Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

В. Н. Логинов, З. В. Широкова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 512(07)
ББК 22.143я7
Л69

Рецензенты:

Кафедра «Высшая математика» механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный университет», зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор ***А. П. Чупахин***;
С. В. Панько, кандидат физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Общая математика» ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет»

Логинов, В. Н.

Л69 Линейная алгебра. Линейные и евклидовы пространства, линейные отображения и преобразования : учеб. пособие / В. Н. Логинов, З. В. Широкова. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 152 с.

ISBN 978-5-7765-1138-7

В пособии излагаются традиционные разделы второй части курса линейной алгебры. Написано на основе лекций, читавшихся авторами в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете». Материал изложен в объеме, необходимом для подготовки студента технического университета, и преподносится по возможности строго и доступно. Большое внимание уделено разбору примеров и задач, иллюстрирующих основной теоретический материал.

Предназначено для студентов направлений «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и написано в соответствии со стандартами и программой для этих специальностей.

УДК 512(07)
ББК 22.143я7

ISBN 978-5-7765-1138-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии приведены достаточно подробные теоретические сведения из раздела линейной алгебры, той её части, в которой рассматриваются преобразования линейных пространств и квадратичные формы.

Большая часть утверждений и теорем приводится с доказательствами, в основном это те, доказательства которых являются конструктивными, т.е. позволяют решать практические задачи.

Материал иллюстрируется подробно решенными задачами, аналогичными тем, которые предлагаются в индивидуальных домашних заданиях (ИДЗ).

Предполагается, что читатель знаком с элементами первой части линейной алгебры, которая рассматривается в курсе высшей математики – это элементы алгебры матриц (действия над матрицами, понятие обратной матрицы, методы вычисления обратной матрицы, понятие ранга матрицы), элементы теории определителей (понятие определителя порядка n, методы вычисления определителей произвольного порядка) и систем линейных уравнений (методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), однородных и неоднородных).

Кроме того, при изложении широко используются сокращения, заимствованные из математической логики и теории множеств:

$\exists$ – существует, найдется (квантор существования);

$\forall$ – для любого, для каждого, для всякого (квантор всеобщности);

$\Rightarrow$ – следует (логическое следствие);

$\Leftrightarrow$ – равносильно (логическая равносильность);

$\in$ – принадлежит (символ принадлежности);

$\subset$ – содержится (символ включения);

$\bigcup$, $\bigcap$ – объединение и пересечение множеств.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Определение линейного пространства

Определение 1.1. Множество L называется ***линейным пространством,*** а его элементы – векторами, если:

1) определена операция сложения, которая $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ ставит в соответствие элемент из L, называемый суммой векторов, который обозначается $\vec{x} + \vec{y}$;

2) определена операция умножения на число, которая $\forall \vec{x} \in L$ и $\lambda \in R$ ставит в соответствие элемент из L, называемый произведением вектора на число, который обозначается $\lambda \vec{x}$;

3) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ выполняются аксиомы:

A1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность сложения),

A2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность сложения),

A3. $\exists \vec{0} \in L$ такой, что $\forall \vec{x} \in L$ справедливо равенство $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (существование нулевого элемента),

A4. $\forall \vec{x} \in L, \exists (-\vec{x}) \in L$ такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (существование противоположного элемента),

A5. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$,

A6. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$,

A7. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$,

A8. $\forall \vec{x}, \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Здесь определено вещественное линейное пространство, если в 2) определения 1.1 считать, что $\lambda \in C$ (C – множество комплексных чисел), то линейное пространство будет называться комплексным. Вектор $\vec{0}$ называется нулевым вектором. Вектор $-\vec{x} = -1 \cdot \vec{x}$ называется **противоположным** вектору $\vec{x}$.

Сумма векторов $\vec{x}$ и $(-\vec{y})$ называется **разностью векторов** и обозначается $\vec{x} - \vec{y}$.

Пример 1.1. Рассмотрим множество всех функций одной независимой переменной *t*, определенных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Любым двум функциям $f(t)$ и $g(t)$ из этого множества соответствует функция $f(t)+g(t)$ в обычном смысле, которая также определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, следовательно, принадлежит этому множеству. Числу $\lambda \in R$ и функции $f(t)$ соответствует функция $\lambda f(t)$ (обычное произведение на число), которая также определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Нетрудно проверить, что все восемь аксиом выполнены. Роль нуля выполняет функция $f(t) \equiv 0$. Таким образом, рассматриваемое множество функций является линейным пространством.

Простейшие следствия из аксиом

Следствие 1.1. В произвольном линейном пространстве нулевой элемент единственный.

Предположим, что существует два нулевых элемента $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$, тогда положив в аксиоме 3 сначала $\vec{x}=\vec{0}_2$, $\vec{0}=\vec{0}_1$, получим $\vec{0}_2+\vec{0}_1=\vec{0}_2$, а затем, положив $\vec{x}=\vec{0}_1$, $\vec{0}=\vec{0}_2$, получим $\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_1$. Левые части полученных равенств равны на основании аксиомы 1, следовательно, равны и правые части этих равенств, т.е. $\vec{0}_1=\vec{0}_2$.

Следствие 1.2. В произвольном линейном пространстве противоположный элемент единственный.

Аналогично предыдущему, пусть для вектора $\vec{x}$ существует два противоположных вектора $\vec{y}_1, \vec{y}_2$, тогда, полагая в аксиоме 4: $-\vec{x}=\vec{y}_1$, получаем

$$\vec{x}+\vec{y}_1=\vec{0}, \tag{*}$$

затем, полагая $-\vec{x}=\vec{y}_2$, получаем

$$\vec{x}+\vec{y}_2=\vec{0}, \tag{**}$$

тогда в силу аксиом 1, 2, 3 имеем

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_1 + \vec{0} \overset{(**)}{=} \vec{y}_1 + (\vec{x} + \vec{y}_2) \overset{A2}{=} (\vec{y}_1 + \vec{x}) + \vec{y}_2 \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{y}_2 = \vec{y}_2$$

откуда следует, что $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$.

Определение 1.2. Выражение вида $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$.

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной,** если

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = 0$$

и **нетривиальной** в противном случае, т.е. если существует хотя бы одно λ_i, не равное нулю ($\exists \lambda_i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 \neq 0$).

Определение 1.3. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n \in L$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, в противном случае система векторов называется **линейно независимой.**

Таким образом, если

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \quad \text{и} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 \neq 0,$$

то система векторов линейно зависима, если же

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \quad \text{только при} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = 0,$$

то система векторов линейно независима.

Теорема 1.1. Система из n ($n > 1$) векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Так как система линейно зависима, то

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n :\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 \neq 0$ и $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

Пусть, например, $\lambda_k \neq 0$, тогда из последнего равенства

$$\lambda_k \vec{x}_k = -\lambda_1 \vec{x}_1 - \ldots - \lambda_{k-1} \vec{x}_{k-1} - \lambda_{k+1} \vec{x}_{k+1} - \ldots - \lambda_n \vec{x}_n$$

или

$$\vec{x}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \vec{x}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \vec{x}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \vec{x}_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \vec{x}_n,$$

т.е. $$\vec{x}_k = \mu_1 \vec{x}_1 + \ldots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n \vec{x}_n,$$

где $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_k}$, следовательно, вектор $\vec{x}_k$ – линейная комбинация остальных векторов.

($\Leftarrow$) Пусть $\vec{x}_k = \mu_1 \vec{x}_1 + \ldots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n \vec{x}_n$, перенесём $\vec{x}_k$ в правую часть и получим нетривиальную линейную комбинацию, равную $\vec{0}$ (здесь $\mu_k = -1 \neq 0$).

Теорема 1.2. Если некоторые из векторов, входящих в систему, образуют линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ – линейно зависимы, m – число векторов в системе ($m < n$), тогда по теореме 1.1

$$\vec{x}_k = \mu_1 \vec{x}_1 + \ldots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_m \vec{x}_m,$$

следовательно $\vec{x}_k = \mu_1 \vec{x}_1 + \ldots + \mu_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \mu_{k+1} \vec{x}_{k+1} + \ldots + \mu_n \vec{x}_n$,

где $\mu_{m+1} = \mu_{m+2} = \ldots = \mu_n = 0$, т.е. вектор $\vec{x}_k$ – линейная комбинация векторов $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n$, следовательно, по теореме 1.1 вся система линейно зависима.

Теорема 1.3. Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема также линейно независима.

Доказательство. Пусть это не так, и в систему входит линейно зависимая подсистема векторов, тогда по теореме 1.2 вся система тоже линейно зависима, что противоречит условию теоремы. Следовательно, любая подсистема линейно независима.

1.2. Базис линейного пространства

Определение 1.4. **Базисом** в линейном пространстве L называется любая упорядоченная система векторов, обладающая свойствами:

1) она линейно независима, 2) любой вектор из L является линейной комбинацией векторов этой системы.

Пусть базис пространства состоит из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, тогда по определению $\forall \vec{x} \in L$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n = \sum_k x_k\vec{e}_k . \qquad (1.1)$$

Коэффициенты этой линейной комбинации $x_1, x_2, ..., x_n$ называются **координатами вектора** $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, равенство (1.1) называется **разложением вектора** $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Очень часто, для сокращения записи и удобства, вектор обозначается перечислением координат:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (1.2)$$

считается, что записи (1.1) и (1.2) эквивалентны.

Обозначим $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – матрицу-строку из базисных векторов, $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^{\mathsf{T}}$ – координатный столбец вектора $\vec{x}$, тогда по определению произведения матриц

$$\vec{x} = \sum_k x_k\vec{e}_k = eX . \qquad (1.3)$$

Теорема 1.4. Если в пространстве L задан базис e, то координаты любого вектора в этом базисе определяются однозначно.

Доказательство. Предположим, что $\vec{x} = \sum_k x_k\vec{e}_k$ и $\vec{x} = \sum_k \hat{x}_k\vec{e}_k$, тогда, вычитая из первого равенства второе, получим $\vec{0} = \sum_k (x_k - \hat{x}_k)\vec{e}_k$. Так как система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ линейно независима (см. определение базиса), то все коэффициенты полученной линейной комбинации равны нулю (она тривиальная!), следовательно $x_k - \hat{x}_k = 0$, т.е. $x_k = \hat{x}_k$ $(k = \overline{1, n})$.

Теорема 1.5. Координаты вектора $\vec{x} + \vec{y}$ равны сумме координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Координаты вектора $\lambda\vec{y}$ равны координатам вектора $\vec{y}$, умноженным на λ.

Доказательство. Пусть e базис в L, тогда $\vec{x} = eX$, $\vec{y} = eY$. Пусть $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, тогда $\vec{z} = eZ$, $eZ = \vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = eX + eY = e(X + Y)$, следовательно, по теореме 1.4 $Z = X + Y \quad \Leftrightarrow \quad z_k = x_k + y_k \quad (k = \overline{1, n})$.

Аналогично, если $\vec{z} = \alpha\vec{y}$, то $eZ = \alpha\vec{y} = \alpha(eY) = e(\alpha Y)$ и по теореме 1.5

$$Z = \alpha Y \quad \Leftrightarrow \quad z_k = \alpha y_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Теорема 1.6. Если в линейном пространстве существует базис из *n* векторов, то любой другой базис состоит из того же числа векторов.

Доказательство. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m$ два базиса в L, причём $m > n$. Разложим каждый из векторов $\vec{f}_j$ по базису *e* и составим матрицу, столбцами которой будут координатные столбцы векторов $\vec{f}_j$. Эта матрица имеет ранг *n* (так как *e* базис и координатные столбцы линейно независимы), следовательно, по теореме о базисном миноре столбцы матрицы линейно зависимы ($m - n$ последних столбцов являются линейными комбинациями первых *n* столбцов), таким образом $\vec{f}_j$ – линейно зависимы и не могут быть базисом в L.

Определение 1.5. Линейное пространство, в котором существует базис из *n* векторов, называется ***n*-мерным** и обозначается L_n, число *n* называется **размерностью** пространства и обозначается dim*L* (dimension – размерность).

Может случиться так, что $\forall n \in N$ в *L* найдется *n* линейно независимых векторов, такое пространство называется бесконечномерным.

Теорема 1.7. В L_n каждая линейно независимая система из n векторов является базисом.

Доказательство. Любой вектор из пространства L_n представляется в виде линейной комбинации векторов этой системы, если это не так, то по теореме 1.1 существует линейно независимая система из $n + 1$ векторов, что противоречит определению базиса.

Теорема 1.8. В линейном пространстве L_n каждую линейно независимую систему из $m < n$ векторов можно дополнить до базиса в L_n.

Доказательство. Пусть дана линейно независимая система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ из m векторов. К этим m векторам можно добавить еще один вектор, линейно независимый с ними, иначе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m$ – базис в L_n, чего по теореме 1.5 не может быть. Рассуждая аналогично при $m + 1$, $m + 2$, ..., $n - 1$, получим систему из n линейно независимых векторов, которая по утверждению 1.2 будет базисом в L_n.

1.3. Замена базиса линейного пространства

Пусть в L_n даны два базиса $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ и $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$, тогда каждый вектор из базиса f можно разложить по базису e, т.е.

$$\vec{f}_j = t_{1j}\vec{e}_1 + t_{2j}\vec{e}_2 + ... + t_{nj}\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\vec{e}_k \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{1.4}$$

Из координатных столбцов векторов $\vec{f}_i$ в базисе e можно составить квадратную матрицу порядка n $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$, которая называется **матрицей перехода** от базиса e к базису f.

Эта матрица всегда является невырожденной, так как *e* и *f* – базисы линейного пространства, и, если det$T$ = 0, то один из столбцов матрицы T есть линейная комбинация других столбцов этой матрицы, т.е. по крайней мере один из векторов $\vec{f}_j$ является линейной комбинацией других векторов из f, что противоречит определению базиса.

Равенства (1.4) в матричной форме можно записать в виде $f = eT$, умножая это равенство на T^{-1} справа, получаем

$$fT^{-1} = (eT)T^{-1} = e(TT^{-1}) = eE = e \quad \text{или} \quad e = fT^{-1},$$

т.е. T^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису *e*.

Выясним, как связаны координаты одного и того же вектора $\vec{x}$ в базисах *e* и *f*. Пусть X_e, X_f –- координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в базисах *e* и *f* соответственно, тогда $\vec{x} = eX_e$, $\vec{x} = fX_f$ и $f = eT$, таким образом

$$eX_e = \vec{x} = fX_f = (eT)X_f = e(TX_f),$$

следовательно, по теореме 1.4

$$X_e = TX_f. \tag{1.5}$$

Умножая это равенство на матрицу T^{-1} слева, получим

$$X_f = T^{-1}X_e. \tag{1.6}$$

Формулы (1.5) и (1.6) и определяют искомую связь координат вектора в разных базисах. В координатной записи эти формулы имеют вид:

$$(x_i)_f = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot (x_j)_e, \qquad (x_i)_e = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(-1)} \cdot (x_j)_f,$$

где $t_{ij}^{(-1)}$ – элементы обратной матрицы T^{-1}.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение линейного подпространства

Непустое множество L' векторов из линейного пространства L_n называется линейным подпространством, если:

а) $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L' \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L'$;

б) $\forall \vec{x} \in L', \forall \alpha \in R \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{x} \in L'$.

Свойства а) и б) означают, что L' замкнуто относительно линейных операций – сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Из свойств а) и б) следует также, что любая линейная комбинация векторов из L' снова принадлежит L' (следует несколько раз применить свойства а) и б)), в частности нулевой вектор $\vec{0} \in L'$, как произведение $0\vec{x} \in L'$ и противоположный вектор $-\vec{x} = (-1)\vec{x} \in L'$. Легко устанавливается справедливость всех аксиом пространства, следовательно, L', в свою очередь, является линейным пространством.

Пусть дано некоторое множество векторов P из линейного пространства L_n $\left(P \subset L_n\right)$. Обозначим через L' совокупность всевозможных линейных комбинаций, каждая из которых составлена из конечного числа векторов из P.

$$L' = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \vec{p}_k \,\middle|\, \vec{p}_k \in P, k = \overline{1,m} \right\}.$$

Теорема 2.1. Множество L', построенное выше, является подпространством в пространстве L_n.

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L'$, тогда

$$\vec{x}_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{p}_i, \quad \vec{x}_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{p}_j,$$

где $m = |P|$ – число векторов в множестве P, $\vec{p}_i, \vec{p}_j \in P \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,m})$, следовательно, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{p}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{p}_j$, т.е. $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – линейная комбинация векторов из P и, значит, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L'$.

Аналогично, $\forall \vec{x} \in L'$, $\forall \alpha \in R$, имеем линейная комбинация векторов из P

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{p}_i , \quad \alpha\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha\alpha_i) \vec{p}_i ,$$

следовательно, $\alpha\vec{x} \in L'$. Таким образом, свойства а), б) выполняются и L' является подпространством.

Построенное подпространство называется **линейной оболочкой** множества векторов *P*. Обозначается $L\lfloor \vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_m \rfloor$ или $L[P]$.

Пусть $\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2}, ..., \vec{p}_{i_k}$ – линейно независимая система векторов из *P*, обладающая тем свойством, что каждый вектор из *P* есть линейная комбинация этих векторов, тогда векторы $\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2}, ..., \vec{p}_{i_k}$ образуют базис линейной оболочки *P* и, следовательно, любой вектор из *P* можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{p}_{i_1}, \vec{p}_{i_2}, ..., \vec{p}_{i_k}$ ($k = \dim L'$). Отсюда получаем, что размерность линейной оболочки конечного множества векторов не превосходит числа этих векторов.

В каждом линейном пространстве множество, состоящее из нулевого вектора, является линейным подпространством. Это подпространство называется **нулевым.** Кроме того, множество всех векторов из пространства L_n является подпространством, т.е. L_n тоже подпространство.

Теорема 2.2.

1) Если L' – подпространство *n*-мерного линейного пространства L_n, то $\dim L' \leq n$.

2) Если $\dim L' = n$, то L' совпадает с L_n.

Доказательство.

1) Исходя из любого ненулевого вектора, построим базис в L', так как это было сделано при доказательстве теоремы 1.8. Процесс построения должен закончиться не дальше чем на n-м векторе, так как любая линейно независимая система векторов из L' есть такая же система в L_n, следовательно, базис L' не может содержать более n векторов.

2) Пусть в L' базис содержит n векторов. Тогда любой вектор из L_n является линейной комбинацией базисных векторов, следовательно, принадлежит L' и, значит, $L' = L_n$.

Теорема 2.3. Если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ подпространства L' из линейного пространства L_n дополнить до базиса $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n$ в L_n, то в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ все векторы $\vec{x}$ из L' и только они будут иметь координаты $x_{k+1} = ... = x_n = 0$.

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n$ – базис в L_n, то $\forall \vec{x} \in L_n$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_k\vec{e}_k + x_{k+1}\vec{e}_{k+1} + ... + x_n\vec{e}_n$, если $x_{k+1} = ... = x_n = 0$, то $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_k\vec{e}_k$, так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ – базис в L', то $\vec{x} \in L'$.

Обратно, если $\vec{x} \in L'$, то $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_k\vec{e}_k$. Это же разложение будет разложением вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, если положить $x_{k+1} = ... = x_n = 0$ и записать $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_k\vec{e}_k + x_{k+1}\vec{e}_{k+1} + ... + x_n\vec{e}_n$.

А по доказанному выше – в любом базисе координаты вектора определяются однозначно.

2.2. Сумма и пересечение подпространств

Пусть L' и L'' – два подпространства линейного пространства L_n.

Определение 2.1. Линейная оболочка объединения подпространств $L' \cup L''$ называется **суммой** этих подпространств и обозначается $L' + L''$.

Таким образом, по определению

$$\vec{x} \in L' + L'' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \sum_i \alpha_i \vec{x}_i' + \sum_j \beta_j \vec{x}_j'' ,$$

где $\forall i : \vec{x}_i' \in L'$; $\forall j : \vec{x}_j'' \in L''$, т.е. если обозначить

$$\vec{x}' = \sum_i \alpha_i \vec{x}_i' \in L'; \quad \vec{x}'' = \sum_j \beta_j \vec{x}_j'' \in L'', \text{ то } \vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}'' .$$

Из теоремы 2.1 следует, что $L' + L''$ – подпространство, таким образом, подпространство $L' + L''$ состоит из векторов (и только из них), представляемых в виде $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$, где $\vec{x}' \in L'$, $\vec{x}'' \in L''$.

Определение 2.2. Множество векторов, которые одновременно принадлежат и L' и L'', называется **пересечением** подпространств и обозначается $L' \cap L''$.

Теорема 2.4. Пересечение подпространств $L' \cap L''$ есть подпространство.

Доказательство.

$$1)\ \left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 \in L' \cap L'' \overset{def}{\Rightarrow} \vec{x}_1 \in L', \vec{x}_1 \in L'' \\ \vec{x}_2 \in L' \cap L'' \overset{def}{\Rightarrow} \vec{x}_2 \in L', \vec{x}_2 \in L'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L' \\ \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L'' \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L' \cap L'',$$

2) $\forall \alpha \in R, \forall \vec{x} \in L' \cap L'' \Rightarrow \alpha\vec{x} \in L', \alpha\vec{x} \in L'' \Rightarrow \alpha\vec{x} \in L' \cap L''$.

Теорема 2.5. $\dim(L' + L'') = \dim L' + \dim L'' - \dim(L' \cap L'')$.

Доказательство. Рассмотрим в сумме $L' + L''$ следующую систему векторов:

а) если $L' \cap L''$ – ненулевое подпространство, то возьмём базис $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ в $L' \cap L''$ и дополним его до базиса в L' векторами $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_l$ и векторами $\vec{g}_1, ..., \vec{g}_m$ до базиса в L'';

б) если $L' \cap L''$ – нулевое подпространство, то просто возьмём объединение базисов $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_l$ и $\vec{g}_1, ..., \vec{g}_m$ в L' и в L'', соответственно.

Покажем, что любой вектор $\vec{x} \in L'+L''$ является линейной комбинацией построенной системы векторов. Это следует из определения 2.1 $L'+L''$

$$\forall \vec{x} \in L'+L'' \ \Rightarrow \ \vec{x} = \vec{x}'+\vec{x}'', \text{ где } \vec{x}' \in L', \ \vec{x}'' \in L'',$$

Следовательно, $\vec{x}' = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{e}_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j \vec{f}_j$, $\vec{x}'' = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{e}_i + \sum\limits_{s=1}^{m} \delta_s \vec{g}_s$, следовательно, $\forall \vec{x} \in L'+L''$ – линейная комбинация построенной системы векторов.

Теперь покажем, что эта система векторов линейно независима.

Возьмём какую-либо линейную комбинацию этих векторов и приравняем к нулевому вектору

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{l} \nu_j \vec{f}_j + \sum_{s=1}^{m} \rho_s \vec{g}_s = \vec{0}. \qquad (*)$$

Вектор $\vec{x}'' = \sum\limits_{s=1}^{m} \rho_s \vec{g}_s \in L''$, а из (*) следует $\vec{x}'' = -\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \vec{e}_i - \sum\limits_{j=1}^{l} \nu_j \vec{f}_j \in L'$ следовательно, $\vec{x}'' \in L' \cap L''$, но тогда по теореме 2.3 заключаем, что $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_l = 0$.

Аналогично, вектор $\vec{x}' = \sum\limits_{i=1}^{l} \nu_j \vec{f}_j \in L'$, а из (*) следует, что

$$\vec{x}' = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{e}_i - \sum_{s=1}^{m} \rho_s \vec{g}_s \in L'',$$

тогда по теореме 2.3 заключаем, что $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0$.

Таким образом, равенство (*) принимает вид

$$\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + ... + \mu_k \vec{e}_k = \vec{0},$$

но тогда и $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0$, так как $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$ – базис в $L' \cap L''$.

В результате заключаем, что равенство (*) возможно лишь для тривиальной линейной комбинации, следовательно, система векторов

$$\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{f}_1, ..., \vec{f}_l, \vec{g}_1, ..., \vec{g}_m$$

– линейно независима и по определению 2.1образует базис в $L'+L''$.

Теперь, по построению

$$\dim L' = k + l, \ \ \dim L'' = k + m, \ \ \dim(L' + L'') = k + l + m,$$

следовательно, $\dim(L' + L'') = \dim L' + \dim L'' - \dim(L' \cap L'')$.

Следствие 2.1. Если $\dim L' + \dim L'' > n$, то $L' \cap L'' \neq \{\vec{0}\}$, так как $L' + L''$ – подпространство в L_n, и поэтому (теорема 2.2) $\dim(L' + L'') \leq n$.

Пример 2.1. Найти размерность и базис линейного подпространства, являющегося линейной оболочкой векторов. Записать разложение векторов системы по найденному базису.

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \ \vec{a}_2 = (2, -1, -1, 0), \ \vec{a}_3 = (1, -1, -1, 1),$$

$$\vec{a}_4 = (1, 2, 2, 4), \ \vec{a}_5 = (2, 2, 2, 3).$$

Решение. Составим из координатных столбцов векторов системы матрицу и с помощью элементарных преобразований определим ее ранг. Ранг этой матрицы будет совпадать с числом линейно независимых векторов в системе и, значит, равен размерности оболочки векторов (см. раздел 1).

Матрица из координатных столбцов имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Умножим элементы первого столбца на –2 и прибавим к соответствующим элементам второго и пятого столбцов, затем элементы первого столбца умножим на –1 и прибавим к соответствующим элементам третьего и четвертого столбцов. В результате получим матрицу, эквивалентную исходной, она будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычитая теперь из третьего столбца второй, а из пятого – четвертый, получаем опять матрицу, которая эквивалентна исходной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг этой матрицы равен трём и размерность линейной оболочки тоже будет равна трём. В качестве базиса можно взять векторы $\vec{e}_1 = \vec{a}_1, \vec{e}_2 = \vec{a}_2, \vec{e}_3 = \vec{a}_4$ (вектор $\vec{a}_3$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и поэтому не может быть базисным).

Находим разложение векторов системы по этому базису. Пусть

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ),

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_3 = 1 \end{cases},$$

решая которую, находим $\alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = -1$, т.е. $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Записывая разложение вектора $\vec{a}_5$ и решая аналогичную систему, находим $\vec{a}_5 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

2.3. Прямое дополнение подпространства

Определение 2.3. Если $L' \bigcap L'' = \{\vec{0}\}$, то $L' + L''$ называется **прямой суммой** подпространств и обозначается $L' \oplus L''$.

Следствие 2.2. $\dim(L' \oplus L'') = \dim L' + \dim L''$.

Теорема 2.6. $\forall \vec{x} \in L' \oplus L''$, $\exists! \vec{x}' \in L'$, $\exists! \vec{x}'' \in L''$ такие, что $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$.

Доказательство. Пусть таких разложений два, т.е. $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{x}''$ и $\vec{x}=\vec{y}'+\vec{y}''$, где $\vec{x}',\vec{y}'\in L'$, $\vec{x}'',\vec{y}''\in L''$, тогда $\vec{x}'+\vec{x}''=\vec{y}'+\vec{y}''$, следовательно, $\vec{x}'-\vec{y}'=\vec{y}''-\vec{x}''$. Очевидно, что вектор $\vec{x}'-\vec{y}'\in L'$, но $\vec{x}'-\vec{y}'=\vec{y}''-\vec{x}''\in L''$, значит $\vec{x}'-\vec{y}'\in L'\bigcap L''=\{\vec{0}\}$, т.е. $\vec{x}'=\vec{y}'$. Аналогично $\vec{y}''=\vec{x}''$.

Определение 2.4. Если линейные подпространства L' и L'' в линейном пространстве L_n образуют прямую сумму, причем $L'\oplus L''=L_n$, то L'' называется **прямым дополнением** для L'.

Если линейное подпространство L'' является прямым дополнением для линейного подпространства L', то верно и обратное: L' является прямым дополнением для L''.

Оказывается, что любое линейное подпространство имеет прямое дополнение.

Теорема 2.7. Любое линейное подпространство L' в линейном пространстве L_n имеет прямое дополнение.

Доказательство. Если линейное подпространство L' совпадает со всем линейным пространством, то в качестве его прямого дополнения следует взять нулевое подпространство. Точно так же прямым дополнением к нулевому подпространству является само линейное пространство. Опуская эти два тривиальных случая, полагаем, что линейное подпространство L' является собственным.

1) Выберем в L' какой-либо базис $e=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k)$ и дополним его системой векторов $f=(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m)$ до базиса всего пространства L_n. Пусть $L''=L[\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_m]$, тогда $L'+L''=L_n$, так как сумма $L'+L''$ содержит все векторы системы $(e\ f)$, являющейся базисом в L_n, а значит, и любой другой вектор линейного пространства.

2) Остается доказать, что сумма $L' + L''$ является прямой.

Выберем произвольный вектор $\vec{y} \in L' \bigcap L''$. Тогда, с одной стороны $\vec{y} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k$, так как $\vec{y}$ принадлежит линейному подпространству L', а с другой стороны $\vec{y} = \beta_1 \vec{f}_1 + \ldots + \beta_m \vec{f}_m$, так как $\vec{y}$ принадлежит линейному подпространству L''. Эти две линейные комбинации есть два разложения вектора в базисе $(e\ f)$ линейного пространства L_n и, следовательно, должны совпадать:

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k = \beta_1 \vec{f}_1 + \ldots + \beta_m \vec{f}_m \Rightarrow \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k - \beta_1 \vec{f}_1 - \ldots - \beta_m \vec{f}_m = \vec{0}.$$

Система векторов $(e\ f)$ линейно независима, так как является базисом. Поэтому из последнего равенства векторов следует, что в нём все коэффициенты нулевые. Значит, вектор $\vec{y}$ является нулевым, а так как он выбирался произвольно, то $L' \bigcap L'' = \{\vec{0}\}$. Поэтому линейные подпространства L' и L'' образуют прямую сумму.

3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Определение и основные свойства

Определение 3.1. Линейное пространство L_n называется **евклидовым,** если в нем определена операция скалярного умножения, сопоставляющая любым двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$, и обладающая свойствами:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
3) $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$;
4) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, если $\vec{x} \neq \vec{0}$;
5) $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, если $\vec{x} = \vec{0}$.

Евклидово пространство размерности *n* обозначается E_n.

Определение 3.2. **Длиной** или **модулем** вектора называется число $\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$. Обозначается $|\vec{x}|$, т.е. по данному определению $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Определение 3.3. **Углом** между векторами $\vec{x}, \vec{y}$ называется число, определяемое из равенства

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

По определению $|\cos\alpha| \le 1$, поэтому необходимо показать, что

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}||\vec{y}|} \le 1.$$

Теорема 3.1. Для скалярного произведения в евклидовом пространстве E_n справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E_n: \quad (\vec{a}, \vec{b})^2 \le (\vec{a}, \vec{a})(\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad \text{или} \quad \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \le |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = \left(\vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b}\right)$, где $t \in R$, из свойств 4, 5 следует, что $\forall t \in R: \ f(t) \ge 0$.

Применяя свойства 1, 2, 3, получим:

$$f(t) = (\vec{a}, \vec{a}) + \left(t\vec{b}, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, t\vec{b}\right) + \left(t\vec{b}, t\vec{b}\right) = (\vec{a}, \vec{a}) + 2t\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + t^2\left(\vec{b}, \vec{b}\right).$$

Так как $\forall t \in R: \ f(t) \ge 0$, (свойство 4), то $D \le 0$, где D – дискриминант квадратного трёхчлена, т.е. $D = 4\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 - 4(\vec{a}, \vec{a})\left(\vec{b}, \vec{b}\right) \le 0$, следовательно, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 \le (\vec{a}, \vec{a})\left(\vec{b}, \vec{b}\right)$ или $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 \le |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2$.

Следствие 3.1. Из неравенства Коши-Буняковского получаем, что

$$\frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} \le 1 \quad \text{или} \quad \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1,$$

следовательно, понятие угла определено корректно.

Определение 3.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **перпендикулярными** или **ортогональными**, если $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Будем считать, что вектор $\vec{0}$ ортогонален любому вектору.

Определение 3.5. Система векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m$ в пространстве E_n называется **ортогональной,** если $\forall i, j, \quad i \neq j: \quad (\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0$.

Определение 3.6. Система векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m$ в пространстве E_n называется **ортонормированной,** если $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$,

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Теорема 3.2. Любая ортонормированная система векторов в пространстве E_n линейно независима!

Доказательство. Пусть $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_m$ – ортонормированная система векторов в E_n. Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2 + ... + \alpha_m \vec{f}_m = \vec{0} \qquad (*)$$

Умножим обе части равенства на $\vec{f}_j$ $(j = \overline{1,\ m})$, тогда

$$\left(\alpha_1 \vec{f}_1, \vec{f}_j\right) + \left(\alpha_2 \vec{f}_2, \vec{f}_j\right) + ... + \left(\alpha_m \vec{f}_m, \vec{f}_j\right) = 0,$$

$$\alpha_1 \left(\vec{f}_1, \vec{f}_j\right) + \alpha_2 \left(\vec{f}_2, \vec{f}_j\right) + ... + \alpha_m \left(\vec{f}_m, \vec{f}_j\right) = 0.$$

Так как векторы $\vec{f}_j$ – ортогональны, то $\left(\vec{f}_i, \vec{f}_j\right) = 0$ при $i \neq j$, следовательно, $\alpha_j \left(\vec{f}_j, \vec{f}_j\right) = 0$, где $\left(\vec{f}_j, \vec{f}_j\right) = 1$ и $\forall j = \overline{1,\ m}$: $\alpha_j = 0$.

Следовательно, равенство (*) возможно, если линейная комбинация тривиальна, это означает, что система векторов линейно независима.

Теорема 3.3. В евклидовом пространстве E_n всегда существует ортонормированный базис!

Доказательство (метод математической индукции по размерности пространства n).

1) При $n = 1$ утверждение очевидно. Если $\vec{f}$ – ненулевой вектор, то вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{f}}{|\vec{f}|} = |\vec{f}|^{-1}\vec{f}$ – ортонормированная система из одного вектора.

2) Предположим, что в каждом $(n - 1)$ – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}$ и покажем, что тогда утверждение верно и для n – мерного пространства.

Пусть $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_{n-1}, \vec{f}_n$ базис в пространстве E_n (вектор $\vec{f}_n$ – линейно независим с $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_{n-1}$). Линейная оболочка векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_{n-1}$ представляет собой $(n – 1)$ – мерное евклидово пространство и по предположению индукции, там существует ортонормированная система из $(n – 1)$ векторов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}$. Рассмотрим вектор

$$\vec{f} = \vec{f}_n - \alpha_1\vec{e}_1 - ... - \alpha_{n-1}\vec{e}_{n-1}. \qquad (**).$$

Коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ подберем так, чтобы вектор $\vec{f}$ был ортогонален всем векторам $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}$**.** Умножим равенство (**) на векторы $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n-1})$, получим

$$0 = (\vec{f}, \vec{e}_i) = (\vec{f}_n, \vec{e}_i) - \alpha_1\underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_i)}_{0} - ... - \alpha_i\underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}_{1} - ... - \alpha_{n-1}\underbrace{(\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_i)}_{0},$$

откуда находим $(\vec{f}_n, \vec{e}_i) - \alpha_i = 0, \quad \alpha_i = (\vec{f}_n, \vec{e}_i) \quad (i = \overline{1, n-1})$.

Рассмотрим теперь вектор $\vec{e}_n = \dfrac{\vec{f}}{|\vec{f}|} = |\vec{f}|^{-1}\vec{f}$**.** Длина его равна 1, и он ортогонален векторам $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{n-1}$, следовательно, система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ ортонормированная и по теореме 3.2 образует базис в пространстве E_n.

Метод, с помощью которого получен ортонормированный базис в пространстве E_n, при доказательстве теоремы 3.3 называется методом **ортогонализации Грама - Шмидта.**

Практическая реализация метода ортогонализации

Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n$ произвольный базис в пространстве E_n.

1) Полагаем $\vec{e}_1 = \vec{f}_1$ (нормировать полученные векторы можно и потом).

2) Находим ортогональный базис в линейной оболочке векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, полагаем $\vec{f} = \vec{f}_2 - \alpha_1^{(1)}\vec{e}_1$, где $\alpha_1^{(1)} = \dfrac{(\vec{f}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}$ тогда $\vec{e}_2 = \vec{f}$ и искомый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

3) Находим ортогональный базис в линейной оболочке векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, полагаем $\vec{f} = \vec{f}_3 - \alpha_1^{(2)}\vec{e}_1 - \alpha_2^{(2)}\vec{e}_2$, где

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)},$$

тогда $\vec{e}_3 = \vec{f}$ и искомый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Повторяя эту процедуру, на n-м шаге получим ортогональный базис в E_n. Нормируя каждый вектор, получаем ортонормированный базис.

3.2. Выражение скалярного произведения векторов через координаты сомножителей

Пусть в E_n задан базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, значит $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j,$$

тогда на основании свойств скалярного умножения

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j), \tag{3.1}$$

обозначим $\gamma_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, числа γ_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n: $\Gamma_e = (\gamma_{ij})$, которая называется **матрицей Грама базиса *e*.**

В силу свойств скалярного произведения

$$\gamma_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\vec{e}_j, \vec{e}_i) = \gamma_{ji} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_e^{\mathsf{T}} = \Gamma_e,$$

т.е. матрица Γ_e симметрична относительно главной диагонали. Такие матрицы называются **симметрическими.**

Если X, Y – координатные столбцы векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в базисе e, то

$$(3.1) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\vec{x}, \vec{y}) = X^{\mathsf{T}} \Gamma_e Y \qquad (3.2)$$

$$X^{\mathsf{T}} \Gamma_e Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{i2}, ..., \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{in} \right) \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \gamma_{ij} y_j \ .$$

Если $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – ортонормированный базис, то

$$\forall i, j, \quad i \neq j: \quad \gamma_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0\,; \quad \gamma_{ii} = (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1,$$

т.е. $\gamma_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = j \\ 0, & \text{при} \quad i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_e = E$, отсюда получаем, что скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов (вспомнить произведение матриц):

$$(\vec{x}, \vec{y}) = X^{\mathsf{T}} Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Пример 3.1. Применить процесс ортогонализации к следующей системе векторов, евклидова пространства E_3:

$$\vec{f}_1 = (1, \ -2, 2), \ \vec{f}_2 = (-1, 0, -1), \ \vec{f}_3 = (5, -3, -7)\,.$$

Решение. Полагаем $\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = (1, -2, 2)$. Вектор $\vec{e}_2$ ищем в виде $\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_1^{(1)} \vec{e}_1$. Так как

$(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -3, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 9$

(считаем, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ заданы в ортонормированном базисе, который по теореме 3.3 всегда существует в E_n), то $\alpha_1^{(1)} = \dfrac{(\vec{f}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = -\dfrac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_1^{(1)}\vec{e}_1 = (-1, 0, -1) - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(1, -2, 2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Наконец, вектор $\vec{e}_3$ находим в виде следующей линейной комбинации векторов: $\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_1^{(2)}\vec{e}_1 - \alpha_2^{(2)}\vec{e}_2$.

Вычисляя скалярные произведения

$$(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = -3, \quad (\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 1, \quad (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1,$$

находим значения коэффициентов:

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = 1.$$

Следовательно, $\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\vec{e}_1 - 1\cdot\vec{e}_2 = (6, -3, -6)$.

Таким образом, получаем следующую систему ортогональных векторов:

$$\vec{e}_1 = (1, -2, 2); \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad \vec{e}_3 = (6, -3, -6).$$

Разделив каждый вектор на его длину:

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 1,$$

$$|\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 9,$$

получим ортонормированный базис:

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

3.3. Связь матриц Грама разных базисов

Пусть даны два базиса e и f, связанные матрицей перехода T, т.е. $f = eT$; X_e, Y_e, X_f, Y_f – координатные столбцы векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в базисах e и f соответственно, тогда $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$X_e = TX_f, \qquad Y_e = TY_f.$$

Подставляя эти равенства в формулу (3.2) и используя тот факт, что $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$, получаем

$$(\vec{x}, \vec{y}) = X_e^{\mathsf{T}} \Gamma_e Y_e = (TX_f)^{\mathsf{T}} \Gamma_e (TY_f) = X_f^{\mathsf{T}} (T^{\mathsf{T}} \Gamma_e T) Y_f.$$

С другой стороны, $(\vec{x}, \vec{y}) = X_f^{\mathsf{T}} \Gamma_f Y_f$, следовательно,

$$\Gamma_f = T^{\mathsf{T}} \Gamma_e T. \tag{3.3}$$

Теорема 3.4. Определитель матрицы Грама любого базиса положителен ($\det \Gamma > 0$).

Доказательство. Рассмотрим формулу (3.3) в том частном случае, когда базис e является ортонормированным, тогда $\Gamma_e = E$ и $\Gamma_f = T^{\mathsf{T}} T$.

Вычислим детерминант обеих частей равенства, получим

$$\det \Gamma_f = \det\left(T^{\mathsf{T}} T\right) = \det T^{\mathsf{T}} \det T = \left(\det T\right)^2 > 0, \text{ где } \det T \neq 0.$$

Поскольку базис f произвольный, отсюда получаем требуемое.

Запишем удобное представление матрицы Грама.

Пусть $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ базис в E_n, тогда

$$e^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vdots\\ \vec{e}_n\end{pmatrix},\quad e^{\mathsf{T}}e=\begin{pmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & (\vec{e}_1,\vec{e}_2) & \cdots & (\vec{e}_1,\vec{e}_n)\\ (\vec{e}_2,\vec{e}_1) & (\vec{e}_2,\vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_2,\vec{e}_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\vec{e}_n,\vec{e}_1) & (\vec{e}_n,\vec{e}_2) & \ldots & (\vec{e}_n,\vec{e}_n)\end{pmatrix}=\varGamma_e,$$

таким образом $\varGamma_e=e^{\mathsf{T}}e$.

Теорема 3.5. Векторы $\vec{f}_1,\vec{f}_2,...,\vec{f}_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\det\varGamma_f=0$**.**

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть система линейно зависима, тогда

$$\exists\ \mu_1,\mu_2,...,\mu_m,\quad \mu_1^{\,2}+...+\mu_m^{\,2}\neq 0:\quad \mu_1\vec{f}_1+\mu_2\vec{f}_2+...+\mu_m\vec{f}_m=\vec{0}.$$

Умножая последовательно эту линейную комбинацию скалярно на векторы $\vec{f}_i$ $(i=\overline{1,m})$, получим

$$\begin{cases}\mu_1\left(\vec{f}_1,\vec{f}_1\right)+\mu_2\left(\vec{f}_1,\vec{f}_2\right)+...+\mu_m\left(\vec{f}_1,\vec{f}_m\right)=0\\ \mu_1\left(\vec{f}_2,\vec{f}_1\right)+\mu_2\left(\vec{f}_2,\vec{f}_2\right)+...+\mu_m\left(\vec{f}_2,\vec{f}_m\right)=0\\ \ldots\\ \mu_1\left(\vec{f}_m,\vec{f}_1\right)+\mu_2\left(\vec{f}_m,\vec{f}_2\right)+...+\mu_m\left(\vec{f}_m,\vec{f}_m\right)=0\end{cases}$$

систему m однородных уравнений с m неизвестными μ_j $(j=\overline{1,m})$.

В матричной записи:

$$\varGamma_f\cdot\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_m\end{pmatrix}=O_m=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Так как по условию $\mu_1^2 + ... + \mu_m^2 \neq 0$, то существует нетривиальное решение этой системы линейных однородных уравнений, следовательно, определитель матрицы равен нулю, т.е. $\det \Gamma_f = 0$.

$(\Leftarrow)$ Если $\det \Gamma_f = 0$, то по крайней мере один из столбцов матрицы Γ_f является линейной комбинацией остальных столбцов (смотри условия равенства нулю определителя матрицы), для определённости m-й, т.е.

$$\Gamma_{f_m} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \Gamma_{f_j},$$

тогда $\left(\vec{f}_i, \vec{f}_m\right) = \mu_1\left(\vec{f}_i, \vec{f}_1\right) + \mu_2\left(\vec{f}_i, \vec{f}_2\right) + ... + \mu_{m-1}\left(\vec{f}_i, \vec{f}_{m-1}\right)$ $(i = \overline{1, m})$

или $$(\vec{f}_i, \overbrace{\vec{f}_m - \mu_1\vec{f}_1 - \mu_2\vec{f}_2 - ... - \mu_{m-1}\vec{f}_{m-1}}^{\vec{f}}) = 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

т.е. вектор $\vec{f} = \vec{f}_m - \mu_1\vec{f}_1 - ... - \mu_{m-1}\vec{f}_{m-1}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_m$. Но, с другой стороны, $\vec{f}$ – линейная комбинация этих векторов, следовательно, $\vec{f} \perp \vec{f}$, что равносильно равенству $\vec{f} = \vec{0}$ или $\vec{f}_m = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \vec{f}_k$, а это равносильно тому, что система векторов линейно зависима.

Теорема 3.6. Если векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m$ линейно независимы, то $\det \Gamma_f > 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда f – базис, так как линейно независимая система векторов f является базисом своей линейной оболочки. Рассмотрим в линейной оболочке f ортонормированный базис $e = \left(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m\right)$, тогда (см. теорему 3.4) $\det \Gamma_f > 0$.

Пусть теперь оба базиса e и f ортонормированные, тогда $\Gamma_e = \Gamma_f = E$ и формула (3.3) принимает вид

$$E = T^{\mathsf{T}} T \tag{3.4}$$

Определение 3.7. Матрица, удовлетворяющая условию (3.4), называется **ортогональной.**

Название обусловлено тем, что ортогональные матрицы и только они могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису.

Будем обозначать ортогональные матрицы U, тогда

$$(3.4) \;\Leftrightarrow\; U^{\mathsf{T}}U = E,$$

отсюда, умножая левую и правую часть равенства слева на U, а справа на U^{T}, получаем

$$U(U^{\mathsf{T}}U)U^{\mathsf{T}} = UEU^{\mathsf{T}}, \quad (UU^{\mathsf{T}})(UU^{\mathsf{T}}) - UU^{\mathsf{T}} = O,$$

$$UU^{\mathsf{T}}(UU^{\mathsf{T}} - E) = O, \quad UU^{\mathsf{T}} = E, \text{ т.е.}$$

$$U^{\mathsf{T}}U = UU^{\mathsf{T}} = E. \tag{3.5}$$

По определению обратной матрицы: $U^{-1}U = UU^{-1} = E$, сравнивая последние равенства, заключаем, что $U^{\mathsf{T}} = U^{-1}$. Кроме того, матрица U^{T} тоже является ортогональной, так как $(U^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = U$ и $(U^{-1})^{-1} = U$.

Вычислив определитель обеих частей равенства (3.5), получим $(\det U)^2 = 1$, т.е. определитель ортогональной матрицы равен +1 или –1.

Обозначим $U^{\mathsf{T}}U = (\alpha_{ij})$, тогда

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{\mathsf{T}} u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki} u_{kj}, \text{ из } U^{\mathsf{T}}U = E \quad \Rightarrow \quad \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki} u_{kj} = \delta_{ij}, \text{ т.е.}$$

сумма квадратов элементов любого столбца (строки) ортогональной матрицы равна единице, а сумма попарных произведений соответствующих элементов различных столбцов (строк) равна нулю.

3.4. Ортогональное дополнение подпространства

Как следует из теоремы 2.7, в произвольном линейном пространстве L_n любое линейное подпространство L' имеет прямое дополнение, т.е. такое линейное подпространство L'', что $L' \oplus L'' = L_n$. Такое линейное подпространство L'' не является единственным. Однако в случае евклидова пространства среди всех возможных прямых дополнений к данному линейному подпространству, выделяется одно.

Определение 3.8. **Ортогональным дополнением** линейного подпространства V в евклидовом пространстве E_n называется множество $V^{\perp}$ всех векторов $\vec{x} \in E_n$, ортогональных каждому вектору линейного подпространства V.

$$V^{\perp} = \left\{ \vec{x} \in E_n \middle| \forall \vec{y} \in V : \vec{x} \perp \vec{y} \right\} V \quad .$$

Теорема 3.7. Ортогональное дополнение $V^{\perp}$ линейного подпространства V в евклидовом подпространстве E_n является линейным подпространством в E_n причем $E_n = V \oplus V^{\perp}$ ($V^{\perp}$ – прямое дополнение V).

Доказательство. Чтобы доказать, что $V^{\perp}$ является линейным подпространством в E_n, нужно проверить условия 1) и 2) определения подпространства.

1) Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ два произвольных вектора, принадлежащих $V^{\perp}$, умножим скалярно их сумму на произвольный вектор $\vec{z} \in V$. Получим: $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) = 0 + 0 = 0$, т.е. для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ множества $V^{\perp}$ их сумма $\vec{x} + \vec{y}$ принадлежит тому же множеству.

2) Теперь рассмотрим произведение вектора $\vec{x} \in V^{\perp}$ на произвольное действительное число α. Для произвольного вектора $\vec{z} \in V$:

$$(\alpha\vec{x}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

и поэтому $\alpha\vec{x} \in V^{\perp}$. Следовательно, $V^{\perp}$ является линейным подпространством в E_n.

3) Отметим, что любой вектор $\vec{x}$, принадлежащий пересечению $V \cap V^{\perp}$, ортогонален самому себе, так как любой вектор из подпространства $V^{\perp}$ ортогонален любому вектору из подпространства V. Но вектор ортогонален самому себе лишь в том случае, когда он нулевой. Поэтому $V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$, и сумма $V + V^{\perp}$ является прямой (по определению).

4) Докажем, что эта сумма совпадает со всем пространством E_n.

Выберем некоторый ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m$ в линейном подпространстве V и дополним его до базиса $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m, \vec{f}_{m+1}, \ldots, \vec{f}_n$ всего пространства E_n. Исходя из этого базиса, применяя метод ортогонализации, построим ортонормированный базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ в E_n. Так как первые m векторов базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину, то процесс ортогонализации оставит их без изменения, т.е. $\vec{e}_i = \vec{f}_i$, $i = \overline{1, m}$. Векторы $\vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n$ ортогональны каждому из векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ базиса линейного подпространства V и, следовательно, ортогональны V, так как V – линейная оболочка системы векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$. Поэтому все они попадают в ортогональное дополнение $V^{\perp}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in E_n$ и запишем его разложение по базису *e*: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\,\vec{e}_n$. Легко увидеть, что

$$\vec{x}' = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_m\,\vec{e}_m \in V, \text{ а } \vec{x}'' = x_{m+1}\vec{e}_{m+1} + \ldots + x_n\,\vec{e}_n \in V^{\perp},$$

при этом $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$. Следовательно, $\vec{x} \in V \oplus V^{\perp}$, и так как вектор $\vec{x}$ выбирался произвольно, то $E_n = V \oplus V^{\perp}$.

При этом, согласно следствию из теоремы 2.5, из соотношения $E_n = V \oplus V^{\perp}$ вытекает следующее равенство: $\dim E_n = \dim V + \dim V^{\perp}$.

Следствие. Каково бы ни было линейное подпространство V в евклидовом пространстве E_n, любой вектор $\vec{x} \in E_n$ можно однозначно представить в виде $\vec{x} = \vec{y} + \vec{y}^{\perp}$, где $\vec{y} \in V$, $\vec{y}^{\perp} \in V^{\perp}$.

Вектор $\vec{y}$ в разложении называют **ортогональной проекцией** вектора $\vec{x}$ на линейное подпространство V, а вектор $\vec{y}^{\perp}$ – **ортогональной составляющей** вектора $\vec{x}$ относительно линейного подпространства V.

Как построить ортогональное дополнение к данному линейному подпространству?

Пусть линейное подпространство V определено наиболее распространенным способом – как линейная оболочка некоторой системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, согласно определению 3.8 ортогонального дополнения, любой вектор $\vec{x} \in V^{\perp}$ должен быть ортогонален каждому из векторов $\vec{a}_i$:

$$(\vec{a}_i, \vec{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.6}$$

Наоборот, если вектор $\vec{x}$ удовлетворяет системе равенств (3.6), т.е. он ортогонален каждому из векторов $\vec{a}_i$, то этот вектор ортогонален и любой линейной комбинации системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$. Значит, $\vec{x}$ ортогонален каждому вектору линейного подпространства $V = L\left[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m\right]$ и принадлежит линейному подпространству $V^{\perp}$. Итак, система уравнений (3.6) описывает ортогональное дополнение линейного подпространства V.

Запишем эту систему в координатах в некотором ортонормированном базисе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{3.7}$$

Это однородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Строки матрицы A этой системы совпадают с наборами координат векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$. Поэтому матрица A имеет ранг, равный рангу системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, т.е. этот ранг совпадает с размерностью линейного подпространства V.

Каждое решение системы (3.7) представляет собой набор координат некоторого вектора из $V^{\perp}$ и наоборот, любой вектор из $V^{\perp}$ описывает решение системы (3.7). Поэтому можно сказать, что множество всех решений этой системы образует линейное подпространство $V^{\perp}$.

Согласно теореме 3.7, это подпространство имеет размерность $n - \dim V = n - \operatorname{rang} A$. Множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) описывается при помощи фундаментальной системы решений. Столбцы фундаментальной системы решений линейно независимы, а любое решение однородной СЛАУ представляется в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной системы решений. Другими словами, фундаментальная система решений – это базис в подпространстве всех решений данной однородной СЛАУ. Каждый столбец фундаментальной системы решений представляет собой координатный столбец вектора линейного подпространства $V^{\perp}$ в выбранном базисе. При этом такие векторы в совокупности образуют базис подпространства $V^{\perp}$.

Пример 3.2. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства E_4:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (0,1,1,0), \quad \vec{a}_2 = (1,1,2,1), \quad \vec{a}_3 = (1,2,3,1), \\ \vec{a}_4 = (1,3,4,1), \quad \vec{a}_5 = (1,0,1,1). \end{array}\right.$$

Решение. Запишем систему вида (3.7), используя координаты векторов $\vec{a}_i$, и найдем её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 - x_4 \end{cases}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базисом ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов являются векторы

$$\vec{f}_1 = (-1, -1, 1, 0), \quad \vec{f}_2 = (-1, 0, 0, 1).$$

Нетрудно видеть, что оба эти вектора ортогональны каждому из векторов $\vec{a}_i$ $(i = \overline{1, 5})$, значит, их линейная оболочка действительно является ортогональным дополнением.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (ОПЕРАТОРЫ)

4.1. Определение линейного отображения

Рассмотрим два линейных пространства L_n, L_m размерностей n и m соответственно.

Определение 4.1. **Отображением** φ пространства L_n в пространство L_m называется закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in L_n$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L_m$.

Обозначения: $\varphi : L_n \to L_m$ или $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

Вектор $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$ при отображении φ.

В дальнейшем рассматриваются лишь линейные отображения.

Определение 4.2. Отображение $\varphi : L_n \to L_m$ называется **линейным,** если $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n$, $\forall \alpha \in R$ выполняются равенства:

1) $\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2)$; 2) $\varphi(\alpha\vec{x}_1) = \alpha\varphi(\vec{x}_1)$.

Из определения 4.2 сразу следует, что линейная комбинация векторов при линейном отображении φ переходит в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами, т.е. справедлива формула

$$\varphi(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1\varphi(\vec{x}_1) + \alpha_2\varphi(\vec{x}_2) + ... + \alpha_k\varphi(\vec{x}_k) \quad (4.1)$$

(получить самостоятельно из свойств 1), 2) определения 4.2).

Если пространства L_m и L_n совпадают, т.е. $m = n$, то отображение называется **преобразованием** пространства L_n**.**

Теорема 4.1. При линейном отображении $\varphi : L_n \to L_m$ линейное подпространство $L' \subset L_n$ переходит в линейное подпространство $L'' = \varphi(L') \subset L_m$, причем размерность L'' не превосходит размерности L', т.е. $\dim \varphi(L') \le \dim L'$.

Доказательство. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_k$ – базис в L', тогда $\forall \vec{x} \in L'$ имеем

$$\vec{x} = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + ... + x_k \vec{f}_k \overset{(4.1)}{\Rightarrow} \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i \varphi(\vec{f}_i),$$

следовательно, произвольный элемент множества $\varphi(L')$ – образов всех векторов из L' есть линейная комбинация векторов $\varphi(\vec{f}_1), \varphi(\vec{f}_2), ..., \varphi(\vec{f}_k)$, т.е. $\varphi(L')$ – линейная оболочка этих векторов и значит, является линейным подпространством из пространства L_m (теорема 2.1). Размерность линейной оболочки, очевидно, не превосходит числа векторов этой оболочки (теорема 2.2), т.е. $\dim \varphi(L') \le \dim L'$.

В частности, множество образов всевозможных векторов из пространства L_n является подпространством в пространстве L_m. Будем обозначать это подпространство $\varphi(L_n)$, которое называется **множеством значений отображения** φ, или **образом пространства** L_n при отображении φ.

$$\varphi(L_n) = \left\{ \vec{y} \in L_m \middle| \vec{y} = \varphi(\vec{x}), \vec{x} \in L_n \right\}.$$

Определение 4.3. Размерность образа пространства L_n при отображении φ называется **рангом** этого отображения.

Обозначения: $\operatorname{rang}\varphi$, r_φ. Таким образом, $\operatorname{rang}\varphi \overset{def}{=} \dim \varphi(L_n)$.

Теорема 4.2. Множество всех векторов из L_n, переходящих при отображении φ в нулевой вектор, является подпространством в L_n.

Доказательство. Если $\varphi(\vec{x}_1) = \vec{0}$, $\varphi(\vec{x}_2) = \vec{0}$, то по определению линейного отображения 4.2 можем записать:

1) $\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$;

2) $\forall \alpha \in R, \quad \varphi(\alpha \vec{x}_1) = \alpha \varphi(\vec{x}_1) = \alpha \vec{0} = \vec{0}$.

Эти равенства означают, что множество всех векторов из L_n, переходящих при отображении φ в нулевой вектор, является подпространством в L_n.

Определение 4.4. Подпространство векторов из пространства L_n, отображающихся в нулевой вектор, называется **ядром** отображения φ и обозначается $\ker\varphi$.

Таким образом, $\ker\varphi = \{\vec{x} \in L_n \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Ядро линейного отображения не может быть пустым, так как содержит, по крайней мере, один вектор – нулевой.

Действительно, $\forall \vec{x} \in L_n: \quad \varphi(\vec{0}) = \varphi(0\vec{x}) = 0\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, т.е. при линейном отображении нулевой вектор $\vec{0} \in L_n$ переходит в нулевой вектор $\vec{0} \in L_m$.

Определение 4.5. Размерность ядра называется **дефектом** линейного отображения.

Обозначение: $\mathrm{def}\varphi$. Таким образом, $\mathrm{def}\varphi \overset{def}{=} \dim(\ker\varphi)$.

4.2. Координатное представление линейных отображений

Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – базис в L_n, тогда образ произвольного вектора из пространства L_n: $\vec{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$ можно представить в виде

$$\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + ... + x_n\varphi(\vec{e}_n). \tag{4.2}$$

Пусть $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m)$ – базис L_m, тогда каждый из векторов $\varphi(\vec{e}_j)$ можно разложить по базису f

$$\varphi(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{f}_1 + a_{2j}\vec{f}_2 + \ldots + a_{mj}\vec{f}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{f}_i \quad (j = \overline{1,\ n}).$$

Если $\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \ldots + y_m\vec{f}_m$ то (4.2) можно переписать в виде (подставить $\varphi(\vec{e}_j)$ в (4.2)):

$$y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \ldots + y_m\vec{f}_m = x_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\vec{f}_i + x_2\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\vec{f}_i + \ldots + x_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}\vec{f}_i =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)\vec{f}_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\right)\vec{f}_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)\vec{f}_m,$$

следовательно,

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \quad \ldots, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad \ldots, \quad y_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j. \qquad (4.3)$$

Коэффициенты a_{ij} – координаты векторов $\varphi(\vec{e}_j)$ в базисе *f* образуют матрицу A_φ размеров $m \times n$ $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которая называется **матрицей линейного отображения** φ в паре базисов *e* и *f*.

Матрица A_φ составлена из координатных столбцов образов базисных векторов $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)$ в базисе *f*.

Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ – координатные столбцы векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно, то равенство (4.3) в матричной форме принимает вид

$$Y = A_\varphi X \qquad (4.4)$$

При выбранных базисах *e* и *f* в пространствах L_n и L_m соответственно каждая матрица размеров $m \times n$ служит матрицей некоторого линейного отображения $\varphi : L_n \to L_m$, т.е. выбор базисов устанавливает взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $\varphi : L_n \to L_m$ и матрицами размеров $m \times n$.

Теорема 4.3. Ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения $\operatorname{rang} A_\varphi = \operatorname{rang} \varphi$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rang} A_\varphi = r$ и $j_1, ..., j_r$ – номера столбов матрицы A_φ, в которых расположен базисный минор. Это значит, что векторы $\varphi(\vec{e}_{j_1}),\ ..., \varphi(\vec{e}_{j_r})$ – линейно независимы и, следовательно, каждый вектор $\varphi(\vec{e}_j)$ $(j = \overline{1, n})$ есть их линейная комбинация (теорема о базисном миноре).

Следовательно, образ любого вектора $\varphi(\vec{x})$ можно выразить только через векторы $\varphi(\vec{e}_{j_1}), ..., \varphi(\vec{e}_{j_r})$, т.е. эти векторы образуют базис в $\varphi(L_n)$ – множестве значений отображения φ, но их число равно размерности $\varphi(L_n)$, т.е. рангу отображения, следовательно, $\operatorname{rang} \varphi = r$.

Теорема 4.4. Сумма ранга (размерности образа) и дефекта отображения (размерности его ядра) равна размерности отображаемого пространства

$$\dim \varphi(L_n) + \dim(\ker \varphi) = \dim L_n = n; \quad \dim \varphi(L_n) = \operatorname{rang} \varphi .$$

Доказательство. Пусть $r = \operatorname{rang} \varphi$, $\vec{x} \in \ker \varphi$, тогда по определению ядра линейного отображения $\left(\ker \varphi = \{\vec{x} \in L_n \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}\right)$ и формуле (4.4) получаем $A_\varphi X = O_m$ – однородную систему линейных уравнений с n неизвестными, здесь O_m – нулевой столбец высоты m.

В соответствии с теоремой 4.4 $\operatorname{rang} A_\varphi = r$ – ранг отображения. Пусть размерность ядра равна d. Из свойств множества решений однородной системы уравнений вытекает, что $d = n - r$ (доказать самостоятельно, что множество решений системы (*) – линейное подпространство размерности $n - r$).

Общее решение системы (*) было представлено в виде $X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_{n-r}X_{n-r}$, где $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ – фундаментальная система решений, следовательно, $\forall\vec{x} \in \ker\varphi$, $\vec{x}$ – линейная комбинация векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{n-r}$, т.е.

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_{n-r}\vec{x}_{n-r},$$

координатные столбцы которых $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ – линейно независимы, следовательно, эти векторы тоже линейно независимы и, значит, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{n-r}$ – базис в $\ker\varphi$, т.е. $\dim(\ker\varphi) = d = n - r$.

Таким образом, $\dim\varphi(L_n) + \dim(\ker\varphi) = r + n - r = n = \dim L_n$.

4.3. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов

Рассмотрим линейный оператор $\varphi : L_n \to L_m$, если в пространствах L_n и L_m выбраны базисы $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m)$ соответственно, то φ определяется матрицей A_φ. Пусть $e' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n)$ и $f' = (\vec{f}'_1, \vec{f}'_2, ..., \vec{f}'_m)$ другая пара базисов в L_n и L_m соответственно, e', f' связаны с e, f матрицами переходов T и P, т.е. (см. раздел 1)

$$e' = eT, \quad f' = fP.$$

В базисах e', f' оператор φ имеет матрицу A'_φ. Как связаны матрицы A_φ и A'_φ?

Пусть: $\vec{x} \in L_n$, $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ – образ вектора $\vec{x}$ при отображении φ, $\vec{y} \in L_m$; X, X' – координатные столбцы вектора $\boldsymbol{\vec{x}}$ в базисах e, e'; Y, Y' – координатные столбцы вектора $\vec{y}$ в базисах f, f'.

Из раздела 1 известно

$$X = TX', \quad Y = PY'.$$

Подставив X, Y в формулу (4.4), получим:

$$Y = A_{\varphi} X = A_{\varphi}(TX') \quad \Rightarrow \quad PY' = (A_{\varphi}T)X'.$$

Так как матрица перехода всегда является невырожденной, то $\exists P^{-1}$. Умножим последнее равенство на матрицу P^{-1} слева, получим

$$Y' = (P^{-1}A_{\varphi}T)X', \text{ но } Y' = A'_{\varphi}X',$$

откуда получаем формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базисов

$$A'_{\varphi} = P^{-1}A_{\varphi}T. \tag{4.5}$$

4.4. Изоморфизм линейных пространств

Если $\operatorname{rang}\varphi = m = \dim L_m$, т.е. $\varphi(L_n) \equiv L_m$, то каждый вектор из L_m является образом некоторого вектора из пространства L_n. Отображение, обладающее этим свойством, называется **сюръективным** или **наложением** (говорят φ – отображение L_n на L_m). Здесь

$$\forall \vec{y} \in L_m, \exists \vec{x} \in L_n \text{ такой, что } \vec{y} = \varphi(\vec{x}).$$

Определение 4.6. Отображение, при котором разные векторы имеют разные образы, называется **инъективным** или **вложением.** Здесь

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n \Rightarrow \vec{y}_1 = \varphi(\vec{x}_1) \neq \vec{y}_2 = \varphi(\vec{x}_2).$$

Теорема 4.5. Отображение $\varphi : L_n \to L_m$ является инъективным тогда и только тогда, когда его ядро есть нулевое подпространство

$$\left(\varphi - \text{инъективно} \quad \Leftrightarrow \quad \ker\varphi = \{\vec{0}\}\right).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть φ – инъективно и $\dim\ker\varphi \neq 0$, тогда в пространстве L_m существуют векторы, имеющие не один прообраз, а, по крайней мере, два. Таким является, например, нулевой вектор $\vec{0} \in L_m$ (см.

определение 4.2 и теорему 4.2). Но это противоречит условию теоремы.

($\Leftarrow$) Пусть $\dim\ker\varphi = 0$ и отображение не инъективно. Это значит, что существует вектор $\vec{y} \in L_m$, который имеет два разных прообраза, т.е. существуют векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n$ такие, что $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi(\vec{x}_2) = \vec{y}$ и $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$. В этом случае ядро содержит, по крайней мере, один ненулевой вектор $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \neq \vec{0}$ (ядро – ненулевое подпространство), так как

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}_2) = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0},$$

следовательно, $\dim\ker\varphi \neq 0$, что, опять-таки, противоречит условию теоремы. Следовательно, φ – инъективно.

Из определения отображения φ: $\forall \vec{x} \in L_n$, $\exists! \vec{y} \in L_m$ ($\exists!$ – существует единственный) такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, если справедливо и обратное, т.е. каждый $\vec{y} \in L_m$ является образом только одного вектора $\vec{x} \in L_n$, то отображение φ называется **взаимно однозначным или биективным.**

Иначе, если $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, то $\varphi(\vec{x}_1) \neq \varphi(\vec{x}_2)$, или

$$\forall \vec{y} \in L_m,\ \exists! \vec{x} \in L_n \text{ такой, что } \vec{y} = \varphi(\vec{x}).$$

Теорема 4.6. Отображение $\varphi : L_n \to L_m$ – взаимно однозначно (биективно) тогда и только тогда, когда размерности пространств совпадают и равны рангу отображения φ $(n = m = \operatorname{rang}\varphi)$.

Доказательство. В этом случае отображение φ является и наложением, т.е. $\operatorname{rang}\varphi = m$, и вложением, т.е. $\ker\varphi = \{\vec{0}\} \Rightarrow \operatorname{rang}\varphi = n$ (на основании теоремы 4.4).

Определение 4.7. Взаимно однозначное отображение называется **изоморфизмом.** Если существует изоморфизм L_n на L_m, то L_n и L_m называются ***изоморфными***.

Теорема 4.7. Два пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны (см. теорему 4.4 и теорему 4.5).

Значение теоремы об изоморфизме состоит в том, что линейные пространства могут состоять из чего угодно: столбцов, многочленов, чисел, функций, матриц, направленных отрезков, дынь, арбузов, … – природа их элементов роли не играет, когда изучаются только свойства, связанные с операциями сложения и умножения на число. Все эти свойства у двух изоморфных пространств совершенно одинаковы. С алгебраической точки зрения два изоморфных пространства тождественны. Если условимся не различать эти пространства, то в силу теоремы 4.7 для каждой размерности найдется только одно линейное пространство.

Пример 4.1. Определить ранг и дефект линейного преобразования, а также найти базисы образа и ядра L_3 при преобразовании φ.

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\, x_1 - x_3,\, x_1 + x_2).$$

Решение. Пусть в L_3 выбран базис $e = (\vec{e}_1\ \ \vec{e}_2\ \ \vec{e}_3)$, тогда в этом базисе матрица преобразования φ будет иметь вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению 4.5 вектор $\vec{y}$ принадлежит образу L_3 при преобразовании φ в том и только том случае, когда найдется вектор $\vec{x} \in L_3$ такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, или в координатной записи по формуле (4.4):

$$Y = A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что образ L_3 совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\vec{f}_1=(1,1,1)$, $\vec{f}_2=(2,0,1)$, $\vec{f}_3=(1,-1,0)$, так как $\vec{y}=x_1\vec{f}_1+x_2\vec{f}_2+x_3\vec{f}_3$. Следовательно, ранг оператора φ, который совпадает с рангом его матрицы, равен двум. В качестве базиса можно взять любой базис линейной оболочки векторов $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$, например, $\vec{f}_1,\vec{f}_2$ – они линейно независимы.

Аналогично, вектор $\vec{x}$ принадлежит ядру тогда и только тогда, когда $\varphi(\vec{x})=\vec{0}$, или, в координатной записи:

$$A_\varphi X=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Это однородная система линейных уравнений, ранг которой равен двум, значит, она эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\x_1\qquad\quad -x_3=0\,,\end{cases}$$

полагая в которой, например, $x_3=1$, получаем $x_1=1$, $x_2=-1$, т.е. базис ядра состоит из одного вектора $\vec{p}=(1,-1,1)$.

При этом по теореме 4.5 размерность ядра равна:

$$\dim(\ker\varphi)=\dim L_3-\dim\varphi(L_3)=3-2=1\,.$$

5. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение 5.1. Если линейное отображение отображает пространство само в себя, то оно называется линейным **преобразованием,** т.е. здесь

$$L_n \equiv L_m \qquad (n = m).$$

Все утверждения и теоремы раздела 4 справедливы и для преобразований линейного пространства, но в общем случае при определении матрицы линейного отображения $\varphi : L_n \to L_m$ выбирались разные базисы в пространствах L_n и L_m. Если же L_n и L_m совпадают, то логично пользоваться одним и тем же базисом и для образов, и для прообразов, следовательно, некоторые определения и формулы изменятся.

Определение 5.2. **Матрицей** линейного преобразования $\varphi : L_n \to L_n$ в базисе $e = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ ...\ \vec{e}_n)$ называется матрица, столбцы которой есть координаты векторов $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$, ..., $\varphi(\vec{e}_n)$ в базисе *e* (координаты образов базисных векторов в том же базисе).

Матрица линейного преобразования – квадратная порядка *n*.

При переходе от базиса *e* к базису *f* матрица преобразования φ будет иметь вид

$$A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \tag{5.1}$$

(см. формулу (4.5): $A'_\varphi = P^{-1} A_\varphi T$, где теперь $P = T \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = T^{-1}$).

Линейные преобразования обладают рядом специфических свойств, которые для отображений общего вида, вообще говоря, не справедливы. Это связано с тем, что образы и прообразы векторов лежат в одном пространстве, и мы получаем возможность говорить об их взаимном расположении.

Определение 5.3. Ненулевой вектор $\vec{x} \in L_n$ называется **собственным вектором** преобразования φ, если $\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, при этом число λ называется **собственным значением** (**собственным числом**) соответствующим собственному вектору $\vec{x}$.

Если в L_n выбран базис, то

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A_\varphi X = \lambda X .$$

Пусть E – единичная матрица порядка n, тогда последнее равенство можно записать в виде $A_\varphi X - \lambda EX = O_n$ или

$$(A_\varphi - \lambda E)X = O_n . \tag{5.2}$$

В координатах это равенство выглядит так:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

– однородная система линейных уравнений порядка n.

Если $\det(A_\varphi - \lambda E) \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0 ,$$

но собственным вектором мы назвали ненулевой вектор, следовательно, для существования такого вектора необходимо потребовать, чтобы

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 . \tag{5.3}$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Левая часть равенства (5.3) – многочлен порядка n, который называется **характеристическим многочленом** преобразования φ:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0 = P_n(\lambda),$$

где $\alpha_{n-1} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$– след матрицы A_φ, $\alpha_0 = \det A_\varphi$.

Теорема 5.1. Если A_φ и A'_φ – матрицы преобразования φ в разных базисах, то характеристические многочлены этих матриц совпадают (собственные числа преобразования φ в разных базисах одинаковы, т.е. не зависят от выбора базиса!).

Доказательство.

Если e и f – два базиса в L_n и T – матрица перехода от e к f, то по формуле (5.1)

$$\det\left(A'_\varphi - \lambda E\right) = \det\left(T^{-1}A_\varphi T - T^{-1}(\lambda E)T\right) = \det\left(T^{-1}\left(A_\varphi - \lambda E\right)T\right) =$$

$$= \det T^{-1}\det\left(A_\varphi - \lambda E\right)\det T = \frac{\det T}{\det T}\det\left(A_\varphi - \lambda E\right) = \det\left(A_\varphi - \lambda E\right)$$

т.е. характеристические многочлены матриц A_φ и A'_φ совпадают, следовательно, собственные числа одинаковы.

Теорема 5.2. Если собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ преобразования φ соответствуют различным собственным значениям, то они линейно независимы.

Доказательство.

1) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ – два собственных вектора, соответствующих собственным числам λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к $\vec{0}$

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}. \qquad (*)$$

Применим преобразование φ к обеим частям этого равенства.

Получим

$$\varphi\left(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2\right) = \varphi\left(\vec{0}\right), \quad \alpha_1\varphi\left(\vec{x}_1\right) + \alpha_2\varphi\left(\vec{x}_2\right) = \vec{0}, \quad \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}.$$

Умножим (*) на λ_2: $\alpha_1\lambda_2\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$.

Вычитая из одного равенства другое, получим $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$. Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ по условию, а $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ по определению, то $\alpha_1 = 0$.

Подставляем в (*) $\alpha_1 = 0$, получаем $\alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0}$, так как по определению $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$, следовательно $\alpha_2 = 0$, т.е. линейная комбинация должна быть тривиальной, значит, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ – линейно независимы.

2) Пусть утверждение справедливо для $k-1$ векторов, покажем, что тогда оно справедливо и для k векторов.

Пусть система векторов $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$ удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию этих векторов

$$\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}. \qquad (**)$$

Подействуем преобразованием φ на это равенство, получим

$$\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}.$$

Умножим (**) на λ_k: $\alpha_1\lambda_k\vec{x}_1 + ... + \alpha_k\lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$.

Вычитая эти два равенства, находим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\vec{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)\vec{x}_2 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\vec{x}_{k-1} = \vec{0},$$

так как $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_{k-1}$ – линейно независимы, это значит, что в левой части равенства записана тривиальная линейная комбинация, т.е.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) = ... = \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \vec{0},$$

по условию теоремы $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_k \neq 0$, …, $\lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$, следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k-1} = 0$.

Подставим $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ в (**), получим $\alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$, следовательно, $\alpha_k = 0$, так как по определению 5.3 $\vec{x}_k \neq \vec{0}$.

Таким образом, векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$ – линейно независимы.

Следствие 5.1. Если преобразование φ имеет *n* попарно различных собственных значений, то существует базис из собственных векторов этого преобразования!

Теорема 5.3. Матрица линейного преобразования $\varphi : L_n \to L_n$ в базисе *е* имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными векторами преобразования φ.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть матрица линейного преобразования $\varphi : L_n \to L_n$ в базисе e имеет диагональный вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

тогда $\forall j = \overline{1, n} : \varphi(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, следовательно, $\vec{e}_j$ – собственные векторы.

($\Leftarrow$) Пусть $\vec{e}_j$ $(j = \overline{1, n})$ – собственные векторы преобразования $\varphi : L_n \to L_n$, тогда $\forall j = \overline{1, n} : \varphi(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, т.е.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Другая формулировка следствия 5.1. Если все корни характеристического многочлена матрицы A различны, то существует невырожденная матрица T ($\det T \neq 0$) такая, что матрица $T^{-1}AT$ – диагональная (T – матрица перехода к базису из собственных векторов).

6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Все результаты, приведенные в предыдущих разделах, остаются в силе и для преобразований евклидовых пространств, но здесь есть скалярное произведение, что позволяет выделить некоторые очень важные классы преобразований.

6.1. Сопряженные и самосопряженные преобразования

Определение 6.1. Линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n называется **сопряженным** данному линейному преобразованию φ, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ имеет место равенство

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \psi(\vec{y})). \tag{6.1}$$

В более полных курсах доказывается, что любое преобразование имеет единственное сопряженное преобразование.

Предположим, что данное преобразование φ имеет сопряженное ψ. Выясним, как связаны их матрицы A_φ и A_ψ в некотором базисе *e*. Используя равенство (3.2), перепишем (6.1) в матричной форме

$$(A_\varphi X)^{\mathsf{T}} \varGamma_e Y = X\varGamma_e (A_\psi Y),$$

где *X, Y* – координатные столбцы произвольных векторов $\vec{x}, \vec{y}$; $\varGamma_e$ – матрица Грама базиса *e*, отсюда

$$X^{\mathsf{T}} A_\varphi^{\mathsf{T}} \varGamma_e Y - X^{\mathsf{T}} \varGamma_e A_\psi Y = 0 \quad \text{или} \quad X^{\mathsf{T}} (A_\varphi^{\mathsf{T}} \varGamma_e - \varGamma_e A_\psi) Y = 0,$$

так как $\vec{x}, \vec{y}$ произвольные, следовательно, должно выполняться равенство

$$A_\varphi^{\mathsf{T}} \varGamma_e - \varGamma_e A_\psi = O \quad \text{или} \quad A_\varphi^{\mathsf{T}} \varGamma_e = \varGamma_e A_\psi,$$

так как $\varGamma_e$ – невырожденная матрица, у нее существует обратная и значит последнее равенство равносильно тому, что

$$A_\psi = \varGamma_e^{-1} A_\varphi^{\mathsf{T}} \varGamma_e. \tag{6.2}$$

Часто сопряженное преобразование обозначается φ^*, т.е. $\psi \equiv \varphi^*$, тогда матрица этого преобразования обозначается A_φ^*.

В частности, если базис *e* ортонормированный, то $\varGamma_e = \varGamma_e^{-1} = E$ и

$$A_\psi = A_\varphi^{\mathsf{T}} \tag{6.3}$$

Определение 6.2. Линейное преобразование φ евклидова пространства E_n называется **самосопряженным,** если $\varphi = \psi$, т.е.

$$\forall \vec{x} \in E_n : \varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad A_\varphi = A_\psi ,$$

или из (6.1)

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n : (\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \varphi(\vec{y})).$$

Из формулы (6.3) получаем, что $A_\varphi = A_\varphi^{\mathsf{T}}$ преобразование является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица симметрическая (в любом базисе удовлетворяет условию $A_\varphi = A_\varphi^{\mathsf{T}}$).

В силу сказанного, часто самосопряженные преобразования называются **симметрическими.**

Теорема 6.1. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n, то все его собственные числа действительные.

Доказательство. Рассмотрим частный случай $(n = 2)$. Найдём собственные числа, т.е. решим уравнение

$$\left| A_\varphi - \lambda E \right| = 0 . \tag{*}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= (-1)^2 \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

тогда (*) – квадратное уравнение. Пусть D – дискриминант этого квадратного уравнения.

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 -$$
$$- 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

так как φ – самосопряжённое преобразование $a_{12} = a_{21}$, $(a_{11} - a_{22})^2 \geq 0$ и

$a_{12}^2 \geq 0$, следовательно, $\forall a_{11}, a_{22}, a_{12}$: $D \geq 0$, из чего заключаем, что корни действительные.

Теорема 6.2. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n, то собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям этого преобразования, ортогональны.

Доказательство. Пусть λ_i, λ_j – собственные числа самосопряжённого преобразования φ, $\lambda_i \neq \lambda_j$, а $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_j$ – соответствующие им собственные векторы, т.е. $\varphi(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$, $\varphi(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$, тогда

$$(\varphi(\vec{x}_i), \vec{x}_j) = (\lambda_i \vec{x}_i, \vec{x}_j) = \lambda_i (\vec{x}_i, \vec{x}_j),$$

$$(\varphi(\vec{x}_i), \vec{x}_j) = (\vec{x}_i, \varphi(\vec{x}_j)) = (\vec{x}_i, \lambda_j \vec{x}_j) = \lambda_j (\vec{x}_i, \vec{x}_j).$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем $0 = (\lambda_i - \lambda_j)(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$, где $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ по условию, следовательно, $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$, что означает, по определению скалярного произведения $\vec{x}_i \perp \vec{x}_j$.

Теорема 6.3. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n, то в E_n существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ.

Эта теорема допускает матричную формулировку.

Теорема 6.4. Если A – симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица U такая, что $U^{-1}AU$ – диагональная матрица.

Здесь U – матрица перехода к ортонормированному базису из собственных векторов.

6.2. Ортогональные преобразования

Второй вид преобразований, которые следует рассмотреть, – это ортогональные преобразования.

Определение 6.3. Преобразование φ евклидова пространства E_n называется **ортогональным,** если оно сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n: \quad (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}). \tag{6.4}$$

Условие (6.4) очень сильное. Из него, в частности, следует, что φ – линейное преобразование.

Действительно, рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in E_n$ и произвольное число $\alpha \in R$, тогда, используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$|\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x})|^2 = (\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x}), \varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x})) =$$

$$= (\varphi(\alpha\vec{x}), \varphi(\alpha\vec{x})) - 2\alpha(\varphi(\alpha\vec{x}, \varphi(\vec{x})) + \alpha^2(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x})) =$$

$$= (\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) - 2\alpha(\alpha\vec{x}, \vec{x}) + \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) + \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) = 0,$$

следовательно, $\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, $\varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\varphi(\vec{x})$ и свойство 1) в определении линейного преобразования 4.2 установлено.

Аналогично, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$|\varphi(\vec{x} + \vec{y}) - (\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}))|^2 = (\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{x} + \vec{y})) + (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x})) +$$

$$+ (\varphi(\vec{y}), \varphi(\vec{y})) - 2(\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{x})) - 2(\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{y})) + 2(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) =$$

$$= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) - 2(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x}) - 2(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) =$$

$$= (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) - 2(\vec{x}, \vec{x}) - 2(\vec{x}, \vec{y}) - 2(\vec{x}, \vec{y}) -$$

$$- 2(\vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{x} + \vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = 0,$$

т.е. $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ и свойство 2) в определении линейного преобразования 4.2 также установлено, т.е. преобразование φ – линейное!

Теорема 6.5. В евклидовом пространстве E_n в ортонормированном базисе ортогональное преобразование имеет ортогональную матрицу, т.е.

$$A_\varphi^{\mathsf{T}} A_\varphi = E \quad \left(A_\varphi^{-1} = A_\varphi^{\mathsf{T}}\right).$$

Доказательство. По формуле вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе $(\vec{u}, \vec{v}) = U^{\mathsf{T}} V$, из формулы (6.4) получаем $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$: $(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = \left(A_\varphi X\right)^{\mathsf{T}} \left(A_\varphi Y\right) = (\vec{x}, \vec{y}) = X^{\mathsf{T}} Y$, $X^{\mathsf{T}} A_\varphi^{\mathsf{T}} A_\varphi Y = X^{\mathsf{T}} Y$, $X^{\mathsf{T}} \left(A_\varphi^{\mathsf{T}} A_\varphi - E\right) Y = 0$, так как $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные векторы, то $A_\varphi^{\mathsf{T}} A_\varphi = E$, следовательно, по определению A_φ – ортогональная матрица и $A_\varphi^{-1} = A_\varphi^{\mathsf{T}}$.

Пример 6.1. Пусть линейный оператор φ, действующий в евклидовом пространстве E_n, имеет в ортонормированном базисе матрицу A_φ. Построить в этом пространстве базис из собственных векторов оператора φ и найти матрицу оператора φ в этом базисе.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Найдем собственные числа оператора φ, для чего составим и решим характеристическое уравнение (4.3):

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = (17-\lambda)(14-\lambda)^2 - 16 - 16 - 4(14-\lambda) - 16(17-\lambda) -$$

$$-4(14-\lambda) = (17-\lambda)((14-\lambda)^2 - 16) - 8(18-\lambda) =$$

$$= (17-\lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 180) + 8(\lambda - 18) = (17-\lambda)(\lambda-10)(\lambda-18) +$$

$$+8(\lambda-18) = (\lambda-18)((17-\lambda)(\lambda-10)+8) = -(\lambda-18)(\lambda^2 - 27\lambda + 162).$$

Приравняв к нулю, находим: $\lambda_1 = 9, \lambda_{2,3} = 18$.

2) Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, для чего при каждом λ составляем и решаем систему (5.2):

а) при $\lambda = \lambda_1 = 9$, получаем

$$(A_\varphi - 9E)X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе (здесь $\operatorname{rang}(A_\varphi - 9E) = 2$)

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_1 = 1$, находим $x_2 = x_3 = 2$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 9, есть $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$.

б) при $\lambda = \lambda_{2,3} = 18$, получаем

$$(A_\varphi - 18E)X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\operatorname{rang}(A_\varphi - 18E) = 1$)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$$

полагая в котором сначала, $x_2 = 1, x_3 = 0$, а затем $, x_2 = 0, x_3 = 1$ получаем еще два линейно независимых собственных вектора:

$$\vec{f}_2 = (-2, 1, 0); \quad \vec{f}_3 = (-2, 0, 1).$$

3) Находим матрицу перехода к базису из собственных векторов и обратную к ней (столбцами матрицы перехода являются координатные столбцы векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ (см. раздел 1)):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det T = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 4 = 9.$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\2&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&-2\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&-2\\2&0\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&-2\\1&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&-2\\2&0\end{vmatrix}=-4,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5.$$

4) Теперь по формуле (5.1) находим A'_φ – матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов

$$A'_\varphi=T^{-1}A_\varphi T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-36&-36\\18&18&0\\18&0&18\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}81&0&0\\0&162&0\\0&0&162\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&18&0\\0&0&18\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов диагональная!

7. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Билинейные формы

Определение 7.1. Отображение $\varphi: E_n \to R_1 \equiv R$ называется **числовой** функцией, т.е. числовая функция – закон или правило, по которому каждому вектору $\vec{x}\in E_n$ (каждой паре векторов $\vec{x},\vec{y}\in E_n$) ставится в соответствие число из R.

Определение 7.2. Числовая функция φ называется **линейной формой**, если $\forall\vec{x},\vec{y}\in E_n$ и $\forall\alpha\in R$ справедливо:

а) $\varphi(\vec{x}+\vec{y})=\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})$; б) $\varphi(\alpha\vec{x})=\alpha\varphi(\vec{x})$.

Определение 7.3. Числовая функция двух аргументов – закон или правило, по которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$ ставится в соответствие число из R.

Определение 7.4. Числовая функция $b(\vec{x}, \vec{y})$, аргументами которой являются всевозможные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$, называется **билинейной формой**, если $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_n$ и $\forall \alpha \in R$ выполняются соотношения:

а) $b(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = b(\vec{x}, \vec{z}) + b(\vec{y}, \vec{z})$;

б) $b(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{x}, \vec{z})$;

в) $b(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$;

г) $b(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$;

т.е. функция является линейной по каждому из аргументов, где условия а), в) означают линейность по первому аргументу; условия б), г) – по второму.

Выберем какой-либо базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ в E_n. Тогда

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_j y_j \vec{e}_j,$$

и значение билинейной формы может быть вычислено следующим образом:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b\left(\sum_i x_i \vec{e}_i, \sum_j y_j \vec{e}_j\right) = \sum_i x_i b\left(\vec{e}_i, \sum_j y_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

или

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} x_i y_j \beta_{ij} = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j, \tag{7.1}$$

где $\beta_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ – значения билинейной формы на всевозможных парах базисных векторов, которые называются **коэффициентами билинейной** формы в базисе *e*.

Коэффициенты β_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n

$$B_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей билинейной формы** в данном базисе e. Как легко проверить, в матричном виде равенство (7.1) имеет вид

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = X^{\mathsf{T}} B_e Y. \qquad (7.2)$$

Теорема 7.1. Любая квадратная матрица $B = (\beta_{ij})$ в некотором базисе является матрицей билинейной формы.

Доказательство. Определим $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ с базисом e с помощью матрицы $B = (\beta_{ij})$ числовую функцию $b(\vec{x}, \vec{y})$ по правилу

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j .$$

Легко проверяются свойства (7.1). Но тогда элементы β_{ij} равны $b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, где $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$, и записанная формула есть определение билинейной формы (7.2).

Согласно теореме 7.1, естественно называть представление (7.2.) общим видом билинейной формы в n-мерном линейном евклидовом пространстве E_n.

Определение 7.5. Билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ называется **симметричной (кососимметричной)**, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ выполняются равенства

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x}), \qquad (b(\vec{x}, \vec{y}) = -b(\vec{y}, \vec{x})).$$

Теорема 7.2. Билинейная форма является симметричной (кососимметричной) тогда и только тогда, когда её матрица симметрическая, т.е.

$\beta_{ij} = \beta_{ji}$ или $B_e = B_e^{\top}$ (кососимметрическая, т.е. $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ или $B_e^{\top} = -B_e$).

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Так как форма симметрична, то $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x}).$$

В частности, для базисных векторов $\beta_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = b(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = \beta_{ji}$, следовательно, $B_e = B_e^{\top}$. Аналогично для кососимметричной формы.

$(\Leftarrow)$ Пусть матрица билинейной формы симметрическая, т.е. $B_e = B_e^{\top}$. Тогда, так как матрица размеров 1×1 не меняется при транспонировании:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n: \quad b(\vec{x}, \vec{y}) \overset{(7.2)}{=} X^{\top} B_e Y = \left(X^{\top} B_e Y\right)^{\top} = Y^{\top} B_e^{\top} X = Y^{\top} B_e X \overset{(7.2)}{=} b(\vec{y}, \vec{x}).$$

Теорема 7.3. Матрицы B_e и B_f билинейной формы $b(\vec{x}, \vec{y})$ в базисах *e* и $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ связаны соотношением

$$B_f = T^{\top} B_e T, \tag{7.3}$$

где *T* – матрица перехода от базиса *e* к базису *f*.

Доказательство. Так как *T* – матрица перехода от *e* к *f*, то $f = eT$, $X_e = TX_f$, где X_e, X_f – координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в базисах *e* и *f* соответственно, $Y_e = TY_f$, то по формуле (7.2) получаем $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = X_e^{\top} B_e Y_e = \left(TX_f\right)^{\top} B_e \left(TY_f\right) = X_f^{\top} T^{\top} B_e T Y_f;$$

с другой стороны $b(\vec{x}, \vec{y}) = X_f^{\top} B_f Y_f$, следовательно

$$X_f^{\top} \left(T^{\top} B_e T - B_f\right) Y_f = 0.$$

Так как $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные, то выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю, следовательно

$$B_f = T^{\top} B_e T \ .$$

Следствие. Ранг матрицы B_f равен рангу матрицы B_e. Это сразу вытекает из равенства (7.3) и из того, что ранг матрицы не изменяется при умножении на невырожденную матрицу.

Это позволяет ввести понятие ранга билинейной формы.

Определение 7.6. **Рангом билинейной формы** называется ранг матрицы этой формы в произвольном базисе.

Определение 7.7. Билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$, заданная в E_n, называется **невырожденной (вырожденной)**, если её ранг равен (меньше) размерности пространства E_n, т.е.

$$\operatorname{rang} b(\vec{x}, \vec{y}) = \dim E_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{форма невырожденная;}$$

$$\operatorname{rang} b(\vec{x}, \vec{y}) < \dim E_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{форма вырожденная.}$$

7.2. Квадратичные формы

Пусть $b(\vec{x}, \vec{y})$ симметричная билинейная форма, заданная на линейном пространстве E_n.

Определение. **Квадратичной формой** называется числовая функция $k(\vec{x})$ одного аргумента $\vec{x}$, значения которой совпадают со значениями билинейной формы $b(\vec{x}, \vec{y})$ при $\vec{x} = \vec{y}$.

При этом симметричная билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ называется полярной к квадратичной форме $k(\vec{x})$.

Пусть в E_n задана симметричная билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. По формуле (7.1) $b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j$, при этом в силу симметрии $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Полагая в этом равенстве $x_j = y_j$, получаем представление квадратичной формы $k(\vec{x})$ в заданном базисе *e*:

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j . \qquad (7.4)$$

Матрицу из коэффициентов k_{ij} обозначим K_e и назовем **матрицей квадратичной формы** в базисе *e*.

Матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по формуле (7.3), т.е.

$$K_f = T^{\mathrm{T}} K_e T, \tag{7.5}$$

где T – матрица перехода к новому базису.

Так как матрица перехода всегда невырожденная, то ранг матрицы квадратичной формы не изменяется при переходе к новому базису.

Определение 7.9. Ранг матрицы квадратичной формы в произвольном базисе называется **рангом квадратичной формы.**

Если ранг квадратичной формы равен размерности пространства, то квадратичная форма называется **невырожденной,** в противном случае **вырожденной.**

Рассмотрим вопрос о приведении квадратичной формы к сумме квадратов, к так называемому **каноническому виду**, т.е. о выборе такого базиса $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ в E_n, в котором квадратичная форма представляется в виде

$$k(\vec{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2, \tag{7.6}$$

где $x_1', x_2', ..., x_n'$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе f.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются **каноническими коэффициентами** квадратичной формы, а базис $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ – **каноническим базисом**.

Метод Якоби

Пусть $e = \left(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\right)$ – какой-либо базис в E_n, $f = \left(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right)$ – базис, в котором квадратичная форма $k\left(\vec{x}\right)$ имеет канонический вид (канонический базис).

Рассмотрим преобразование вида

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = t_{12}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = t_{13}\vec{e}_1 + t_{23}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \ldots \\ \vec{f}_n = t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n-1n}\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n \end{cases}, \qquad (7.7)$$

которое называется треугольным, так как $f = eT$, где T – верхняя треугольная матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Так как определитель матрицы треугольного преобразования (7.7) отличен от нуля ($\det T = 1$), то векторы $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ образуют базис.

Введем в рассмотрение главные миноры матрицы K_e квадратичной формы $k(\vec{x})$ в базисе e, обозначив их символами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$:

$$\Delta_1 = |k_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix} = \det K_e, \quad \text{где } K_e = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.4. Пусть $\forall j = \overline{1, n}: \ \Delta_j \neq 0$, тогда существует единственное треугольное преобразование базиса e, с помощью которого квадратичную форму $k(\vec{x})$ можно привести к каноническому виду.

Доказательство. Коэффициенты квадратичной формы $\hat{k}_{ij}$ в базисе $f = (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ вычисляются по формуле $\hat{k}_{ij} = b(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$, где $b(\vec{x}, \vec{y})$ – полярная билинейная форма.

Если квадратичная форма $k(\vec{x}) = b(\vec{x}, \vec{x})$ в базисе $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n$ имеет канонический вид, то $\forall i, j;\ i \neq j: \ \hat{k}_{ij} = 0$, поэтому для доказательства теоремы достаточно с помощью треугольного преобразования базиса e построить базис $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n$, в котором будут выполняться соотношения:

$$\forall i, j;\ i \neq j: \quad \hat{k}_{ij} = b(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0,$$

(или что то же при $\forall i, j;\ i < j$, так как $b(\vec{x}, \vec{y})$ – симметричная).

Ввиду линейности билинейной формы $b(\vec{x}, \vec{y})$ по каждому из аргументов, эти равенства будут выполняться, если будут выполнены равенства:

$$b(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = 0 \quad (i = \overline{1, j-1}; \quad j = \overline{2, n}) \qquad (*)$$

Действительно, используя линейность по первому аргументу, можем записать $b(\vec{f}_k, \vec{f}_j) = b\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t_{ik}\vec{e}_i, \vec{f}_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} t_{ik} b(\vec{e}_i, \vec{f}_j)$, следовательно, если (*) справедливо, то $b(\vec{f}_k, \vec{f}_j) = 0$ ($k = \overline{1, j-1}$).

Используя линейность по второму аргументу, находим

$$b(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = b\left(\vec{e}_i, \sum_{k=1}^{j} t_{kj}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{j} t_{kj} \underbrace{b(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{\beta_{ik}} = \sum_{\kappa=1}^{j} \beta_{ik} t_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} k_{ik} t_{kj} = 0 \quad (i = \overline{1, j-1}, \ j = \overline{2, n}) \ .$$

Для каждого j запишем эти равенства и получим систему линейных уравнений относительно t_{ij} $(i<j)$.

$$\begin{array}{ll} i=1 & \left\{\begin{array}{l} k_{11}t_{1j}+k_{12}t_{2j}+\ldots+k_{1,j-1}t_{j-1,j}+k_{1j}=0 \\ k_{21}t_{1j}+k_{22}t_{2j}+\ldots+k_{2,j-1}t_{j-1,j}+k_{2j}=0 \\ \ldots \\ k_{j-1,1}t_{1j}+k_{j-1,2}t_{2j}+\ldots+k_{j-1,j-1}t_{j-1,j}+k_{j-1,j}=0 \end{array}\right. \\ i=2 & \\ \ldots & \\ i=j-1 & \end{array} \quad . \quad (**)$$

Неизвестных коэффициентов здесь $(j-1)$ штук t_{kj} $(k=\overline{1,j-1})$ и столько же уравнений, причём определитель матрицы этой системы есть $\Delta_{j-1}\neq 0$ (по условию теоремы). Следовательно, каждая система (при $j=2,3,\ldots,n$) имеет единственное решение (теорема Крамера), т.е. t_{kj} определяются однозначно.

Здесь можно в явном виде получить элементы t_{kj} матрицы T и канонические коэффициенты λ_j.

Обозначим $\Delta_{j-1,k}$ минор матрицы K_e, расположенный на пересечении строк с номерами $1,2,\ldots,j-1$ и столбцов с номерами 1, 2…, $k-1,k+1,\ldots,j$, тогда, решая систему (**) по формулам Крамера, найдём

$$t_{kj}=\frac{(-1)^{j+k}\,\Delta_{j-1,k}}{\Delta_{j-1}} \quad (k=\overline{1,j-1},\quad j=\overline{2,n})\,. \qquad (7.8)$$

Найдём λ_j:

$$\lambda_j=\hat{k}_{jj}=\hat{\beta}_{jj}=b\left(\vec{f}_j,\vec{f}_j\right)=b\left(\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\vec{e}_k,\vec{f}_j\right)=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\;\underbrace{b\left(\vec{e}_k,\vec{f}_j\right)}_{\substack{=0\ \forall k<j \\ \text{по построению}}}\;=$$

$$=b\left(\vec{e}_j,\vec{f}_j\right)=b\left(\vec{e}_j,\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\vec{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\underbrace{b\left(\vec{e}_j,\vec{e}_k\right)}_{=k_{jk}=k_{kj}}=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}k_{jk}=\sum_{k=1}^{j}k_{jk}t_{kj}\overset{(7.8)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} k_{jk} \frac{(-1)^{j+k} \Delta_{j-1,k}}{\Delta_{j-1}} = \left| \begin{array}{c} \text{так как } (-1)^{j+k} \Delta_{j-1,k} = A_{jk}; \\ \sum\limits_{k=1}^{j} k_{jk} A_{jk} \text{ - разложение } \Delta_j \\ \text{по } j\text{-й строке} \end{array} \right| = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},$$

Таким образом,

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \; (j = \overline{2, n}); \quad \lambda_1 = b\left(\vec{f}_1, \vec{f}_1\right) = b\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right) = k_{11} = \Delta_1. \tag{7.9}$$

Теорема 7.5. (Лагранжа) Любая квадратичная форма $k(\vec{x})$, заданная в n – мерном евклидовом пространстве E_n, с помощью невырожденного линейного преобразования координат (базиса) может быть приведена к каноническому виду.

Доказательство (метод Лагранжа). Основная идея: дополнение многочлена до полного квадрата по каждому из аргументов.

Пусть в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \exists \vec{x} \in E_n \text{ такой, что } k(\vec{x}) \neq 0.$$

С помощью невырожденного преобразования правую часть равенства можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты k_{11} вектора $\vec{x}$ будет отличен от нуля.

1) Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное преобразование является тождественным.

2) Если $k_{11} = 0$, но:

а) отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, например, $k_{ss} \neq 0$, тогда с помощью перенумерации базисных векторов $\vec{e}_1 \leftrightarrow \vec{e}_s$ можно добиться требуемого результата. Перенумерация является невырожденным преобразованием, так как матрица перехода от одного базиса к другому имеет вид

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e' = eT,$$

здесь $\det T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+2s} \det E_{n-2} = -1 \neq 0$;

б) все $k_{ss} = 0$, но тогда $\exists k_{pq} \neq 0$ (все нули быть не могут, так как в этом случае $k(\vec{x}) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы). Тогда нужное преобразование будет иметь вид

$$\begin{cases} x_p = x'_p - x'_q \\ x_q = x'_p + x'_q \\ x_i = x'_i \quad \forall i, i \neq p, q \end{cases},$$

матрица этого преобразования также невырожденная $X = TX'$, где

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ p\rightarrow \\ T= \\ q\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\dots0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\dots0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & & & p & & q & & & \end{array}$$

По теореме Лапласа (разложение по p-й и q-й строкам)

$$\det T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2p+2q} \det E_{n-2} = 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

при этом

$$2k_{pq}x_p x_q = 2k_{pq}(x'_p - x'_q)(x'_p + x'_q) = 2k_{pq}x'^2_p - 2k_{pq}x'^2_q$$

и далее см. а).

Итак, не ограничивая общности, можно сказать, что $k_{11} \neq 0$.

Выделим группу слагаемых, содержащих x_1, т.е. представим форму в виде $k(\vec{x}) = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots + 2k_{1n}x_1x_n + \sum\limits_{i,j=2}^{n} k_{ij}x_i x_j$

и дополним ее до полного квадрата, используя формулу

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum_i a_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} a_i a_j .$$

$$k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots + 2k_{1n}x_1x_n = k_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{k_{12}}{k_{11}}x_2\right) + \ldots + 2x_1\left(\frac{k_{1n}}{k_{11}}x_n\right)\right) =$$

$$= k_{11}\left(x_1 + \frac{k_{12}}{k_{11}}x_2 + \ldots + \frac{k_{1n}}{k_{11}}x_n \right)^2 - \sum_{j=2}^{n} \frac{k_{1j}^2}{k_{11}}x_j^2 - \sum_{i,j=2}^{n} \frac{k_{1i}k_{1j}}{k_{11}}x_i x_j \quad .$$

Обозначая $x'_1 = x_1 + \dfrac{k_{12}}{k_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{k_{1n}}{k_{11}}x_n$,

получим $k(\vec{x}) = k_{11}x'^2_1 + k'(\vec{x})$, где $k'(\vec{x}) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} k'_{ij}x_i x_j$ квадратичная форма, не содержащая координаты x_1, и коэффициенты этой квадратичной формы вычисляются по формулам:

$$k'_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{1i}k_{1j}}{k_{11}} \qquad (i, j = \overline{2,n}).$$

Данное преобразование также является невырожденным

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{k_{12}}{k_{11}} x_2 + \ldots + \dfrac{k_{1n}}{k_{11}} x_n \\ \qquad x_i' = x_i, \quad i = \overline{2, n} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X' = T^{-1} X,$$

где $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k_{12}}{k_{11}} & \ldots & \ldots & \dfrac{k_{1n}}{k_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } \det T^{-1} = 1$$

(разложить по первому столбцу).

К квадратичной форме $k'(\vec{x})$ можно применить тот же процесс и так далее, в результате на шаге с номером $m \le n-1$ получим канонический вид квадратичной формы. При этом матрица перехода к каноническому базису будет равна $T = T_m T_{m-1} \ldots T_1$ – произведению невырожденных матриц и, следовательно, сама будет невырожденной.

7.3. Классификация квадратичных форм

Рассмотрим квадратичную форму

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j. \tag{7.10}$$

Определение 7.10. Квадратичная форма $k(\vec{x})$ называется:

1) **положительно** (**отрицательно**) определённой, если $\forall \vec{x} \in E_n$, $\vec{x} \ne 0$ выполняется неравенство $k(\vec{x}) > 0$, ($k(\vec{x}) < 0$) (**знакоопределённые** формы);

2) **неопределённой**, если $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_n$, для которых выполняются неравенства $k(\vec{x}_1) > 0$, $k(\vec{x}_2) < 0$ (**знакопеременные** формы);

3) **полуопределённой**, если $\forall \vec{x} \in E_n \;\; k(\vec{x}) \geq 0$, $\left(k(\vec{x}) \leq 0\right)$ и $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ для которого выполняется равенство $k(\vec{x}) = 0$.

Выявим условия, при которых имеет место каждая из этих ситуаций.

Замечание 1. Канонический базис определён неоднозначно (перенумеровывая базисные векторы, будем получать различные канонические виды или см. метод Якоби).

Замечание 2. Если форма приведена к каноническому виду, то, вообще говоря, не все коэффициенты λ_j должны быть отличны от нуля. Оставим лишь ненулевые λ_j и, перенумеровывая переменные (базисные векторы), заново запишем

$$k(\vec{x}) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \ldots + \lambda_m \tilde{x}_m^2 . \tag{7.11}$$

Очевидно, что $m \leq n$, так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу её матрицы в произвольном базисе, то из (7.11) и условия $\forall j = \overline{1, m}: \;\; \lambda_j \neq 0$ следует, что ранг квадратичной формы равен m (числу ненулевых канонических коэффициентов): $\operatorname{rang} k(\vec{x}) = m$, т.к. $\operatorname{rang} K_f = m$.

Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

Из этого замечания следует, что число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразования, с помощью которого она приводится к каноническому виду.

Более того, при любом способе приведения к каноническому виду сохраняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов (закон инерции квадратичных форм).

Пусть с помощью какого-либо невырожденного преобразования квадратичная форма (7.10) приведена к виду (7.11), причём отличные от нуля коэффициенты занумерованы так, что первые k из них положительны, а остальные $m-k$ отрицательны, т.е.

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad ..., \quad \lambda_k > 0, \quad \lambda_{k+1} < 0, \quad ..., \quad \lambda_m < 0 .$$

Рассмотрим ещё одно невырожденное преобразование координат (базиса) вида

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\hat{x}_1, \; \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\hat{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\hat{x}_k, \; \tilde{x}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{k+1}}}\hat{x}_{k+1}, \ldots ,$$

$\tilde{x}_m = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_m}}\hat{x}_m, \quad \tilde{x}_{m+1} = \hat{x}_{m+1}, \ldots, \quad \tilde{x}_n = \hat{x}_n,$ что равносильно записи

$$\tilde{X} = T\hat{X}, \text{ где } \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & \ddots & ... & ... & .... & ... \\ 0 & ... & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_m}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

(легко видеть, что определитель этой матрицы отличен от нуля).

В результате этого преобразования квадратичная форма (7.10) примет вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + ... + \hat{x}_k^2 - \hat{x}_{k+1}^2 - ... - \hat{x}_m^2, \tag{7.12}$$

который называется **нормальным каноническим видом** квадратичной формы.

Теорема 7.6 (Закон инерции квадратичных форм).

Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в нормальном каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.

Доказательство. Пусть квадратичная форма $k(\vec{x})$ ранга m двумя способами приведена к нормальному виду, и число положительных и отрицательных слагаемых в них различно, т.е.

$$k(\vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+2}^2 - \ldots - y_m^2 = \\ = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - z_{l+2}^2 - \ldots + z_m^2 \qquad (!)$$

причём $k \neq l$, а Y, Z – координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в канонических базисах $\vec{f}$, $\vec{g}$.

Так как переход от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $y_1, \ldots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то и $y_1, \ldots, y_n$ будут выражаться через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью невырожденного линейного преобразования, т.е. $X = T_{e \to f} Y$, $Y = T_{e \to f}^{-1} X \quad \det\left(T_{e \to f}^{-1}\right) \neq 0$ и, следовательно,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(-1)} x_j, \qquad (*)$$

где $a_{ij}^{(-1)}$ – элементы обратной матрицы $T_{e \to f}^{-1}$.

Аналогично: $X = T_{e \to g} Z$, $Z = T_{e \to g}^{-1} X$ и $\det\left(T_{e \to g}^{-1}\right) \neq 0$)

$$z_s = \sum_{t=1}^{n} b_{st}^{(-1)} x_t, \qquad (**)$$

где $b_{st}^{(-1)}$ – элементы обратной матрицы $T_{e \to g}^{-1}$.

Пусть для определённости $k < l$ (случай, когда $k > l$, рассматривается аналогично). Запишем систему равенств

$$y_1 = 0, \quad \ldots, \quad y_k = 0; \quad z_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad z_n = 0 \qquad (***)$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями (*) и (**) через x_i, то мы получим систему $k + n - l = n - (l - k) = n + \underbrace{k - l}_{<0}$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$.

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных (так как $(l - k) > 0$), поэтому система имеет нетривиальное решение (см. системы линейных уравнений) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Заменим теперь в равенстве (!) все y_i, z_j их выражениями из (*) и (**), тогда получим: $y_1^2(\vec{\alpha})+y_2^2(\vec{\alpha})+\ldots+y_k^2(\vec{\alpha})-y_{k+1}^2(\vec{\alpha})-\ldots-y_m^2(\vec{\alpha})=$

$$=z_1^2(\vec{\alpha})+\ldots+z_l^2(\vec{\alpha})-z_{l+1}^2(\vec{\alpha})-\ldots-z_m^2(\vec{\alpha}) \text{ или}$$

$$-y_{k+1}^2(\vec{\alpha})-\ldots-y_m^2(\vec{\alpha})=z_1^2(\vec{\alpha})+\ldots+z_l^2(\vec{\alpha}),$$

где $y_i(\vec{\alpha})$ и $z_j(\vec{\alpha})$ обозначены значения неизвестных y_i, z_j, получающиеся при подстановке в (*), (**) вместо $x_1, \ldots, x_n$ решения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Из последнего равенства следует, что $y_{k+1}(\vec{\alpha})=\ldots=y_m(\vec{\alpha})=0$, $z_1(\vec{\alpha})=\ldots=z_l(\vec{\alpha})=0$, так как левая часть меньше либо равна 0, а правая часть больше либо равна 0.

С другой стороны, по самому выбору $\vec{\alpha}$ (см. (***))

$$z_{l+1}(\vec{\alpha})=\ldots=z_n(\vec{\alpha})=0, \quad y_1(\vec{\alpha})=\ldots=y_k(\vec{\alpha})=0.$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений $z_j=0$, ($j=\overline{1,n}$) $\Leftrightarrow$ $Z=T_{e\to g}^{-1}X=O_n$ с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет нетривиальное решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$, следовательно, определитель матрицы системы равен 0 (см. системы линейных уравнений) $\det\left(T_{e\to g}^{-1}\right)=0$, а это противоречит тому, что преобразование (**) невырожденное, т.е. $k<l$ быть не может.

К такому же противоречию мы придём и при $k>l$.

Отсюда следует, что $k=l$. Теорема доказана.

Числа k и $m-k$ называются **положительным и отрицательным индексами инерции** квадратичной формы.

Пусть отрицательный индекс инерции равен l, т.е.

$$k+l=m=\operatorname{rang} k(\vec{x}).$$

Теорема 7.7. (Необходимое и достаточное условие знакоопределённости квадратичной формы).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является знакоопределённой тогда и только тогда, когда либо $k = n$, либо $l = n$.

При этом, если $k = n$, то форма положительно определённая, если $l = n$, то форма отрицательно определённая.

Доказательство. Так как случаи положительно и отрицательно определённой формы рассматриваются аналогично, то доказательство проведём для положительно определённых форм.

1) $(\Rightarrow)$ Пусть $k(\vec{x})$ – положительно определённая квадратичная форма, тогда формула (7.12) принимает вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + \ldots + \hat{x}_k^2$$

(иначе $\exists \vec{\hat{x}} \neq \vec{0}$ такой, что $\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_k = 0$ и $k(\vec{x}) = 0$).

Если при этом $k < n$, то отсюда следует, что для ненулевого вектора $\vec{x}'$ с координатами $x_1' = x_2' = \ldots = x_k' = 0$, $x_{k+1}' \neq 0, \ldots, x_n' \neq 0$ значение формы $k(\vec{x}')$ обращается в 0, а это противоречит определению положительно определённой квадратичной формы, следовательно $k = n$.

2) $(\Leftarrow)$ Пусть $k = n$, тогда (7.12) имеет вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + \ldots + \hat{x}_n^2.$$

Ясно, что $\forall \vec{x}:\ k(\vec{x}) \geq 0$, причём, если $k(\vec{x}) = 0$, то

$$x_1' = x_2' = \ldots = x_n' = 0, \quad \text{т.е. } \vec{x}' = \vec{0},$$

следовательно, форма положительно определённая.

Теорема 7.8. (Необходимое и достаточное условие неопределённости квадратичной формы).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является знакопеременной тогда и только тогда, когда $(k \neq 0) \wedge (l \neq 0)$.

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то её представление (7.12) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные сла-

гаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от 0.

2) $(\Leftarrow)$ Пусть $k \neq 0$, $l \neq 0$. Тогда для вектора $\vec{x}'$ с координатами $x_1' \neq 0, ..., x_k' \neq 0$, $x_{k+1}' = 0, ..., x_n' = 0$ имеем $k(\vec{x}') > 0$, а для вектора $\vec{x}''$ с координатами $x_1'' = ... = x_k'' = 0$, $x_{k+1}'' \neq 0, ..., x_n'' \neq 0$ имеем $k(\vec{x}'') < 0$, следовательно форма знакопеременная (см. определение).

Теорема 7.9. (Необходимое и достаточное условие полуопределённости квадратичных форм).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является полуопределённой тогда и только тогда, когда либо $k < n$, $l = 0$, либо $k = 0$, $l < n$.

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Пусть $k(\vec{x})$ положительно полуопределённая квадратичная форма. Тогда, очевидно, $l = 0$ и $k < n$ (иначе, если $k = n$ форма является положительно определённой).

2) $(\Leftarrow)$ Если $k < n$, $l = 0$, то $k(\vec{x}) \geq 0$ и $\exists \vec{x}' \neq \vec{0}$ с координатами $x_1' = ... = x_k' = 0$, $x_{k+1}' \neq 0, ..., x_n' \neq 0$ такой, что $k(\vec{x}') = 0$, следовательно, $k(\vec{x})$ положительно полуопределённая квадратичная форма.

Замечание. При применении этих признаков квадратичную форму необходимо привести к каноническому виду, что не всегда удобно и достаточно долго. Поэтому необходимо иметь критерий, с помощью которого можно классифицировать форму не приводя её к каноническому виду.

Теорема 7.10 (Критерий Сильвестра).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является положительно определённой тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$.

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда $\varDelta_1 < 0$, $\varDelta_2 > 0$, $\varDelta_3 < 0, ...,$ т.е.

$$\varDelta_1 < 0, \quad \varDelta_{j-1}\varDelta_j < 0, \ (j = \overline{2, n}).$$

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Докажем сначала, что из условия знакоопределённости квадратичных форм следует, что $\varDelta_j \neq 0$ ($j = 1, 2, ..., n$).

Доказательство проведем от противного.

Пусть, например, $\varDelta_l = 0$ $(1 \le l \le n)$. Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + ... + k_{1l}x_l = 0 \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + ... + k_{2l}x_l = 0 \\ ... \\ k_{l1}x_1 + k_{l2}x_2 + ... + k_{ll}x_l = 0 \end{cases}.$$

Так как $\varDelta_l$ – определитель этой системы и $\varDelta_l = 0$, то система имеет нетривиальное решение $x_1, x_2, ..., x_l$ ($x_1^2 + x_2^2 + ... + x_l^2 \neq 0$). Умножим первое уравнение на x_1, второе на x_2, … , последнее на x_l и сложим полученные равенства. В результате получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^{l} k_{ij}x_i x_j = 0,$$

левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы $k(\vec{x})$ на ненулевом векторе $\vec{x}$ с координатами $(x_1, x_2, ..., x_l, 0, ..., 0)$ и это значение равно 0, что противоречит знакоопределённости формы.

Итак, мы убедились, что $\varDelta_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$). Поэтому можно применить метод Якоби приведения формы $k(\vec{x})$ к каноническому виду и воспользоваться формулами (7.6) для канонических коэффициентов $\lambda_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$. Если $k(\vec{x})$ – положительно определённая, то из теоремы 7.7 следует, что $\lambda_j > 0$, следовательно $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$, так как $\Delta_1 = \lambda_1 > 0$, $\Delta_2 = \lambda_2 \Delta_1 > 0$, $\Delta_3 = \lambda_3 \Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n = \lambda_n \Delta_{n-1} > 0$.

Если $k(\vec{x})$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны (теорема 7.7), следовательно, $\Delta_1 = \lambda_1 < 0$, $\Delta_2 = \lambda_2 \Delta_1 > 0$, $\Delta_3 = \lambda_3 \Delta_2 < 0$, …, и знаки главных угловых миноров чередуются

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_j \Delta_{j-1} < 0.$$

2) $(\Leftarrow)$ Достаточность. Пусть выполнены условия, наложенные на главные угловые миноры Δ_j в формулировке теоремы. Так как $\Delta_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то форму $k(\vec{x})$ можно привести к каноническому виду методом Якоби, причём по формулам (7.6) $\lambda_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$ и если $\forall j = \overline{1, n}$: $\Delta_j > 0$, то и $\forall j = \overline{1, n}$: $\lambda_j > 0$, т.е. форма положительно определенная (теорема 7.7).

Если же знаки Δ_j чередуются и $\Delta_1 < 0$, то из соотношений (7.6) следует, что $\lambda_j < 0$ и форма отрицательно определена (теорема 7.7). Теорема доказана полностью.

8. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 8.1. Исследовать на линейную зависимость следующие системы векторов: а) $\vec{a}=\{1,2,3\}$, $\vec{b}=\{4,5,6\}$, $\vec{c}=\{7,8,9\}$;

б) e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty,\infty)$; в) x, x^2, $(1+x)^2$ на $(-\infty,\infty)$.

Решение. а) Составим линейную комбинацию векторов и приравняем ее к нулевому вектору, если векторы линейно зависимы, то существует нетривиальное решение следующей системы уравнений

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha+4\beta+7\gamma=0 \\ 2\alpha+5\beta+8\gamma=0 \\ 3\alpha+6\beta+9\gamma=0 \end{cases}.$$

Найдем определитель матрицы этой системы

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=45+96+84-105-72-48=0.$$

Так как определитель равен нулю, то система уравнений имеет нетривиальное решение и значит, система векторов линейно зависима.

б) Аналогично а) составим линейную комбинацию векторов и приравняем ее к нулевому вектору $\alpha e^x+\beta e^{-x}+\gamma e^{2x}\equiv 0$.

Продифференцируем дважды это равенство и получим еще два тождества: $\alpha e^x-\beta e^{-x}+2\gamma e^{2x}\equiv 0$; $\alpha e^x+\beta e^{-x}+4\gamma e^{2x}\equiv 0$.

Если векторы линейно зависимы, то существует нетривиальное решение следующей системы уравнений (относительно α, β и γ):

$$\begin{cases} \alpha e^x+\beta e^{-x}+\gamma e^{2x}\equiv 0 \\ \alpha e^x-\beta e^{-x}+2\gamma e^{2x}\equiv 0 \\ \alpha e^x+\beta e^{-x}+4\gamma e^{2x}\equiv 0 \end{cases}.$$

Найдем определитель матрицы этой системы (общий множитель элементов какого-либо столбца можно вынести за знак определителя)

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0,$$

значит, система имеет только тривиальное решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$, следовательно, система векторов линейно независима.

в) Рассмотрим нулевую линейную комбинацию векторов системы

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma(x^2 + 2x + 1) \equiv 0 .$$

Если многочлен тождественно равен нулю, то коэффициенты при всех степенях должны быть равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha \quad + 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases},$$

отсюда получаем $\alpha = \beta = \gamma = 0$, следовательно, система векторов линейно независима.

Пример 8.2. Найти размерность и базис линейного подпространства, являющегося линейной оболочкой векторов. Записать разложение векторов системы по найденному базису.

$\vec{a}_1 = (-1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 4, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 1, -1)$, $\vec{a}_5 = (2, 2, 1, 1)$.

Решение. Составим из координат векторов системы матрицу и с помощью элементарных преобразований определим ее ранг. Ранг этой матрицы будет совпадать с числом линейно независимых векторов в системе и значит, равен размерности оболочки векторов (см. раздел 1). Матрица из координат векторов имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\1&4&2&-1\\1&2&1&0\\0&2&1&-1\\2&2&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&4&2&-2\\0&2&1&-1\\0&2&1&-1\\0&2&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Здесь, сначала элементы первой строки прибавили к соответствующим элементам второй и третьей строк, потом элементы первой строки умножили на два и прибавили к соответствующим элементам пятой строки, после чего элементы второй строки разделили на два и результат вычли из третьей, четвертой и пятой строк. Таким образом, ранг матрицы равен двум, т.е. в системе два линейно независимых вектора, значит, размерность линейной оболочки векторов равна двум. В качестве базиса можно взять, например векторы $\vec{a}_1=(-1,\,0,\,0,\,-1)$ и $\vec{a}_2=(1,\,4,\,2,\,-1)$.

Находим разложение векторов системы по этому базису. Пусть

$$\vec{a}_3=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2 \quad\Leftrightarrow\quad (1,2,1,0)=\alpha_1(-1,0,0,-1)+\alpha_2(1,4,2,-1),$$

что равносильно СЛАУ

$$\begin{cases}-\alpha_1 & +\alpha_2 & = & 1\\ & 4\alpha_2 & = & 2\\ & 2\alpha_2 & = & 1\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & = & 0\end{cases},$$

решая которую, находим $\alpha_2=0{,}5,\ \alpha_1=-0{,}5$, т.е. $\vec{a}_3=-0{,}5\vec{a}_1+0{,}5\vec{a}_2$.

Записывая разложения векторов $\vec{a}_4,\vec{a}_5$ и решая аналогичные системы, находим $\vec{a}_4=0{,}5\vec{a}_1+0{,}5\vec{a}_2$, $\vec{a}_5=-1{,}5\vec{a}_1+0{,}5\vec{a}_2$.

Пример 8.3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы уравнений.

$$\begin{cases}3x_1+x_2-8x_3-2x_4+13x_5=0\\ x_1+11x_2-12x_3-34x_4-x_5=0\\ x_1-5x_2+2x_3+16x_4+7x_5=0\end{cases}.$$

Решение. Общее решение однородной системы линейных уравнений было представлено в виде (см. линейная алгебра):

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{n-r} X_{n-r},$$

где $r = \operatorname{rang} A$ – ранг матрицы системы, $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ – фундаментальная система решений. Общее решение – $\vec{x}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-r}$, координатные столбцы которых $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$, т.е.

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_{n-r} \vec{x}_{n-r}.$$

Координатные столбцы $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ – линейно независимы, следовательно, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-r}$ тоже линейно независимы и значит $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-r}$ – базис в линейном пространстве решений системы уравнений.

Найдем ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -2 & 13 \\ 1 & 11 & -12 & -34 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 16 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 16 & 7 \\ 1 & 11 & -12 & -34 & -1 \\ 3 & 1 & -8 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

(поменяли местами первую и третью строки).

Вычтем элементы первой строки из соответствующих элементов второй строки, а затем элементы первой строки умножим на –3 и прибавим к элементам третьей строки, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 16 & 7 \\ 0 & 16 & -14 & -50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & -50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 7 \\ 0 & 16 & -14 & -50 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(при последнем преобразовании вычли элементы третьей строки из соответствующих элементов четвертой строки). Ранг матрицы системы равен двум, значит, размерность пространства решений системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 \ - 5x_2 \ + 2x_3 + 16x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases},$$

Полагая в этой системе сначала $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$, затем $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, а потом $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$, находим три линейно независимых решения:

а) $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$, $\begin{cases} x_1 + 11x_2 = 12 \\ x_1 \ - 5x_2 = -2 \end{cases},$

$$x_1 = 5x_2 - 2, \quad 5x_2 - 2 + 11x_2 = 12, \quad x_2 = 7/8; \quad x_1 = 5 \cdot 7/8 - 2 = 19/8.$$

б) $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, $\begin{cases} x_1 + 11x_2 = 34 \\ x_1 \ - 5x_2 = -16 \end{cases},$

$$x_1 = 5x_2 - 16, \quad 5x_2 - 16 + 11x_2 = 34, \quad x_2 = 25/8; \quad x_1 = 5 \cdot 25/8 - 16 = -3/8.$$

в) $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$, $\begin{cases} x_1 + 11x_2 = 1 \\ x_1 \ - 5x_2 = -7 \end{cases},$

$$x_1 = 5x_2 - 7, \quad 5x_2 - 7 + 11x_2 = 1, \quad x_2 = 1/2; \quad x_1 = 5 \cdot 1/2 - 7 = -9/2.$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 19/8 \\ 7/8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3/8 \\ 25/8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базисом пространства решений будут, например, векторы: $\vec{e}_1 = (19, 7, 8, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (-3, 25, 0, 8, 0)$; $\vec{e}_3 = (-9, 1, 0, 0, 2)$, здесь, для упрощения, координаты первых двух векторов умножены на 8, а координаты последнего – на 2.

Пример 8.4. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, если он задан в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{7}{6}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases} \qquad \vec{x} = (-12, 6, 1).$$

Решение. При переходе от базиса e к базису f координаты одного и того же вектора связаны формулами (1.5), (1.6)

$$X_e = TX_f \;, \; X_f = T^{-1}X_e,$$

где T – матрица перехода, которая находится из равенства $f = eT$.

Здесь $T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы:

$$\det T = \frac{7}{6}(7-1) + (-1-7) = 7 - 8 = -1$$

(формула разложения определителя по третьей строке).

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы T и обратную матрицу по формуле $T^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\left(T_{ij}\right)^{\text{т}}$:

$$T_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7/6 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 7/6) = 1/6; \quad T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7/6 & 0 \end{vmatrix} = 7/6;$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7/6 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 7/6 = 13/6; \quad T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7/6 & 0 \end{vmatrix} = 49/6;$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 = 6; \quad T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2; \quad T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 7 = -8.$$

Таким образом, обратная матрица будет $T^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 1/6 & 13/6 & -2 \\ 7/6 & 49/6 & -8 \end{pmatrix}$ и,

следовательно,

$$X_f=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -7 & 6\\ 1/6 & 13/6 & -2\\ 7/6 & 49/6 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12\\ 6\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}12-42+6\\ -2+13-2\\ -14+49-8\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-24\\ 9\\ 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\ -9\\ -27\end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем в базисе f: $\vec{x}=(24,-9,-27)$.

Пример 8.5. Записать систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов.

$$\vec{a}_1=(1,1,0,1),\ \vec{a}_2=(1,2,3,1),\ \vec{a}_3=(2,3,3,2),\ \vec{a}_4=(4,5,3,4).$$

Решение. Найдем размерность и базис линейной оболочки системы векторов

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&3&1\\2&3&3&2\\4&5&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&3&0\\0&1&3&0\\0&1&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Размерность линейной оболочки векторов равна двум.

Пусть $L'=L[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4]$, т.е. $\dim L'=2$.

В качестве базиса можно взять векторы $\vec{e}_1=\vec{a}_1$, $\vec{e}_2=\vec{a}_2$. Дополним этот базис до базиса всего пространства L_4, например, векторами $\vec{e}_3=(0,0,1,0)$, $\vec{e}_4=(0,0,0,1)$. По теореме 2.3 в базисе e все векторы линейной оболочки будут иметь координаты $x_3'=x_4'=0$. Найдем матрицу перехода к базису e и обратную к ней.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\0&3&1&0&0&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&3&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&3&-3&1&0\\0&0&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&3&-3&1&0\\0&0&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right).$$

Таким образом, $T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и по формуле (1.6) получаем

$$X'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\ -x_1+x_2\\ 3x_1-3x_2+x_3\\ -x_1+x_4\end{pmatrix}.$$

Приравнивая две последние координаты к нулю, получаем систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+x_3=0\\ -x_1+x_4=0\end{cases}.$$

Если найти фундаментальную систему решений, то мы получим $\vec{f}_1=(0,1,3,0)$, $\vec{f}_2=(1,1,0,1)$ – базис подпространства решений этой системы. Теперь нетрудно видеть, что

$$\vec{a}_1=\vec{f}_2,\ \vec{a}_2=\vec{f}_1+\vec{f}_2,\ \vec{a}_3=\vec{f}_1+2\vec{f}_2,\ \vec{a}_4=\vec{f}_1+4\vec{f}_2.$$

Пример 8.6. Даны две системы векторов. Найти размерности и базисы суммы и пересечения линейных оболочек этих систем:

$$\vec{a}_1=(1,1,0,1),\ \vec{a}_2=(1,2,3,1),\ \vec{a}_3=(2,3,3,2),\ \vec{a}_4=(4,5,3,4),$$

$$\vec{b}_1=(1,1,0,0),\ \vec{b}_2=(2,2,1,0),\ \vec{b}_3=(1,2,0,1),\ \vec{b}_4=(2,3,0,1).$$

Решение. Система уравнений, задающая линейную оболочку системы векторов a, получена в предыдущем примере. Найдем аналогично размерность и базис линейной оболочки системы векторов b.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Размерность линейной оболочки векторов равна трем.

Пусть $L'' = L[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4]$, т.е. $\dim L'' = 3$.

В качестве базиса можно взять векторы

$$\vec{g}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \vec{g}_2 = (0, 1, 0, 1),\ \vec{g}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Как и в предыдущем примере, нетрудно убедиться в том, что все векторы системы векторов b являются линейными комбинациями векторов $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$ (найдите эти комбинации самостоятельно).

Дополним этот базис до базиса всего пространства, например, вектором $\vec{g}_4 = (0, 0, 0, 1)$. По теореме 2.3 в базисе g все векторы линейной оболочки будут иметь координату $x'_4 = 0$. Найдем матрицу перехода к базису g и обратную к ней.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и по формуле (1.6) получаем

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ x_3 \\ -x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая последнюю координату к нулю, получаем систему линейных уравнений (из одного уравнения), задающую линейную оболочку системы векторов:

$$-x_2 + x_4 = 0.$$

Векторы пересечения подпространств должны удовлетворять и той, и другой системе линейных уравнений, т.е. системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы этой системы равен трем, значит пересечение подпространств – одномерное подпространство. В качестве базиса можно взять вектор $\vec{h}_1 = (1, 1, 0, 1)$ (решение системы при $x_4 = 1$).

Найдем размерность и базис суммы подпространств. По определению размерность суммы совпадает с размерностью объединения линейных оболочек L' и L''. Составим матрицу из координат базисных векторов линейных оболочек:

$\vec{g}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{g}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{g}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 2, 3, 1)$

и найдем её ранг

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен четырем, значит $\dim(L' + L'') = 4$. В качестве базиса $L' + L''$ можно взять векторы:

$$(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1).$$

Таким образом, в подтверждение теоремы 2.5

$$\dim(L' + L'') = 4 = \dim L' + \dim L'' - \dim(L' \cap L'') = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Пример 8.7. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, заданных в базисе $f = (\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)$, если сами векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ заданы в некотором ортонормированном базисе *e*.

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 1),\ \vec{f}_2 = (0, 1, 1),\ \vec{f}_3 = (2, 1, 0),\ \vec{x} = (1, 2, -3),\ \vec{y} = (3, -2, 1).$$

Решение. По формуле (3.2) $(\vec{x},\vec{y}) = X^{\mathsf{T}} \Gamma_f Y$. Составим матрицу Грама

$$\Gamma_f = f^{\mathsf{T}} f = (\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)\begin{pmatrix}\vec{f}_1\\ \vec{f}_2\\ \vec{f}_3\end{pmatrix}.$$

Находим скалярные произведения:

$$(\vec{f}_1,\vec{f}_1) = 1+1+1 = 3,\quad (\vec{f}_1,\vec{f}_2) = 0+1+1 = 2,\quad (\vec{f}_1,\vec{f}_3) = 2+1+0 = 3,$$

$$(\vec{f}_2,\vec{f}_2) = 0+1+1 = 2,\quad (\vec{f}_2,\vec{f}_3) = 0+1+0 = 1,\quad (\vec{f}_3,\vec{f}_3) = 4+1+0 = 5$$

и матрицу Грама: $\Gamma_f = \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$. Таким образом, скалярное произведение будет равно: $(\vec{x},\vec{y}) = (1\,2-3)\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix} = (1\,2-3)\begin{pmatrix}8\\ 3\\ 12\end{pmatrix} = 8+6-36 = -22$.

Пример 8.8. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис линейной оболочки векторов.

$$\vec{f}_1 = (1,\ -2, 2),\ \vec{f}_2 = (-1, 0, -1),\ \vec{f}_3 = (5, -3, -7).$$

Решение. Полагаем $\vec{e}_1 = \vec{f}_1 = (1, -2, 2)$. Вектор $\vec{e}_2$ ищем в виде

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_1^{(1)}\vec{e}_1.$$

Так как

$$(\vec{f}_2,\vec{e}_1) = 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0+2\cdot(-1) = -3,\ (\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+2\cdot 2 = 9$$

(считаем, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ заданы в ортонормированном базисе, который по теореме 3.3 всегда существует в E_n), тогда

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{(\vec{f}_2,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_1^{(1)}\vec{e}_1 = (-1, 0, -1) - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(1, -2, 2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Наконец, вектор $\vec{e}_3$ находим в виде следующей линейной комбинации векторов:

$$\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_1^{(2)}\vec{e}_1 - \alpha_2^{(2)}\vec{e}_2.$$

Вычисляя скалярные произведения

$$(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = -3, \quad (\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 1, \quad (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1,$$

находим значения коэффициентов:

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{(\vec{f}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = 1.$$

Следовательно, $\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\vec{e}_1 - 1\cdot\vec{e}_2 = (6, -3, -6).$

Таким образом, получаем следующую систему ортогональных векторов:

$$\vec{e}_1 = (1, -2, 2); \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad \vec{e}_3 = (6, -3, -6).$$

Разделив каждый вектор на его длину:

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 1,$$

$$|\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 9,$$

получим ортонормированный базис:

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Пример 8.9. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства E_4:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (0,1,1,0), \quad \vec{a}_2 = (1,1,2,1), \quad \vec{a}_3 = (1,2,3,1), \\ \vec{a}_4 = (1,3,4,1), \quad \vec{a}_5 = (1,0,1,1). \end{array}\right.$$

Решение. Запишем систему вида (3.7), используя координаты векторов $\vec{a}_i$, и найдем её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 - x_4 \end{cases}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базисом ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов являются векторы

$$\vec{f}_1 = (-1,-1,1,0), \quad \vec{f}_2 = (-1,0,0,1).$$

Нетрудно видеть, что оба эти вектора ортогональны каждому из векторов $\vec{a}_i$ $(i = \overline{1,5})$ и, значит, их линейная оболочка действительно является ортогональным дополнением.

Пример 8.10. Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования?

$$\varphi(\vec{x})=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1^2,x_2+2x_3);\quad \eta(\vec{x})=(4x_1-3x_2-2x_3,x_1,x_2+2x_3);$$

$$\mu(\vec{x})=(4x_1-3x_2-2,x_2^2,x_2+2).$$

Решение. Преобразование будет линейным, если все координаты образов векторов будут линейными комбинациями координат вектора $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Здесь в преобразовании $\vec{y}=\varphi(\vec{x})$ вторая координата, равная x_1^2, не является линейной комбинацией, в преобразовании $\vec{y}=\mu(\vec{x})$ аналогично, кроме того, третья координата имеет вид x_2+2, что также не является линейной комбинацией координат вектора $\vec{x}$. Значит, эти преобразования не являются линейными. Преобразование $\vec{y}=\eta(\vec{x})$ является линейным.

Пример 8.11. Пусть

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1-x_2)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,x_3,x_1)$.

Найти $\varphi(\varphi+2\eta)(\vec{x})$.

Решение. Матрицы преобразований φ,η будут соответственно

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad A_\eta=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть A_ψ – матрица преобразования ψ, тогда

$$A_\psi=A_\varphi(A_\varphi+2A_\eta)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&2\\3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&2&-1\\0&2&-3\end{pmatrix}.$$

$$\psi(\vec{x})=(-2x_1+3x_2-x_3,\ x_1+2x_2-x_3,\ 2x_2-3x_3).$$

Пример 8.12. Определить ранг и дефект линейного преобразования, а также найти базисы образа и ядра L_3 при преобразовании φ.

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2).$$

Решение. Пусть в L_3 выбран базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, тогда в этом базисе матрица преобразования φ будет иметь вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению вектор $\vec{y}$ принадлежит образу L_3 при преобразовании φ в том и только том случае, когда найдется вектор $\vec{x} \in L_3$ такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, или в координатной записи по формуле (4.4):

$$Y = A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что образ L_3 совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, 0)$, так как $\vec{y} = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3$. Следовательно, ранг оператора φ, который совпадает с рангом его матрицы, равен двум. В качестве базиса можно взять любой базис линейной оболочки векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, например, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – они линейно независимы.

Аналогично вектор $\vec{x}$ принадлежит ядру тогда и только тогда, когда $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, или, в координатной записи:

$$A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это однородная система линейных уравнений, ранг которой равен двум, значит, она эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - \qquad x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, т.е. базис ядра состоит из одного вектора $\vec{p} = (1, -1, 1)$.

При этом по теореме 4.5, размерность ядра равна:

$$\dim(\ker\varphi) = \dim L_3 - \dim\varphi(L_3) = 3 - 2 = 1.$$

Пример 8.13. Найти матрицу линейного преобразования φ в базисе $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, если она задана в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. При переходе от базиса e к базису f матрица линейного преобразования, в соответствии с определением, будет иметь вид (см. (4.1)) $A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$, где T – матрица перехода, которая находится из равенства $f = eT$. Здесь $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем определитель матрицы: $\det T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

(прибавили к элементам второго и третьего столбца соответствующие элементы первого столбца и записали формулу разложения определителя по первой строке).

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы T и обратную матрицу по формуле $T^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(T_{ij}\right)^{\mathrm{T}}$:

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad T_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad T_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \; T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \; T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \; T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Таким образом, обратная матрица будет $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$A'_{\varphi} = T^{-1}A_{\varphi}T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2+1 & -1+2-1 & -1+4+1 \\ 0+2+0 & 0+2+0 & 0+4+0 \\ -1+1+1 & 1+1-1 & 1+2+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12+4-1 & 0+4-1 & 12+8-4 \\ 4+4-3 & 0+4-3 & 4+8-12 \\ -8+0+2 & 0+0+2 & -8+0+8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 & 3/4 & 4 \\ 5/4 & 1/4 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.14. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора:

а) проектирования на плоскость $y - z = 0$;

б) зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$.

Решение. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Отложим его от начала координат, тогда координаты точки конца вектора будут $M_x(x_1, x_2, x_3)$. Проекцию этого вектора на плоскость $y - z = 0$ обозначим $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, а зеркально отраженный вектор обозначим $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ (рис. 8.1). Требуется дать описание преобразований: $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ и $\vec{z} = \eta(\vec{x})$.

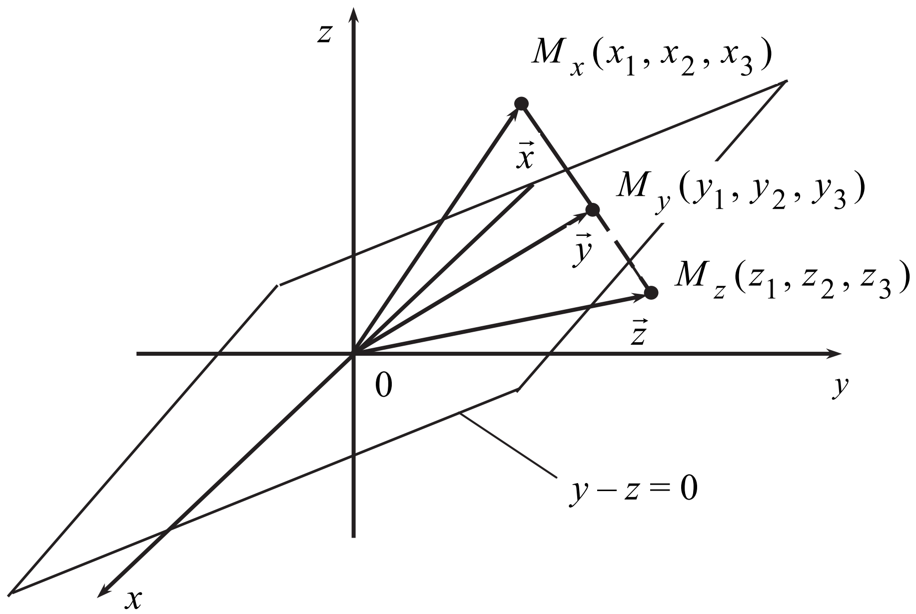

Рис. 8.1

а) Проведем через точку $M_x(x_1, x_2, x_3)$ прямую, перпендикулярную плоскости $y - z = 0$, и найдем точку $M_y(y_1, y_2, y_3)$ пересечения этой прямой с плоскостью, что даст нам вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормальный вектор к плоскости $\vec{n} = (0, 1, -1)$. Таким образом, канонические и параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - x_2}{1} = \frac{z - x_3}{-1}; \qquad \begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 + t \\ z = x_3 - t \end{cases}.$$

Подставляя x, y, z из параметрических уравнений в уравнение плоскости, находим значение параметра, при котором прямая пересекает плоскость, координаты точки $M_y(y_1, y_2, y_3)$ и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$x_2 + t - (x_3 - t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_y = \frac{x_3 - x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + \dfrac{x_3 - x_2}{2} = \dfrac{x_3 + x_2}{2} \\ y_3 = x_3 - \dfrac{x_3 - x_2}{2} = \dfrac{x_3 + x_2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = \left(x_1\,,\, 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3\,,\, 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3\right).$$

Все координаты вектора $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ являются линейными комбинациями координат вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, значит, преобразование проектирования на плоскость является линейным.

Из равенства $Y = A_\varphi X$ находим матрицу этого преобразования

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

По определению вектор $\vec{y}$ принадлежит образу L_3 при преобразовании φ в том и только том случае, когда найдется вектор $\vec{x} \in L_3$ такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, или в координатной записи, по формуле (4.4):

$$Y = A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что образ L_3 совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\vec{f}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{f}_2 = (0; 0{,}5; 0{,}5)$, $\vec{f}_3 = (0; 0{,}5; 0{,}5)$, так как $\vec{y} = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3$. Следовательно, ранг оператора φ, который совпадает с рангом его матрицы, равен двум. В качестве базиса можно взять любой базис линейной оболочки векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, например, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – они линейно независимы.

Аналогично вектор $\vec{x}$ принадлежит ядру тогда и только тогда, когда $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, или, в координатной записи:

$$A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это однородная система линейных уравнений, ранг которой равен двум, значит, она эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_3 = -1$, получаем $x_1 = 0,\ x_2 = 1,$ т.е. базис ядра состоит из одного вектора $\vec{p} = (0, 1, -1)$, который совпадает с нормальным вектором плоскости $y - z = 0$. Геометрически это совершенно очевидно, все векторы, коллинеарные вектору $\vec{p} = (0, 1, -1)$, проектируются в нулевой вектор. При этом, по теореме 4.5, размерность ядра равна:

$$\dim(\ker\varphi) = \dim L_3 - \dim\varphi(L_3) = 3 - 2 = 1.$$

б) Для нахождения матрицы преобразования зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$ найдем координаты точки M_z, симметричной точке M_x относительно рассматриваемой плоскости. Из аналитической геометрии известно, что

$$y_1 = \frac{x_1 + z_1}{2}, \quad y_2 = \frac{x_2 + z_2}{2}, \quad y_3 = \frac{x_3 + z_3}{2},$$

откуда получаем

$$z_1 = 2y_1 - x_1 = x_1, \quad z_2 = 2y_2 - x_2 = x_3, \quad z_3 = 2y_3 - x_3 = x_2.$$

Таким образом, $\vec{z} = \eta(\vec{x}) = (x_1, x_3, x_2)$ и матрица этого преобразования будет иметь вид $A_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен трем, так как

$\det A_\eta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, это значит, что образ L_3 совпадает с L_3, т.е. ядро – нулевое подпространство.

Пример 8.15. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ, заданного в некотором базисе матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные числа этой матрицы, для чего составим и решим характеристическое уравнение (4.3):

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = (5-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 1\right) =$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda-1)(4-\lambda+1) = (5-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Приравняв к нулю это выражение, находим: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = 5.$

Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, для чего при каждом λ составляем и решаем систему (4.2):

а) при $\lambda = \lambda_1 = 3$ получаем

$$(A_\varphi - 3E)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе (здесь $\operatorname{rang}(A_\varphi - 3E) = 2$)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_3 = 1$, находим $x_2 = -1, x_1 = 1$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 3, есть $\vec{f}_1 = (1, -1, 1)$.

б) при $\lambda = \lambda_{2,3} = 5$ получаем

$$(A_\varphi - 5E)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\operatorname{rang}(A_\varphi - 5E) = 1$):

$$x_1 - x_2 = 0 \quad ,$$

полагая в котором сначала $x_2 = 1, x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0, x_3 = 1$, получаем еще два линейно независимых собственных вектора:

$$\vec{f}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{f}_3 = (0, 0, 1).$$

Пример 8.16. Привести квадратичную форму к каноническому виду: а) методом Якоби, б) методом Лагранжа. Найти канонический базис и матрицу перехода к каноническому базису

$$k(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

Решение. а) Метод Якоби.

Матрица квадратичной формы имеет вид $K_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, найдем главные угловые миноры этой матрицы

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

все они отличны от нуля, значит, существует треугольное преобразование

$T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Найдем элементы матрицы T. Запишем и решим системы линейных уравнений (**) (см. доказательство теоремы 7.3):

при $j=2$: $t_{12}+2=0,\quad t_{12}=-2$;

при $j=3$: $\begin{cases} t_{13}+2t_{23}+2=0 \\ 2t_{13}+8t_{23}+6=0 \end{cases}$, откуда $t_{13}=-1,\quad t_{23}=-0{,}5$.

Таким образом, $T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и каноническим базисом являются векторы: $\vec{f}_1=\vec{e}_1,\quad \vec{f}_2=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2,\quad \vec{f}_3=-\vec{e}_1-0{,}5\vec{e}_2+\vec{e}_3$. В этом базисе квадратичная форма будет иметь вид

$$k(\vec{x})=\tilde{x}_1^2+4\tilde{x}_2^2-\tilde{x}_3^2,$$

здесь канонические коэффициенты найдены по формулам (7.9):

$$\lambda_1=\Delta_1=1,\quad \lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{4}{1}=4,\quad \lambda_3=\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Тот же результат получается, если найти матрицу квадратичной формы в базисе f по формуле (7.5):

$$K_f=T^{\mathrm{T}}K_eT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Метод Лагранжа.

Выделим группу слагаемых, содержащих x_1, и дополним её до полного квадрата

$$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3=x_1^2+2x_1(2x_2)+2x_1(2x_3)+(2x_2)^2+(2x_3)^2+$$
$$+2(2x_2)(2x_3)-(2x_2)^2-(2x_3)^2-2(2x_2)(2x_3)=(x_1+2x_2+2x_3)^2-$$
$$-4x_2^2-4x_3^2-8x_2x_3\,.$$

Обозначая $x_1'=x_1+2x_2+2x_3$, получим $k(\vec{x})=x_1'^2+k'(\vec{x})$, где $k'(\vec{x})=4x_2^2+4x_2x_3$ – квадратичная форма, не содержащая координаты x_1.

Рассмотрим преобразование

$$\begin{cases} x_1' = x_1+2x_2+2x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X'=T_1^{-1}X\,.$$

Это преобразование является невырожденным, так как

$$T_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\det T_1^{-1}=1$ (разложить по первому столбцу).

Выделим группу слагаемых, содержащих x_2, и дополним ее до полного квадрата

$$4x_2'^2+4x_2'x_3'=4(x_2'^2+x_2'x_3')=4\left(x_2'^2+2x_2'\left(0{,}5x_3'\right)+\left(0{,}5x_3'\right)^2-\left(0{,}5x_3'\right)^2\right)=$$
$$=4(x_2'+0{,}5x_3')^2-x_3'^2\,.$$

Обозначая $\tilde{x}_2=x_2'+0{,}5x_3'$, получим $k(\vec{x})=x_1'^2+4\tilde{x}_2^2-x_3'$.

Рассмотрим преобразование

$$\begin{cases} \tilde{x}_1=x_1' \\ \tilde{x}_2=x_2'+0{,}5x_3' \\ \tilde{x}_3=x_3' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{X}=T_2^{-1}X'\,.$$

Это преобразование также является невырожденным, так как

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \det T_2^{-1} = 1.$$

Таким образом, матрица, обратная к матрице перехода к каноническому базису, имеет вид

$$T^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу перехода к каноническому базису

$$T = \left(T^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем тот же результат, что и при применении метода Якоби.

Пример 8.17. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, канонический базис, матрицу перехода к каноническому базису, убедиться, что в этом базисе матрица квадратичной формы является диагональной.

$$k(\vec{x}) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$K_e = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа этой матрицы, для чего составим и решим характеристическое уравнение (4.3):

$$\det(K_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(K_e - \lambda E) = (17-\lambda)(14-\lambda)^2 - 16 - 16 - 4(14-\lambda) - 16(17-\lambda) - 4(14-\lambda) =$$

$$= (17-\lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 180) + 8(\lambda - 18) = (17-\lambda)((14-\lambda)^2 - 16) - 8(18-\lambda) =$$

$$= (17-\lambda)(\lambda - 10)(\lambda - 18) + 8(\lambda - 18) = (\lambda - 18)((17-\lambda)(\lambda - 10) + 8) =$$

$$= -(\lambda - 18)(\lambda^2 - 27\lambda + 162).$$

Приравняв к нулю это выражение, находим: $\lambda_1 = 9, \lambda_{2,3} = 18$.

Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, для чего при каждом λ составляем и решаем систему (4.2):

а) при $\lambda = \lambda_1 = 9$ получаем

$$(K_e - 9E)X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе (здесь $\operatorname{rang}(K_e - 9E) = 2$)

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_1 = 1$, находим $x_2 = x_3 = 2$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 9, есть $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$.

б) при $\lambda = \lambda_{2,3} = 18$ получаем

$$(K_e - 18E)X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\operatorname{rang}(K_e - 18E) = 1$) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$, полагая в котором сначала, $x_2 = 1, x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0, x_3 = 1$, получаем еще два линейно независимых собственных вектора:

$$\vec{f}_2 = (-2, 1, 0); \quad \vec{f}_3 = (-2, 0, 1).$$

По теореме 6.2 векторы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$; $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_3$ ортогональны, но векторы $\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ не являются ортогональными. Ортогонализуем их. Находим вектор $\vec{f}$ в виде следующей линейной комбинации векторов:

$$\vec{f} = \vec{f}_3 - \alpha_1 \vec{f}_1 - \alpha_2 \vec{f}_2 .$$

Вычисляя скалярные произведения

$(\vec{f}_3, \vec{f}_1) = 0$, $(\vec{f}_3, \vec{f}_2) = 4 + 0 + 0 = 4$, $(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = 1 + 4 + 4 = 9$, $(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 4 + 1 + 0 = 5$,

находим значения коэффициентов α_1, α_2 и вектор $\vec{f}$:

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{f}_3, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = 0,\ \alpha_2 = \frac{(\vec{f}_3, \vec{f}_2)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \frac{4}{5},\ \vec{f} = (-2, 0, 1) - \frac{4}{5}(-2, 1, 0) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right).$$

Таким образом, получаем следующую систему ортогональных векторов:

$$\vec{f}_1 = (1, 2, 2);\quad \vec{f}_2 = (-2, 1, 0);\quad \vec{f} = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1).$$

Разделив каждый вектор на его длину:

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,\ |\vec{f}_2| = \sqrt{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{(\vec{f}, \vec{f})} = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

получим ортонормированный базис из собственных векторов:

$$\vec{g}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);\quad \vec{g}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right);\quad \vec{g}_3 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Находим матрицу ортогонального преобразования (столбцами матрицы являются координатные столбцы векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ (см. раздел 1))

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (7.5) находим K_g – матрицу квадратичной формы в базисе из собственных векторов

$$K_g = T^{\mathrm{T}} K_e T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{17-4-4}{3} & \frac{-2+28-8}{3} & \frac{-2-8+28}{3} \\ \frac{-34-2+0}{\sqrt{5}} & \frac{4+14+0}{\sqrt{5}} & \frac{4-4+0}{\sqrt{5}} \\ \frac{-34+8-10}{3\sqrt{5}} & \frac{4-56-20}{3\sqrt{5}} & \frac{4+16+70}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{1} & \frac{6}{1} & \frac{6}{1} \\ -\frac{36}{\sqrt{5}} & \frac{18}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{36}{3\sqrt{5}} & -\frac{72}{3\sqrt{5}} & \frac{90}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+12+12}{3} & \frac{-6+6}{\sqrt{5}} & \frac{-6-24+30}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-36+36}{3\sqrt{5}} & \frac{72+18}{5} & \frac{72-72}{15} \\ \frac{-36-144+180}{9\sqrt{5}} & \frac{72-72}{15} & \frac{72+288+450}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе из собственных векторов диагональная, и в этом базисе квадратичная форма имеет вид

$$k(\vec{x}) = 9\tilde{x}_1^2 + 18\tilde{x}_2^2 + 18\tilde{x}_3^2.$$

Пример 8.18. Используя теорию квадратичных форм, исследовать кривую второго порядка, заданную общим уравнением

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2\sqrt{2}\cdot x - 8\sqrt{2}\cdot y + 16 = 0,$$

и построить её.

Решение. Старшие слагаемые левой части уравнения образуют квадратичную форму в E_2 с базисом $\vec{i} = (1, 0)$; $\vec{j} = (0, 1)$. Найдем ортонормированный базис из собственных векторов этой формы (см. пример 8.17).

Матрица K квадратичной формы имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа этой матрицы, для чего составим и решим характеристическое уравнение (4.3):

$$\det(K - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det(K - \lambda E) = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

Приравняв к нулю это выражение, находим: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$

Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, для чего при каждом λ составляем и решаем систему (4.2):

а) при $\lambda = \lambda_1 = 1$ получаем

$$(K - 1\cdot E)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\operatorname{rang}(K - 1\cdot E) = 1$) $x - y = 0$, полагая в котором, например, $y = 1$, находим $x = 1$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 1 есть $\vec{f}_1 = (1, 1)$.

б) при $\lambda = \lambda_1 = 3$ получаем

$$(K_e - 3 \cdot E)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\mathrm{rang}(K_e - 3 \cdot E) = 1$) $-x - y = 0$, полагая в котором, например, $y = 1$, находим $x = -1$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 3, есть $\vec{f}_2 = (-1, 1)$.

Разделив каждый вектор на его длину:

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{f}_2| = \sqrt{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

получим ортонормированный базис из собственных векторов:

$$\vec{g}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \vec{g}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Находим матрицу ортогонального преобразования (столбцами матрицы являются координатные столбцы векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ (см. раздел 1)) и обратную к ней

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Координаты радиус-вектора точки $M(x, y)$ в базисе $(\vec{i}\ \vec{j})$ выражаются через координаты радиус-вектора той же точки (x', y') в базисе g по формуле (1.5)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнение кривой в базисе g принимает вид

$$x'^2 + 3y'^2 - 2(x' - y') - 8(x' + y') + 1 = 0, \quad x'^2 + 3y'^2 - 10x' - 6y' + 1 = 0.$$

Выделим полные квадраты по переменным x', y':

$$x'^2 - 10x' = x'^2 - 2x'5 + 5^2 - 5^2 = (x'-5)^2 - 25,$$

$$3y'^2 - 6y' = 3(y'^2 - 2y') = 3(y'^2 - 2y' + 1^2 - 1^2) = 3(y'-1)^2 - 3.$$

Если обозначить $\tilde{x} = x' - 5, \tilde{y} = y' - 1$, то получим

$$\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 25 - 3 + 16 = 0, \quad \frac{\tilde{x}^2}{12} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$$

– каноническое уравнение эллипса с полуосями: $a = 2\sqrt{3},\ b = 2$.

Построим эту линию. Первое преобразование – переход к базису из собственных векторов означает поворот системы координат Oxy на угол $\pi/4$ относительно начала координат. Второе преобразование – выделение полных квадратов и переобозначение переменных – означает параллельный перенос системы координат на 5 единиц по оси Ox' и на одну единицу по оси Oy'. Полученная линия представлена на рис. 8.2.

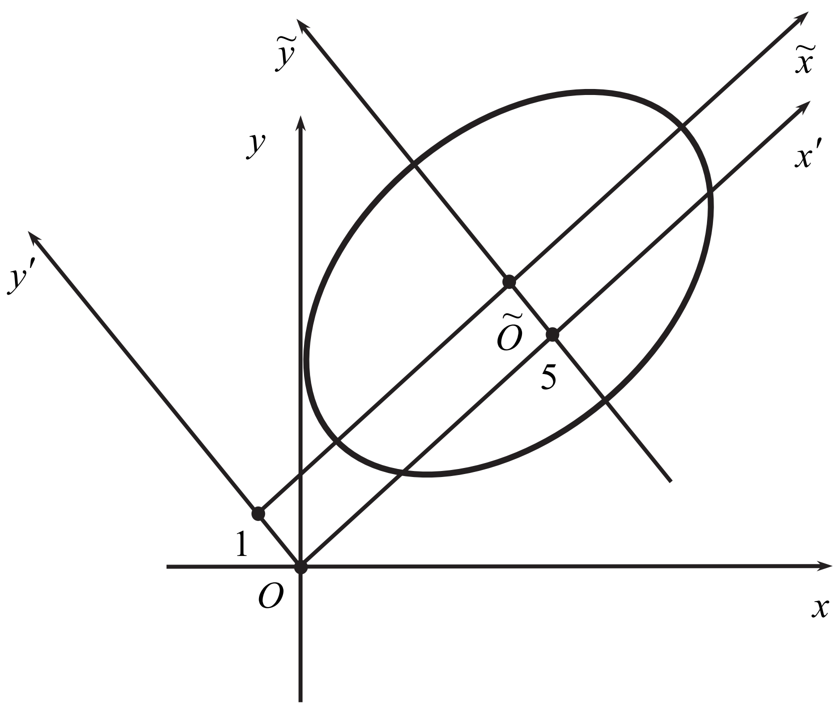

Рис. 8.2

9. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

9.1. Индивидуальное домашнее задание 1
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПОДПРОСТРАНСТВА

1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произведение любого $\vec{a}$ элемента на любое число $\alpha \in R$?

1) Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

2) Множество всех векторов, лежащих на одной оси. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

3) Множество векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

4) Множество всех геометрических векторов трехмерного пространства. Сумма $\vec{a}\times\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

5) Множество всех геометрических векторов, лежащих на одной оси. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot|\vec{a}|$.

6) Множество всех геометрических векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

7) Множество всех четных функций, заданных на отрезке [–1, 1]. Сумма $f(t)\cdot g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

8) Множество всех нечетных функций, заданных на отрезке [–1,1]. Сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

9) Множество всех линейных функций $\vec{a}=f(t)$, $\vec{b}=g(t)$. Сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

10) Множество всех многочленов третьей степени от переменной *x*. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.

11) Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $\vec{a}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $\vec{b}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$. Сумма $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1y_1,x_2y_2,...,x_ny_n\}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}=\{\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n\}$.

12) Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $\vec{a}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $\vec{b}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$. Сумма $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n\}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}=\{\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n\}$.

13) Множество всех сходящихся последовательностей $\vec{a}=\{u_n\}$, $\vec{b}=\{v_n\}$. Сумма $\{u_n+v_n\}$, произведение $\{\alpha\cdot u_n\}$.

14) Множество всех диагональных матриц $\vec{a}=(a_{ij})$, $\vec{b}=(b_{ij})$ размеров $n\times n$. Сумма $(a_{ij})\cdot(b_{ij})$ произведение $(\alpha\cdot a_{ij})$.

15) Множество всех невырожденных матриц $\vec{a}=(a_{ij})$, $\vec{b}=(b_{ij})$. Сумма $(a_{ij})\cdot(b_{ij})$ произведение $(\alpha\cdot a_{ij})$.

16) Множество всех прямоугольных матриц $\vec{a}=(a_{ij})$, $\vec{b}=(b_{ij})$ $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Сумма $(a_{ij}+b_{ij})$ произведение $(\alpha\cdot a_{ij})$.

17) Множество всех симметричных матриц $\vec{a}=(a_{ij})$, $(a_{ij}=a_{ji})$, $\vec{b}=(b_{ij})$, $(b_{ij}=b_{ji})$, $i,j=\overline{1,n}$. Сумма $(a_{ij}+b_{ij})$ произведение $(\alpha\cdot a_{ij})$.

18) Множество целых чисел. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $[\alpha\cdot\vec{a}]$.

19) Множество положительных чисел. Сумма $x\cdot y$, произведение x^{α}.

20) Множество всех отрицательных чисел. Сумма $-|x|\cdot|y|$, произведение $-|x|^{\alpha}$.

21) Множество всех дифференцируемых функций. Сумма $f(t)\cdot g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

22) Множество всех действительных чисел. Сумма $x \cdot y$, произведение x^{α}.

23) Множество всех многочленов от одной переменной степени n. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.

24) Множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем от переменных x и y. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.

25) Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов. В случае линейной зависимости найти выражение одного вектора через другие.

1) $\vec{a}=\{1, 4, 6\}$, $\vec{b}=\{1, -1, 1\}$, $\vec{c}=\{1, 1, 3\}$.

2) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

3) $\vec{a}=\{2, -3, 1\}$, $\vec{b}=\{3, -1, 5\}$, $\vec{c}=\{1, -4, 3\}$.

4) 2, $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ на $(-\infty, \infty)$.

5) $\vec{a}=\{5, 4, 3\}$, $\vec{b}=\{3, 3, 2\}$, $\vec{c}=\{8, 1, 3\}$.

6) 1, x, $\sin x$ на $(-\infty, \infty)$.

7) e^x, e^{2x}, e^{3x} $x \in (-\infty, \infty)$.

8) $\vec{a}=\{1, -2, 2\}$, $\vec{b}=\{-1, 1, -1\}$, $\vec{c}=\{2, -1, 1\}$.

9) x, x^2, $(1+x)^2$ на $(-\infty, \infty)$.

10) $\vec{a}=\{1, 2, 3\}$, $\vec{b}=\{4, 5, 6\}$, $\vec{c}=\{7, 8, 9\}$.

11) 1, x, x^2, $(1+x)^2$ на $(-\infty, \infty)$.

12) $\vec{a}=\{1, 1, 1\}$, $\vec{b}=\{1, 2, 3\}$, $\vec{c}=\{1, 3, 6\}$.

13) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

14) $\vec{a}=\{3, 4, -5\}$, $\vec{b}=\{8, 7, -2\}$, $\vec{c}=\{2, 1, 8\}$.

15) e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty,\infty)$.

16) $\vec{a}=\{3,2,-4\}$, $\vec{b}=\{4,1,-2\}$, $\vec{c}=\{5,2,-3\}$.

17) $1+x+x^2$, $1+2x+3x^2$, $1+3x+x^2$ на $(-\infty,\infty)$.

18) $\vec{a}=\{0,1,1\}$, $\vec{b}=\{1,0,1\}$, $\vec{c}=\{1,1,0\}$.

19) 1, e^x, $\mathrm{sh}x$ на $(-\infty,\infty)$.

20) 1, x, $\dfrac{1}{x}$ на $(0,1)$.

21) 1, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$ на $(0,\pi/2)$.

22) x, $1+x$, $(1+x)^2$ на $(-\infty,\infty)$.

23) x, xe^x, x^2e^x на $(-\infty,\infty)$.

24) x, e^x, xe^x на $(-\infty,\infty)$.

25) 1, x^2, $1+x$, $(1+x)^2$ на $(-\infty,\infty)$

3. Найти размерность и базис линейного подпространства, являющегося линейной оболочкой системы векторов. Записать разложение векторов системы по найденному базису.

1) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,0,-1),\ \vec{a}_2=(2,1,1,0),\ \vec{a}_3=(1,1,1,1),\\ \vec{a}_4=(1,2,3,4),\ \vec{a}_5=(0,1,2,3).\end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,0,1),\ \vec{a}_2=(2,1,1,2),\ \vec{a}_3=(1,1,1,1),\\ \vec{a}_4=(2,1,3,2),\ \vec{a}_5=(3,1,3,3).\end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,0),\ \vec{a}_2=(2,2,0,0),\ \vec{a}_3=(1,2,0,1),\\ \vec{a}_4=(2,3,0,1),\ \vec{a}_5=(0,-1,0,-1).\end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,1,0),\ \vec{a}_2=(0,2,2,0),\ \vec{a}_3=(-1,2,0,1),\\ \vec{a}_4=(-1,4,3,0),\ \vec{a}_5=(1,2,3,0).\end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,1,0),\ \vec{a}_2=(1,1,1,1),\ \vec{a}_3=(1,0,0,1),\\ \vec{a}_4=(1,3,3,1),\ \vec{a}_5=(2,3,3,2).\end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,1,1),\ \vec{a}_2=(2,1,1,0),\ \vec{a}_3=(1,2,3,4),\\ \vec{a}_4=(0,1,2,3),\ \vec{a}_5=(1,0,0,-1).\end{array}\right.$

7) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,2,3,0),\ \vec{a}_2=(-1,2,1,0),\ \vec{a}_3=(-1,4,3,0),\\ \vec{a}_4=(0,2,2,0),\ \vec{a}_5=(1,0,1,0).\end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(2,1,0,1),\ \vec{a}_2=(1,0,2,2),\ \vec{a}_3=(-1,-1,2,1),\\ \vec{a}_4=(3,1,2,1),\ \vec{a}_5=(5,2,2,2).\end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,2,-1,0),\ \vec{a}_2=(3,3,-1,3),\ \vec{a}_3=(2,1,0,3),\\ \vec{a}_4=(1,-1,0,2),\ \vec{a}_5=(2,1,-1,2).\end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(2,1,-1,0),\ \vec{a}_2=(3,2,0,1),\ \vec{a}_3=(1,1,1,1),\\ \vec{a}_4=(1,0,-2,-1),\ \vec{a}_5=(0,-1,-3,-2).\end{array}\right.$

11) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-1,0,0,-1),\ \ \vec{a}_2=(1,4,2,-1),\ \ \vec{a}_3=(1,2,1,0),\\ \vec{a}_4=(0,2,1,-1),\ \vec{a}_5=(2,2,1,1).\end{array}\right.$

12) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-1,0,1,0),\ \ \vec{a}_2=(-1,1,4,-1),\ \ \vec{a}_3=(1,1,2,-1),\\ \vec{a}_4=(0,1,3,-1),\ \vec{a}_5=(2,0,-2,0).\end{array}\right.$

13) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-2,1,0,1),\ \ \vec{a}_2=(-1,0,1,1),\ \ \vec{a}_3=(1,-1,1,0),\\ \vec{a}_4=(-1,1,1,1),\ \ \vec{a}_5=(2,0,-1,0).\end{array}\right.$

14) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-1,1,0,0),\ \ \vec{a}_2=(0,-1,1,0),\ \ \vec{a}_3=(1,-4,3,0),\\ \vec{a}_4=(-1,-2,3,1),\ \ \ \vec{a}_5=(-2,-1,3,1).\end{array}\right.$

15) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,-2,0,1),\ \ \vec{a}_2=(-1,2,3,0),\ \ \vec{a}_3=(1,-2,3,2),\\ \vec{a}_4=(0,0,3,1),\ \ \ \vec{a}_5=(2,-4,-3,1).\end{array}\right.$

16) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(2,3,0,1),\ \ \vec{a}_2=(0,-1,0,1),\ \ \vec{a}_3=(1,1,0,0),\\ \vec{a}_4=(1,2,0,1),\ \ \ \vec{a}_5=(0,1,2,3).\end{array}\right.$

17) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,0),\ \ \vec{a}_2=(1,4,1,0),\ \ \vec{a}_3=(-1,2,1,0),\\ \vec{a}_4=(0,3,1,0),\ \ \ \vec{a}_5=(2,-1,-1,0).\end{array}\right.$

18) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,2,0),\quad \vec{a}_2=(1,1,2,1),\quad \vec{a}_3=(1,2,3,1),\\ \vec{a}_4=(1,3,4,1),\quad \vec{a}_5=(1,0,1,1).\end{array}\right.$

19) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,2,1,1),\quad \vec{a}_2=(-1,2,0,1),\quad \vec{a}_3=(2,0,1,0),\\ \vec{a}_4=(1,2,2,1),\quad \vec{a}_5=(0,0,1,0).\end{array}\right.$

20) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,1,2),\quad \vec{a}_2=(1,-1,0,2),\quad \vec{a}_3=(0,2,1,0),\\ \vec{a}_4=(1,3,2,2),\quad \vec{a}_5=(2,1,1,2).\end{array}\right.$

21) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,0,2),\quad \vec{a}_2=(2,0,0,-3),\quad \vec{a}_3=(2,1,0,-1),\\ \vec{a}_4=(2,2,0,1),\quad \vec{a}_5=(2,2,1,1).\end{array}\right.$

22) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-1,0,1,1),\quad \vec{a}_2=(1,1,-2,0),\quad \vec{a}_3=(0,1,-1,1),\\ \vec{a}_4=(-1,1,0,2),\quad \vec{a}_5=(-3,1,2,4).\end{array}\right.$

23) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,-2),\quad \vec{a}_2=(0,1,-1,3),\quad \vec{a}_3=(1,2,-1,1),\\ \vec{a}_4=(0,1,-1,0),\quad \vec{a}_5=(1,3,-2,1).\end{array}\right.$

24) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,2,1),\quad \vec{a}_2=(2,-1,2,0),\quad \vec{a}_3=(-1,1,0,1),\\ \vec{a}_4=(-1,1,1,1),\quad \vec{a}_5=(0,1,2,2).\end{array}\right.$

25) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,2,0),\quad \vec{a}_2=(1,1,2,1),\quad \vec{a}_3=(1,2,3,1),\\ \vec{a}_4=(1,3,4,1),\quad \vec{a}_5=(1,0,1,1).\end{array}\right.$

4. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы уравнений.

1) $\begin{cases}3x_1+x_2-8x_3+x_4+x_5=0\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-x_5=0\end{cases}.$

2) $\begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0\\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0\\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0\end{cases}.$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.

6) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$.

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.

8) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$.

9) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

10) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

11) $$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}.$$

12) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

13) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

14) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

15) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

16) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

17) $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

18) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

19) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$

20) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}.$

21) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$

22) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}.$

23) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$

24) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0 \end{cases}.$

25) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}.$

5. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $f=(\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)$, если он задан в базисе $e=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$.

1) $$\begin{cases} \vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2=2\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ \vec{f}_1=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_2 \end{cases}, \quad \vec{x}=(6,-1,3).$$

2) $$\begin{cases} \vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+4\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2=\dfrac{4}{3}\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x}=(1,3,6).$$

3) $$\begin{cases} \vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2=\dfrac{3}{2}\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x}=(1,2,4).$$

4) $$\begin{cases} \vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\dfrac{3}{2}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2=3\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x}=(2,4,1).$$

5) $$\begin{cases} \vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\dfrac{4}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2=4\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3, \end{cases} \quad \vec{x}=(6,3,1).$$

6) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{5}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, 4, 8).$

7) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{6}{5}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (2, 5, 10).$

8) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{5}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (10, 5, 1).$

9) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{7}{6}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, 6, 12).$

10) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{7}{6}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (-12, 6, 1).$

11) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{8}{7}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (-1, 7, 14).$

12) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (-3, 2, 4).$

13) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{1}{2}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (2, 4, 3).$

14) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (2, 6, -3).$

15) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{2}{3}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (12, 3, -1).$

16) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{3}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, -4, 8).$

17) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{4}{5}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (7, -5, 10).$

18) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{4}{5}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (5, -5, -4).$

19) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{5}{6}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, -6, -6).$

20) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{5}{6}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (6, 6, 2).$

21) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{6}{7}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, 7, -7).$

22) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{7}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = -6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (7, 7, 2).$

23) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{7}{8}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (3, -8, 8).$

24) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 8\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{8}{9}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, -9, 9)$.

25) $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{3}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{cases}$ $\vec{x} = (1, -4, 8)$.

6. Записать систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов.

1) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, 2, 3)$.

2) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 4, 3, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 2, 0)$.

3) $\vec{a}_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 2, 2)$, $\vec{a}_3 = (-1, -1, 2, 1)$, $\vec{a}_4 = (3, 1, 2, 1)$.

4) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, -1, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0, 3)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 0, 2)$.

5) $\vec{a}_1 = (2, 1, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -2, -1)$.

6) $\vec{a}_1 = (-1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 4, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 1, -1)$.

7) $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 4, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 2, -1)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, 3, -1)$.

8) $\vec{a}_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

9) $\vec{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, -4, 3, 0)$, $\vec{a}_4 = (-1, -2, 3, 1)$.

10) $\vec{a}_1 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, -2, 3, 2)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 3, 1)$.

11) $\vec{a}_1 = (2, 3, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 0, 1)$.

12) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 4, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 3, 1, 0)$.

13) $\vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1)$.

14) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 2, 1)$.

15) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (0, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 2, 2)$.

16) $\vec{a}_1 = (0, 1, 0, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 0, -3)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_4 = (2, 2, 0, 1)$.

17) $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -2, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_4 = (-1, 1, 0, 2)$.

18) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, -2)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, -1, 0)$.

19) $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, -1, 2, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

20) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$.

21) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (2, 1, 3, 2)$.

22) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 2, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_4 = (2, 3, 0, 1)$.

23) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 2, 2, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_4 = (-1, 4, 3, 0)$.

24) $\vec{a}_1 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 3, 1)$.

25) $\vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1)$.

7. Даны две системы векторов. Найти размерности и базисы суммы и пересечения линейных оболочек этих систем.

1) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, 2, 3)$.

$\vec{b}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (-1, 4, 3, 0)$, $\vec{b}_4 = (0, 2, 2, 0)$.

2) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 4, 3, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 2, 0)$.

$\vec{b}_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, 2, 2)$, $\vec{b}_3 = (-1, -1, 2, 1)$, $\vec{b}_4 = (3, 1, 2, 1)$.

3) $\vec{a}_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 2, 2)$, $\vec{a}_3 = (-1, -1, 2, 1)$, $\vec{a}_4 = (3, 1, 2, 1)$.

$\vec{b}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{b}_2 = (3, 3, -1, 3)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 0, 3)$, $\vec{b}_4 = (1, -1, 0, 2)$.

4) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, -1, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0, 3)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 0, 2)$.

$\vec{b}_1 = (2, 1, -1, 0)$, $\vec{b}_2 = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_4 = (1, 0, -2, -1)$.

5) $\vec{a}_1 = (2, 1, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -2, -1)$.

$\vec{b}_1 = (-1, 0, 0, -1)$, $\vec{b}_2 = (1, 4, 2, -1)$, $\vec{b}_3 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (0, 2, 1, -1)$.

6) $\vec{a}_1 = (-1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 4, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 1, -1)$.

$\vec{b}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 4, -1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 2, -1)$, $\vec{b}_4 = (0, 1, 3, -1)$.

7) $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 4, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 2, -1)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, 3, -1)$

$\vec{b}_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

8) $\vec{a}_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

$\vec{b}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, -4, 3, 0)$, $\vec{b}_4 = (-1, -2, 3, 1)$.

9) $\vec{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, -4, 3, 0)$, $\vec{a}_4 = (-1, -2, 3, 1)$.

$\vec{b}_1 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 2, 3, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, -2, 3, 2)$, $\vec{b}_4 = (0, 0, 3, 1)$.

10) $\vec{a}_1 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, -2, 3, 2)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 3, 1)$.

$\vec{b}_1 = (2, 3, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{b}_4 = (1, 2, 0, 1)$.

11) $\vec{a}_1 = (2, 3, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 0, 1)$.

$\vec{b}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (1, 4, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (0, 3, 1, 0)$.

12) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 4, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 3, 1, 0)$.

$\vec{b}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{b}_3 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{b}_4 = (1, 3, 4, 1)$.

13) $\vec{a}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 4, 1)$.

$\vec{b}_1 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{b}_3 = (2, 0, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (1, 2, 2, 1)$.

14) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 2, 1)$.

$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{b}_2 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{b}_3 = (0, 2, 1, 0)$, $\vec{b}_4 = (1, 3, 2, 2)$.

15) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (0, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 2, 2)$.

$\vec{b}_1 = (0, 1, 0, 2)$, $\vec{b}_2 = (2, 0, 0, -3)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 0, -1)$, $\vec{b}_4 = (2, 2, 0, 1)$.

16) $\vec{a}_1 = (0, 1, 0, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 0, -3)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_4 = (2, 2, 0, 1)$.

$\vec{b}_1 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -2, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{b}_4 = (-1, 1, 0, 2)$.

17) $\vec{a}_1=(-1,0,1,1)$, $\vec{a}_2=(1,1,-2,0)$, $\vec{a}_3=(0,1,-1,1)$, $\vec{a}_4=(-1,1,0,2)$.

$\vec{b}_1=(1,1,0,-2)$, $\vec{b}_2=(0,1,-1,3)$, $\vec{b}_3=(1,2,-1,1)$, $\vec{b}_4=(0,1,-1,0)$.

18) $\vec{a}_1=(1,1,0,-2)$, $\vec{a}_2=(0,1,-1,3)$, $\vec{a}_3=(1,2,-1,1)$, $\vec{a}_4=(0,1,-1,0)$.

$\vec{b}_1=(1,0,2,1)$, $\vec{b}_2=(2,-1,2,0)$, $\vec{b}_3=(-1,1,0,1)$, $\vec{b}_4=(-1,1,1,1)$.

19) $\vec{a}_1=(1,0,2,1)$, $\vec{a}_2=(2,-1,2,0)$, $\vec{a}_3=(-1,1,0,1)$, $\vec{a}_4=(-1,1,1,1)$.

$\vec{b}_1=(1,0,0,-1)$, $\vec{b}_2=(2,1,1,0)$, $\vec{b}_3=(1,1,1,1)$, $\vec{b}_4=(1,2,3,4)$.

20) $\vec{a}_1=(1,0,0,-1)$, $\vec{a}_2=(2,1,1,0)$, $\vec{a}_3=(1,1,1,1)$, $\vec{a}_4=(1,2,3,4)$.

$\vec{b}_1=(1,0,0,1)$, $\vec{b}_2=(2,1,1,2)$, $\vec{b}_3=(1,1,1,1)$, $\vec{b}_4=(2,1,3,2)$.

21) $\vec{a}_1=(1,0,0,1)$, $\vec{a}_2=(2,1,1,2)$, $\vec{a}_3=(1,1,1,1)$, $\vec{a}_4=(2,1,3,2)$.

$\vec{b}_1=(1,1,0,0)$, $\vec{b}_2=(2,2,0,0)$, $\vec{b}_3=(1,2,0,1)$, $\vec{b}_4=(2,3,0,1)$.

22) $\vec{a}_1=(1,1,0,0)$, $\vec{a}_2=(2,2,0,0)$, $\vec{a}_3=(1,2,0,1)$, $\vec{a}_4=(2,3,0,1)$.

$\vec{b}_1=(1,0,1,0)$, $\vec{b}_2=(0,2,2,0)$, $\vec{b}_3=(-1,2,0,1)$, $\vec{b}_4=(-1,4,3,0)$.

23) $\vec{a}_1=(1,0,1,0)$, $\vec{a}_2=(0,2,2,0)$, $\vec{a}_3=(-1,2,0,1)$, $\vec{a}_4=(-1,4,3,0)$.

$\vec{b}_1=(0,1,1,0)$, $\vec{b}_2=(1,1,1,1)$, $\vec{b}_3=(1,0,0,1)$, $\vec{b}_4=(1,3,3,1)$.

24) $\vec{a}_1=(0,1,1,0)$, $\vec{a}_2=(1,1,1,1)$, $\vec{a}_3=(1,0,0,1)$, $\vec{a}_4=(1,3,3,1)$.

$\vec{b}_1=(0,1,2,0)$, $\vec{b}_2=(1,1,2,1)$, $\vec{b}_3=(1,2,3,1)$, $\vec{b}_4=(1,3,4,1)$.

25) $\vec{a}_1=(0,1,2,0)$, $\vec{a}_2=(1,1,2,1)$, $\vec{a}_3=(1,2,3,1)$, $\vec{a}_4=(1,3,4,1)$.

$\vec{b}_1=(1,1,0,0)$, $\vec{b}_2=(2,2,0,0)$, $\vec{b}_3=(1,2,0,1)$, $\vec{b}_4=(2,3,0,1)$.

8. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, заданных в базисе $f=(\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)$, если сами векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ заданы в некотором ортонормированном базисе *e*.

1) $\vec{f}_1=(1,0,1)$, $\vec{f}_2=(0,1,2)$, $\vec{f}_3=(2,1,4)$, $\vec{x}=(1,2,-3)$, $\vec{y}=(3,-2,1)$.

2) $\vec{f}_1 = (2,1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,3,0)$, $\vec{f}_3 = (0,5,1)$, $\vec{x} = (1,2,-3)$, $\vec{y} = (-3,2,1)$.

3) $\vec{f}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,3,-1)$, $\vec{f}_3 = (0,5,1)$, $\vec{x} = (-1,2,3)$, $\vec{y} = (3,-2,1)$.

4) $\vec{f}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,3,-1)$, $\vec{f}_3 = (0,5,1)$, $\vec{x} = (1,-2,3)$, $\vec{y} = (3,2,-1)$.

5) $\vec{f}_1 = (1,2,1,3)$, $\vec{f}_2 = (4,1,1,1)$, $f_3 = (3,1,1,0)$, $\vec{x} = (-2,1,1)$, $\vec{y} = (1,-2,1)$.

6) $\vec{f}_1 = (0,1,2)$, $\vec{f}_2 = (7,6,2)$, $\vec{f}_3 = (5,3,-1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$, $\vec{y} = (1,2,1)$.

7) $\vec{f}_1 = (-1,1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,-3,1)$, $\vec{f}_3 = (1,-1,6)$, $\vec{x} = (-2,1,1)$, $\vec{y} = (1,-2,1)$.

8) $\vec{f}_1 = (1,1,1)$, $\vec{f}_2 = (1,-1,3)$, $\vec{f}_3 = (0,2,1)$, $\vec{x} = (1,1,1)$, $\vec{y} = (2,-2,1)$.

9) $\vec{f}_1 = (-1,0,1)$, $\vec{f}_2 = (0,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (-2,1,4)$, $\vec{x} = (2,1,1)$, $\vec{y} = (1,2,1)$.

10) $\vec{f}_1 = (2,-1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,-3,0)$, $\vec{f}_3 = (0,-5,1)$, $\vec{x} = (2,1,-1)$, $\vec{y} = (1,2,2)$.

11) $\vec{f}_1 = (-1,-1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,-3,-1)$, $\vec{f}_3 = (0,5,-1)$, $\vec{x} = (-2,1,1)$, $\vec{y} = (1,1,1)$.

12) $\vec{f}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{f}_2 = (3,1,1)$, $\vec{f}_3 = (-2,0,-6)$, $\vec{x} = (2,2,1)$, $\vec{y} = (2,-2,1)$.

13) $\vec{f}_1 = (1,-2,1)$, $\vec{f}_2 = (4,\ -1,1)$, $\vec{f}_3 = (3,\ 1,0)$, $\vec{x} = (0,1,1)$, $\vec{y} = (1,0,1)$.

14) $\vec{f}_1 = (1,2,1)$, $\vec{f}_2 = (1,1,3)$, $\vec{f}_3 = (3,2,7)$, $\vec{x} = (2,0,1)$, $\vec{y} = (0,-2,1)$.

15) $\vec{f}_1 = (2,-1,-1)$, $\vec{f}_2 = (-4,3,3)$, $\vec{f}_3 = (1,-1,0)$, $\vec{x} = (2,4,1)$, $\vec{y} = (2,2,1)$.

16) $\vec{f}_1 = (0,1,-2)$, $\vec{f}_2 = (1,6,2)$, $\vec{f}_3 = (5,3,-1)$, $\vec{x} = (-2,1,1)$, $\vec{y} = (1,-2,1)$.

17) $\vec{f}_1 = (0,1,-2)$, $\vec{f}_2 = (1,-6,2)$, $\vec{f}_3 = (5,3,-1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$, $\vec{y} = (1,2,1)$.

18) $\vec{f}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{f}_2 = (1,-1,-3)$, $\vec{f}_3 = (0,2,-1)$, $\vec{x} = (2,1,-1)$, $\vec{y} = (1,2,3)$.

19) $\vec{f}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{f}_2 = (2,1,1)$, $\vec{f}_3 = (0,2,1)$, $\vec{x} = (-2,2,1)$, $\vec{y} = (2,-2,1)$.

20) $\vec{f}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,2,1)$, $\vec{f}_3 = (1,3,1)$, $\vec{x} = (-2,1,1)$, $\vec{y} = (1,2,1)$.

21) $\vec{f}_1 = (1,0,2)$, $\vec{f}_2 = (3,1,1)$, $\vec{f}_3 = (5,8,0)$, $\vec{x} = (2,1,1)$, $\vec{y} = (1,-2,1)$.

22) $\vec{f}_1 = (0,3,2)$, $\vec{f}_2 = (-1,6,4)$, $\vec{f}_3 = (2,1,5)$, $\vec{x} = (2,1,-1)$, $\vec{y} = (-1,2,1)$.

23) $\vec{f}_1 = (3,0,2)$, $\vec{f}_2 = (6,1,4)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,1,3)$, $\vec{y} = (-1,2,1)$.

24) $\vec{f}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{f}_2 = (3, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (-2, 0, -6)$, $\vec{x} = (-2, 1, 3)$, $\vec{y} = (3, -2, 1)$.

25) $\vec{f}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{f}_2 = (-4, 3, 3)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, 0)$, $\vec{x} = (2, 1, 21)$, $\vec{y} = (1, -2, 1)$.

9. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис линейной оболочки векторов.

1) $\vec{f}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, 1, 4)$.

2) $\vec{f}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, 3, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 5, 1)$.

3) $\vec{f}_1 = (-1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, 3, -1)$, $\vec{f}_3 = (0, 5, 1)$.

4) $\vec{f}_1 = (-1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, 3, -1)$, $\vec{f}_3 = (0, 5, 1)$.

5) $\vec{f}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{f}_2 = (4, 1, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (3, 1, 1, 0)$.

6) $\vec{f}_1 = (0, 1, 2)$, $\vec{f}_2 = (7, 6, 2)$, $\vec{f}_3 = (5, 3, -1)$.

7) $\vec{f}_1 = (-1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -3, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, 6)$.

8) $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, -1, 3)$, $\vec{f}_3 = (0, 2, 1)$.

9) $\vec{f}_1 = (-1, 0, 1)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, -2)$, $\vec{f}_3 = (-2, 1, 4)$.

10) $\vec{f}_1 = (2, -1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -3, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, -5, 1)$.

11) $\vec{f}_1 = (-1, -1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -3, -1)$, $\vec{f}_3 = (0, 5, -1)$.

12) $\vec{f}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{f}_2 = (3, -3, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (-2, 0, -6, 8)$.

13) $\vec{f}_1 = (1, -2, 1, -3)$, $\vec{f}_2 = (4, -1, -1, 1)$, $\vec{f}_3 = (3, -1, 1, 0)$.

14) $\vec{f}_1 = (1, 2, 2, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1, 5, 3)$, $\vec{f}_3 = (3, 2, 8, 7)$.

15) $\vec{f}_1 = (2, -1, 3, -1)$, $\vec{f}_2 = (7, -4, 3, 3)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, -6, 0)$.

16) $\vec{f}_1 = (0, 1, -2)$, $\vec{f}_2 = (1, -6, 2)$, $\vec{f}_3 = (-5, 3, -1)$.

17) $\vec{f}_1 = (0, 1, -2)$, $\vec{f}_2 = (1, -6, 2)$, $\vec{f}_3 = (-5, 3, -1)$.

18) $\vec{f}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{f}_2 = (1, -1, -3)$, $\vec{f}_3 = (0, 2, -1)$.

19) $\vec{f}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{f}_2 = (2, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (0, 2, 1)$.

20) $\vec{f}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, 3, 1)$.

21) $\vec{f}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{f}_2 = (3, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (5, 8, 0)$.

22) $\vec{f}_1 = (0, 3, 2)$, $\vec{f}_2 = (-1, 6, 4)$, $\vec{f}_3 = (2, 1, 5)$.

23) $\vec{f}_1 = (3, 0, 2)$, $\vec{f}_2 = (6, 1, 4)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

24) $\vec{f}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{f}_2 = (3, -3, 1, 1)$, $\vec{f}_3 = (-2, 0, -6, 8)$.

25) $\vec{f}_1 = (2, -1, 3, -1)$, $\vec{f}_2 = (7, -4, 3, 3)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, -6, 0)$.

10. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов заданных в некотором ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства E_4.

1) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (-1, 0, 0, -1),\ \vec{a}_2 = (1, 4, 2, -1),\ \vec{a}_3 = (1, 2, 1, 0), \\ \vec{a}_4 = (0, 2, 1, -1),\ \vec{a}_5 = (2, 2, 1, 1). \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0),\ \vec{a}_2 = (-1, 1, 4, -1),\ \vec{a}_3 = (1, 1, 2, -1), \\ \vec{a}_4 = (0, 1, 3, -1),\ \vec{a}_5 = (2, 0, -2, 0). \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (-2, 1, 0, 1),\ \vec{a}_2 = (-1, 0, 1, 1),\ \vec{a}_3 = (1, -1, 1, 0), \\ \vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1),\ \vec{a}_5 = (2, 0, -1, 0). \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (-1, 1, 0, 0),\ \vec{a}_2 = (0, -1, 1, 0),\ \vec{a}_3 = (1, -4, 3, 0), \\ \vec{a}_4 = (-1, -2, 3, 1),\ \vec{a}_5 = (-2, -1, 3, 1). \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (1, -2, 0, 1),\ \vec{a}_2 = (-1, 2, 3, 0),\ \vec{a}_3 = (1, -2, 3, 2), \\ \vec{a}_4 = (0, 0, 3, 1),\ \vec{a}_5 = (2, -4, -3, 1). \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, 3, 0, 1),\ \vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1),\ \vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0), \\ \vec{a}_4 = (1, 2, 0, 1),\ \vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3). \end{array}\right.$

7) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,0),\ \ \vec{a}_2=(1,4,1,0),\ \ \vec{a}_3=(-1,2,1,0),\\ \vec{a}_4=(0,3,1,0),\ \ \vec{a}_5=(2,-1,-1,0).\end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,2,0),\ \ \vec{a}_2=(1,1,2,1),\ \ \vec{a}_3=(1,2,3,1),\\ \vec{a}_4=(1,3,4,1),\ \ \vec{a}_5=(1,0,1,1).\end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,2,1,1),\ \ \vec{a}_2=(-1,2,0,1),\ \ \vec{a}_3=(2,0,1,0),\\ \vec{a}_4=(1,2,2,1),\ \ \vec{a}_5=(0,0,1,0).\end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,1,2),\ \ \vec{a}_2=(1,-1,0,2),\ \ \vec{a}_3=(0,2,1,0),\\ \vec{a}_4=(1,3,2,2),\ \ \vec{a}_5=(2,1,1,2).\end{array}\right.$

11) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(0,1,0,2),\ \ \vec{a}_2=(2,0,0,-3),\ \ \vec{a}_3=(2,1,0,-1),\\ \vec{a}_4=(2,2,0,1),\ \ \vec{a}_5=(2,2,1,1).\end{array}\right.$

12) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-1,0,1,1),\ \ \vec{a}_2=(1,1,-2,0),\ \ \vec{a}_3=(0,1,-1,1),\\ \vec{a}_4=(-1,1,0,2),\ \ \vec{a}_5=(-3,1,2,4).\end{array}\right.$

13) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,-2),\ \ \vec{a}_2=(0,1,-1,3),\ \ \vec{a}_3=(1,2,-1,1),\\ \vec{a}_4=(0,1,-1,0),\ \ \vec{a}_5=(1,3,-2,1).\end{array}\right.$

14) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,2,1),\ \ \vec{a}_2=(2,-1,2,0),\ \ \vec{a}_3=(-1,1,0,1),\\ \vec{a}_4=(-1,1,1,1),\ \ \vec{a}_5=(0,1,2,2).\end{array}\right.$

15) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,0,-1),\ \vec{a}_2=(2,1,1,0),\ \vec{a}_3=(1,1,1,1),\\ \vec{a}_4=(1,2,3,4),\ \ \vec{a}_5=(0,1,2,3).\end{array}\right.$

16) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,0,1),\ \ \vec{a}_2=(2,1,1,2),\ \ \vec{a}_3=(1,1,1,1),\\ \vec{a}_4=(2,1,3,2),\ \ \vec{a}_5=(3,1,3,3)\end{array}\right. .$

17) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1,0,0),\ \vec{a}_2=(2,2,0,0),\ \vec{a}_3=(1,2,0,1),\\ \vec{a}_4=(2,3,0,1),\ \ \vec{a}_5=(0,-1,0,-1).\end{array}\right.$

18) $\left[\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,0,1,0),\ \ \vec{a}_2=(0,2,2,0),\ \ \vec{a}_3=(-1,2,0,1),\\ \vec{a}_4=(-1,4,3,0),\ \ \ \vec{a}_5=(1,2,3,0).\end{array}\right.$

19) $\begin{cases} \vec{a}_1=(0,1,1,0),\ \vec{a}_2=(1,1,1,1),\ \vec{a}_3=(1,0,0,1), \\ \vec{a}_4=(1,3,3,1), \vec{a}_5=(2,3,3,2). \end{cases}$

20) $\begin{cases} \vec{a}_1=(1,1,1,1),\ \vec{a}_2=(2,1,1,0),\ \vec{a}_3=(1,2,3,4), \\ \vec{a}_4=(0,1,2,3),\ \vec{a}_5=(1,0,0,-1). \end{cases}$

21) $\begin{cases} \vec{a}_1=(1,2,3,0),\ \vec{a}_2=(-1,2,1,0),\ \vec{a}_3=(-1,4,3,0), \\ \vec{a}_4=(0,2,2,0),\ \vec{a}_5=(1,0,1,0) \end{cases}.$

22) $\begin{cases} \vec{a}_1=(2,1,0,1),\ \vec{a}_2=(1,0,2,2),\ \vec{a}_3=(-1,-1,2,1), \\ \vec{a}_4=(3,1,2,1),\ \vec{a}_5=(5,2,2,2). \end{cases}$

23) $\begin{cases} \vec{a}_1=(1,2,-1,0),\ \vec{a}_2=(3,3,-1,3),\ \vec{a}_3=(2,1,0,3), \\ \vec{a}_4=(1,-1,0,2),\ \vec{a}_5=(2,1,-1,2). \end{cases}$

24) $\begin{cases} \vec{a}_1=(2,1,-1,0),\ \vec{a}_2=(3,2,0,1),\ \vec{a}_3=(1,1,1,1), \\ \vec{a}_4=(1,0,-2,-1),\ \vec{a}_5=(0,-1,-3,-2). \end{cases}$

25) $\begin{cases} \vec{a}_1=(0,1,2,0),\ \vec{a}_2=(1,1,2,1),\ \vec{a}_3=(1,2,3,1), \\ \vec{a}_4=(1,3,4,1),\ \vec{a}_5=(1,0,1,1). \end{cases}$

9.2. Индивидуальное домашнее задание 2
ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования?

1) $\begin{cases} \varphi(\vec{x})=(6x_1-5x_2-4x_3,-3x_1-2x_2-x_3,x_2+2x_3); \\ \eta(\vec{x})=(6-5x_2-4x_3,3x_1-2x_2-x_3,x_2+2); \\ \mu(\vec{x})=(x_3^4,3x_1-2x_2-x_3,x_2+2x_3). \end{cases}$

2) $\begin{cases} \varphi(\vec{x})=(5x_1-4x_2-3x_3,2x_1-x_2,x_2+2); \\ \eta(\vec{x})=(5x_1-4x_2-3x_3,0,x_2^4+2x_3); \\ \mu(\vec{x})=(5x_1-4x_2-3x_3,2x_1-x_2-x_3,x_2+3x_3). \end{cases}$

3) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_1 + 2x_2 + 3). \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 - 4); \\ \mu(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2). \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6); \\ \eta(\vec{x}) = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1^2 - 5x_2 - 6x_3);. \\ \mu(\vec{x}) = (x_1, x_1 - 2x_2 - 3x_3, 4x_1 - 5x_2 - 6x_3) \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2^3 - 5x_3), \\ \eta(\vec{x}) = (2x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3), \\ \mu(\vec{x}) = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 3x_1 - 4x_2 - 5). \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2^2 + 3x_3); \ . \\ \mu(\vec{x}) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, x_3, \mathrm{x}_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, 1, x_1 + 2x_2^4 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, x_1 + 2x_2 + 3). \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 5x_1 + 5x_2 + 6x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (x_3, x_1 + 2x_2 + 4, 5x_1 + 5x_2 + 6); \\ \mu(\vec{x}) = (x_3, 0, 5x_1^3 + 5x_2 + 6x_3). \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (6x_1 + x_2, x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_1 + x_2, x_2 - 2, 0); \\ \mu(\vec{x}) = (6x_1 + x_2, x_2, 3x_1 - 4x_3^3). \end{cases}$$

11) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (5x_1 - 4x_2 - 4x_3,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2^2); \\ \eta(\vec{x}) = (5x_1 - 4x_2 - 4x_3,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2); \\ \mu(\vec{x}) = (5x_1 - 4x_2 - 4x_3,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3,\ 1). \end{cases}$$

12) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1^2, x_2 + 2x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3, x_1, x_2 + 2x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 2, x_2^2, x_2 + 2). \end{cases}$$

13) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_2 - 2x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + 1, 0, x_2 - 2); \\ \mu(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 0, x_2^2 - 2x_3). \end{cases}$$

14) $$\begin{cases} \xi(\vec{x}) = (2x_1 + x_2,\ x_3^2,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_1 + x_2,\ x_3,\ 2x_1 - 3x_2 - 4). \end{cases}$$

15) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_1, x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5), \\ \eta(\vec{x}) = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1^3 - 4x_2 - 5x_3);. \\ \mu(\vec{x}) = (x_1,\ x_2 - 2x_3,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3) \end{cases}$$

16) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_1, x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5); \\ \eta(\vec{x}) = (x_1,\ x_2 + 2x_3,\ 3x_1 + 4x_2 + 5); \quad . \\ \mu(\vec{x}) = (x_1,\ x_2 + 2x_3^2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3) \end{cases}$$

17) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (3x_1 - 2x_2 - 1, 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3, 0, 0); \\ \mu(\vec{x}) = (3x_1 - 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3) \end{cases}.$$

18) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2^2 - x_3, x_3, 2x_2 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, 0); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, x_3, 2x_2 + x_3). \end{cases}$$

19) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6); \\ \mu(\vec{x}) = (0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3). \end{cases}$$

20) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2^2 - x_3, 2x_2 + x_3, 2x_2 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, 2x_2 + x_3, 0); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - x_3, 2x_2 + x_3, 2x_2 + 3). \end{cases}$$

21) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2 - 3x_3, 1, x_1 - x_2^4 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - 3x_3, x_3, x_1 - x_2 + 3x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - 3x_3, x_3, x_1 - x_2 + 3). \end{cases}$$

22) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 0, x_2 + 2x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - 1, 0, x_2 + 2); \\ \mu(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 0, x_2^2 + 2x_3). \end{cases}$$

23) $$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_3^2, x_1 - x_2 - 4x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 - x_2 - 4x_3); \\ \mu(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 - x_2 - 4). \end{cases}$$

24) $\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (x_3, 2x_1 + 4x_3,\ 5x_2 + 6x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (x_3, x_1 + 2x_2 + 4,\ 5x_2 + 6); \\ \mu(\vec{x}) = (x_3,\ 0,\ 5x_1^3 + 5x_2). \end{cases}$

25) $\begin{cases} \varphi(\vec{x}) = (2x_2^2 - x_3, x_3,\ 2x_2 + 3x_3); \\ \eta(\vec{x}) = (2x_2 - x_3,\ x_3,\ 0); \\ \mu(\vec{x}) = (2x_2 - x_3,\ x_3,\ 2x_2 + x_3). \end{cases}$

2. Найти указанное преобразование.

1) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.
Найти $\varphi\eta(\vec{x})$.

2) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_2 + x_3, x_2, x_1 - x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_2, x_3, x_1)$.
Найти $\eta\varphi^2(\vec{x})$.

3) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1, x_3, x_1 + x_2)$, $\eta(\vec{x}) = (x_1, x_3, x_2)$.
Найти $(\varphi^2 - \eta)(\vec{x})$.

4) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_1)$, $\eta(\vec{x}) = (x_3, -2x_3, x_1)$.
Найти $(\eta^2 - 2\varphi)(\vec{x})$.

5) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_2, x_2 + x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_1, 2x_2, x_3)$.
Найти $(2\varphi + \eta^2)(\vec{x})$.

6) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_2, 2x_3, x_1 + x_2)$.
Найти $(2\varphi + 3\eta^2)(\vec{x})$.

7) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_2 - x_1, x_2, x_1 + x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_2, x_3, x_1)$.
Найти $(\varphi + \eta^2)(\vec{x})$.

8) Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_3, x_1, x_1 - x_3)$, $\eta(\vec{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.
Найти $(\eta\varphi)(\vec{x})$.

9) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $\eta(2\varphi-\eta)(\vec{x})$.

10) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1-x_3)$, $\eta(\vec{x})=(2x_2,x_3,x_1)$.
Найти $\varphi(-\varphi+2\eta)(\vec{x})$.

11) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $\varphi\eta(\vec{x})$.

12) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2+x_3,x_2,x_1-x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,x_3,x_1)$.
Найти $\eta\varphi^2(\vec{x})$.

13) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1,x_3,x_1+x_2)$, $\eta(\vec{x})=(x_1,x_3,x_2)$.
Найти $(\varphi^2-\eta)(\vec{x})$.

14) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1+x_2,x_1)$, $\eta(\vec{x})=(x_3,-2x_3,x_1)$.
Найти $(\eta^2-2\varphi)(\vec{x})$.

15) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_2,x_2+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_1,2x_2,x_3)$.
Найти $(2\varphi+\eta^2)(\vec{x})$.

16) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $(2\varphi+3\eta^2)(\vec{x})$.

17) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $(\varphi+\eta^2)(\vec{x})$.

18) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $(\eta\varphi)(\vec{x})$.

19) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $\eta(2\varphi-\eta)(\vec{x})$.

20) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.
Найти $\varphi(-\varphi+2\eta)(\vec{x})$.

21) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1+x_2)$.

Найти $(2\varphi+3\eta^2)(\vec{x})$.

22) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_1,x_2,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,x_3,x_1)$.

Найти $(\varphi+\eta^2)(\vec{x})$.

23) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1+x_3,x_1,x_1-x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.

Найти $(\eta\varphi)(\vec{x})$.

24) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $\eta(\vec{x})=(x_2,2x_3,x_1)$.

Найти $\eta(2\varphi-\eta)(\vec{x})$.

25) Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3,x_1,x_1-x_3)$, $\eta(\vec{x})=(2x_2,x_3,x_1)$.

Найти $\varphi(-\varphi+2\eta)(\vec{x})$.

3. Определить ранг и дефект линейного оператора, а также найти базисы образа и ядра.

1) $\varphi(\vec{x})=(2x_1-x_2-x_3;x_1-2x_2+x_3;x_1+x_2-2x_3)$.

2) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(-1,1,-2)$

3) $\varphi(\vec{x})=(x_1-2x_2+x_3;x_1+x_2+x_3;2x_1-x_2+2x_3)$.

4) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(1,3,2)$

5) $\varphi(\vec{x})=(x_1+x_2+x_3;x_1+x_2+x_3;x_1+x_2+x_3)$.

6) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(-2,1,3)$.

7) $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_2;x_1-2x_2+x_3;2x_1-3x_2+x_3)$.

8) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(1,1,1)$

9) $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_2-x_3;x_1-x_2-x_3;x_1-x_2-x_3)$.

10) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(-1,-1,2)$

11) $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_3;2x_1-x_2;3x_1-x_2-x_3)$.

12) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x}$, $\vec{a}=(1,2,-2)$

13) $\varphi(\vec{x})=(x_1+x_2-x_3\,;x_1+x_2-x_3\,;x_1+x_2-x_3\,)$.

14) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(-2,1,2)$

15) $\varphi(\vec{x})=(x_2+x_3\,;x_1+x_2\,;x_1-x_3\,)$.

16) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(2,1,2)$

17) $\varphi(\vec{x})=(x_1-x_2\,;2x_1+x_3\,;4x_1-2x_2+x_3\,)$.

18) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(1,-1,2)$

19) $\varphi(\vec{x})=(-x_1+x_2+x_3\,;\text{-}x_1+x_2+x_3\,;\text{-}x_1+x_2+x_3\,)$.

20) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(2,-1,-1)$.

21) $\varphi(\vec{x})=(2x_1-x_2-x_3\,;x_1-2x_2+x_3\,;x_1+x_2-2x_3\,)$.

22) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(-1,1,-2)$

23) $\varphi(\vec{x})=(x_1-2x_2+x_3\,;x_1+x_2+x_3\,;2x_1-x_2+2x_3\,)$.

24) $\varphi(\vec{x})=\vec{a}\times\vec{x},\ \vec{a}=(1,3,2)$

25) $\varphi(\vec{x})=(x_1+x_2+x_3\,;x_1+x_2+x_3\,;x_1+x_2+x_3\,)$.

4. Найти матрицу линейного преобразования φ в базисе $f=(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$, если она задана в базисе $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1) $\vec{f}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{f}_2=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3,\vec{f}_3=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$,

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$

2) $\vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{f}_2=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3,\ \vec{f}_3=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$,

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&4\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

3) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4) $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

12) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14) $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

15) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

19) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

20) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

21) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

22) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

24) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

25) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

5. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора

1) Проектирования на ось Ox.
2) Проектирования на плоскость z = 0.
3) Проектирования на ось Oz.
4) Зеркального отражения относительно плоскости Oyz.
5) Проектирования на ось Oy.
6) Проектирования на плоскость y = 0.
7) Зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$.
8) Зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$.
9) Проектирования на плоскость $y - z = 0$.
10) Проектирования на плоскость $y = x\sqrt{3}$.
11) Проектирования на плоскость x = 0.
12) Зеркального отражения относительно плоскости Oxz.
13) Зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$.
14) Зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$.

15) Проектирования на плоскость $y + z = 0$.

16) Проектирования на плоскость $y = z\sqrt{3}$.

17) Проектирования на плоскость x + y = 0.

18) Зеркального отражения относительно плоскости Oxy.

19) Зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.

20) Зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$.

21) Проектирования на плоскость $x + z = 0$.

22) Проектирования на плоскость $x = z\sqrt{3}$.

23) Зеркального отражения относительно плоскости $y + 2z = 0$.

24) Проектирования на плоскость $2x + z = 0$.

25) Проектирования на плоскость $y = x\sqrt{3}$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ, заданного в некотором базисе матрицей A_φ.

1) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 3) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 5) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 6) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 8) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 9) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 11) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 12) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

13) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 14) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 15) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

16) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 17) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 18) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

19) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 20) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 21) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

22) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 23) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 24) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

25) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

9.3. Индивидуальное домашнее задание3
БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду: а) методом Якоби, б) методом Лагранжа. Найти канонический базис и матрицу перехода к каноническому базису.

1) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

2) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

3) $k(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

4) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

5) $k(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

6) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

7) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

8) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

9) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

10) $k(\vec{x}) = 8x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

11) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

12) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3$.

13) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

14) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

15) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3$.

16) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

17) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

18) $k(\vec{x}) = 8x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

19) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

20) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

21) $k(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

22) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

23) $k(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.

24) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

25) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Найти это преобразование, канонический базис, матрицу перехода к каноническому базису, убедиться, что в этом базисе матрица квадратичной формы является диагональной.

1) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

2) $k(\vec{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.

3) $k(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

4) $k(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

5) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

6) $k(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

7) $k(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

8) $k(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8\sqrt{2}x_2x_3$.

9) $k(\vec{x}) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

10) $k(\vec{x}) = -x_1^2 + 10x_2^2 - x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

11) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

12) $k(\vec{x}) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

13) $k(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

14) $k(\vec{x}) = -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

15) $k(\vec{x}) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

16) $k(\vec{x}) = 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$

17) $k(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$

18) $k(\vec{x}) = 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3.$

19) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

20) $k(\vec{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

21) $k(\vec{x}) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3.$

22) $k(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3.$

23) $k(\vec{x}) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

24) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$

25) $k(\vec{x}) = 5\sqrt{2}x_1^2 + 5\sqrt{2}x_2^2 + 6\sqrt{2}x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3. Используя теорию квадратичных форм, исследовать кривую второго порядка заданную общим уравнением и построить ее.

1) $4xy + 4x - 4y - 2 = 0.$

2) $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0.$

3) $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0.$

4) $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0.$

5) $2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$

6) $4xy+4x+4y+1=0.$

7) $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0.$

8) $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0.$

9) $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

10) $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$

11) $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$

12) $-4xy-4x+4y+6=0.$

13) $-4xy-4x+4y+6=0.$

14) $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$

15) $-3x^2-2y^2+4xy-6x+4y+2=0.$

16) $-2xy-2x-2y+1=0.$

17) $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$

18) $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$

19) $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$

20) $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0.$

21) $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0.$

22) $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0.$

23) $-4x^2-4y^2+2xy+10x+10y+1=0.$

24) $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$

25) $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

10. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1) Определение линейного пространства. Простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость векторов. Теоремы о линейной зависимости.

2) Базис линейного пространства. Координаты вектора. Размерность пространства. Теоремы о базисе линейного пространства. Переход к новому базису.

3) Определение линейного подпространства. Базис подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Размерность суммы подпространств. Прямое дополнение подпространства.

4) Определение евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Линейная независимость ортонормированной системы векторов.

5) Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Метод ортогонализации.

6) Выражение скалярного произведения векторов через координаты сомножителей. Матрица Грама. Изменение матрицы Грама при переходе к новому базису. Положительность определителя матрицы Грама.

7) Теорема о линейной зависимости системы векторов с нулевым определителем матрицы Грама. Ортогональное дополнение подпространства.

8) Определение линейного отображения пространства. Размерность образа линейного пространства. Ранг и ядро линейного отображения.

9) Координатная запись линейного отображения. Утверждение о ранге линейного отображения. Преобразование матрицы линейного отображения при переходе к новым базисам.

10) Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Инвариантность характеристического многочлена. Линейная не-

зависимость собственных векторов, соответствующих разным собственным числам.

11) Преобразование евклидовых пространств. Свойство собственных чисел самосопряженного преобразования. Свойство собственных векторов самосопряженного преобразования.

12) Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Линейность ортогонального преобразования. Матрица ортогонального преобразования.

13) Билинейные формы. Матрица билинейной формы. Изменение матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. Ранг билинейной формы.

14) Квадратичные формы, Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью треугольного преобразования (метод Якоби).

15) Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

16) Классификация квадратичных форм. Закон инерции квадратичных форм.

17) Классификация квадратичных форм. Признаки знакоопределённости и знакопеременности квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 4-е изд. – М. : Наука, 1980.

3. Бугров, Я. С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980.

4. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967.

5. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые её приложения / Л. И. Головина. – М. : Наука, 1985.

6. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1984.

7. Канатников, А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

8. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975.

9. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – 5-е изд. – М. : Наука, 1974.

10. Сборник задач по математике для втузов: Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986.

11. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра (Теория и прикладные аспекты) / Г. С. Шевцов. –М. : Финансы и статистика, 2003.

12. Шикин, Е. В. Линейные пространства и отображения / Е. В. Шикин. – М. : МГУ, 1987.