Если $E_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$ – решение системы (2.4), то и $\lambda E_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)^T$ – тоже решение этой системы.

2) Если $E_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$ и $E_2 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$ – решения системы (2.4), то $E_1 + E_2 = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \ldots, k_n + l_n)^T$ – тоже решение данной системы.

Таким образом, всякая линейная комбинация решений системы (2.4) тоже является решением этой системы, то есть если $E_1, E_2, \ldots, E_s$ – решения системы (2.4), то $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_s E_s$ – тоже решение этой системы. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2.4), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Определение 2.7. Решения $E_1, E_2, ..., E_s$ называются **линейно независимыми**, если их линейная комбинация $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + ... + \lambda_s E_s$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = 0$.

Определение 2.8. Система линейно независимых решений $E_1, E_2, ..., E_s$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (2.4) является линейной комбинацией решений $E_1, E_2, ..., E_s$.

Теорема 2. Если ранг *r* матрицы коэффициентов при неизвестных системы линейных однородных уравнений (2.4) меньше числа переменных *n*, то всякая фундаментальная система решений системы (2.4) состоит из *n – r* решений.

Общее решение системы (2.4) представляется в виде:

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 + ... + c_{n-r} E_{n-r},$$

где $E_1, E_2, ..., E_{n-r}$ – любая фундаментальная система решений, а $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ – произвольные действительные числа.

Способ нахождения фундаментальной системы решений

Пусть *rang(A)* < *n.* Выражаем базисные переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ через свободные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Свободным переменным придаем поочередно значение 1, полагая остальные равными нулю. Вычисляем значения базисных переменных.

Пример 2.8. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ -5x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -8x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \\ -8 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 32 + 105 - 24 + 28 - 100 = 21 \neq 0,$$ поэтому система имеет единственное нулевое решение.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Пример 2.9. Найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений и записать фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \quad = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет ненулевые решения. Применим метод Гаусса. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр \times (-2) \sim \\ +1стр \times 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Получили $r(A) = 3$. Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ \quad -x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ \qquad\quad x_3 + 2x_4 \qquad - x_6 = 0. \end{cases}$$

$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, этот минор можно принять за базисный. Тогда x_1, x_2, x_3 – базисные переменные, а остальные x_4, x_5, x_6 – свободные переменные.

1) Пусть $x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ \quad -x_2 - 4x_3 = -3, \\ \qquad\quad x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14, \\ x_2 = 11, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

2) Пусть $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ \quad -x_2 - 4x_3 = 3, \\ \qquad\quad x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

3) Пусть $x_4=0, x_5=0, x_6=1$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ \quad -x_2 - 4x_3 = -4, \\ \qquad\qquad x_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Получаем фундаментальную систему решений:

$$\begin{array}{c|ccc} x_1 & 14 & -4 & 1 \\ x_2 & 11 & -3 & 0 \\ x_3 & -2 & 0 & 1 \\ \hline x_4 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $X = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$.

Ответ: $x_1 = 14c_1 - 4c_2 + c_3$, $x_2 = 11c_1 - 3c_2$, $x_3 = -2c_1 + c_3$, $x_4 = c_1, x_5 = c_2, x_6 = c_3$, где $c_1, c_2, c_3 \in R$.

2.4.1. Практическое занятие

Решить однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.4.2. Самостоятельная работа

Вариант 1

Решить однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 2

Решить однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

3.1. Индивидуальное домашнее задание 1

1 Вычислить определитель тремя способами: 1) разложив по элементам i-й строки; 2) разложив по элементам j-го столбца; 3) используя метод эффективного понижения порядка или метод приведения к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 4$.

2) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 4$.

3) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 1$, $j = 3$.

4) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 1$.

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 2$.

6) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 2$.

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 1$.

8) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 1$.

9) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 3$, $j = 1$.

10) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 4$.

11) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 2$.

12) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 3$, $j = 2$.

13) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ 6 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 4$, $j = 2$.

14) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 4$.

15) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $i = 3$, $j = 3$.

16) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, $i = 1$, $j = 4$.

17) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $i = 1$, $j = 1$.

18) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 1$, $j = 2$.

19) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 4$.

20) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $i = 2$, $j = 4$.

2 Даны матрицы A и B. Найти матрицу C:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $C = 3B - 2A$.

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C = B - 2A^T$.

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = A + B^T$.

4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=2A+3B$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$.

6) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A-B^T$.

7) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C=2A-B^T$.

8) $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=A^T+B^T$.

9) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C=2A^T-B^T$.

10) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $C=2B-A^T$.

11) $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=3A+B^T$.

12) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

13) $A=\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $C=A-3B$.

14) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -3 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $C=2A+B^T$.

15) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & 8\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -7 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=A-2B^T$.

16) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -8 & 7\\ -6 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $C=A^T+2B^T$.

17) $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -7\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=A^T-2B^T$.

18) $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 5\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $C=3B-A^T$.

19) $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=4A+B^T$.

20) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ -4 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=3A+2B$.

3 Даны две матрицы A и B. Требуется: 1) найти произведения $A\cdot B$, $B\cdot A$ и выяснить, являются ли матрицы перестановочными; 2) найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

8) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}.$

13) $A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}.$

14) $A=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}.$

15) $A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}.$

16) $A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}.$

17) $A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}.$

18) $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}.$

19) $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}.$

20) $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}.$

4 Найти ранг матрицы и указать какой-либо её базисный минор:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16 \\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

12) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

14) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

18) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 13 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение типового варианта

1 Вычислить определитель тремя способами: 1) разложив по элементам i-й строки; 2) разложив по элементам j-го столбца; 3) используя метод эффективного понижения порядка или метод приведения к треугольному виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, \\ j = 4. \end{matrix}$$

Решение. 1) Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки. Имеем:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (2\cdot1\cdot3 + 3\cdot4\cdot2 + 5\cdot0\cdot1 - 2\cdot1\cdot1 - 5\cdot3\cdot3 -$$

$$- 0\cdot4\cdot2) = 6 + 24 + 0 - 2 - 45 - 0 = -17;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$- 0 \cdot 4 \cdot (-1)) = -1 \cdot (-3 + 12 + 0 - 1 - 18 - 0) = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot (-1)) = -15 + 8 + 4 - 5 - 12 + 8 = -12;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (-1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot 0) = -1 \cdot (0 + 2 + 12 - 15 + 2 - 0) = -1.$$

Тогда определитель равен:

$$\Delta = 2 \cdot (-17) + 4 \cdot 10 + (-1) \cdot (-12) + 2 \cdot (-1) = -34 + 40 + 12 - 2 = 16.$$

2) Вычислим определитель, разложив его по элементам четвертого столбца. Имеем:

$$\Delta = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов четвертого столбца.

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (-1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot 0) = -1 \cdot (0 + 2 + 12 - 15 + 2 - 0) = -1;$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \cdot (-1) -$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2) = 0 + 4 - 4 + 5 - 0 - 4 = 1;$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \cdot (-1)) = -1 \cdot (0 + 12 + 2 + 2 - 12 + 0) = -4;$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}2&4&-1\\-1&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}=(-1)^8\cdot(2\cdot2\cdot1+5\cdot(-1)\cdot(-1)+4\cdot3\cdot2-$$

$$-2\cdot2\cdot(-1)-(-1)\cdot4\cdot1-5\cdot3\cdot2)=4+5+24+4+4-30=11.$$

Тогда определитель равен:

$$\Delta=2\cdot(-1)+1\cdot1+4\cdot(-4)+3\cdot11=-2+1-16+33=16\,.$$

3) Вычислим определитель, используя метод эффективного понижения порядка. Будем последовательно умножать вторую строку на 2, на 2, на 1 и складывать соответственно с первой, с третьей и четвертой строками (свойство определителей 8^0):

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&-1&2\\-1&2&3&1\\2&5&1&4\\1&2&0&3\end{vmatrix}\begin{matrix}+2стр\times2\\ \\+2стр\times2\\+2стр\times1\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&8&5&4\\-1&2&3&1\\0&9&7&6\\0&4&3&4\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель можно разложить по элементам первого столбца. Он будет сведен к определителю третьего порядка, который вычисляется по правилу треугольников:

$$\Delta=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}8&5&4\\9&7&6\\4&3&4\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot(8\cdot7\cdot4+5\cdot6\cdot4+4\cdot9\cdot3-$$

$$-4\cdot7\cdot4-8\cdot6\cdot3-5\cdot9\cdot4)=224+120+108-112-144-180=16.$$

Ответ: $\Delta=16$.

2 Даны матрицы A и B. Найти матрицу C:

$$A=\begin{pmatrix}1&8\\0&9\\-7&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&-7\\0&1\\6&-1\end{pmatrix},\quad C=A-2B\,.$$

Решение. $A-2B=A+\left(-2B\right)=C_{3\times2}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}$,

где $c_{11}=1+(-2)\cdot(-1)=3;\qquad c_{12}=8+(-2)\cdot(-7)=22;$

$c_{21}=0+(-2)\cdot0=0;\qquad c_{22}=9+(-2)\cdot1=7;$

$c_{31}=-7+(-2)\cdot6=-19;\qquad c_{32}=1+(-2)\cdot(-1)=3.$

Ответ: $A-2B=C_{3\times2}=\begin{pmatrix} 3 & 22 \\ 0 & 7 \\ -19 & 3 \end{pmatrix}$.

3 Даны две матрицы A и B. Требуется: 1) найти произведения $A\cdot B$, $B\cdot A$ и выяснить, являются ли матрицы перестановочными; 2) найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Найдём произведение $A\cdot B$:

$$A\cdot B=C_{3\times3}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

где $c_{11}=-1\cdot(-1)+2\cdot0+1\cdot1=2;\quad c_{12}=-1\cdot4+2\cdot(-5)+1\cdot8=-6;$

$c_{13}=-1\cdot7+2\cdot2+1\cdot(-3)=-6;\quad c_{21}=2\cdot(-1)+1\cdot0+3\cdot1=1;$

$c_{22}=2\cdot4+1\cdot(-5)+3\cdot8=27;\quad c_{23}=2\cdot7+1\cdot2+3\cdot(-3)=7;$

$c_{31}=5\cdot(-1)+4\cdot0+3\cdot1=-2;\quad c_{32}=5\cdot4+4\cdot(-5)+3\cdot8=24;$

$c_{33}=5\cdot7+4\cdot2+3\cdot(-3)=34.$

В результате получим $A\cdot B=C_{3\times3}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & -6 \\ 1 & 27 & 7 \\ -2 & 24 & 34 \end{pmatrix}$.

2) Найдём произведение $B\cdot A$:

$$B\cdot A=D_{3\times3}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix},$$

где $d_{11}=-1\cdot(-1)+4\cdot2+7\cdot5=44;\quad d_{12}=-1\cdot2+4\cdot1+7\cdot4=30;$

$d_{13}=-1\cdot1+4\cdot3+7\cdot3=32;\quad d_{21}=0\cdot(-1)+(-5)\cdot2+2\cdot5=0;$

$d_{22}=0\cdot2+(-5)\cdot1+2\cdot4=3;\quad d_{23}=0\cdot1+(-5)\cdot3+2\cdot3=-9;$

$d_{31}=1\cdot(-1)+8\cdot2+(-3)\cdot5=0;\quad d_{32}=1\cdot2+8\cdot1+(-3)\cdot4=-2;$

$d_{33}=1\cdot1+8\cdot3+(-3)\cdot3=16.$

В результате получим $B \cdot A = D_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 44 & 30 & 32 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 16 \end{pmatrix}$.

Так как $A \cdot B \neq B \cdot A$, то матрицы A и B не являются перестановочными.

3) Найдем обратную матрицу:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 30 - 5 - 12 + 12 = 30 \neq 0.$$

Следовательно, матрица невырожденная, и A^{-1} существует.

Составим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Подставляя в формулу (1.3), получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -2 & 5 \\ 9 & -8 & 5 \\ 3 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -9 & -2 & 5 \\ 9 & -8 & 5 \\ 3 & 14 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 9-4+25 & -18-2+20 & -9-6+15 \\ -9-16+25 & 18-8+20 & 9-24+15 \\ -3+28-25 & 6+14-20 & 3+42-15 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: 1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -6 \\ 1 & 27 & 7 \\ -2 & 24 & 34 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 44 & 30 & 32 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 16 \end{pmatrix}$, матрицы не перестановочны; 2) $A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-9 & -2 & 5\\ 9 & -8 & 5\\ 3 & 14 & -5\end{pmatrix}$.

4 Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3\\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5\end{pmatrix}$ и указать какой-либо ее базисный минор.

Решение. Применим метод приведения к трапециевидной форме.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3\\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ +1стр\\ +1стр\times 6\\ +1стр\times 2\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 4 & -10 & -15\\ 0 & -3 & 0 & -10 & -9\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ +3стр\times(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 4 & -10 & -15\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ +2стр\times 2\end{array}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 4 & -10 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поменяв местами вторую и третью строки, получим трапециевидную форму матрицы:

$$A\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 0 & -3 & 4 & -10 & -15\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=3.$$

В качестве базисного можно взять минор

$$M_3=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 6 & 3 & 4\end{vmatrix}=-4+0-12-0+6+4=-6\neq 0.$$

Ответ: $r(A)=3$, базисный минор $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2. Индивидуальное домашнее задание 2

1 Доказать совместность системы линейных алгебраических уравнений и решить ее тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы (матричным методом); 3) методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -7. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 6, \\ -x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 13, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = -6. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

2 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности найти общее решение.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 4x_1+x_2+9x_3-x_4=4. \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4=9, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=2, \\ -2x_1+4x_2+7x_3-4x_4=1. \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4=3, \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4=1, \\ 7x_1-2x_2+2x_3-10x_4=-2. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4=7, \\ 5x_1-x_2+3x_3-5x_4=2. \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4=2, \\ 4x_1-4x_2+4x_3+4x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ x_1-4x_2-x_3-3x_4=1. \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3-x_4=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=-1. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ 2x_2+3x_3+4x_4=-1, \\ x_1-4x_2-6x_3-8x_4=3. \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=0. \end{cases}$

3 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

1) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+3x_2+3x_3=0. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=0, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+2x_3=0. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+3x_3=0. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=0, \\ 8x_1-x_2+7x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=0. \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3=0, \\ x_1-7x_2+2x_3=0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} -6x_1 + x_2 + 11x_3 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ -4x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4 Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений и записать фундаментальную систему решений:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 12x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 28x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 9x + 21x_3 - 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 - x_3 + 23x_4 = 0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 18x_3 - 116x_4 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0, \\ -5x_1 + 17x_2 - 3x_3 + 55x_4 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 14x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0, \\ 7x_1 + 29x_2 - 42x_3 + 88x_4 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 28x_3 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 8x_1 - 12x_2 + 28x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 8x_1 + 17x_2 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 - 2x + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

Решение типового варианта

1 Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 24, \\ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить тремя способами: 1) по формулам Крамера; 2) с помощью обратной матрицы (матричным методом); 3) методом Гаусса.

Решение. Вычислим определитель этой системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 =$$

$$= 45 + 14 + 16 - 40 - 21 - 12 = 2 \neq 0.$$

Так как $\Delta = |A| \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение.

1) Найдем решение системы по формулам Крамера. Последовательно заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 24 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 1 \\ 16 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 24 \cdot 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \cdot 16 + 4 \cdot 10 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \cdot 16 -$$

$$- 7 \cdot 10 \cdot 3 - 24 \cdot 1 \cdot 4 = 360 + 112 + 160 - 320 - 210 - 96 = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 24 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot 3 + 24 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 16 - 4 \cdot 10 \cdot 2 -$$

$$- 24 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 16 = 90 + 48 + 64 - 80 - 72 - 48 = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 24 \\ 1 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 16 + 7\cdot 10\cdot 2 + 24\cdot 1\cdot 4 - 24\cdot 5\cdot 2 -$$

$$-7\cdot 1\cdot 16 - 3\cdot 10\cdot 4 = 240 + 140 + 96 - 240 - 112 - 120 = 4.$$

Подставим значения определителей в формулы (2.2):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2.$$

2) Решим систему матричным методом. Найдем обратную матрицу. Составим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

Подставляя в формулу (1.3), получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 11 & -5 & -13 \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по формуле (2.3) имеем:

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 11 & -5 & -13 \\ -1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 11\cdot 24 + (-5)\cdot 10 + (-13)\cdot 16 \\ -1\cdot 24 + 1\cdot 10 + 1\cdot 16 \\ -6\cdot 24 + 2\cdot 10 + 8\cdot 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$

3) Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду. Получим нули ниже главной диагонали матрицы A. Предварительно поменяем местами первую и вторую строки (если первый столбец содержит единицу, целесообразно переместить ее в первую строку):

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&7&4&24\\1&5&1&10\\2&4&3&16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&1&10\\3&7&4&24\\2&4&3&16\end{array}\right)\begin{array}{l}\\+1стр\times(-3)\sim\\+1стр\times(-2)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&1&10\\0&-8&1&-6\\0&-6&1&-4\end{array}\right)\times(-8)\quad\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&1&10\\0&-8&1&-6\\0&48&-8&32\end{array}\right)+2стр\times 6\quad\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&1&10\\0&-8&1&-6\\0&0&-2&-4\end{array}\right).$$

Для последней матрицы система имеет вид:

$$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=10,\\ \quad -8x_2+x_3=-6,\\ \qquad\quad -2x_3=-4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3,\\x_2=1,\\x_3=2.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=3,\quad x_2=1,\quad x_3=2.$

2 Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4,\\6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5,\\3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8.\end{cases}$$

Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение.

Решение. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}9&-3&5&6&4\\6&-2&3&4&5\\3&-1&3&14&-8\end{array}\right)\begin{array}{l}+3стр\times(-3)\\+3стр\times(-2)\sim\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&-4&-36&28\\0&0&-3&-24&21\\3&-1&3&14&-8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-1&3&14&-8\\0&0&-3&-24&21\\0&0&-4&-36&28\end{array}\right).$$

Мы поменяли местами первую и третью строки. Так как в трапециевидной матрице не должно оказаться нулей на главной диагонали в ненулевых строках, то необходимо переставить столбцы, второй и четвертый. При этом в системе уравнений поменяются местами слагаемые с неизвестными x_2 и x_4:

$$\widetilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 14 & 3 & -1 & -8\\ 0 & -24 & -3 & 0 & 21\\ 0 & -36 & -4 & 0 & 28\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-1/3)\\ \times(-1/4)\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 14 & 3 & -1 & -8\\ 0 & 8 & 1 & 0 & -7\\ 0 & 9 & 1 & 0 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +3стр\times(-1)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 14 & 3 & -1 & -8\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 1 & 0 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ +2стр\times 9\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 14 & 3 & -1 & -8\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7\end{array}\right).$$

Получили $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3 < 4$, следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases}3x_1+14x_4+3x_3-x_2=-8,\\ \qquad -x_4 \qquad\qquad =0,\\ \qquad\qquad x_3 \qquad =-7.\end{cases}$$

Решим ее. $M=\begin{vmatrix}3 & 14 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0$, этот минор можно принять за базисный.

Тогда x_1, x_3, x_4 – базисные переменные, а x_2 – свободная переменная.

Задавая свободной переменной произвольное значение $x_2=c_1$, найдем бесконечное множество решений:

$$\begin{cases}3x_1+14x_4+3x_3=-8+c_1,\\ x_4=0,\\ x_3=-7.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-7,\\ x_4=0,\\ x_1=(13+c_1)/3=13/3+1/3c_1.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=13/3+1/3c_1,\ x_2=c_1, x_3=-7, x_4=0,$ где $c_1\in R$.

3 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-x_2+2x_3=0,\\ 3x_1-x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot 2 - 4\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot 4 =$$

$$= -8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16 = -18 \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное нулевое решение.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

4 Найти общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений и записать фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Применим метод Гаусса. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1стр\times(-3) \\ +1стр\times(-4) \\ +1стр\times(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2стр\times(-3) \\ +2стр\times 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили $r(A) = 2$. Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, этот минор можно принять за базисный. Тогда x_1, x_2 – базисные переменные, а остальные x_3, x_4 – свободные переменные.

1) Пусть $x_3 = 1, x_4 = 0$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4, \\ \quad -x_2 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = -6. \end{cases}$$

2) Пусть $x_3 = 0, x_4 = 1$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ \quad -x_2 = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7, \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Получаем фундаментальную систему решений:

$$\begin{array}{c|cc} x_1 & 8 & -7 \\ x_2 & -6 & 5 \\ \hline x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $X = c_1E_1 + c_2E_2$.

Ответ: $x_1 = 8c_1 - 7c_2$, $x_2 = -6c_1 + 5c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2$, где $c_1, c_2 \in R$.

4. ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Ответы к практическому занятию 1.1.1

1) 3×2; 2×2; 3×4; 1×3; 3×1. **2)** -14. **3)** 5; 0.

4) $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A-3B = \begin{pmatrix} 4 & 27 \\ 0 & 6 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}$. **5)** $3B - A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

6) $X = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 1 & 10 \\ 6 & -6 & 11 & -8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **7)** *B* и *A*; *A* и *C*. **8)** $c_{32} = 49$.

9) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

10) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}$; $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$; $A \cdot B \neq B \cdot A$, следовательно, матрицы А и В не являются коммутативными.

11) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **12)** $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы к практическому занятию 1.2.1

1) а) -10; б) 50; в) -3; г) $4ab$; д) $3x+1$; е) 1. **2)** а) -16; б) 22; в) -9.

3) $\det A = 42 \neq 0$, следовательно, матрица A является невырожденной.

4) а) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$; б) $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{22}$. **5)** $M_{23} = 11$.

6) $A_{11} = -8$; $A_{12} = 2$; $A_{13} = -3$; $A_{21} = 13$; $A_{22} = -9$; $A_{23} = 2$; $A_{31} = 17$; $A_{32} = -10$; $A_{33} = 15$. **7)** а) –36; б) 0; в) 87. **8)** а) 0; б) 198; в) $1/4$.

9) а) 20; б) 54; в) -60.

Ответы к практическому занятию 1.3.1

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2/8 & -3/8 & 7/8 \\ -2/8 & -1/8 & 5/8 \\ -4/8 & 2/8 & 6/8 \end{pmatrix}$;

$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. **2)** а) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы к практическому занятию 1.4.1

$rangA = 2$; $rangB = 3$; $rangC = 1$; $rangD = 3$; $rangF = 3$; $rangG = 2$.

Ответы к практическому занятию 2.1.1

а) Система совместна и имеет единственное решение; **б)** система совместна и имеет множество решений; **в)** система несовместна; **г)** система совместна и имеет единственное решение; **д)** система несовместна.

Ответы к практическому занятию 2.2.1

а) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$; **б)** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Ответы к практическому занятию 2.3.1

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$; **б)** $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$; **в)** $x_1 = c_1 + c_2 - 1$, $x_2 = 3 - c_1 - c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; где $c_1, c_2 \in R$; **г)** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$;

д) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$; **е)** $x_1 = -2$, $x_2 = 4 + c$, $x_3 = 3 - c$, $x_4 = c$; где $c \in R$.

Ответы к практическому занятию 2.4.1

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; **б)** $x_1 = -2c$, $x_2 = c$, $x_3 = 3c$; где $c \in R$;

в) $x_1 = 14c$, $x_2 = 21c$, $x_3 = c$, $x_4 = c$; где $c \in R$; **г)** $x_1 = 8c_1 - 7c_2$, $x_2 = 5c_2 - 6c_1$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; где $c_1, c_2 \in R$; **д)** $x_1 = 4c_2 - 9c_1$, $x_2 = 19c_2 - 35c_1$, $x_3 = 8c_2 - 15c_1$, $x_4 = 2c_1$, $x_5 = c_2$; где $c_1, c_2 \in R$.

5. ТИПОВОЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (С РЕШЕНИЕМ)

1) Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2) Даны две матрицы A и B. Найти $(2A + B) \cdot B$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Решить систему уравнений:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

1) Вычислим определитель, разложив его по элементам третьего столбца (этот столбец содержит наибольшее количество нулей). Имеем:

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} =$$
$$= 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 7 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 2A_{13} + 7A_{33}.$$

Следовательно, из алгебраических дополнений элементов третьего столбца необходимо вычислить лишь A_{13} и A_{33}:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & -3 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(3\cdot(-3)\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\cdot 3+5\cdot 2\cdot 4-3\cdot(-3)\cdot 4-$$

$$-(-1)\cdot 2\cdot 3-5\cdot(-2)\cdot 2)=-18+6+40+36+6+20=90;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 8 & -3\\ 3 & -2 & 4\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot(1\cdot(-2)\cdot 2+4\cdot 8\cdot 3+3\cdot 2\cdot(-3)-3\cdot(-2)\cdot(-3)-$$

$$-8\cdot 3\cdot 2-2\cdot 4\cdot 1)=-4+96-18-18-48-8=0.$$

Тогда определитель равен:

$$\Delta=2\cdot 90+7\cdot 0=180.$$

Ответ: $\Delta=180$.

2) Найдем сначала $2A=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ 6 & 0 & 12\\ 8 & 6 & 8\end{pmatrix}$.

Тогда

$$2A+B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ 6 & 0 & 12\\ 8 & 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 11\\ 8 & 3 & 15\\ 9 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим произведение матриц:

$$(2A+B)\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 11\\ 8 & 3 & 15\\ 9 & 4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}=C_{3\times 3}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix},$$

где $c_{11}=-3\cdot(-1)+5\cdot 2+11\cdot 1=24$; $c_{12}=-3\cdot 1+5\cdot 3+11\cdot(-2)=-10$;
$c_{13}=-3\cdot 1+5\cdot 3+11\cdot(-1)=1$; $c_{21}=8\cdot(-1)+3\cdot 2+15\cdot 1=13$;
$c_{22}=8\cdot 1+3\cdot 3+15\cdot(-2)=-13$; $c_{23}=8\cdot 1+3\cdot 3+15\cdot(-1)=2$;
$c_{31}=9\cdot(-1)+4\cdot 2+7\cdot 1=6$; $c_{32}=9\cdot 1+4\cdot 3+7\cdot(-2)=7$;
$c_{33}=9\cdot 1+4\cdot 3+7\cdot(-1)=14$.

Ответ: $(2A+B)\cdot B=C_{3\times 3}=\begin{pmatrix}24 & -10 & 1\\ 13 & -13 & 2\\ 6 & 7 & 14\end{pmatrix}$.

3) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 4 =$$

$$= 8 + 4 - 4 - 8 - 2 + 8 = 6 \neq 0.$$

Так как $\Delta = |A| \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение.

а) Найдем решение системы по формулам Крамера. Последовательно заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 5 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 10 + 2 - 16 - 4 + 10 - 8 = -6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 4 \cdot 2 -$$

$$- 4 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 = 32 + 20 + 4 - 32 - 8 - 10 = 6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 4 + 8 - 5 - 10 - 1 + 16 = 12.$$

Подставим значения определителей в формулы (2.2):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2.$$

б) Решим систему матричным методом. Найдем обратную матрицу. Составим алгебраические дополнения элементов матрицы А.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Подставляя в формулу (1.3), получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по формуле (2.3) имеем:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + (-6) \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 \\ -3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$

6. ВАРИАНТ ТЕСТА (С ОТВЕТАМИ)

Вопрос 1. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется …..

Варианты ответов (выберите один правильный ответ):

1) определителем, 2) матрицей, 3) детерминантом.

Вопрос 2. Определитель матрицы не изменится, если …..

Варианты ответов (выберите несколько правильных ответов):

1) транспонировать матрицу;

2) все элементы некоторой строки умножить на действительное число $\lambda \neq 0$;

3) переставить в матрице две строки;

4) к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на действительное число $\lambda \neq 0$.

Вопрос 3. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняется равенство …..

Впишите правильный ответ: ____________________________

Вопрос 4. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5+3\alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю, если $\alpha =$ …

Впишите правильный ответ: ____________________________

Вопрос 5. Если существует матрица $2A + A^T$, то матрица A ….
Варианты ответов (выберите несколько правильных ответов):
1) является квадратной,
2) может быть единичной,
3) может быть произвольной,
4) является нулевой (размера $m \times n$, где $m \neq n$).

Вопрос 6. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$ является вырожденной, если число α равно…
Впишите правильный ответ: ___________________________

Вопрос 7. Разность между числом свободных и базисных переменных системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$ равна …
Впишите правильный ответ: ___________________________

Вопрос 8. Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1, \\ \alpha x_1 + 5x_2 = -2. \end{cases}$ не имеет решений при $\alpha =$ ….
Впишите правильный ответ: ___________________________

Вопрос 9. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 6 & -15 & 3 \end{pmatrix}$ равен …..
Запишите решение и ответ: ______________________________

Вопрос 10. Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишите решение и ответ: ___________________________

Ключи верных ответов

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	2	1, 4	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$	1	1, 2	2	-1

Номер задания	8	9	10
Ответ	2	1, 4	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линейная алгебра является одним из важнейших разделов современной математики. Основные понятия и методы этой дисциплины находят широкое применение в различных областях знаний, в первую очередь в естественных и экономических науках.

Изложенные в данном учебном пособии методы и алгоритмы решения задач линейной алгебры могут послужить введением к освоению многочисленных приложений, таких как линейное программирование, оптимальное управление, эконометрика, вычислительная математика. Пособие отличается от других подобных изданий большим числом подробно решенных примеров, а также содержательным набором заданий для практических занятий, самостоятельных работ и индивидуальных домашних заданий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2003. – 304 с.

2 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2003. – 304 с.

3 Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / Л. А. Кузнецов. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с.

4 Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : В 2 ч. Ч. 1. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 288 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1. / А. П. Рябушко [и др.] ; под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Академическая книга, 2005. – 272 с.

6 Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 2005. – 480 с.

Учебное издание

Минеева Наталья Валерьевна
Сташкевич Марина Владимировна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Научный редактор – кандидат физико-математических наук
Владимир Валентинович Лихтин

Редактор Е. В. Безолукова

Подписано в печать 30.03.2015.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 80 г/м^2. Ризограф EZ570E.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 125 экз. Заказ 26920.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.