Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

**И. Н. Каталажнова**

# ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Утверждено в качестве учебно-методического пособия
Учёным советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2015

УДК 517.5(07)
ББК 22.161.54я7
К29

***Рецензенты:***

Кафедра математики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», заведующий кафедрой кандидат технических наук ***А. М. Севастьянов***;
***А. Н. Анисимов***, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности, информационных систем и физики ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет»

**Каталажнова, И. Н.**

К29 Функции одной переменной : учеб.-метод. пособие / И. Н. Каталажнова. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. – 235 с.

ISBN 978-5-7765-1183-7

Рассматриваются следующие темы: производная и дифференциал функции *n*-го порядка; задачи, связанные с геометрическим и механическим смыслом производной; приближенное вычисление значения функции; вычисление пределов по правилу Лопиталя; полное исследование функции и построение ее графика; практические задачи на экстремум. Каждый раздел содержит краткое изложение теоретических основ и методические указания по решению типовых задач. Предложены задания для самостоятельного решения, тест для самоконтроля и справочные материалы в приложениях, содержащие необходимые формулы и табличные данные.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерных специальностей очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Математика», стремящихся самостоятельно научиться решать задачи по данному курсу.

УДК 517.5(07)
ББК 22.161.54я7

ISBN 978-5-7765-1183-7

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие составлено на основе личного опыта проведения практических занятий по математике. В частности, оно предназначено для студентов следующих технических специальностей очной и заочной форм обучения: 13.03.01 – «Теплоэнергетика и теплотехника», 6.05.03 – «Строительство, ремонт и поисково-спасательное обеспечение надводных кораблей и подводных лодок», 6.03.02 – «Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры», 4.05.07 – «Самолёто- и вертолётостроение», 70800.62 – «Промышленное строительство»; 51900.62 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

Целью настоящего пособия является формирование у студентов навыков решения практических задач без помощи преподавателя, особенно у студентов заочной формы обучения.

В пособии рассматриваются такие понятия, как:

– определение и существование производной;

– производная и дифференциал функции $n$-го порядка;

– геометрический и механический смысл производной и связанные с ними задачи;

– раскрытие неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$ при вычислении пределов с применением правила Лопиталя;

– полное исследование функции и построение ее графика;

– практические задачи на экстремум.

В начале каждого раздела приводятся основные теоретические сведения, методические указания для решения типовых задач, подробные решения и (при необходимости) графические иллюстрации.

В пособие включены практические задания, снабжённые указаниями, формулами, теоремами и чертежами, необходимыми для их решения.

В раздел задач для самостоятельного решения включены задачи по всем разделам с ответами.

Для проверки усвоения изложенного материала предложен тест с ответами.

Данное учебно-методическое пособие будет полезно студентам инженерных специальностей в объеме действующих программ ФГОС ВПО по дисциплине «Математика».

# 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Понятие производной функции является одним из основных в математическом анализе.

Рассмотрим понятия «приращение аргумента» и «приращение функции», лежащие в основе определения производной функции в точке.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$.

Пусть $x_0$ – некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ – соответствующее значение функции. Перейдем от значения аргумента $x_0$ к другому значению – $x$. Разность значений $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** и обозначается $\Delta x$. В общем случае $\Delta x \neq 0$.

При $x = x_0 + \Delta x$ соответствующее значение функции равно $f(x_0 + \Delta x)$, тогда разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** в точке $x_0$ и обозначается $\Delta y$.

Таким образом, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

В зависимости от вида функции ее приращение $\Delta y$ может быть положительным, отрицательным или равняться нулю (так же, как и приращение аргумента $\Delta x$). На рис. 1.1 приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ положительные.

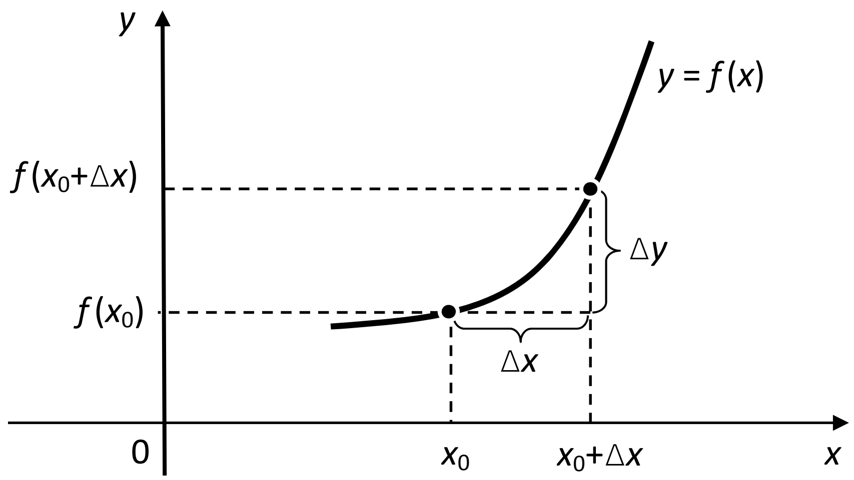



Рис. 1.1. Визуализация приращения аргумента и приращения функции

Непрерывность функции в точке – важное понятие математического анализа, его часто формулируют с помощью понятий «приращение аргумента» $\Delta x$ и «приращение функции» $\Delta y$.

Функция называется непрерывной в точке $x$, если бесконечно малому приращению аргумента $(\Delta x \to 0)$ соответствует бесконечно малое приращение функции $(\Delta y \to 0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Зададим аргументу $x_0$ приращение $\Delta x$, предполагая, что точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

**Определение**

***Производной функции*** $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$ при стремлении последнего к нулю ($\Delta x \to 0$).

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x$ может обозначаться несколькими символами: $y'$, $y'_x$, $f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

**Примечание.** Символы $y'$ и $f'(x)$ читаются как «игрек штрих» и «эф штрих от икс» соответственно, введены французским математиком и механиком Ж. Л. Лагранжем (1736 – 1813) в 1797 г. Символы $\dfrac{dy}{dx}$ *и* $\dfrac{df}{dx}$ читаются как «де игрек по де икс» и «де эф по де икс» соответственно, введены немецким математиком Г. В. Лейбницем (1646 – 1718) в 1675 г.

Итак, по определению производной имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y = f(x)$ в точке, например $x = x_0$, обозначается как $y'(x_0)$, $y'\big|_{x=x0}$, $f'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производная функции в точке есть число. Рассматривая производную функции в различных точках, можно получить различные ее значения, т.к. производная зависит от значения $x$, а не от $\Delta x$.

**Вычисление производной функции в точке**

Рассмотрим алгоритм вычисления производной функции в точке $x = x_0$.

Аргументу $x_0$ задается произвольное приращение $\Delta x$ и вычисляется приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. При этом значение аргумента $x_0 + \Delta x$ должно входить в область определения функции, в противном случае $\Delta x$ необходимо уменьшить.

Составляется отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и вычисляется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}.$$

Величина предела, если он существует и конечен, и есть значение искомой производной функции.

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Если предел конечен, то функция $y = f\left(x\right)$ называется дифференцируемой в точке $x_0$.

Рассмотрим примеры вычисления производной функции на основе определения производной.

**ПРИМЕР 1.1.**

Найти производную постоянной функции $y = C$.

РЕШЕНИЕ

Так как значение функции не изменяется и всегда равно числу *C*, то для любого аргумента $x$ или $x + \Delta x$ будут справедливы равенства (рис. 1.2)

$$f\left(x\right) = C \text{ и } f\,(x + \Delta x) = C.$$

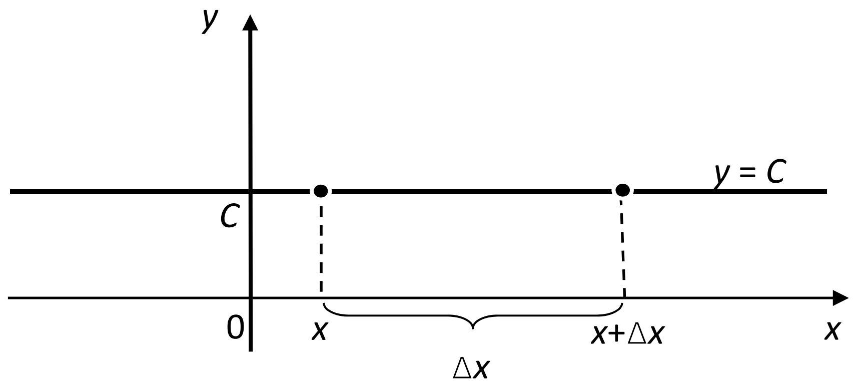



Рис. 1.2. График постоянной функции *y* = *C*

Тогда приращение функции равно

$$\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f\,(x) = C - C = 0,$$

следовательно, производная равна

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, $y' = C' = 0$.

ОТВЕТ

$C' = 0$ ■

**ПРИМЕР 1.2.**

Найти производную функции $y = x$.

РЕШЕНИЕ

Зададим $x$ приращение $\Delta x$.

Запишем два значения функции: $f(x) = x$ и $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, тогда приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$.

Производная функции, согласно определению, равна

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Таким образом, $y' = x' = 1$.

ОТВЕТ

$x' = 1$ ■

**ПРИМЕР 1.3.**

Найти производную функции $y = x^n$, где $n$ – натуральное число.

РЕШЕНИЕ

Зададим $x$ приращение $\Delta x$.

Запишем два значения функции: $f(x) = x^n$ и $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$, тогда приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$.

Производная функции, согласно определению, равна

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x},$$

где

$$(x + \Delta x)^n - x^n = \cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - \cancel{x^n} =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n x^{n-1} \Delta x + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = n x^{n-1}.$$

Таким образом, $y' = \left(x^n\right)' = n x^{n-1}$.

ОТВЕТ

$\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$ ■

**ПРИМЕР 1.4.**

Найти производную функции $y = \cos x$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Аргументу $x$ зададим приращение $\Delta x$.

Запишем два значения функции: $f(x) = \cos x$ и $f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x)$, тогда приращение функции равно

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x =$$

$$= -2 \sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) =$$

$$= -2 \sin\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

**Примечание.** Применена формула тригонометрического тождества разности косинусов (приложение 2).

***Шаг 2.*** Вычислим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + \dfrac{0}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{0}{2}\right)}{0} = -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin 0}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Раскроем ее, выделив первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$.

В результате получим

$$-2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}\cdot 2}=\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=1\right\}=-\cancel{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cdot 1}{\cancel{2}}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin x=-\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)'=-\sin x$.

ОТВЕТ

$(\cos x)'=-\sin x$ ■

**ПРИМЕР 1.5.**

Вычислить значение производной функции $y=x^2+3x-1$ в точке $x=2$, используя определение производной.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Аргументу $x=2$ зададим приращение $\Delta x$ и вычислим соответствующее приращение $\Delta y$:

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)-1-\left(2^2+3\cdot 2-1\right)=$$

$$=4+2\cdot 2\cdot\Delta x+\Delta x^2+3\cdot 2+3\cdot\Delta x-1-(4+6-1)=$$

$$=4+4\Delta x+\Delta x^2+6+3\Delta x-1-9=\Delta x^2+7\Delta x.$$

***Шаг 2.*** Вычислим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+7\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x+7)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+7)=0+7=7.$$

ОТВЕТ

$y'(2)=7$ ■

## 2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Решение примеров по нахождению производной значительно упрощается, если использовать общие правила дифференцирования, связанные с арифметическими действиями над функциями. Далее рассмотрим эти правила.

Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и $w = w(x)$ дифференцируемы в точке $x = x_0$, тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1) ***постоянный множитель*** можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot u)' = C \cdot u';$$

2) ***производная алгебраической суммы (разности) функций*** равна алгебраической сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

3) ***производная произведения нескольких дифференцируемых функций*** равна сумме произведений производных каждой из них на все остальные функции:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u,$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + v'uw + w'uv \text{ и т.д;}$$

4) ***производная частного двух дифференцируемых функций*** выражается формулой

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

где $v(x) \neq 0$.

**Дифференцирование основных элементарных функций**

Вычисление производных с использованием определения производной – достаточно трудоемкая задача, поэтому на основании определения производной составлена таблица производных основных элементарных функций (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Производные основных элементарных функций

| Элементарные функции | Производные |
|---|---|
| Константа $C = \text{const}$ | 1. $C' = 0$ |
| Независимая переменная $x$ функции $y = f(x)$ | 2. $x' = 1$ |
| Степенная функция $y = x^n$ | 3. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ |
| Показательные функции:<br>$y = a^x$,<br>$y = e^x$ | 4. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0, a \neq 1$<br>5. $\left(e^x\right)' = e^x$ |
| Логарифмические функции:<br>$y = \log_a x$,<br>$y = \ln x$ | 6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0, a \neq 1$<br>7. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ |
| Тригонометрические функции:<br>$y = \sin x$,<br>$y = \cos x$,<br>$y = \operatorname{tg} x$,<br>$y = \operatorname{ctg} x$ | 8. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,<br>9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,<br>10. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,<br>11. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| Обратные тригонометрические функции:<br>$y = \arcsin x$,<br>$y = \arccos x$,<br>$y = \operatorname{arctg} x$,<br>$y = \operatorname{arcctg} x$ | 12. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,<br>13. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,<br>14. $\left(\operatorname{arctgx}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,<br>15. $\left(\operatorname{arcctgx}\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |

***Указание:*** <u>для успешного освоения материала производные основных элементарных функций необходимо знать наизусть (см. табл. 2.1)</u>.

Рассмотрим примеры нахождения производной функции с помощью правил дифференцирования и таблицы производных (см. табл. 2.1).

**ПРИМЕР 2.1.**

Найти производную функции $y = 15x^2 - 4\sqrt[3]{x} + 3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Применим правило дифференцирования 2 для производной алгебраической суммы и разности функций:

$$y' = \left(15x^2 - 4\sqrt[3]{x} + 3\right)' = \left(15x^2\right)' - \left(4\sqrt[3]{x}\right)' + \left(3\right)'.$$

***Шаг 2.*** Целесообразно преобразовать выражение $\sqrt[3]{x}$, применив свойство степени $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (приложение 3). В данном примере $m = 1, n = 3$, получаем $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Применим правило дифференцирования 1, вынесем константы за знак производной, получим

$$y' = 15\left(x^2\right)' - 4\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 0,$$

$$y' = 15 \cdot 2\, x^{2-1} - 4 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = 30\, x - \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} = 30\, x - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

ОТВЕТ

$y' = 30\, x - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ■

**ПРИМЕР 2.2.**

Найти производную функции $y = \dfrac{2}{15x^3}$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Целесообразно преобразовать выражение, применив свойство степени $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ (приложение 3), получим $y = \dfrac{2}{15x^3} = \dfrac{2}{15} x^{-3}$.

***Шаг 2.*** Вынесем константу за знак производной и применим выражение для производной степенной функции (см. табл. 2.1):

$$y' = \left(\frac{2}{15} x^{-3}\right)' = \frac{2}{15}\left(x^{-3}\right)' = \frac{2}{15} \cdot (-3) x^{-3-1} = -\frac{2}{5} x^{-4} = -\frac{2}{5\, x^4}.$$

ОТВЕТ

$y' = -\dfrac{2}{5\,x^4}$ ■

**ПРИМЕР 2.3.**

Найти производную функции $y = 3^x \cdot \cos x$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Применим правило дифференцирования 3 для производной произведения:

$$y' = \left(3^x \cdot \cos x\right)' = \left(3^x\right)'(\cos x) + \left(3^x\right)\cdot(\cos x)'.$$

***Шаг 2.*** Применим выражения для производных показательной и тригонометрической функций (см. табл. 2.1):

$$y' = \left(3^x \cdot \ln 3\right)(\cos x) + \left(3^x\right)(-\sin x) =$$

$$= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos x - 3^x \sin x = 3^x\left(\ln 3 \cdot \cos x - \sin x\right).$$

ОТВЕТ

$y' = 3^x\left(\ln 3 \cdot \cos x - \sin x\right)$ ■

**ПРИМЕР 2.4.**

Найти производную функции $y = \dfrac{2x^5 - 5x^3}{4x+1}$.

РЕШЕНИЕ

Функция задана в виде дроби, поэтому применим правило дифференцирования 4 для производной частного двух функций:

$$y' = \frac{\left(2x^5 - 5x^3\right)' \cdot (4x+1) - (4x+1)' \cdot \left(2x^5 - 5x^3\right)}{(4x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(2x^5\right)' - \left(5x^3\right)'\right) \cdot (4x+1) - \left((4x)' + 1'\right) \cdot \left(2x^5 - 5x^3\right)}{(4x+1)^2} =$$

$$= \frac{\left(2 \cdot 5x^{5-1} - 5 \cdot 3x^{3-1}\right) \cdot (4x+1) - (4 \cdot 1 + 0) \cdot \left(2x^5 - 5x^3\right)}{(4x+1)^2} =$$

$$=\frac{\left(10x^4-15x^2\right)\cdot(4x+1)-4\left(2x^5-5x^3\right)}{(4x+1)^2}=$$

$$=\frac{40x^5-60x^3+10x^4-15x^2-8x^5+20x^3}{(4x+1)^2}=$$

$$=\frac{32x^5+10x^4-40x^3-15x^2}{(4x+1)^2}=\frac{x^2\left(32x^3+10x^2-40x-15\right)}{(4x+1)^2}.$$

ОТВЕТ

$$y'=\frac{x^2\left(32x^3+10x^2-40x-15\right)}{\left(4x+1\right)^2}$$ ■

**ПРИМЕР 2.5.**

Вычислить значение производной функции $y=\dfrac{3x^7+2x-3}{e^x+1}$ в точке $x=0$.

РЕШЕНИЕ

Найдем производную функции:

$$y'=\left(\frac{3x^7+2x-3}{e^x+1}\right)'=\frac{\left(3x^7+2x-3\right)'\cdot\left(e^x+1\right)-\left(3x^7+2x-3\right)\cdot\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(3x^7\right)'+(2x)'-3'\right)\cdot\left(e^x+1\right)-\left(3x^7+2x-3\right)\cdot\left(\left(e^x\right)'+1'\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\cdot 7x^{7-1}+2\cdot 1-0\right)\cdot\left(e^x+1\right)-\left(3x^7+2x-3\right)\cdot\left(e^x+0\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(21x^6+2\right)\cdot\left(e^x+1\right)-\left(3x^7+2x-3\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

Вычислим значение производной в точке $x=0$:

$$y'(0)=\frac{\left(21\cdot 0^6+2\right)\cdot\left(e^0+1\right)-\left(3\cdot 0^7+2\cdot 0-3\right)\cdot e^0}{\left(e^0+1\right)^2}=$$

$$= \frac{(0+2)\cdot(1+1)-(0+0-3)\cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{2\cdot 2-(-3)\cdot 1}{(2)^2} = \frac{4-(-3)}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}.$$

ОТВЕТ

$y'(0) = \frac{7}{4}$ ■

## 3. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Не все функции в указанных точках имеют производные, поэтому рассмотрим необходимое и достаточное условия существования производной.

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции является ее непрерывность в указанной точке $x = x_0$.

Пределы $\lim\limits_{\Delta x \to x_0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to x_0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называются ***правосторонней*** и ***левосторонней производной*** соответственно (или односторонними производными) функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначаются следующим образом:

1) $f'_+(x_0)$ – правосторонняя производная;

2) $f'_-(x_0)$ – левосторонняя производная.

Если пределы конечны и не равны между собой, т.е. $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, то для графика функции в точке $x = x_0$ существуют две касательные: правосторонняя и левосторонняя (рис. 3.1).

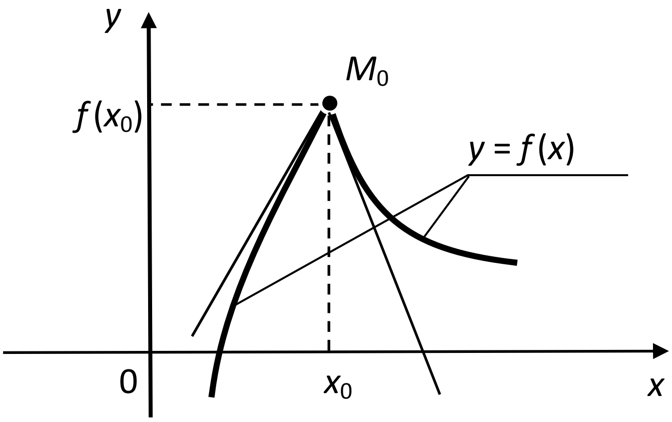



Рис. 3.1. Правосторонняя и левосторонняя касательные к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$

***Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции*** в точке $x = x_0$ является равенство $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Если предел $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то говорят, что в точке $x = x_0$ функция имеет бесконечную производную. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ перпендикулярна оси $0X$ (рис. 3.2).

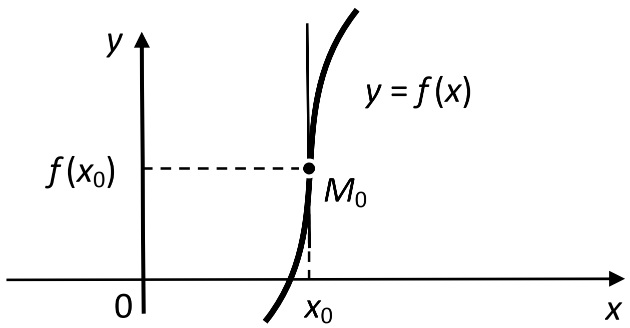



Рис. 3.2. Бесконечная производная: $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$

Если пределы $\lim\limits_{\Delta x \to x_0+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to x_0-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (или один из них) равны $+\infty$ или $-\infty$, то они называются бесконечными односторонними производными.

**Примечание.** Наличие различных по знаку односторонних бесконечных производных означает существование единственной вертикальной касательной; график функции имеет острие, направленное вверх или вниз (рис. 3.3).

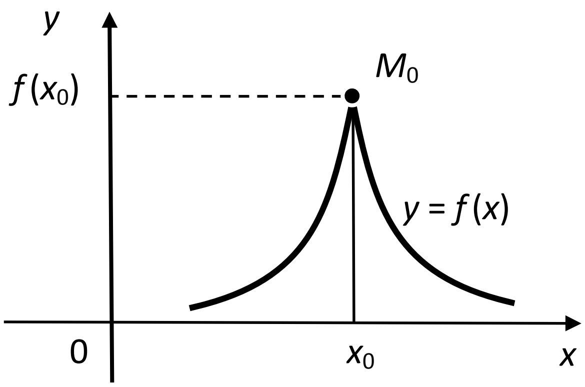
**ПРИМЕР 3.1.**

Исследовать дифференцируемость функции и определить угол наклона касательной к оси $0X$ в точке $x = 0$, если $y = \begin{cases} x^2, & x \ge 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Функция составная, поэтому исследование на дифференцируемость проведем с помощью вычисления односторонних производных слева и справа от точки сопряжения $x = 0$.

а)




б)

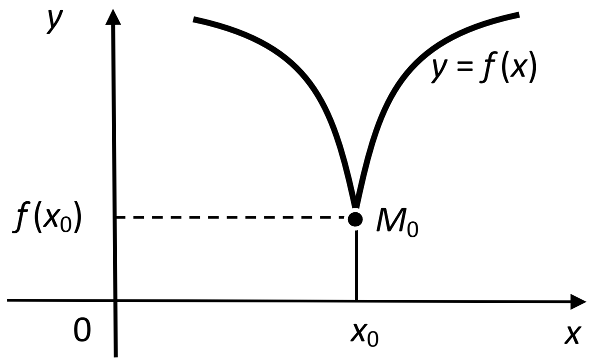



Рис. 3.3. Бесконечные производные функции в точке $\boldsymbol{x = x_0}$.
Касательные к графику в точке перпендикулярны оси $0X$:
а – $\boldsymbol{f'_-(x_0) = +\infty}$ и $\boldsymbol{f'_+(x_0) = -\infty}$ – острие вверх;
б – $\boldsymbol{f'_-(x_0) = -\infty}$ и $\boldsymbol{f'_+(x_0) = +\infty}$ – острие вниз

***Шаг 1.*** Вычислим односторонние производные

$$f'_+(0) = \left(x^2\right)'\Big|_{x=0} = 2x\big|_{x=0} = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$f'_-(0) = \left(x^3\right)'\Big|_{x=0} = 3x^2\Big|_{x=0} = 3 \cdot 0^2 = 0.$$

***Вывод:*** $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, следовательно, функция в точке $x = 0$ дифференцируема.

***Шаг 2.*** Определим угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке $x = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = f'_x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}0 = 0.$$

***Вывод:*** касательная в точке $x = 0$ параллельна оси $0X$ и, более того, совпадает с осью $0X$ (рис. 3.4).

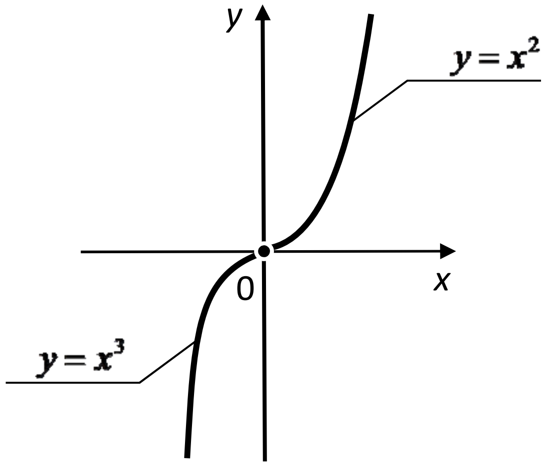



Рис. 3.4. Касательная к графику функции $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$

в точке $x$ = 0 совпадает с осью 0$X$

ОТВЕТ

Функция в точке $x = 0$ дифференцируема; касательная, проведенная к графику функции в этой точке, совпадает с осью $0X$. ■

**ПРИМЕР 3.2.**

Исследовать дифференцируемость функции $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$ в точке $x = 0$.

РЕШЕНИЕ

Для нахождения производной функции в точке $x = 0$ придадим приращение аргументу $\Delta x \to 0$ и найдем приращение функции:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - f(0) = \sqrt{1 - \cos(2 \cdot \Delta x)} - \sqrt{1 - \cos(2 \cdot 0)} =$$

$$= \sqrt{2 \sin^2 \Delta x} - \sqrt{1 - \cos 0} = \sqrt{2}|\sin x| - \sqrt{1 - 1} = \sqrt{2}|\sin x| = \begin{cases} \sqrt{2} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sqrt{2} \sin x, & x < 0. \end{cases}$$

***Шаг 1.*** Вычислим односторонние производные функции в точке $x = 0$:

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2},$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{2}(-\sin\Delta x)}{\Delta x}=-\sqrt{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=-\sqrt{2}\cdot 1=-\sqrt{2}.$$

***Вывод:*** односторонние ***производные*** в точке $x=0$ не равны, следовательно, функция в этой точке не дифференцируема.

***Шаг 2.*** Определим углы наклона ***касательных***, проведенных к графику функции в точке $x=0$:

$$\operatorname{tg}\varphi\big|_{x\geq 0}=f'_x(0)=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi\approx 54^{\circ}74',$$

$$\operatorname{tg}\varphi\big|_{x<0}=f'_x(0)=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi\approx 125^{\circ}26'.$$

ОТВЕТ

График функции в точке $x=0$ имеет правостороннюю и левостороннюю касательные (рис. 3.5). ■

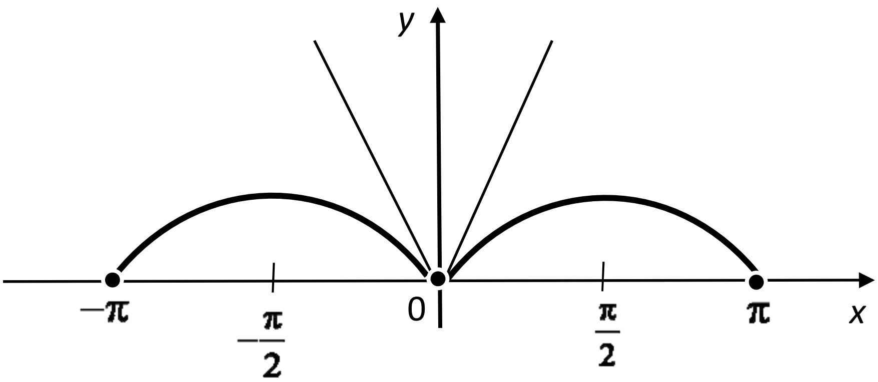



Рис. 3.5. Правосторонняя и левосторонняя касательные к графику функции $y=\sqrt{1-\cos 2x}$ в точке $x = 0$

**ПРИМЕР 3.3.**

Исследовать ***дифференцируемость*** функции $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке $x=1$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Аргументу $x=1$ зададим приращение $\Delta x$ и вычислим соответствующее приращение $\Delta y$:

$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = \sqrt[3]{(1+\Delta x - 1)^2} - \sqrt[3]{1-1} =$$

$$= \sqrt[3]{(\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{(\Delta x)^2} = (\Delta x)^{2/3}.$$

***Шаг 2.*** Вычислим односторонние пределы отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}}.$$

Вычислим левостороннюю производную функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Вычислим правостороннюю производную функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

ОТВЕТ

В точке $x=1$ функция не дифференцируема, имеет односторонние бесконечные производные разных знаков: $f'_-(1) = -\infty$ и $f'_+(1) = +\infty$. Следовательно, касательная, проведенная к графику функции в этой точке, перпендикулярна оси $0X$. График функции имеет острие, направленное вниз (рис. 3.6). ■

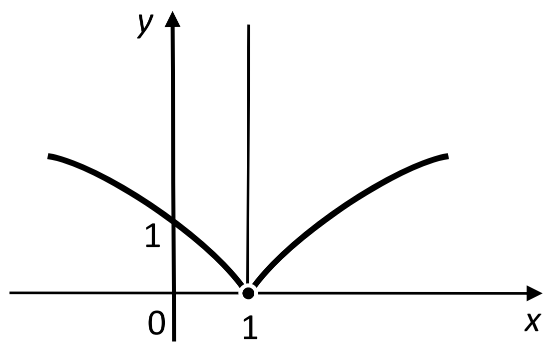



Рис. 3.6. Касательная функции $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ перпендикулярна оси $0X$

# 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Многие задачи математического анализа связаны с геометрическим смыслом производной.

Геометрическим смыслом производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ является угловой коэффициент касательной $k$, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$, т.е.

$$k = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$$

где α – величина угла наклона касательной к положительному направлению оси $0X$ (рис. 4.1).

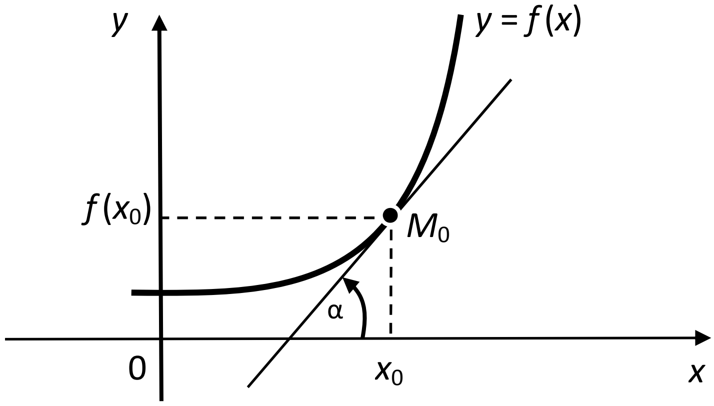



Рис. 4.1. Интерпретация геометрического смысла производной функции в точке

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0$, описывается выражением

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

С учетом того, что $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$, уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке $x_0$, принимает вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной. Если

$y = f(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ выражается соотношением

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Углом $\varphi$ между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения называется угол между их касательными, проведенными в этой точке (рис. 4.2). Тангенс угла $\varphi$ вычисляется по формуле

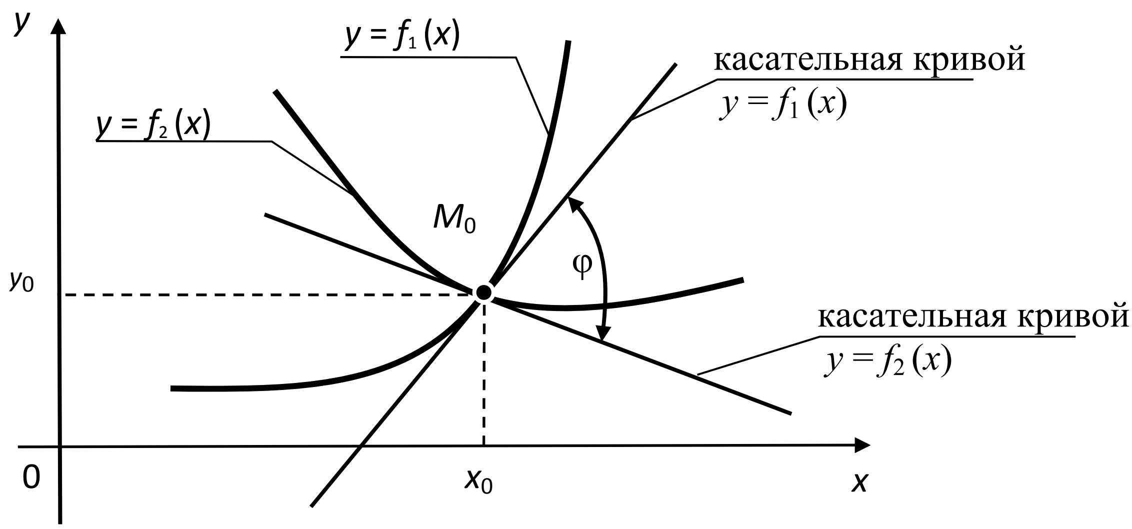



Рис. 4.2. Угол $\varphi$ между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке $M_0$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} \right|.$$

Величина угла $\varphi$ определяется согласно условию

$$\varphi: \begin{cases} 1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**ПРИМЕР 4.1.**

Записать уравнения касательной и нормали, проведенных к линии $f(x) = x^2 - 4x + 7$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Уравнение нормали, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 3$:

$$f'(x) = \left(x^2 - 4x + 7\right)' = 2x - 4,$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

***Шаг 2.*** Найдем координаты точки касания.

Значение абсциссы дано условием задачи ($x_0 = 3$), тогда соответствующая ордината $y_0 = y(3)$.

Вычислим значение функции: $y(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 7 = 4$.

Таким образом, координаты точки касания $(x_0; y_0) = M(3; 4)$.

***Шаг 3.*** Подставим значение $f'(3) = 2$ и координаты точки касания $(x_0; y_0) = M(3; 4)$, получим:

1) уравнение касательной

$$y - 4 = 2 \cdot (x - 3),$$

$$y = 2x - 6 + 4 = 2x - 2;$$

2) уравнение нормали

$$y - 4 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3),$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{3 + 2 \cdot 4}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2}.$$

ОТВЕТ

Уравнение касательной: $y = 2x - 2$, уравнение нормали: $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2}$ (см. рис. 4.3). ■

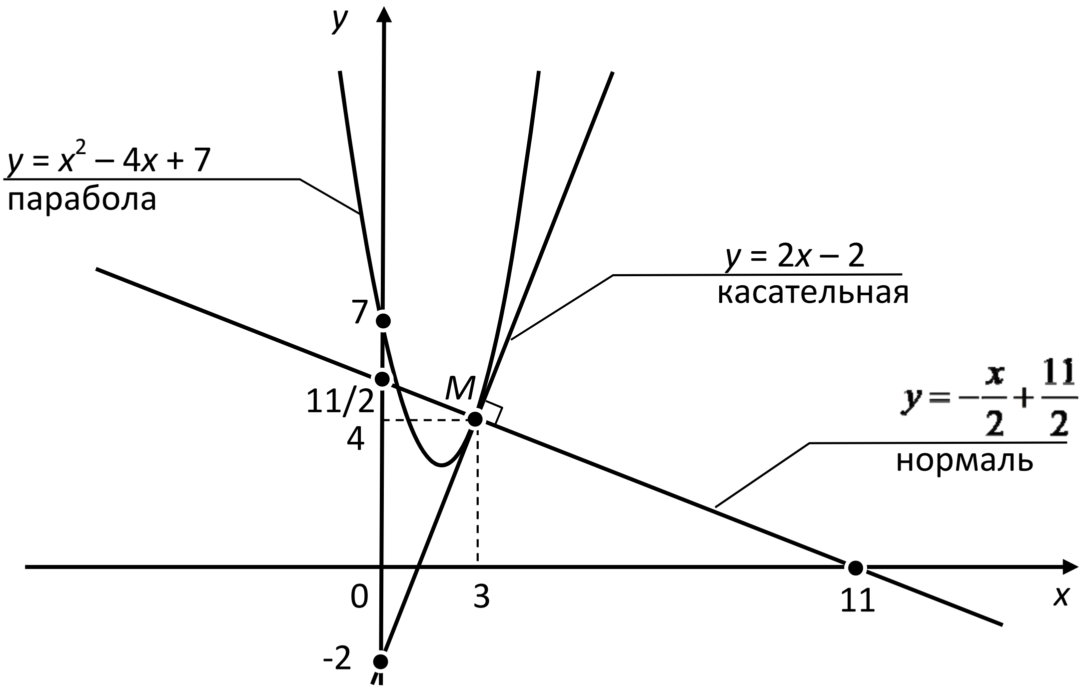



Рис. 4.3. Касательная и нормаль, проведенные к графику функции $y = x^2 - 4x + 7$ в точке $M(3; 4)$

**ПРИМЕР 4.2.**

Определить, под каким углом наклонена к оси $0X$ синусоида в начале координат.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем угловой коэффициент касательной.

Углом между синусоидой $y = \sin x$ и осью $0X$ в точке (0; 0) является угол между касательной, проведенной к синусоиде, и положительным направлением оси $0X$.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к синусоиде в точке $x_0 = 0$, определяется формулой

$$k = \mathrm{tg}\varphi = f'(x_0),$$

где

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x,$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1 \Rightarrow k = \mathrm{tg}\varphi = 1.$$

***Шаг 2.*** Определим угол наклона касательной к оси $0X$:

$$\mathrm{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}(1) = 45^{\circ} \text{ (приложение 1).}$$

ОТВЕТ

$\varphi = 45^{\circ}$ (рис. 4.4). ■

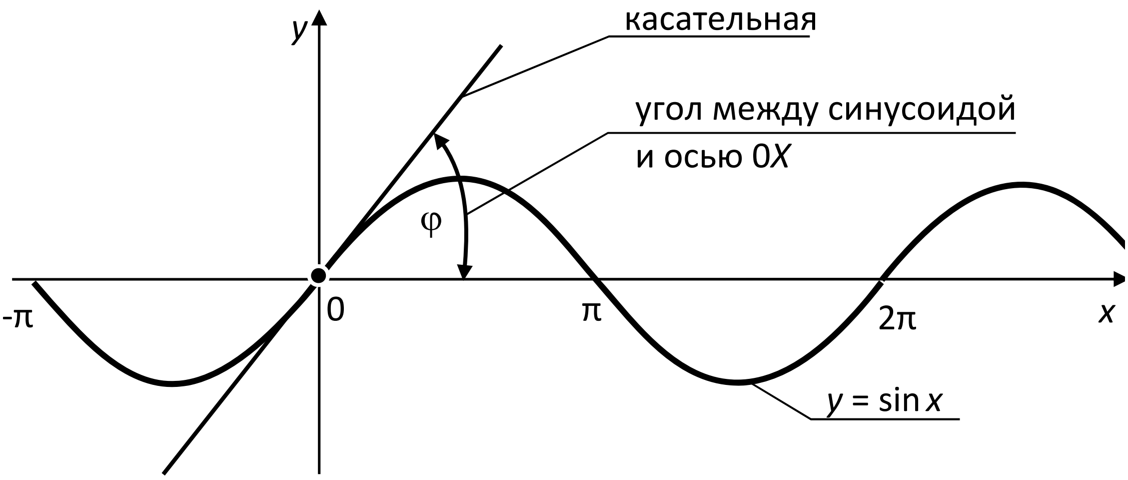



Рис. 4.4. Угол между графиком функции $y = \sin x$ и осью 0X в точке (0; 0)

**ПРИМЕР 4.3.**

Определить, под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем угловые коэффициенты касательных, проведенных к кривым в точке $x_0 = 1$.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$, определяется формулой

$$k = \mathrm{tg}\varphi = f'(x_0).$$

Вычислим значение производной функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \;\Rightarrow k = \mathrm{tg}\varphi = 2.$$

Угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$, определяется формулой

$$k = \mathrm{tg}\varphi = f'(x_0).$$

Вычислим значение производной функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2,$$

$$f'(1)=3\cdot 1^2=3 \;\Rightarrow k=\mathrm{tg}\varphi=3.$$

***Шаг 2.*** Тангенс угла между касательными определим по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}\right|,$$

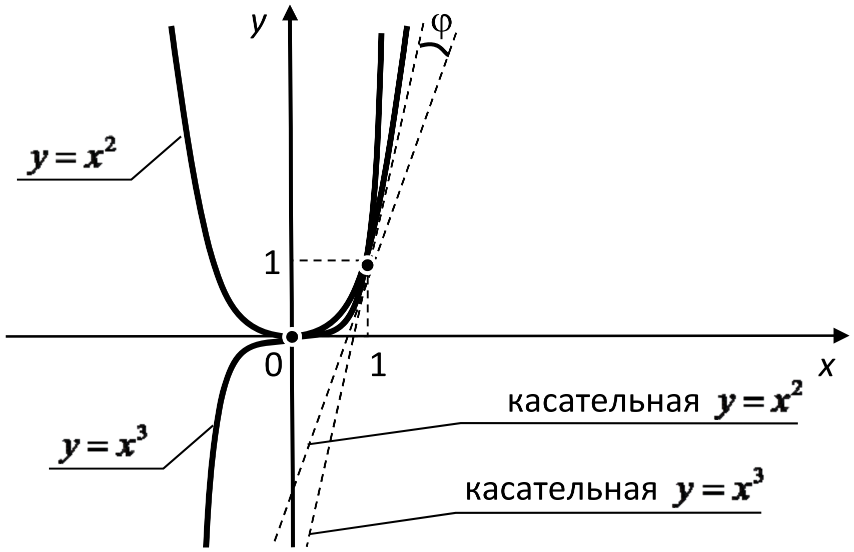



Рис. 4.5. Угол φ между параболами в точке $x=1$

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right|=\left|\frac{-1}{7}\right|=\frac{1}{7},$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right|=\left|\frac{-1}{7}\right|=\frac{1}{7} \;\Rightarrow \varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)\approx 6^\circ 43'.$$

ОТВЕТ

$\varphi\approx 6^\circ 43'$ (рис. 4.5) ■

## 5. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим некоторую материальную точку, движущуюся прямолинейно. Закон движения точки описывается уравнением $s=s(t)$. В любой момент времени $t$ может быть вычислено расстояние $s(t)$ удаленности материальной точки от точки отсчета.

Таким образом, в момент времени $t$ пройденное расстояние равно $s = s(t)$, а в момент времени $(t+\Delta t)$ расстояние равно $s(t+\Delta t)$. За промежуток времени от $t$ до $t+\Delta t$ пройденный путь равен $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Средняя скорость движения точки за этот промежуток времени равна $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Средняя скорость движения точки в различные промежутки времени различна. Чем меньше промежуток времени, тем точнее средняя скорость движения характеризует движение точки в момент времени $t$.

Таким образом, предел средней скорости движения при стремлении $\Delta t$ к нулю называют ***скоростью движения точки в данный момент времени t*** и обозначают $v(t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Можно сделать вывод, что производная $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ характеризует скорость изменения функции в зависимости от изменения ее аргумента.

Таким образом, быстрота протекания физических, химических и других процессов, описанных аналитически, выражается с помощью производной. Другими словами, ***механический смысл производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** $x = x_0$ ***интерпретируется как скорость изменения функции в момент*** $x_0$.

**ПРИМЕР 5.1.**

Тело движется по закону $s = 2t^2 + 5t + 2$ (м). Определить кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ тела через 5 с после начала движения, если его масса равна 30 кг. Начало движения тела с момента $t = 0$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем закон изменения скорости.

Скорость движения материальной точки равна производной закона движения по времени $t$:

$$V = s'(t),$$

$$V = (2t^2 + 5t + 2)'_t = 4t + 5.$$

***Шаг 2.*** Найдем скорость движения $V$, м/с, через 5 с:

$$V(5) = 4 \cdot 5 + 5 = 20 + 5 = 25.$$

***Шаг 3.*** Найдем кинетическую энергию, Дж:

$$\frac{m(v(5))^2}{2}=\frac{30\cdot 25^2}{2}=\frac{18\ 750}{2}=9375\cdot 10^{-7}.$$

ОТВЕТ

$\frac{m(v(5))^2}{2}=9375\cdot 10^{-7}$ Дж ■

**ПРИМЕР 5.2.**

В какой точке параболы $y^2=6x$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Рассмотрим переменные $x$ и $y$ как функции, зависящие от переменной $t$. Продифференцируем обе части уравнения $y^2=6x$ по переменной $t$, получим

$$\left(y^2\right)'_t=2y\cdot y'_t,$$

$$(6x)'_t=6\cdot x'_t.$$

Получили соотношение между скоростями изменения координат:

$$2y\cdot y'_t=6x'_t,$$

$$\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6}{2y}=\frac{3}{y}.$$

Согласно условию ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы, значит

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{x'_t}=2,\\[2ex] \dfrac{y'}{x'_t}=\dfrac{3}{y}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{3}{y}=2\to y=\frac{3}{2}.$$

***Шаг 2.*** Найдем координаты точки, в которой ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы:

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{3}{2},\\[2ex] y^2=6x\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^2=6x\to x=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{8}.$$

Таким образом, координаты точки $M\left(\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$.

ОТВЕТ

$M\left(\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$

## 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Центральное место в технике дифференцирования занимает задача дифференцирования сложной функции.

Пусть даны функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, причем область изменения $u=\varphi(x)$ входит в область определения $y=f(u)$. Тогда функция $y=f(u)$ является сложной функцией независимой переменной $x$, а переменная $u$ представляет собой промежуточный аргумент. Пусть функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке $x$, а рассматриваемая функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u$.

Производная сложной функции по независимой переменной $x$ равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной $x$:

$$y'=f'_u(u)\cdot u'_x(x).$$

Производную сложной функции иначе можно записать следующим образом:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \qquad (6.1)$$

В записи производной $y'_x$ нижний индекс $x$ указывает, что функция $y$ дифференцируется по переменной $x$, аналогично $y'_u$ означает дифференцирование функции $y$ по переменной $u$, $u'_x$ – дифференцирование функции $u$ по переменной $x$.

С помощью таблицы производных основных элементарных функций (см. табл. 2.1) и правил дифференцирования (см. разд. 2) можно найти производную любой сложной функции, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий, а также вычисления производной функции от функции.

**ПРИМЕР 6.1.**

Найти производную сложной функции $y=\cos(ax+b)$, используя определение производной.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Аргументу $x$ зададим приращение $\Delta x$ и вычислим соответствующее приращение $\Delta y$:

$$\Delta y = f\,(x+\Delta x) - f\,(x) = \cos\big(a\big(x+\Delta x\big)+b\big) - \cos\big(a\,x+b\big) =$$

$$= -2\sin\left(\frac{ax+a\Delta x+b+ax+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{ax+a\Delta x+b-\big(ax+b\big)}{2}\right) =$$

$$= -2\sin\left(\frac{2ax+2b+a\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a\Delta x}{2}\right) = -2\sin\left(ax+b+\frac{a\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a\Delta x}{2}\right).$$

**Примечание.** Применена формула тригонометрического тождества разности косинусов (приложение 2).

***Шаг 2.*** Вычислим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(ax+b+\dfrac{a\,\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{a\,\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(ax+b+\dfrac{a\cdot 0}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{a\cdot 0}{2}\right)}{0} = -2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\big(ax+b+0\big)\cdot\sin\big(0\big)}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Предел содержит неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Раскроем ее, выделив и применив первый замечательный предел, получим

$$-2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\big(ax+b\big)\cdot\sin\left(\dfrac{a\,\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{a\,\Delta x}{2}\cdot\dfrac{2}{a}} = -\cancel{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\big(ax+b\big)}{\dfrac{\cancel{2}}{a}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{a\,\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{a\,\Delta x}{2}} =$$

$$= \left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{a\,\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{a\,\Delta x}{2}} = 1\right\} = \lim_{\Delta x\to 0}\big(-a\cdot\sin\big(ax+b\big)\big)\cdot 1 = -a\cdot\sin\big(ax+b\big),$$

$$y' = -a\cdot\sin\big(ax+b\big).$$

ОТВЕТ

$$\cos(ax+b)' = -a \cdot \sin(ax+b) \qquad ■$$

Для упрощения процесса дифференцирования на основании определения производной и правил дифференцирования составлена табл. 6.1 производных сложных функций $y = f(u)$, аргументы которых, в свою очередь, являются функциями $u = u(x)$, зависящими от переменной $x$.

Таблица 6.1

Таблица производных сложных функций

| Сложные функции | Производные |
|---|---|
| Степенная функция $y = u^n$ | 1. $\left(u^n\right)'_x = n \cdot u^{n-1} \cdot u'_x$ |
| Показательные функции:<br>$y = a^u$,<br>$y = e^u$ | 2. $\left(a^u\right)'_x = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$, $a > 0, a \neq 1$,<br>3. $\left(e^u\right)'_x = e^u \cdot u'_x$ |
| Логарифмические функции:<br>$y = \log_a u$,<br>$y = \ln u$ | 4. $\left(\log_a u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{u \cdot \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$,<br>5. $\left(\ln u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{u}$ |
| Тригонометрические функции:<br>$y = \sin u$,<br>$y = \cos u$,<br>$y = \operatorname{tg} u$,<br>$y = \operatorname{ctg} u$ | 6. $\left(\sin u\right)'_x = \cos u \cdot u'_x$,<br>7. $\left(\cos u\right)'_x = -\sin u \cdot u'_x$,<br>8. $\left(\operatorname{tg} u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{\cos^2 u}$,<br>9. $\left(\operatorname{ctg} u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sin^2 u}$ |
| Обратные тригонометрические функции:<br>$y = \arcsin u$,<br>$y = \arccos u$,<br>$y = \operatorname{arctg} u$,<br>$y = \operatorname{arcctg} u$ | 10. $\left(\arcsin u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$,<br>11. $\left(\arccos u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$,<br>12. $\left(\operatorname{arctg} u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{1+u^2}$,<br>13. $\left(\operatorname{arcctg} u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{1+u^2}$ |

***Указание:*** для успешного освоения материала таблицу производных сложных функций необходимо знать наизусть (см. табл. 6.1).

**ПРИМЕР 6.2.**

Найти производную сложной функции $y=\left(5x^3-4x+3\right)^6$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Функция сложная, положим $u=5x^3-4x+3$, тогда функция $y(u)=u^6$ – степенная.

По формуле производной сложной функции имеем $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

***Шаг 2.*** Найдем производные $y'_u$ и $u'_x$:

$$y'_u=6u^{6-1}=6u^5,$$

$$u'_x=\left(5x^3-4x+3\right)'_x=\left(5x^3\right)'_x-\left(4x\right)'_x+3'_x=5\cdot3\cdot x^{3-1}-4\cdot1+0=15x^2-4.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу (6.1), получим

$$y'_x=\left(\left(5x^3-4x+3\right)^6\right)'_x=6\left(5x^3-4x+3\right)^5\cdot\left(15x^2-4\right).$$

ОТВЕТ

$y'_x=6\left(5x^3-4x+3\right)^5\cdot\left(15x^2-4\right)$ ■

**ПРИМЕР 6.3.**

Найти производную сложной функции $y=\sin^3 8x$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Функция сложная, положим $u=\sin 8x$, тогда функция $y(u)=u^3$ – степенная.

По формуле производной сложной функции имеем $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

***Шаг 2.*** Найдем производные $y'_u$ и $u'_x$:

$$y'_u=3u^{3-1}=3u^2,$$

$$u'_x=\left(\sin 8x\right)'=\left(\cos 8x\right)\cdot\left(8x\right)'=8\cos 8x.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу (6.1), получим

$$y'_x=\left(\left(\sin 8x\right)^3\right)'_x=3\left(\sin 8x\right)^2\cdot\left(8\cos 8x\right)=24\sin^2 8x\cdot\cos 8x.$$

ОТВЕТ

$y'_x=24\sin^2 8x\cdot\cos 8x$ ■

**ПРИМЕР 6.4.**

Найти производную сложной функции $y = 4^{\mathrm{tg}3x}$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Функция сложная, положим $u = \mathrm{tg}3x$, тогда функция $y(u) = 4^u$ – показательная.

По формуле производной сложной функции имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

***Шаг 2.*** Найдем производные $y'_u$ и $u'_x$:

$$y'_u = 4^u \cdot \ln 4,$$

$$u'_x = \left(\mathrm{tg}3x\right)'_x = \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot \left(3x\right)'_x = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу (6.1), получим

$$y'_x = \left(4^{\mathrm{tg}3x}\right)'_x = 4^{\mathrm{tg}3x} \cdot \ln 4 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} = \frac{3 \cdot 4^{\mathrm{tg}3x} \cdot \ln 4}{\cos^2 3x}.$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{3 \cdot 4^{\mathrm{tg}3x} \cdot \ln 4}{\cos^2 3x}$$ ■

**ПРИМЕР 6.5.**

Найти производную сложной функции $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \mathrm{tg}\left(3x+1\right)$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Применим правило дифференцирования 3 для производной произведения (см. разд. 2):

$$y'_x = g'_x\left(x\right)\phi\left(x\right) + g\left(x\right)\phi'_x\left(x\right),$$

введем следующие обозначения:

$$g\left(x\right) = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right),$$

$$\phi\left(x\right) = \mathrm{tg}\left(3x+1\right),$$

тогда

$$y' = \left(\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)' \cdot \mathrm{tg}\left(3x+1\right) + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \left(\mathrm{tg}\left(3x+1\right)\right)'.$$

***Шаг 2.*** Функция $\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$ сложная, положим $u=\sin\left(\sqrt{x}\right)$, тогда функция $g(u)=\ln u$ – сложная логарифмическая с промежуточным аргументом *u*.

По формуле производной сложной функции (6.1) имеем $g'_x = g'_u \cdot u'_x$, $g'_u = \left(\ln u\right)'_u = \dfrac{1}{u}$.

Функция $u=\sin\sqrt{x}$ сложная. Пусть $v=\sqrt{x}$, тогда

$$u(v)=\sin v\,,$$

$$u'_x = u'_v \cdot v'_x\,,$$

$$u'_v = \left(\sin v\right)'_v = \cos v\,,$$

$$v_x{}' = \left(\sqrt{x}\right)'_x = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'_x = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$g'_x = g'_u \cdot u'_v \cdot v'_x\,,$$

$$g'_x = \left(\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)'_x = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\left(\sin\sqrt{x}\right)'_x = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'_x =$$

$$=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Функция $\operatorname{tg}\left(3x+1\right)$ сложная, положим $u=3x+1$, тогда $\phi(u)=\operatorname{tg}u$ – сложная функция тангенса с промежуточным аргументом *u*.

По формуле производной сложной функции имеем

$$\phi'_x = \phi'_u \cdot u'_x\,,$$

$$\phi'_u = \left(\operatorname{tg}u\right)'_u = \frac{1}{\cos^2 u},$$

$$u'_x = \left(3x+1\right)'_x = \left(3x\right)'_x + \left(1\right)'_x = 3+0=3\,,$$

$$\phi'_x = \left(\operatorname{tg}\left(3x+1\right)\right)'_x = \frac{1}{\cos^2\left(3x+1\right)}\cdot\left(3x+1\right)'_x = \frac{3}{\cos^2\left(3x+1\right)}.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу $y'_x = g'_x(x)\,\phi(x) + g(x)\phi'_x(x)$, получим

$$y' = \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{3}{\cos^2(3x+1)}.$$

Более компактная форма записи нахождения производной записывается следующим образом:

$$y' = \left(\ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \operatorname{tg}(3x+1)\right)' = \left(\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)' \cdot \operatorname{tg}(3x+1') + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}(3x+1)\right)' =$$

$$= \frac{\left(\sin\sqrt{x}\right)'}{\sin\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{(3x+1)'}{\cos^2(3x+1)} =$$

$$= \frac{\left(\cos\sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\sin\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{(3x)' + (1)'}{\cos^2(3x+1)} =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \ln\left(\sin\sqrt{x}\right) \cdot \frac{3}{\cos^2(3x+1)} =$$

$$= \operatorname{ctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}{\cos^2(3x+1)} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}{\cos^2(3x+1)}.$$

ОТВЕТ

$$y' = \frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}{\cos^2(3x+1)} \qquad \blacksquare$$

**ПРИМЕР 6.6.**

Найти производную сложной функции $y = \ln\left(\sin\left(1+e^x\right)\right)$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Функция сложная, положим $u = \sin\left(1+e^x\right)$, тогда функция $y(u) = \ln u$ – сложная логарифмическая с промежуточным аргументом *u*.

По формуле производной сложной функции имеем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

***Шаг 2.*** Найдем производные $y'_u$ и $u'_x$:

$$y'_u=(\ln u)'_u=\frac{1}{u}.$$

Функция $u=\sin\left(1+e^x\right)$ – сложная. Пусть $v=1+e^x$, тогда

$$u(v)=\sin v,$$

$$u'_x=u'_v\cdot v'_x,$$

$$u'_v=(\sin v)'=\cos v,$$

$$v'_x=\left(1+e^x\right)'=e^x.$$

Таким образом,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x,$$

$$u'_x=\left(\sin\left(1+e^x\right)\right)'_x=\cos\left(1+e^x\right)\cdot\left(1+e^x\right)'_x=\cos\left(1+e^x\right)\cdot\left(1'+\left(e^x\right)'\right)=$$

$$=\cos\left(1+e^x\right)\cdot\left(0+e^x\right)=\cos\left(1+e^x\right)\cdot e^x.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$, получим

$$y'_x=\frac{1}{\sin\left(1+e^x\right)}\cos\left(1+e^x\right)\cdot e^x.$$

Учитывая, что $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$, имеем

$$y'_x=e^x\cdot\operatorname{ctg}\left(1+e^x\right).$$

Более компактная форма записи нахождения производной записывается следующим образом:

$$y'=\left(\ln\left(\sin\left(1+e^x\right)\right)\right)'=\frac{\left(\sin\left(1+e^x\right)\right)'}{\sin\left(1+e^x\right)}=\frac{\cos\left(1+e^x\right)\cdot\left(1+e^x\right)'}{\sin\left(1+e^x\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(1+e^x\right)\cdot e^x}{\sin\left(1+e^x\right)}=e^x\cdot\operatorname{ctg}\left(1+e^x\right).$$

ОТВЕТ

$y'_x=e^x\cdot\operatorname{ctg}\left(1+e^x\right)$ ■

## 7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Если зависимость между $x$ и $y$ задана в неявной форме $F(x, y) = 0$, то функция считается заданной неявно. Будем считать функцию дифференцируемой.

Приведем алгоритм дифференцирования неявно заданной функции:

1) продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной $x$, переменную $y$ рассматривать как сложную функцию, зависящую от переменной $x$;

2) выразить $y'$ из полученного соотношения.

***Указание:*** следует помнить, что производная независимой переменной $x' = 1$, а производная зависимой переменной рассматривается как производная сложной функции, т.е. $(y)'_x = y'$.

**ПРИМЕР 7.1.**

Найти производную $y'$ неявной функции $x^3 + y^4 = 6$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Продифференцируем обе части уравнения по переменной $x$:

$$\left(x^3 + y^4\right)' = (6)'.$$

Помним, что $\left(y^4\right)' = 4y^3 \cdot y'$, тогда

$$3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 0.$$

***Шаг 2.*** Выразим $y'$:

$$4y^3 \cdot y' = -3x^2,$$

$$y' = -\frac{3x^2}{4y^3}.$$

ОТВЕТ

$y' = -\dfrac{3x^2}{4y^3}$ ■

**ПРИМЕР 7.2.**

Найти производную $y'$ неявной функции $x^3 y^2 + y^4 = 1$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Продифференцируем обе части уравнения по переменной $x$:

$$\left(x^3y^2\right)' + \left(y^4\right)' = (1)'.$$

***Шаг 2.*** Применим правило дифференцирования 3 для производной произведения (см. разд. 2) и таблицы дифференцирования (см. табл. 2.1, 6.1):

$$\left(x^3\right)' \cdot y^2 + x^3 \cdot \left(y^2\right)' + \left(y^4\right)' = (1)'.$$

Помним, что $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$, $y^4 = 4y^3y'$, тогда

$$3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot y' + 4y^3y' = 0.$$

***Шаг 3.*** Преобразуем полученное выражение, вынесем $y'$ за скобки:

$$x^3 \cdot 2y \cdot y' + 4y^3y' = -3x^2 \cdot y^2,$$

$$y' \cdot \left(2x^3y + 4y^3\right) = -3x^2y^2,$$

$$y' = -\frac{3x^2y^2}{2x^3y + 4y^3} = -\frac{3x^2y^2}{y \cdot \left(2x^3 + 4y^2\right)} = -\frac{3x^2y}{2x^3 + 4y^2}.$$

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{3x^2 \cdot y}{2x^3 + 4y^2}$$ ■

**ПРИМЕР 7.3.**

Найти производную $y'$ неявной функции $\frac{y}{x} + e^{xy} - \ln y = 3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Продифференцируем обе части уравнения по переменной $x$:

$$\left(\frac{y}{x} + e^{xy} - \ln y\right)' = 3',$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' + \left(e^{xy}\right)' - (\ln y)' = 3'.$$

***Шаг 2.*** Применим правила дифференцирования (см. разд. 2) и таблицы дифференцирования (см. табл. 2.1, 6.1).

Помним, что $x' = 1$, $(y)' = y'$, $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, тогда

$$\frac{y' \cdot x - y \cdot x'}{y^2} + e^{xy} \cdot (xy)' - \frac{y'}{y} = 0,$$

$$\frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{y^2} + e^{xy} \cdot (x'y + xy') - \frac{y'}{y} = 0,$$

$$\frac{y' \cdot x - y}{y^2} + e^{xy} \cdot (y + xy') - \frac{y'}{y} = 0.$$

***Шаг 3.*** Преобразуем полученное выражение, вынесем $y'$ за скобки:

$$\frac{y' \cdot x}{y^2} - \frac{y}{y^2} + e^{xy} \cdot y + e^{xy} \cdot xy' - \frac{y'}{y} = 0,$$

$$\frac{y' \cdot x}{y^2} + e^{xy} \cdot xy' - \frac{y'}{y} = \frac{1}{y} - e^{xy} \cdot y,$$

$$y'\left(\frac{x}{y^2} + e^{xy} \cdot x - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} - e^{xy} \cdot y.$$

***Шаг 4.*** Выразим $y'$:

$$y' = \frac{\dfrac{1}{y} - e^{xy} \cdot y}{\dfrac{x}{y^2} + e^{xy} \cdot x - \dfrac{1}{y}} = \frac{\dfrac{1 - e^{xy} \cdot y^2}{y}}{\dfrac{x + e^{xy} \cdot xy^2 - y}{y^2}} = \frac{\cancel{y^2} \cdot \left(1 - e^{xy} \cdot y^2\right)}{\cancel{y} \cdot \left(x + e^{xy} \cdot xy^2 - y\right)} =$$

$$= \frac{y \cdot \left(1 - e^{xy} \cdot y^2\right)}{\left(x + e^{xy} \cdot xy^2 - y\right)}.$$

ОТВЕТ

$y' = \dfrac{y \cdot \left(1 - e^{xy} \cdot y^2\right)}{\left(x + e^{xy} \cdot xy^2 - y\right)}$ ∎

## 8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке $x$, причем $u(x) > 0$, тогда производная показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ находится по следующему алгоритму:

1) прологарифмировать функцию по основанию $e$;

2) применить свойство логарифмов $\ln b^p = p \ln b$; продифференцировать полученное равенство, учитывая, что

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y';$$

3) выразить производную $y'$;

4) сделать подстановку $y = u(x)^{v(x)}$.

**ПРИМЕР 8.1.**

Найти производную функции $y = (\sin x)^{x^2+3}$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Прологарифмировать функцию по основанию $e$:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^2+3}.$$

***Шаг 2.*** Применить свойство логарифмов $\ln b^p = p \ln b$:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^2+3} = \left(x^2+3\right) \cdot \ln(\sin x).$$

***Шаг 3.*** Продифференцировать полученное равенство:

$$(\ln y)' = \left(\left(x^2+3\right) \cdot \ln(\sin x)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \left(x^2+3\right)' \cdot \ln(\sin x) + \left(x^2+3\right)\left(\ln(\sin x)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(\sin x) + \left(x^2+3\right) \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} = 2x \cdot \ln(\sin x) + \left(x^2+3\right) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} =$$

$$= 2x \cdot \ln(\sin x) + \left(x^2+3\right) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

***Шаг 4.*** Выразить производную $y'$:

$$y' = y \cdot \left(2x \cdot \ln\left(\sin x\right) + \left(x^2 + 3\right) \cdot \mathrm{ctg} x\right).$$

***Шаг 5.*** Сделать подстановку $y = (\mathrm{sinx})^{x^2+3}$:

$$y' = \left(\sin x\right)^{x^2+3} \cdot \left(2x \cdot \ln\left(\sin x\right) + \left(x^2 + 3\right) \cdot \mathrm{ctg} x\right).$$

ОТВЕТ

$y' = \left(\sin x\right)^{x^2+3} \cdot \left(2x \cdot \ln\left(\sin x\right) + \left(x^2 + 3\right) \cdot \mathrm{ctg} x\right)$ ■

## 9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Функция задана параметрически, если ее переменные $y$ и $x$ зависят от параметра $t$, т.е. выражены параметрическими уравнениями в виде системы

$$\begin{cases} y = g(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Если функции $y = g(t)$ и $x = \varphi(t)$ дифференцируемы и $\varphi(t) \neq 0$, то функция, заданная параметрически, имеет производную. Производная $y'_x$ выражается из инвариантной формы записи дифференциала $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, т.к. $\begin{cases} y = g(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$, то $d\,y = g'(t)dt$ и $dx = \varphi'(t)dt$, следовательно, $y'_x = \dfrac{g'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$.

Иногда используется форма записи параметрического дифференцирования в виде $y'_x = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, где $\dot{y} = g'(t)dt$ и $\dot{x} = \varphi'(t)dt$.

**ПРИМЕР 9.1.**

Найти производную функции $y'_x$, если $\begin{cases} x = 3e^t, \\ y = \sin t^2. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем производные $y'_t$ и $x'_t$:

$$x'_t = \left(3e^t\right)' = 3e^t,$$

$$y'_t = \left(\sin t^2\right)' = \cos\left(t^2\right) \cdot \left(t^2\right)' = \cos\left(t^2\right) \cdot 2t.$$

***Шаг 2.*** Найдем $y'_x$.

Применим формулу $y'_x = \dfrac{g'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$, получим

$$y'_x = \frac{\cos\left(t^2\right)\cdot 2t}{3e^t}.$$

ОТВЕТ

$y'_x = \dfrac{\cos\left(t^2\right)\cdot 2t}{3e^t}$ ■

## 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и, следовательно, приращение функции равно

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Приращение функции записано в виде суммы двух слагаемых. Слагаемое $f'(x)\cdot\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой величиной одного порядка малости с $\Delta x$, если $f'(x) \neq 0$. Это слагаемое линейно относительно $\Delta x$. Слагаемое $\alpha\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ также является бесконечно малой величиной, но уже более высокого порядка малости по сравнению с $\Delta x$.

Таким образом, $f'(x)\cdot\Delta x$ является главной частью приращения функции.

Главная часть приращения функции $y = f(x)$ называется дифференциалом функции и обозначается $d\,f(x)$ или $dy$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\cdot\Delta x$.

Разность $\Delta y - dy = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x - f'(x)\Delta x = \alpha\Delta x$ есть величина бесконечно малая, более высокого порядка малости по сравнению с $\Delta x$.

Если $y = x$, тогда

$$\left.\begin{aligned} &d\,y = dx \\ &dy = x'\cdot\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \Delta x = dx.$$

***Выводы:***

1) дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной;

2) дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x$ равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал независимой переменной: $dy = f'(x) \cdot dx$.

Тогда производную функции можно определить как отношение дифференциалов: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

**Примечание.** Дифференциал функции $dy$ зависит от *x* и $\Delta x$, а производная функции $f'(x)$ зависит только от *x*.

**Свойства дифференциала**

Пусть функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемые в точке $x$. Используя свойства производной и определение дифференциала, можем сформулировать следующие свойства дифференциала:

1) $d(C) = 0$, $C = \text{const}$;

2) $dx = \Delta x$, если $x$ – независимая переменная;

3) $d(Cu) = (Cu)' dx = Cu'dx = Cdu$;

4) $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

5) $d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx = vdu + udv \Rightarrow$
$d(u \cdot v) = vdu + udv$;

6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' dx = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} dx = \dfrac{u'vdx - uv'dx}{v^2} = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \Rightarrow$
$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;

7) $d(f(u)) = f'_u(u) \cdot u'dx = f'(u)du$.

Из определения и свойств дифференциала следует, что нахождение производных или дифференциалов по существу сводится к одной и той же задаче, которая называется дифференцированием.

**ПРИМЕР 10.1.**

Найти дифференциал функции $y = \sin x - \ln x + \sqrt[3]{x^5}$.

РЕШЕНИЕ

Дифференциал функции определяется по формуле $dy = f'(x)dx$.

Найдем производную $y' = f'(x)$, преобразовав выражение для функции:

$$f'(x) = (\sin x)' - (\ln x)' + \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' =$$

$$= \cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}.$$

Таким образом,

$$dy = \left(\cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}\right)dx.$$

ОТВЕТ

$dy = \left(\cos x - \frac{1}{x} + \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}\right)dx$ ■

## 11. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Геометрический смысл дифференциала интерпретируется как приращение ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 11.1).

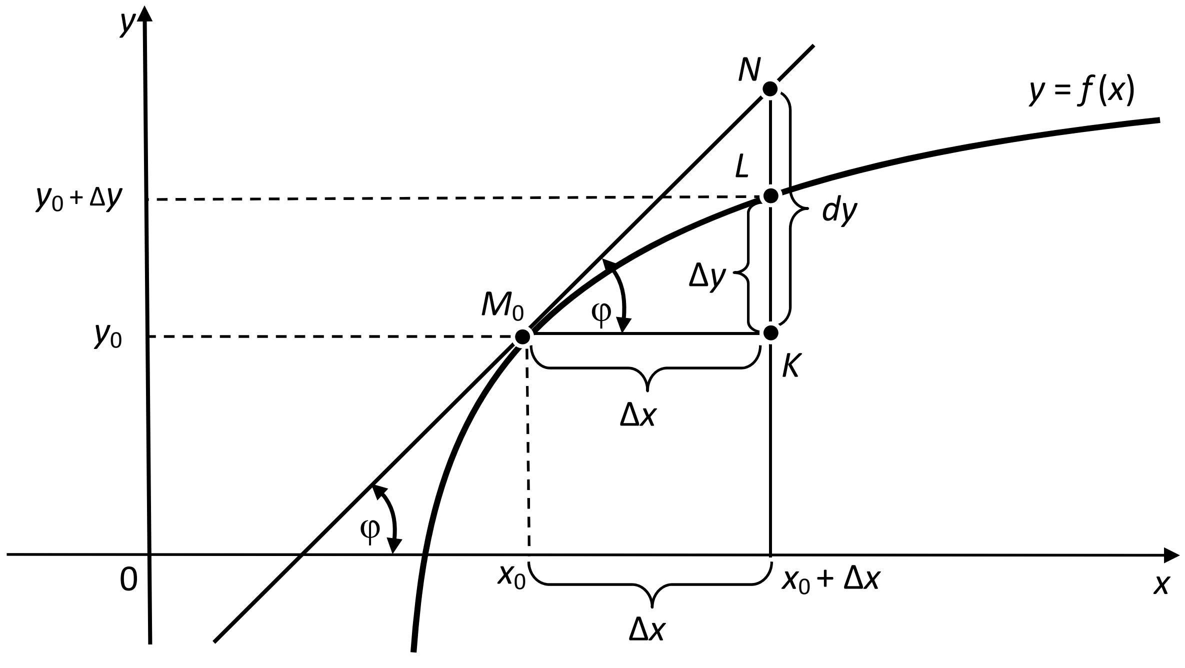



Рис. 11.1. Геометрическая интерпретация дифференциала функции в точке

Рассмотрим прямоугольный треугольник *MKN*. Согласно соотношениям сторон и углов прямоугольного треугольника имеем

$$\frac{KN}{\Delta x} = \mathrm{tg}\varphi, \quad KN = \mathrm{tg}\varphi \cdot \Delta x \text{ или } \begin{cases} \mathrm{tg}\varphi = y' \\ KN = y'dx \end{cases} \Rightarrow KN = dy,$$

$$KL = \Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \text{ – приращение ординаты кривой.}$$

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x$ равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

Из рассмотренных рассуждений можно сделать следующий вывод: если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x$, то она дифференцируема в этой точке, причем $f'(x) = \mathrm{const}$.

Верно и обратное утверждение: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, то она имеет производную в этой точке.

## 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, тогда функция $y = f\left(\varphi(t)\right)$ является сложной функцией независимой переменной $t$, а переменная $x$ – промежуточным аргументом.

Пусть функция $\varphi(t)$ имеет производную в точке $t$, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, соответствующей точке $t$. Тогда сложная функция $y = f\left(\varphi(t)\right)$ дифференцируема в точке $t$, в этом случае дифференциал сложной функции имеет вид

$$dy = (y')_t \cdot dt, \text{ т.к. } (y')_t = f'(x) \cdot \varphi'(t), \text{ тогда}$$

$$\left.\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot \varphi'(t) \cdot dt \\ dx &= \varphi'(t)dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = f'(x)dx. \tag{12.1}$$

***Вывод:*** форма записи дифференциала не зависит от того, будет ли $x$ зависимой переменной или функцией от другой переменной, в связи с чем форма записи (12.1) называется ***инвариантной*** формой записи дифференциала.

**Примечание.** Если $x$ – независимая переменная, то $dx = \Delta x$, а если $x$ зависит от другой переменной, то $dx \neq \Delta x$.

**ПРИМЕР 12.1.**

Найти дифференциал функции $y = \sin^4 x, \quad x = \operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)$.

РЕШЕНИЕ

Дифференциал функции определяется по формуле $d\,y = f'(x)d\,x$.

***Шаг 1.*** Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \left((\sin x)^4\right)' = 4(\sin x)^3 \cdot (\sin x)' = 4(\sin x)^3 \cdot \cos x .$$

***Шаг 2.*** Найдем $d\,x$:

$$d\,x = x'(t)\,d\,t, \quad x' = \frac{\left(t^3 - 2^t\right)'}{\cos^2\left(t^3 - 2^t\right)} = \frac{3t^2 - 2^t \ln 2}{\cos^2\left(t^3 - 2^t\right)}.$$

***Шаг 3.*** Применим формулу $d\,y = f'(x)d\,x = f'(x)\cdot x'(t)dt$, получим

$$d\,y = 4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot \frac{3t^2 - 2^t \ln 2}{\cos^2\left(t^3 - 2^t\right)}dt .$$

***Шаг 4.*** Подставим в полученное выражение $x = \operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)$:

$$d\,y = 4\sin^3\left(\operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)\right)\cdot \cos\left(\operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)\right)\cdot \frac{3t^2 - 2^t \ln 2}{\cos^2\left(t^3 - 2^t\right)}dt .$$

ОТВЕТ

$$d\,y = 4\sin^3\left(\operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)\right)\cdot \cos\left(\operatorname{tg}\left(t^3 - 2^t\right)\right)\cdot \frac{3t^2 - 2^t \ln 2}{\cos^2\left(t^3 - 2^t\right)}dt \;\blacksquare$$

## 13. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Во многих задачах вместо приращения функции в точке рассматривают дифференциал функции в этой точке, т.е. $\Delta x = d\,x$. Как уже отмечалось выше, дифференциал функции отличается от приращения на бесконечно малую величину по сравнению с $d\,x$. Если приращение $\Delta x$ мало по абсолютной величине, то приращение функции приближенно равно ее дифференциалу:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,\\ f'(x)\neq 0,\\ \alpha\Delta x \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x .$$

Учитывая, что $\Delta x = dx$, получим $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$.

Таким образом, приближенное значение функции в точке $x_0$ при малом приращении $\Delta x$ вычисляется по формуле

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x . \tag{13.1}$$

Относительная погрешность приближенного вычисления $\delta$, %, определяется по формуле

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \cdot 100 . \tag{13.2}$$

**ПРИМЕР 13.1.**

Вычислить приближенно значение $\sqrt[3]{7{,}95}$ до трех знаков после запятой, оценить допущенную относительную погрешность $\delta$.

РЕШЕНИЕ

Приближенное вычисление произведем с помощью формулы (13.1).

***Шаг 1.*** Представим величину $\sqrt[3]{7{,}95}$ в виде функции $y = \sqrt[3]{x}$, где $x = 7{,}95$. Положим, что $x = x_0 + \Delta x = 7{,}95$.

Пусть $x_0 = 8$. Так как известно значение $\sqrt[3]{8} = 2$, то $\Delta x = 7{,}95 - 8 = -0{,}05$.

***Шаг 2.*** Выполним необходимые вычисления:

$$f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2,$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ (приложение 3)},$$

$$f'(x_0)\Bigg|_{x_0=8} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3\cdot\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\cdot 2^{\frac{3\cdot 2}{3}}} = \frac{1}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{12} .$$

***Шаг 3.*** Подставим полученные значения в формулу (13.1), получим

$$\sqrt[3]{7{,}97} \approx 2 + \frac{1}{12}\cdot(-0{,}05) = 2 - \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{100} = 2 - \frac{1}{240} = 2 - 0{,}00426 \approx 1{,}99574 .$$

***Шаг 4.*** Оценим относительную погрешность вычисления $\delta$, %:

$$dy = f'(x_0)\cdot \Delta x,$$

$$dy = \frac{1}{12}\cdot(-0{,}05) = -\frac{1}{240} \approx -0{,}00426,$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta y \approx 1{,}996 - 2 = -0{,}004.$$

Используя формулу (13.2), получим

$$\delta = \left|\frac{-0{,}004-(-0{,}00426)}{-0{,}00426}\right|\cdot 100 = \left|\frac{0{,}00026}{-0{,}00426}\right|\cdot 100 = 0{,}061\cdot 100 = 6{,}1\ \%.$$

ОТВЕТ
$\sqrt[3]{7{,}97} \approx 1{,}996$ с относительной погрешностью $\delta$ = 6,1 % ■

**ПРИМЕР 13.2.**

Вычислить приближенно значение $\operatorname{arctg}1{,}3$ до трех знаков после запятой, оценить допущенную относительную погрешность $\delta$.

РЕШЕНИЕ

Приближенное вычисление произведем с помощью формулы (13.1).

***Шаг 1.*** Представим величину $\operatorname{arctg}1{,}3$ в виде функции $y = \operatorname{arctg}x$.

Согласно условию задачи $x = x_0 + \Delta x = 1{,}3$. Пусть $x_0 = 1$. Так как известно табличное значение $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$ (приложение 1), то $\Delta x = 1{,}3 - 1 = 0{,}3$.

***Шаг 2.*** Выполним необходимые вычисления:

$$f(x_0) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

$$f'(x) = (\operatorname{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f'(x_0)\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

***Шаг 3.*** Подставим полученные значения в формулу (13.1), получим

$$\operatorname{arctg}1{,}3 \approx \frac{\pi}{4} + 0{,}5\cdot 0{,}3 \approx 0{,}78539 + 0{,}15 = 0{,}935398 \approx 0{,}935.$$

***Шаг 4.*** Оценим относительную погрешность вычисления $\delta$, %:

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

$$dy = 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}15,$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),$$

$$\Delta y \approx 0{,}935 - \frac{\pi}{4} = 0{,}149402 \approx 0{,}149.$$

Используя формулу (13.2), получим

$$\delta = \left|\frac{0{,}149-0{,}15}{0{,}15}\right|\cdot 100 = \left|\frac{-0{,}001}{0{,}15}\right|\cdot 100 = 0{,}006\cdot 100 = 0{,}6\ \%.$$

ОТВЕТ

$\operatorname{arctg}1{,}3 \approx 0{,}935$ с относительной погрешностью $\delta = 0{,}6\ \%$ ■

## 14. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке $[a; b]$, тогда ее производная $y' = f'(x)$ является некоторой функцией на данном промежутке. Допустим, что функцию $y' = f'(x)$ в рассматриваемом промежутке можно продифференцировать еще раз, тогда производная $(y')' = (f'(x))'$ от производной функции в точке $x$ называется второй производной функции $y = f(x)$ или производной второго порядка в этой точке и обозначается как $y''$, $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Таким образом, по определению

$$y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Производная от производной второго порядка называется третьей производной или производной третьего порядка и обозначается как

$$y''' = (y'')' \text{ или } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Аналогично *n*-производной или производной *n*-го порядка функции $y = f(x)$ в точке $x$ называется производная от производной (*n* – 1)-го порядка в этой точке и обозначается как $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ или $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Таким образом, по определению производной

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \text{ или } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы *n* раз, то имеют место формулы Лейбница

$$(C_1 u \pm C_2 v)^{(n)} = C_1 u^{(n)} \pm C_2 v^{(n)},$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + u v^{(n)}.$$

Если функция задана параметрически с помощью системы уравнений $\begin{cases} y = g(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$, то ее производные высших порядков вычисляются последовательно по следующим формулам:

– производная первого порядка $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

– производная второго порядка $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$;

– производная третьего порядка $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ и т.д.

**Примечание.** При $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ порядок производной обозначается штрихами, а при $n \geq 4$ – арабской цифрой, записанной в скобках, или римской цифрой. Например, производная третьего порядка обозначается как $y'''$, производная седьмого порядка – $y^{(7)}$.

**ПРИМЕР 14.1.**

Найти производную второго порядка функции $y = \ln\left(x^2 - 3x\right)$.

РЕШЕНИЕ

Производная второго порядка определяется по формуле $y'' = (y')'$.

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка $y' = f'(x)$:

$$y' = \left(\ln\left(x^2 - 3x\right)\right)' = \frac{\left(x^2 - 3x\right)'}{x^2 - 3x} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}.$$

***Шаг 2.*** Найдем производную второго порядка $y'' = \left(f'(x)\right)'$:

$$y'' = \left(\frac{2x - 3}{x^2 - 3x}\right)' = \frac{(2x - 3)' \cdot \left(x^2 - 3x\right) - (2x - 3) \cdot \left(x^2 - 3x\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(x^2 - 3x\right) - (2x - 3) \cdot (2x - 3)}{\left(x^2 - 3x\right)^2} = \frac{2x^2 - 6x - \left(4x^2 - 12x + 9\right)}{\left(x^2 - 3x\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 4x^2 + 12x - 9}{\left(x^2 - 3x\right)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{\left(x^2 - 3x\right)^2} = -\frac{2x^2 - 6x + 9}{\left(x^2 - 3x\right)^2}.$$

ОТВЕТ

$$y'' = -\frac{2x^2 - 6x + 9}{\left(x^2 - 3x\right)^2}$$ ■

**ПРИМЕР 14.2.**

Найти производную третьего порядка функции $y = 3^x + \ln x - 4\sin x$.

РЕШЕНИЕ

Производная третьего порядка определяется по формулам

$$y''' = \left(y''\right)', \quad y'' = \left(y'\right)'.$$

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка $y' = f'(x)$:

$$y' = \left(3^x + \ln x - 4\sin x\right)' = \left(3^x\right)' + (\ln x)' - 4(\sin x)' = 3^x \cdot \ln 3 + \frac{1}{x} - 4\cos x.$$

***Шаг 2.*** Найдем производную второго порядка $y'' = \left(y'\right)'$:

$$y'' = \left(3^x \cdot \ln 3 + \frac{1}{x} - 4\cos x\right)' = \ln 3 \cdot \left(3^x\right)' + \left(x^{-1}\right)' - 4(\cos x)' =$$

$$= \ln 3 \cdot \left(3^x\right) \cdot \ln 3 - x^{-1-1} - 4(-\sin x) = \ln^2 3 \cdot \left(3^x\right) - x^{-2} + 4\sin x.$$

***Шаг 3.*** Найдем производную третьего порядка $y''' = \left(y''\right)'$:

$$y''' = \left(\ln^2 3 \cdot \left(3^x\right) - x^{-2} + 4\sin x\right)' = \ln^2 3 \cdot \left(3^x\right)' - \left(x^{-2}\right)' + 4\left(\sin x\right)' =$$

$$= \ln^2 3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 - \left(-2x^{-2-1}\right) + 4\cos x = \ln^3 3 \cdot 3^x + 2x^{-3} + 4\cos x\,.$$

ОТВЕТ

$y''' = \ln^3 3 \cdot 3^x + 2x^{-3} + 4\cos x$ ■

**ПРИМЕР 14.3.**

Найти $d^3 y$, если $\begin{cases} y = t^5, \\ x = \ln t,\ t > 0. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка согласно формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$:

$$\left.\begin{aligned} y'_t &= \left(t^5\right)' = 5t^4 \\ x'_t &= \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_x = \frac{5t^4}{\frac{1}{t}} = 5t^4 \cdot t = 5t^5,$$

$$y'_x = 5t^5.$$

***Шаг 2.*** Найдем производную второго порядка согласно формуле $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$:

$$\left.\begin{aligned} \left(y'_x\right)'_t &= \left(5t^5\right)' = 25t^4 \\ x'_t &= \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y''_{xx} = \frac{25t^4}{\frac{1}{t}} = 25t^4 \cdot t = 25t^5.$$

***Шаг 3.*** Найдем производную третьего порядка согласно формуле $y'''_{xxx} = \dfrac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}$:

$$\left.\begin{aligned} \left(y''_{xx}\right)'_t &= \left(25t^5\right)' = 125t^4 \\ x'_t &= \left(\ln t\right)' = \frac{1}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'''_{xxx} = \frac{125t^4}{\frac{1}{t}} = 125t^4 \cdot t = 125t^5.$$

ОТВЕТ

$y'''_{xxx} = 125t^5$ ■

# 15. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Производная второго порядка имеет простой механический смысл. Если известен закон прямолинейного движения, то скорость в момент времени *t* равна производной первого порядка пути по времени *t*:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Производная второго порядка пути по времени есть ускорение движения в момент времени *t*:

$$w(t) = (v(t))'_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}.$$

**ПРИМЕР 15.1.**

Закон прямолинейного движения материальной точки, начиная с момента времени $t = 0$, определяется формулой $s = 3t^2 + t^3$ (м). Какую скорость и ускорение будет иметь точка через 4 с после начала движения?

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем закон изменения скорости.

Скорость движения материальной точки равна производной первого порядка закона движения по времени *t*:

$$V = s'(t),$$

$$V = (3t^2 + t^3)'_t = 6t + 3t^2.$$

***Шаг 2.*** Найдем скорость движения через 4 с:

$$V(4) = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 = 24 + 48 = 72 \text{ м/с}.$$

***Шаг 3.*** Найдем закон изменения ускорения.

Ускорение движения материальной точки равно производной второго порядка закона движения по времени *t* или производной первого порядка скорости движения по времени *t*:

$$W = s''(t) \text{ или } W = v'(t),$$

$$W = (6t + 3t^2)' = 6 + 6t.$$

***Шаг 4.*** Найдем ускорение движения через 4 с:

$$W(4) = 6 + 6 \cdot 4 = 6 + 24 = 30 \text{ м/с}^2.$$

ОТВЕТ

$V(4) = 72$ м/с, $W(4) = 30$ м/с$^2$. ■

## 16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $x$ – независимая переменная. Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от ее первого дифференциала $d\,y$:

$$d^{\,2}y = d(dy) = y''dx^2. \qquad (16.1)$$

Аналогично дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала второго порядка $d^{\,2}y$:

$$d^{\,3}y = d\left(d^2y\right) = y'''dx^3 \text{ и т.д.}$$

Если дифференциал $(n-1)$-го порядка определен, то дифференциал $n$-го порядка равен дифференциалу от дифференциала $(n-1)$ порядка $d^{\,n-1}y$:

$$d^{\,n}y = d\left(d^{\,n-1}y\right) = y^{(n)}dx^n.$$

Если переменная $x$ – функция переменной $x = \varphi(t)$, то дифференциал функции может отличаться от приращения аргумента: $d\,x \neq \Delta\,x$. В этом случае:

– дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^{\,2}y = d(dy) = d(y'dx) = y''dxdx + y'd(dx) = y''(dx)^2 + y'd^2x; \qquad (16.2)$$

– аналогично вычисляется дифференциал третьего порядка:

$$d^{\,3}y = y'''(dx)^3 + y''d(d\,x)^2 + y''d\,xd^2x + y'd^3x.$$

Отметим, что для дифференциалов второго и более высокого порядков нарушается инвариантность формы.

**Примечание.** Записи $d^{\,n}y$ и $d\left(d^{\,n-1}y\right)$ идентичны, т.е. $d^{\,n}y = d\left(d^{\,n-1}y\right)$, они означают дифференциал $n$-го порядка, а запись $(d\,y)^n$ означает $n$-ю степень дифференциала первого порядка.

**ПРИМЕР 16.1.**

Для функции $y = e^{-x^2}$ найти $d^2y$, где $x$ – независимая переменная.

РЕШЕНИЕ

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле (16.1).

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка:

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

***Шаг 2.*** Найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2\left(xe^{-x^2}\right)' = -2\left(x' \cdot \left(e^{-x^2}\right) + x\left(e^{-x^2}\right)'\right) =$$

$$= -2\left(e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)\left(-x^2\right)'\right) = -2\left(e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)(-2x)\right) = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) =$$

$$= -2e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right).$$

Применим формулу дифференциала второго порядка (16.1):

$$d^2y = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)dx^2.$$

ОТВЕТ

$d^2y = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)dx^2$ ■

**ПРИМЕР 16.2.**

Для функции $y = 4x^3 + 2x^2 - 8$ найти $d^2y$, где $x$ – функция переменной $t$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле (16.2). Найдем производную первого порядка:

$$y' = \left(4x^3 + 2x^2 - 8\right)' = 12x^2 + 4x.$$

***Шаг 2.*** Найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(12x^2 + 4x\right)' = 24x + 4.$$

Применим формулу дифференциала второго порядка (16.2):

$$d^2y = (24x + 4)(dx)^2 + \left(12x^2 + 4x\right)d^2x.$$

ОТВЕТ

$d^2y = (24x + 4)(dx)^2 + \left(12x^2 + 4x\right)d^2x$ ■

## 17. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

Применение производных при вычислении пределов облегчает вычисление пределов, содержащих такие неопределенности, как

$$\left(\frac{0}{0}\right),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ (0\cdot\infty),\ \left(1^{\infty}\right),\ \left(0^{0}\right),\ \left(\infty^{0}\right).$$

### 17.1. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Рассмотрим отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в некоторой точке $x = x_0$ равны нулю или бесконечности. Тогда отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ не имеет смысла, но предел этого отношения, как известно, может существовать, для этого необходимо раскрыть неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим правило Лопиталя (п.Л.), которое на практике существенно облегчает вычисление указанных пределов.

**Правило Лопиталя**

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = x_0$, то предел отношения функций при $x \to x_0$ равен пределу отношения их производных, если последний предел (конечный или бесконечный) существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\ \text{или}\ \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{п.Л.}}{=\!=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если же окажется, что после применения правила Лопиталя неопределенность не устранится, то правило Лопиталя применяется повторно:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\,\text{или}\,\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{п.Л.}}{=\!=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{0}{0}\,\text{или}\,\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{п.Л.}}{=\!=} \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

**Примечание.** В тех случаях, когда после применения правила Лопиталя не удается раскрыть неопределенность, правило Лопиталя может применяться до тех пор, пока неопределенность не будет устранена.

**ПРИМЕР 17.1.1.**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x-4}$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг. 1.*** Подставим предельное значение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-4}=\frac{e^\infty}{\infty^2+3\cdot\infty-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Констатируем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

***Шаг. 2.*** Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+3x-4\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

***Шаг. 3.*** Неопределенность не устранена, в связи с чем вновь применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2x+3\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\left(\frac{\infty}{2}\right)=\infty.$$

ОТВЕТ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-4}=\infty$$ ■

**ПРИМЕР 17.1.2.**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг. 1.*** Подставим предельное значение (приложение 1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Констатируем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

***Шаг. 2.*** Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 7x\right)'}{\left(x\sin 7x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1'-\left(\cos 7x\right)'}{x'\sin 7x+x\left(\sin 7x\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin 7x)\cdot(7x)'}{1\cdot \sin 7x + x(\cos 7x)\cdot(7x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x\cdot 7}{\sin 7x + x(\cos 7x)\cdot 7}.$$

***Шаг. 3.*** Подставим предельное значение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{7\cdot \sin 7x}{\sin 7x + 7x(\cos 7x)} = \frac{7\cdot \sin 0}{\sin 0 + 7\cdot 0\cdot \cos 0} = \frac{7\cdot 0}{0+0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

***Шаг. 4.*** Неопределенность не устранена, в связи с чем вновь применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{7\cdot \sin 7x}{\sin 7x + 7x(\cos 7x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \underline{\underline{\text{п.Л.}}} \lim_{x\to 0} \frac{(7\cdot \sin 7x)'}{(\sin 7x + 7x(\cos 7x))'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7\cdot(\sin 7x)'}{(\sin 7x)' + 7\cdot(x(\cos 7x))'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7\cdot \cos 7x (7x)'}{\cos 7x\cdot(7x)' + 7\cdot\left(x'(\cos 7x) + x(\cos 7x)'\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7\cdot \cos 7x\cdot 7}{\cos 7x\cdot 7 + 7\cdot\left(1\cdot(\cos 7x) + x\cdot(-\sin 7x)\cdot(7x)'\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{49\cos 7x}{7\cos 7x + 7\cdot(\cos 7x - x\cdot \sin 7x\cdot 7)}.$$

***Шаг. 5.*** Подставим предельное значение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{49\cos 7x}{7\cos 7x + 7\cdot(\cos 7x - 7x\cdot \sin 7x)} = \frac{49\cdot \cos 0}{7\cos 0 + 7\cdot(\cos 0 - 7\cdot 0\cdot \sin 0)} =$$

$$= \frac{49\cdot 1}{7\cdot 1 + 7\cdot(1-0)} = \frac{49}{7+7} = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}.$$

ОТВЕТ

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x} = \frac{7}{2}$$ ■

## 17.2. Раскрытие неопределенностей $(0\cdot\infty)$ и $(\infty\cdot 0)$

Раскрытие неопределенностей вида $(0\cdot\infty)$ или $(\infty\cdot 0)$ можно свести к вышерассмотренным неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, применив простейшее алгебраическое преобразование.

Используем следующие правила вычисления пределов:

– **правило 1 (п.1):** $\frac{C}{0}=\infty$ − частное от деления постоянной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно большая;

– **правило 2 (п.2):** $\frac{C}{\infty}=0$ − частное от деления постоянной величины на бесконечно большую величину есть величина бесконечно малая.

Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{g}(x)=\infty$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \mathrm{g}(x)=(0\cdot\infty)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{\mathrm{g}(x)}\right)}=\dfrac{0}{\left(\dfrac{1}{\infty}\right)}\underline{\underline{\text{п.2}}}\left(\dfrac{0}{0}\right),\\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\mathrm{g}(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}=\dfrac{\infty}{\left(\dfrac{1}{0}\right)}\underline{\underline{\text{п.1}}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).\end{cases}$$

**ПРИМЕР 17.2.1.**

Вычислить правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг. 1.*** Подставим предельное значение (приложения 1, 5, 6):

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=0\cdot(-\infty).$$

Констатируем неопределенность $(0\cdot\infty)$.

***Шаг. 2.*** Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{\ln 0}{\left(\dfrac{1}{0}\right)}\underline{\underline{\text{п.1}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Данное преобразование позволяет применить правило Лопиталя.

***Шаг. 3.*** Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(x^{-1}\right)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-1-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0+}x=0.$$

ОТВЕТ

$\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x=0$ ■

**ПРИМЕР 17.2.2.**

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}x^3\mathrm{ctg}x$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг. 1.*** Подставим предельное значение (приложения 1, 5, 6):

$$\lim_{x\to 0}x^3\mathrm{ctg}x=0^3\cdot\mathrm{ctg}0=(0\cdot\infty).$$

Констатируем неопределенность $(0\cdot\infty)$.

***Шаг. 2.*** Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}x^3\mathrm{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\mathrm{tg}x}=\frac{0^3}{\mathrm{tg}0}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Данное преобразование дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ и позволяет применить правило Лопиталя.

***Шаг. 3.*** Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\mathrm{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{(\mathrm{tg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}3x^2\cos^2 x=$$

$$=3\cdot 0^2\cdot\cos^2 0=3\cdot 0\cdot 1=0.$$

ОТВЕТ

$\lim\limits_{x\to 0}x^3\mathrm{ctg}x=0$. ■

# 18. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Одной из наиболее важных задач дифференциального исчисления является задача исследования поведения функций.

Рассмотрим основные теоремы о дифференцируемых функциях, опуская при этом доказательства.

## 18.1. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

**Теорема Ролля**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и значения функции на границах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $x_0 \in [a; b]$, в которой производная первого порядка функции $y = f(x)$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля указывает на тот факт, что если условия теоремы выполняются, то на интервале существует такая точка $x_0 \in [a; b]$, что в точке $M(x_0; f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси $0X$ (рис. 18.1).

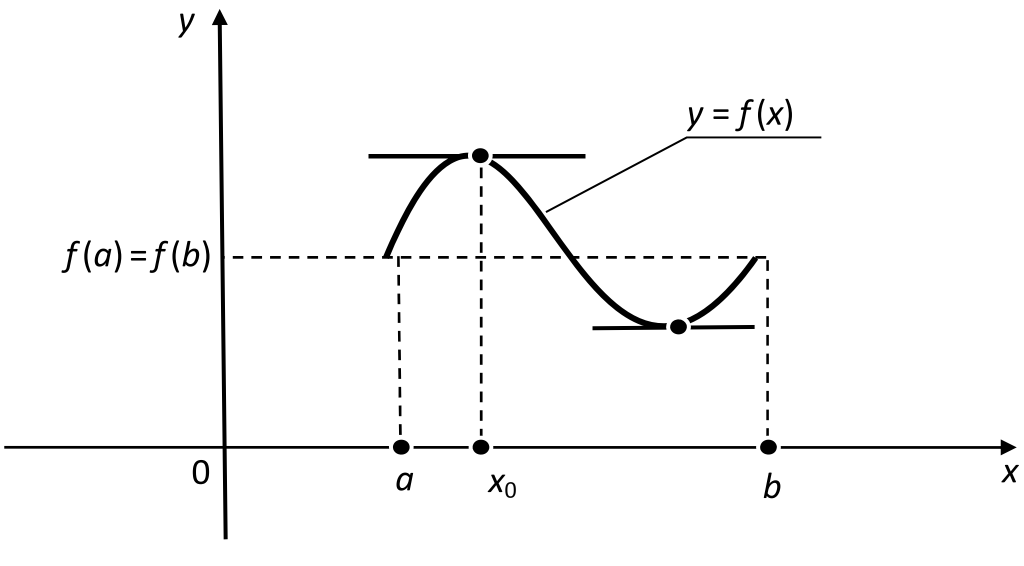



Рис. 18.1. Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

**Примечание.** Теорема Ролля утверждает о существовании по крайней мере одной точки, в которой производная первого порядка равна нулю, хотя таких точек может быть несколько (см. рис. 18.1).

**Теорема Лагранжа**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка $x_0 \in [a; b]$, в которой выполняется условие

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Другими словами, если на некотором отрезке выполняется условие теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной первого порядка в промежуточной точке $x_0 \in [a; b]$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей *AB* (рис. 18.2).

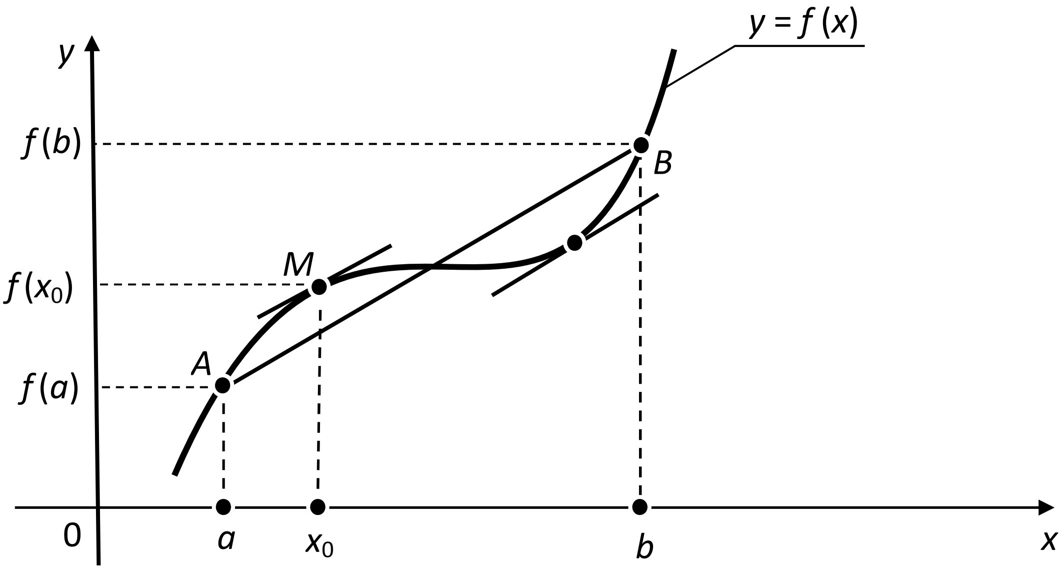



Рис. 18.2. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то на интервале $(a,\ b)$ существует по крайней мере одна точка, такая, что в соответствующей точке $M(x_0; f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$.

Из теоремы следует, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и ее производная первого порядка равна нулю на интервале $(a,\ b)$, то функция постоянна на отрезке $[a; b]$.

**Теорема Коши**

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a, b)$ и $g(x) \neq 0$ на этом интервале, то существует по крайней мере одна точка $x_0 \in [a; b]$, такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению их производных в точке $x_0$.

Соотношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ называется формулой Коши.

**Примечание.** Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши, если $g(x) = x$, а теорему Ролля – как частный случай теоремы Лагранжа.

## 18.2. Возрастание и убывание дифференцируемой функции

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на данном промежутке, если для любых двух точек $x_1$, $x_2$ из этого промежутка выполняется условие

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1)),$$

т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис. 18.3, *а*).

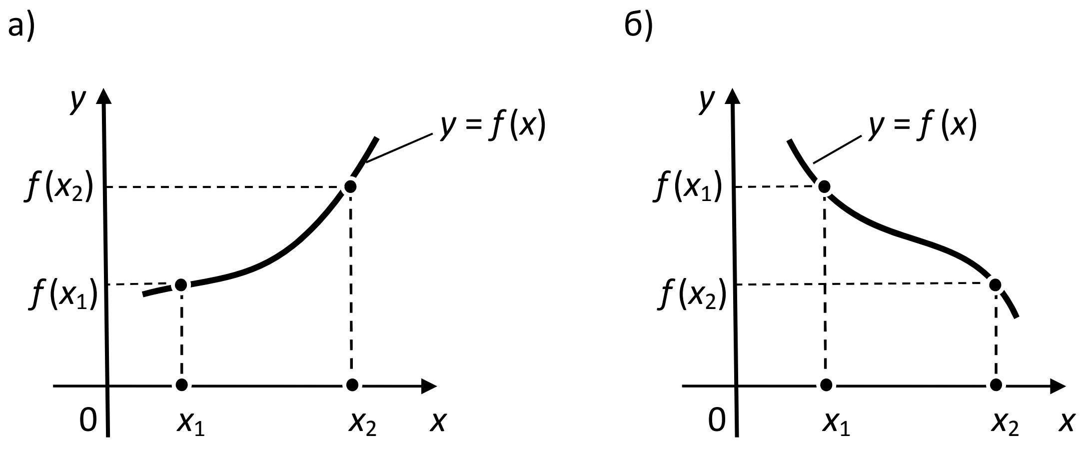



Рис. 18.3. Геометрическая интерпретация монотонности функций:
а – возрастающей; б – убывающей

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на данном промежутке, если для любых двух точек $x_1$, $x_2$ из этого промежутка выполняется условие

$$(x_2 > x_1) \Rightarrow (f(x_2) < f(x_1)),$$

т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 18.3, *б*).

Промежутки, на которых функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), называются промежутками монотонности.

**Необходимое и достаточное условия возрастания и убывания дифференцируемой функции**

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на некотором отрезке $[a; b]$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ не убывала на отрезке $[a; d]$, ***необходимо***, чтобы в любой точке $x$ этого промежутка выполнялось условие $f'(x) \geq 0$ (рис. 18.4).

Для того чтобы функция $y = f(x)$ возрастала на отрезке $[d; b]$, ***достаточно***, чтобы в любой точке $x$ этого промежутка выполнялось условие $f'(x) > 0$ (см. рис. 18.4).

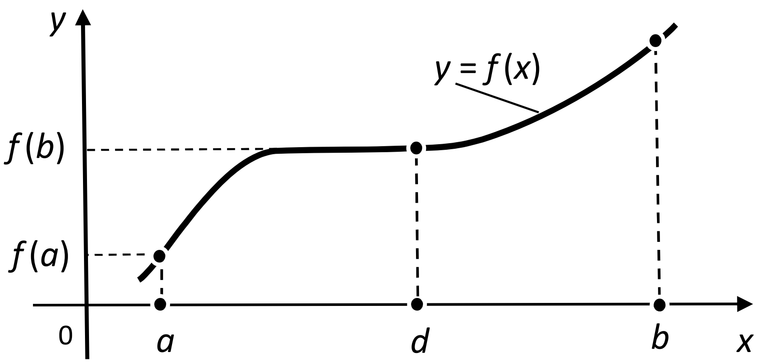



Рис. 18.4. Интервалы монотонности функции:
на отрезке [*a*; *d*] функция не убывает;
на отрезке [*d*; *b*] функция возрастает

Для того чтобы функция $y = f(x)$ не возрастала на отрезке $[a; d]$, ***необходимо***, чтобы в любой точке $x$ этого промежутка выполнялось условие $f'(x) \leq 0$ (рис. 18.5).

Для того чтобы функция $y = f(x)$ убывала на отрезке $[d; b]$, ***достаточно***, чтобы в любой точке $x$ этого промежутка выполнялось условие $f'(x) < 0$ (см. рис. 18.5).

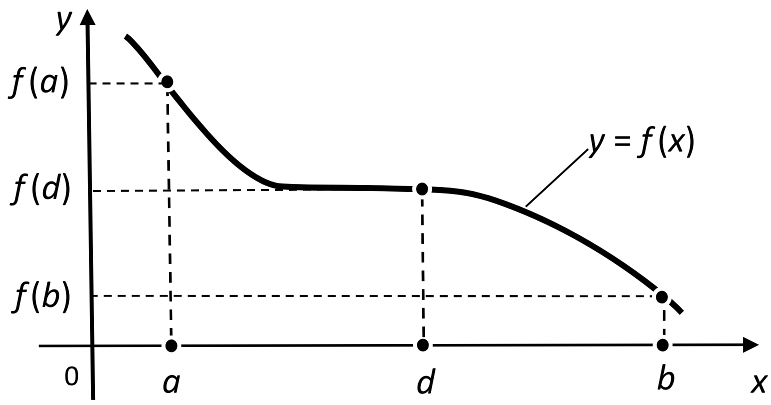



Рис. 18.5. Интервалы монотонности функции:
на отрезке [$a$; $d$] функция не возрастает;
на отрезке [$d$; $b$] функция убывает

Если производная первого порядка функции непрерывна, то разделять интервалы монотонности могут только те точки, в которых производная равна нулю ($f'(x)=0$), т.к. перемена знака возможна лишь при переходе через нуль.

Если не требовать непрерывности производной функции, то интервалы монотонности могут разделять точки, в которых производная первого порядка не существует.

Точка, в которой производная первого порядка равна нулю или не существует, называется ***стационарной точкой первого рода*** (или критической).

На рис. 18.6 изображен график функции, у которой интервалы монотонности разделяются двумя стационарными точками:

1) $x_1 = c$, в которой производная первого порядка равна нулю: $f'(c)=0$;

2) $x_2 = x_0$, в которой производная первого порядка не существует.

Касательная, проведенная к графику функции в точке $x_1 = c$, параллельна оси 0*X*.

Обобщая вышеуказанные сведения, сформулируем ***алгоритм исследования функции на монотонность***:

1) найти стационарные точки, в которых производная первого порядка равна нулю или не существует, для чего решить уравнение $f'(x)=0$. Стационарные точки разбивают область определения функции (ООФ) $y = f(x)$ на промежутки, в каждом из которых производная первого порядка сохраняет знак;

2) определить знак производной первого порядка на каждом промежутке:

– если $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает;
– если $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает.

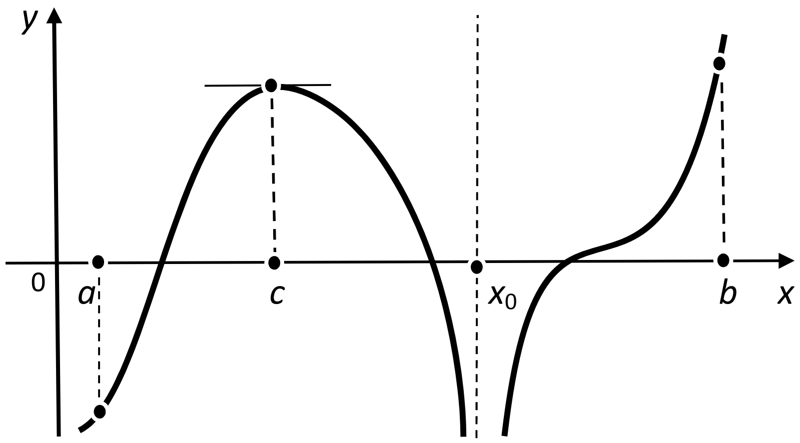



Рис. 18.6. Интервалы монотонности:
на отрезке $[a; c]$ и полуинтервале $(x_0; b]$ функция возрастает;
на полуинтервале $[c; x_0)$ функция убывает

В задачах, связанных с отысканием интервалов монотонности, возрастание и убывание функции на соответствующем интервале числовой оси $0X$ будем символически обозначать наклонной стрелкой с направлением вверх или вниз (рис. 18.7).


Рис. 18.7. Интервалы монотонности функции:
а – интервал возрастания функции $(a; b)$;
б – интервал убывания функции $(c; d)$

**ПРИМЕР 18.2.1.**

Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{x} - x$ на монотонность.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем ООФ, которая регламентируется выполнением следующего условия (приложение 4): знаменатель дроби отличен от нуля $(x \neq 0)$.

ООФ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

***Шаг 2.*** Найдем стационарные точки первого рода (приложение 3):

$$y' = \left(\frac{1}{x} + x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (x)' = \left(x^{-1}\right)' + 1 = (-1)\,x^{-1-1} + 1 = -x^{-2} + 1 = -\frac{1}{x^2} + 1.$$

Решим уравнение:

$$y' = 0,$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{-1 + x^2}{x^2} = 0,$$

$$-1 + x^2 = 0,$$

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Учтем, что $y'$ не существует при $x^2 = 0$, т.е. $x = 0$.

Таким образом, имеем три стационарные точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Эти точки делят область определения функции на полуинтервалы $(-\infty; -1]$, $[-1; 0)$, $(0; 1]$, $[1; \infty)$.

***Шаг 3.*** Определим знаки производной первого порядка на каждом промежутке. Для этого вычислим значение производной первого порядка, подставляя значение *x*, принадлежащее исследуемому полуинтервалу.

Для полуинтервала $(-\infty; -1]$ возьмем значение $x = -2$, имеем

$$y'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{-1 + 4}{4} = \frac{3}{4} > 0,$$

следовательно, на данном промежутке функция возрастает.

Для полуинтервала $[-1; 0)$ возьмем значение $x = -\frac{1}{2}$, имеем

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = -\frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = -4 + 1 = -3 < 0,$$

следовательно, на данном промежутке функция убывает.

Для полуинтервала $(0; 1]$ возьмем значение $x = \frac{1}{2}$, имеем

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = -\frac{1}{\frac{1}{4}} + 1 = -4 + 1 = -3 < 0,$$

следовательно, на данном промежутке функция убывает.

Для полуинтервала $[1;\infty)$ возьмем значение $x=2$, имеем

$$y'(2)=-\frac{1}{(2)^2}+1=-\frac{1}{4}+1=\frac{-1+4}{4}=\frac{3}{4}>0,$$

следовательно, на данном промежутке функция возрастает.

На рис. 18.8 изображены интервалы монотонности функции.

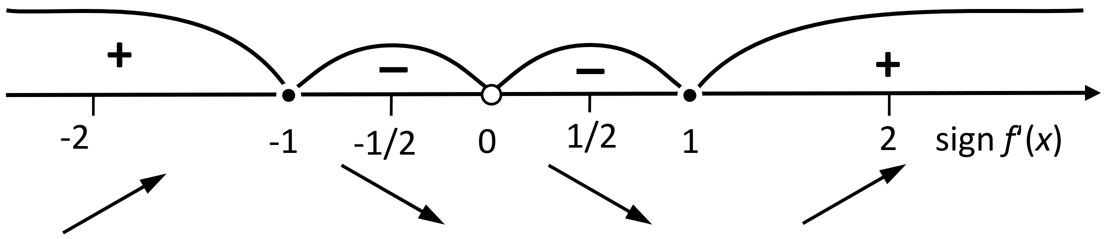



Рис. 18.8. Интервалы монотонности функции $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}-x}$

ОТВЕТ

Функция возрастает при $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ и убывает при $x\in[-1;0)\cup(0;1]$. ■

## 18.3. Экстремум функции

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(a;b)$. Точка $x_0\in(a;b)$ называется точкой локального ***максимума*** (max) функции, если существует такая δ-окрестность точки $x_0$, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$ (рис. 18.9).

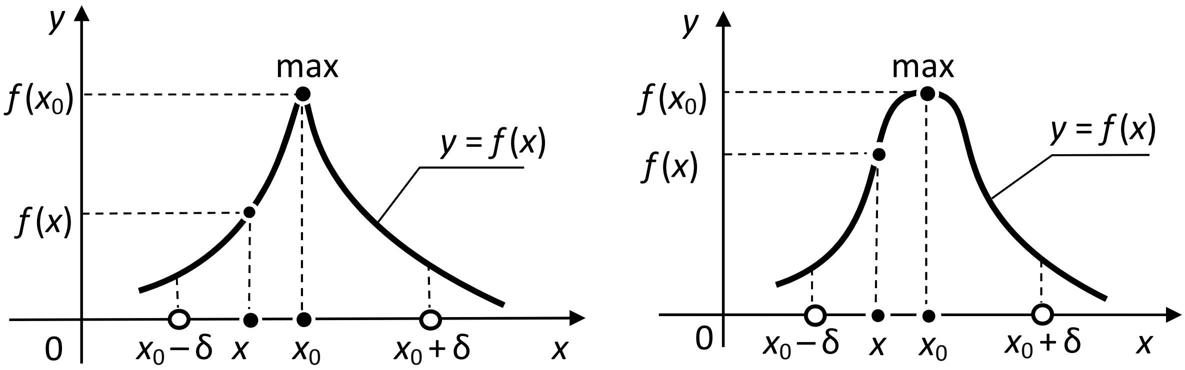



Рис. 18.9. Экстремум функции: $x_0$ – точка локального максимума

Точка $x_0 \in (a;b)$ называется точкой ***локального минимума*** (min) функции, если существует такая δ-окрестность точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (рис. 18.10).

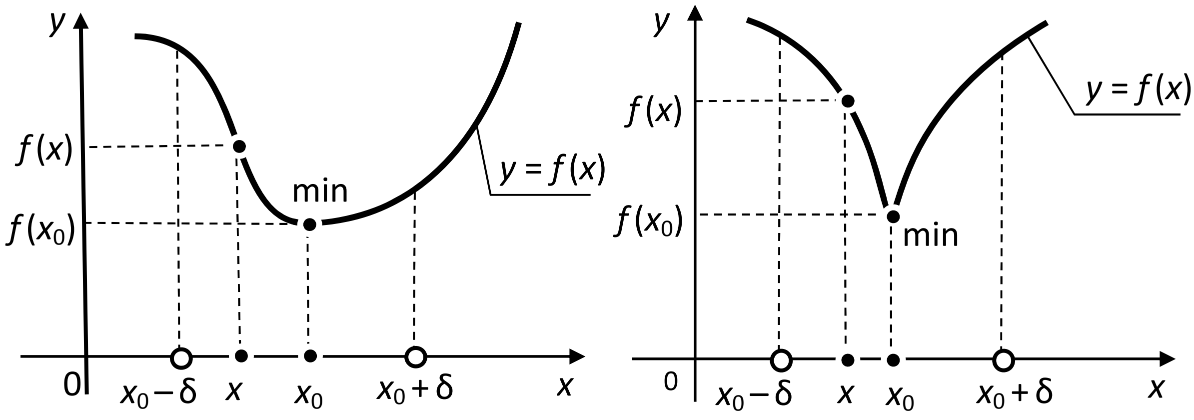



Рис. 18.10. Экстремум функции: $x_0$ – точка локального минимума

Значение функции $y = f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называют локальным максимумом (минимумом) функции, или экстремумом функции.

На одном промежутке функция может иметь более одного экстремума, причем некоторый локальный максимум может быть меньше некоторого локального минимума.

На рис. 18.11 изображен график функции $y = f(x)$, имеющей на отрезке [$a$; $b$] четыре экстремума: две точки локального максимума $x_1$, $x_3$ и две точки локального минимума $x_2$, $x_4$, причем значение функции в точке локального минимума $x_4$ больше значения функции в точке локального максимума $x_1$: $y_{\min}(x_4) > y_{\max}(x_1)$.

**Необходимое и достаточное условия существования точек экстремума функции**

***Необходимым условием существования экстремума*** дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ является равенство нулю или не существование производной первого порядка функции в этой точке.

Напомним, что точки, в которых производная первого порядка функции равна нулю, называются стационарными точками первого рода (или критическими). Не каждая стационарная точка является точкой экстремума.

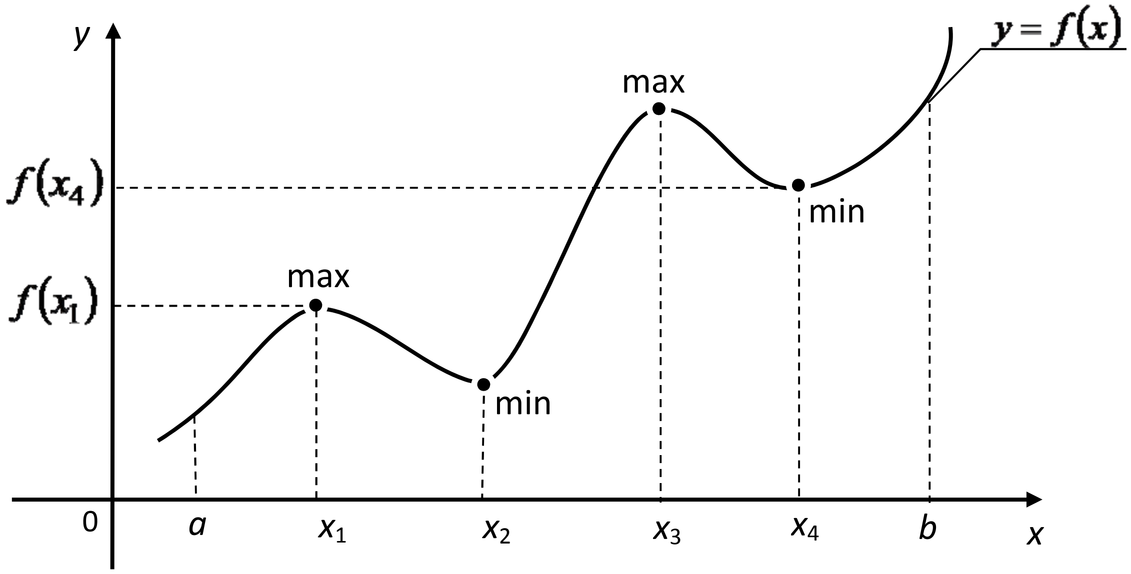



Рис. 18.11. Экстремум функции $y = f(x)$:
$x_1,\ x_3$ – точки локального максимума;
$x_2,\ x_4$ – точки локального минимума

***Достаточное условие существования точек экстремума функции*** выражается тремя правилами.

***Правило 1.*** Если при переходе через критическую точку $x_0$ производная первого порядка непрерывной функции $f'(x)$ ***меняет знак*** с плюса на минус, то функция имеет максимум в этой точке; если же знак меняется с минуса на плюс, то функция в этой точке имеет минимум.

**Примечание.** Если производная $f'(x)$ при переходе через точку $x_0$ не меняет знак, то экстремума в этой точке нет.

***Правило 2.*** Если в критической точке $x_0$ производная первого порядка равна нулю ($f'(x_0) = 0$) и существует производная второго порядка $f''(x_0)$, то в этой точке функция имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$; если же $f''(x_0) > 0$, то функция в этой точке имеет минимум.

Таким образом, достаточное условие существования экстремума можно сформулировать как

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ – точка локального минимума,}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &< 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ – точка локального максимума.}$$

***Правило 3.*** Если в критической точке $x_0$ функция имеет производные $n$-го порядка $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, …, $f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то в этой точке наличие экстремума определяется числом $n$, т.е. порядком производной (табл. 18.1).

Таблица 18.1

Наличие экстремума

| Значение $n$ | Экстремум |
|---|---|
| Чётное число | $x_0$ – точка локального ***максимума***, если $f^{(n)}(x_0)<0$,<br>$x_0$ – точка локального ***минимума***, если $f^{(n)}(x_0)>0$ |
| Нечётное число | Экстремума нет |

**Примечание.** Исследование знака производной первого порядка на интервалах, разделенных стационарными точками, совпадает с нахождением интервалов монотонности функции. Это связано с тем, что точки экстремума и точки разрыва функции разделяют область ее определения на интервалы возрастания и убывания.

Обобщая вышесказанное, сформулируем ***алгоритм нахождения экстремума функции*** двумя способами.

***Первый способ:***

1) найти стационарные точки, в которых производная первого порядка равна нулю или не существует: $f'(x)=0$;

2) разбить ООФ на промежутки стационарными точками, определить знаки производной первого порядка на полученных промежутках;

3) если при переходе через стационарную точку производная первого порядка функции меняет знак, то в этой точке существует экстремум.

***Второй способ:***

1) найти стационарные точки, в которых производная первого порядка равна нулю или не существует: $f'(x)=0$;

2) применить достаточное условие существования экстремума.

Так, в примере 18.2.1 функция $y=\frac{1}{x}-x$ исследовалась на монотонность. На рис. 18.8 видно, что при переходе через точку $x=-1$ функция имеет максимум, т.к. производная первого порядка функции меняет знак с плюса на минус, а в точке $x=1$ функция имеет минимум, т.к. производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс. Стационарная точка $x=0$ не является точкой экстремума, т.к. при переходе через эту точку производная первого порядка сохраняет знак.

**ПРИМЕР 18.3.1.**

Найти экстремум функции $y = x^3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем ООФ (приложение 4): $x \in R$.

***Шаг 2.*** Найдем стационарные точки:

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2,$$

$$y' = 0.$$

Решим уравнение $y' = 0$:

$$3x^2 = 0,$$

$$x = 0.$$

Стационарная точка $x = 0$ делит область определения функции на промежутки $(-\infty; 0]$, $[0; \infty)$.

***Шаг 3.*** Определим знаки производной первого порядка на каждом промежутке.

Вычислим значение производной первого порядка, подставляя значение $x$, принадлежащее исследуемому промежутку.

Для полуинтервала $(-\infty; 0]$ возьмем значение $x = -1$, имеем

$$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 1 = 3 > 0,$$

следовательно, на данном промежутке функция возрастает.

Для полуинтервала $[0; \infty)$ возьмем значение $x = 1$, имеем

$$y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3 \cdot 1 = 3 > 0,$$

следовательно, на данном промежутке функция возрастает.

На рис. 18.12 изображены интервалы возрастания функции и знаки производной первого порядка.

***Вывод***: производная первого порядка сохраняет знак в точке $x = 0$, следовательно, экстремума нет.

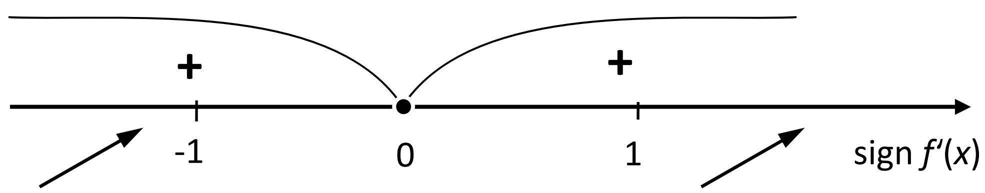



Рис. 18.12. Интервалы монотонности функции $\boldsymbol{y = x^3}$

ОТВЕТ

Экстремума нет ■

**ПРИМЕР 18.3.2.**

Найти экстремум функции $y = 3x - x^3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем ООФ (приложение 4): $x \in R$.

***Шаг 2.*** Найдем стационарные точки первого рода:

$$y' = \left(3x - x^3\right)' = 3 - 3x^2.$$

Решим уравнение $y' = 0$:

$$3 - 3x^2 = 0,$$

$$3\left(1 - x^2\right) = 0,$$

$$1 - x^2 = 0,$$

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Стационарные точки: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

***Шаг 3.*** Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума. Найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(3 - 3x^2\right)' = -6x.$$

Вычислим значение производной второго порядка в стационарных точках:

$$y''(-1) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0,$$

следовательно, $x = -1$ – точка локального минимума;

$$y''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0,$$

следовательно, $x = 1$ – точка локального максимума.

***Шаг 4.*** Найдем экстремальные значения функции:

$$y_{\min}(-1) = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2,$$

$$y_{\max}(1) = 3 \cdot 1 - 1^3 = 3 - 1 = 2.$$

ОТВЕТ

$y_{\min}(-1) = -2$, $y_{\max}(1) = 2$ ■

## 18.4. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Рассмотрим непрерывную кривую на отрезке $[a; b]$.

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале, если на этом интервале она дифференцируема и ее график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке данного интервала.

Функция $y = f(x)$ называется вогнутой на интервале, если на этом интервале она дифференцируема и ее график расположен выше касательной, проведенной в любой точке данного интервала.

Если функция в некоторой окрестности точки $x_0$ дважды непрерывно дифференцируема и $f''(x) \neq 0$, то достаточным условием выпуклости или вогнутости кривой $y = f(x)$ в точке является неравенство:

– $f''(x) < 0$ – график функции выпуклый,

– $f''(x) > 0$ – график функции вогнутый.

***Достаточным условием выпуклости*** функции на промежутке является отрицательность производной второго порядка в каждой точке этого промежутка, т.е. $f''(x) < 0$.

***Достаточным условием вогнутости*** функции на промежутке является положительность производной второго порядка в каждой точке этого промежутка, т.е. $f''(x) > 0$.

**Примечание.** Если на всем промежутке производная второго порядка равна нулю, т.е. $f''(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ линейная.

**Точки перегиба**

Точкой перегиба называется такая точка, в которой с одной стороны от нее кривая выпукла, а с другой – вогнута, иначе говоря, точка, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот. На рис. 18.13 точки $x = c$ и $x = d$ – точки перегиба, принадлежащие ООФ.

На рис. 18.14. изображен график функции с двумя точками $x = c$ и $x = d$, в которых наблюдается разрыв второго рода. Эти точки являются точками перегиба. Так, слева от точки $x = c$ наблюдается вогнутость функции, а справа – выпуклость; слева от точки $x = d$ наблюдается выпуклость функции, а справа – вогнутость.

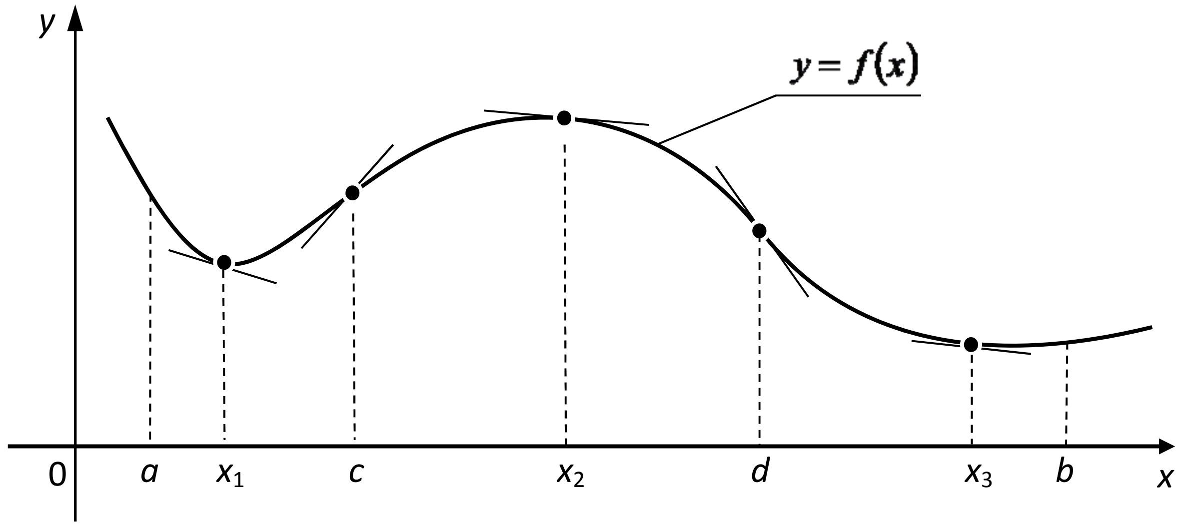



Рис. 18.13. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба функции:
на отрезке [*a*; *c*] и [*d*; *b*] функция вогнута;
на отрезке [*c*; *d*] функция выпукла;
$\boldsymbol{x = c}$ – точка перегиба, вогнутость функции меняется на выпуклость;
$\boldsymbol{x = d}$ – точка перегиба, выпуклость функции меняется на вогнутость

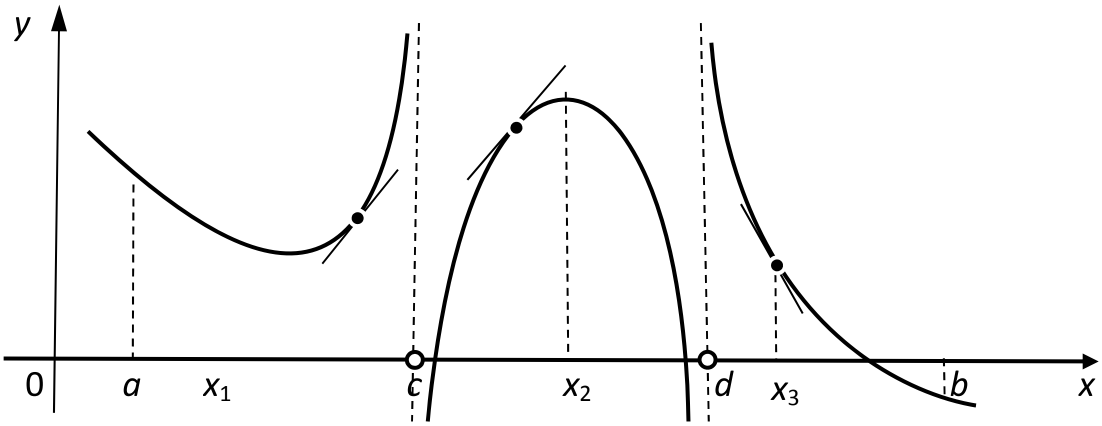



Рис. 18.14. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба функции:
на полуинтервалах [*a*; *c*) и (*d*; *b*] функция вогнута;
на интервале (*c*; *d*) функция выпукла;
прямые $\boldsymbol{x = c}$ и $\boldsymbol{x = d}$ – вертикальные асимптоты;
$x = c$ – точка перегиба, вогнутость меняется на выпуклость;
$x = d$ – точка перегиба, выпуклость меняется на вогнутость

***Необходимое условие существования точки перегиба***. Если $y = f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке, то в точках перегиба этого промежутка производная второго порядка равна нулю ( $f''(x) = 0$ ) или не существует.

**Примечание.** Не каждая точка, в которой $f''(x) = 0$, является точкой перегиба.

Точки, в которых производная второго порядка равна нулю ( $f''(x) = 0$ ) или не существует, называются стационарными точками второго рода.

***Достаточное условие существования точки перегиба***. Если в некоторой окрестности точки $x_0$ производная второго порядка $f''(x)$ непрерывна, кроме, может быть, самой точки, и при переходе через эту точку производная второго порядка меняет знак, то $x_0$ – точка перегиба кривой.

При этом предполагается, что кривая в точке перегиба имеет касательную. Касательная в точке перегиба кривой пересекает эту кривую.

На рис. 18.15 изображены стационарные точки второго рода: $x_1$, $x_2$ – точки перегиба, в точках $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ перегиба нет.

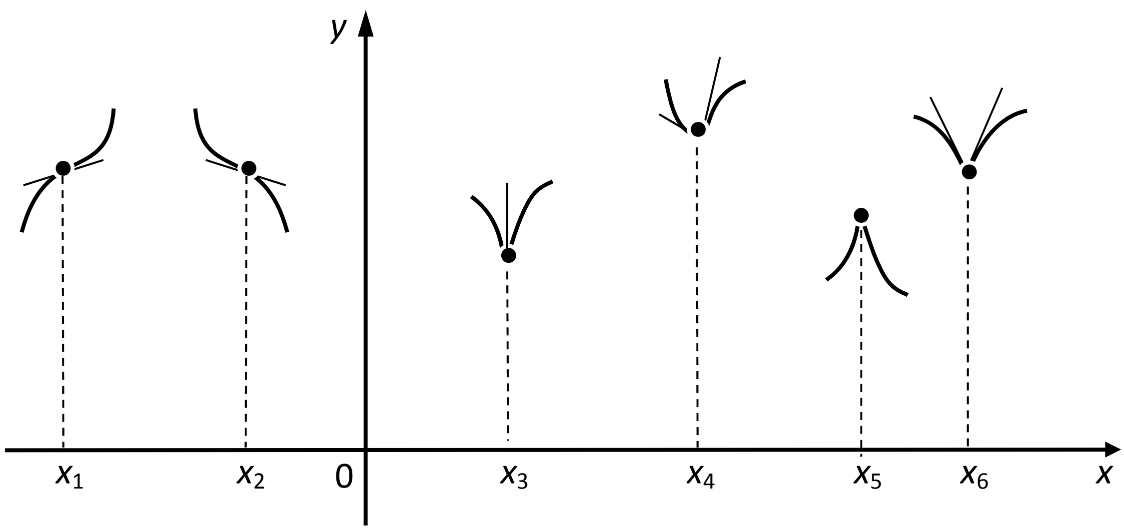



Рис. 18.15. Точки перегиба кривой:
$x_1$, $x_2$ – точки перегиба кривой; в точках $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ перегиба нет

**Примечание.** Если производная второго порядка тождественно равна нулю ( $f''(x) \equiv 0$ ) на всем интервале $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ линейная.

***Алгоритм*** нахождения интервалов выпуклости и вогнутости, точек перегиба функции:

1) найти стационарные точки второго рода, в которых производная второго порядка равна нулю или не существует, для чего решить уравнение $f''(x)=0$;

2) изобразить на числовой оси $0X$ стационарные точки второго рода, которые разбивают ООФ на промежутки;

3) определить знаки производной второго порядка на каждом промежутке:

– если $f''(x)<0$, то график функции выпуклый;

– если $f''(x)>0$, то график функции вогнутый;

4) если производная второго порядка при переходе через стационарную точку меняет знак, то в этой точке констатируем перегиб функции.

При отыскании интервалов выпуклости, вогнутости функции будем использовать символические обозначения (рис. 18.16).


Рис. 18.16. Интервалы функции:
а – интервал выпуклости функции $(a;b)$;
б – интервал вогнутости функции $(c;d)$

**ПРИМЕР 18.4.1.**

Найти интервалы выпуклости, вогнутости функции $y=x^3$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** ООФ (приложение 4): $x\in R$.

Найдем стационарные точки второго рода, для чего решим уравнение $y''=0$.

Найдем производную второго порядка:

$$y''=(y')',$$

$$y'=\left(x^3\right)'=3x^2,$$

$$y''=\left(3x^2\right)'=6x,$$

$$y''=6x=0,$$

$$x=0.$$

Стационарная точка делит числовую ось на два полуинтервала $(-\infty;\ 0]$ и $[0;\ \infty)$.

***Шаг 2.*** Определим знаки производной второго порядка на промежутках.

Для полуинтервала $(-\infty;0]$ возьмем значение $x=-1$, имеем

$$y''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0,$$

следовательно, на данном промежутке график функции выпуклый.

Для полуинтервала $[0;\ \infty)$ возьмем значение $x=1$, имеем

$$y''(1)=6\cdot 1=6>0,$$

следовательно, на данном промежутке график функция вогнутый.

***Шаг 3.*** При переходе через стационарную точку второго рода $x=0$ производная второго порядка меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $x=0$ – точка перегиба.

Результаты исследования изображены на рис. 18.17.

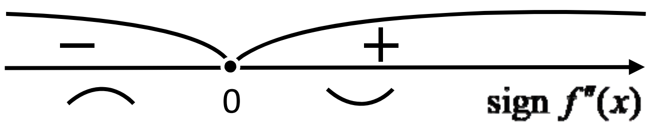



Рис. 18.17. Точка перегиба $\boldsymbol{x=0}$

ОТВЕТ

$(-\infty;0]$ – полуинтервал выпуклости, $[0;\ \infty)$ – полуинтервал вогнутости, $x=0$ – точка перегиба ■

## 18.5. Общая схема исследования функции и построение ее графика

Исследование функции $y=f(x)$ и построение ее графика удобно проводить по следующей схеме:

1) Исследовать функцию на четность, нечетность. Если выполняется равенство:

– $y(-x)=y(x)$, то функция четная, исследование достаточно провести на промежутке $[0;\infty)$, график функции симметричен относительно оси $0Y$ (зеркальное отображение);

– $y(-x)=-y(x)$, то функция нечетная, исследование достаточно провести на промежутке $[0;\infty)$, график функции симметричен относительно начала координат;

– если условие четности или нечетности не выполняется, то функция общего вида, симметрии нет, исследование провести на всей числовой оси $0X$.

2) Исследовать функцию на периодичность. Например, для функции $y = \sin x$ период $T = 2\pi$. Согласно свойству периодической функции период функции $y = \sin kx$ будет равен $T = \dfrac{2\pi}{k}$. Период изменяется от $2\pi$ до $2\pi/k$, что приводит к ***растяжению*** графика при $|k| < 1$ и к ***сжатию*** графика при $|k| > 1$. Исследование достаточно провести на периоде $\left[0; \dfrac{2\pi}{k}\right]$.

3) Найти область определения функции (приложение 4).

4) Исследовать функцию на непрерывность (приложения 5, 6). Как правило, в точках, в которых функция не определена, наблюдается разрыв второго рода, наличие вертикальных асимптот.

5) Найти точки пересечения функции с осями системы координат:

– с осью $0X$: точки $M_i(x_i;\ 0)$ определяются из уравнения $f(x) = 0$;

– с осью $0Y$: точки $M_j(0;\ y_j)$ определяются путем вычисления значения функции при $x = 0$, $y(0) = y_j$.

6) Выяснить наличие асимптот. Исследовать поведение функции $y = f(x)$ на бесконечности, вычислив пределы (приложения 5, 6). Уравнение горизонтальной асимптоты $y = c$, где $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ – правая горизонтальная асимптота, $c = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ – левая горизонтальная асимптота.

График функции имеет односторонние горизонтальные асимптоты лишь тогда, когда соответствующий предел конечен. Если предел равен бесконечности, то горизонтальной асимптоты нет.

Часто правая и левая горизонтальная асимптоты совпадают.

Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - kx\big).$$

График функции имеет наклонную асимптоту лишь тогда, когда оба предела конечны. Если хотя бы один из пределов равен бесконечности, то наклонной асимптоты нет. Если $k = 0$, то ***наклонная*** асимптота $y = kx + b$ преобразуется в ***горизонтальную*** асимптоту с уравнением $y = b$.

7) Исследовать промежутки монотонности, стационарные точки первого рода, точки экстремума:

– найти производную первого порядка $y' = f'(x)$;

– решить уравнение $f'(x) = 0$, корни уравнения являются стационарными точками первого рода;

– на числовой оси изобразить стационарные точки и точки, в которых производная первого порядка не существует, получить промежутки монотонности, определить знаки производной первого порядка на полученных интервалах.

Если на промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает.

Если на промежутке $f'(x) < 0$, то функция убывает.

– Если производная $f'(x)$ при переходе через стационарную точку, например $x_0$, меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ – точка локального максимума. Вычислить ее координаты: $y_{\max}(x_0) = y_0$.

Если производная $f'(x)$ при переходе через стационарную точку $x_0$ меняет знак с минуса на плюс, то $x_0$ – точка локального минимума. Вычислить ее координаты: $y_{\min}(x_0) = y_0$.

8) Исследовать промежутки выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба:

– найти производную второго порядка $y'' = (f'(x))'$;

– решить уравнение $f''(x) = 0$, корни уравнения являются стационарными точками второго рода;

– на числовой оси изобразить стационарные точки второго рода и точки, в которых производная второго порядка не существует, получить промежутки выпуклости, вогнутости, определить знаки производной второго порядка на полученных интервалах.

Если на промежутке $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый.

Если на промежутке $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый.

– Если производная второго порядка $f''(x)$ при переходе через стационарную точку, например $x_0$, меняет знак, то $x_0$ – точка перегиба. Вычислить ее координаты: $y(x_0) = y_0$.

9) Составить сводную таблицу. Результаты исследования занести в сводную таблицу, в которой строго по ранжиру путем чередования отобразить все критические точки 1-го и 2-го рода и полученные при этом промежутки, при необходимости вычислить координаты вспомогательных точек.

10) Построить график функции. Построение целесообразно проводить в следующей последовательности:

– изобразить точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба;

– построить асимптоты и их визуализацию пунктирными линиями;

– изобразить вспомогательные точки (при необходимости);

– изобразить фрагменты графика функции вблизи стационарных точек и асимптот;

– применить свойство симметрии;

– провести плавные соединительные линии с учетом поведения функции вблизи асимптот, получить график функции.

**ПРИМЕР 18.5.1.**

Провести полное исследование функции $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x)=\frac{2\cdot(-x)-1}{(-x-1)^2}=\frac{-2x-1}{(-(x+1))^2}=\frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}.$$

***Вывод:*** $y(-x)\neq y(x)$, следовательно, функция не является четной; $y(-x)\neq -y(x)$, следовательно, функция не является нечетной.

Условие четности и нечетности не выполняется, следовательно, функция $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ общего вида, симметрии нет.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** Определим ООФ (приложение 4):

$$(x-1)^2\neq 0,$$

$$x\neq 1.$$

ООФ: $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

***Шаг 4.*** Проанализируем непрерывность функции, для чего исследуем точку разрыва $x=1$, вычислим односторонние пределы функции в этой точке (приложение 5):

$$\lim_{x\to 1+}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1+}\frac{2\cdot 1-1}{(1-1)^2}=\frac{1}{+0}\overset{\text{пр.1}}{=\!=}\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1-}\frac{2\cdot 1-1}{(1-1)^2}=\frac{1}{+0}\overset{\text{пр.1}}{=\!=}\infty .$$

***Вывод:*** $x=1$ – точка разрыва 2-го рода, прямая $x=1$ – вертикальная асимптота.

***Шаг 5.*** Исследуем точки пересечения функции с осями системы координат:

– с осью 0*X*: решим уравнение $f(x)=0$:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,$$

$$2x-1=0,$$

$$2x=1,$$

$$x=1/2 .$$

Получили точку $M_1(1/2;\ 0)$;

– с осью 0*Y*: вычислим значение функции при $x=0$:

$$y(0)=\frac{2\cdot 0-1}{(0-1)^2}=\frac{0-1}{(-1)^2}=\frac{-1}{1}=-1 .$$

Получили точку $M_2(0;\ -1)$.

***Шаг 6.*** Исследуем наличие асимптот:

1) наличие горизонтальной асимптоты. Вычислим пределы (приложение 3):

$$k_{1,2}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x),$$

$$k_{1,2}\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left\{\text{старшая степень } x^2\right\}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}=$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\overset{\text{п.2}}{=\!=}\frac{0-0}{1-0+0}=0 .$$

***Вывод:*** $y=0$ – горизонтальная асимптота;

2) наличие наклонной асимптоты. Уравнения наклонных асимптот $y=k_{1,2}x+b$, вычислим пределы (приложение 3):

$$k_{1,2} = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \left(f(x) - k_{1,2}x\right),$$

$$k_{1,2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x-1}{x\cdot(x-1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\text{старшая степень } x^3\right\} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{x}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \underline{\underline{\text{п.2}}} \frac{0-0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$k_{1,2} = 0,$$

$$b = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \left(\frac{2x-1}{(x+1)^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{2x-1}{x^2+2x+1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} \underline{\underline{\text{п.2}}} \frac{0-0}{1+0+0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$b = 0.$$

Таким образом, $y = 0\cdot x + 0$, $y = 0$.

***Вывод:*** $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

***Шаг 7.*** Исследуем промежутки монотонности, точки экстремума. Вычислим производную первого порядка:

$$y' = \left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-1)'\cdot(x-1)^2 - (2x-1)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^4} = \frac{2\cdot(x-1)^2 - 2\cdot(2x-1)\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} =$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)[(x-1)-(2x-1)]}{(x-1)^4}=\frac{2\cdot(x-1-2x+1)}{(x-1)^3}=\frac{2\cdot(-x)}{(x-1)^3}=-\frac{2x}{(x-1)^3},$$

$$y'=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Производная первого порядка не существует при $x=1$ (точка разрыва).

Найдем стационарные точки из условия $y'=0$:

$$y'=-\frac{2x}{(x-1)^3}=0,$$

$$-2x=0,$$

$$x=0.$$

Полученные стационарная точка $x=0$ и точка разрыва $x=1$ разбивают область определения функции на два полуинтервала и интервал $(-\infty;\,0]\cup[0;1)\cup(1;\infty)$.

Определим знаки производной первого порядка на каждом промежутке:

– $x\in(-\infty;\,0]$, возьмем значение $x=-1$:

$$y'(-1)=-\frac{2\cdot(-1)}{(-1-1)^3}=-\frac{-2}{(-2)^3}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}<0;$$

– $x\in[0;1)$, возьмем значение $x=1/2$:

$$y'(1/2)=-\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^3}=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{-\frac{1}{8}}=\frac{8}{1}=8>0;$$

– $x\in(1;\infty)$, возьмем значение $x=2$:

$$y'(2)=-\frac{2\cdot 2}{(2-1)^3}=-\frac{4}{(1)^3}=-\frac{4}{1}=-4<0.$$

***Вывод:*** на полуинтервале $[0;1)$ функция возрастает; на полуинтервале $(-\infty;\,0]$ функция убывает; на интервале $(1;\infty)$ функция убывает.

На рис. 18.18 изображены промежутки монотонности со знаками производной первого порядка.

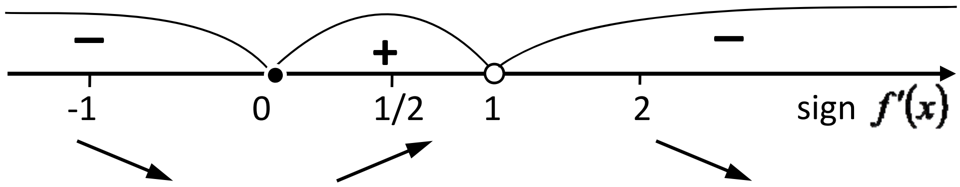



Рис. 18.18. Промежутки монотонности функции $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Так как функция в точке $x = 0$ определена, непрерывна и при переходе через нее производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, то точка $x = 0$ – точка локального минимума. Вычислим значение функции в точке экстремума:

$$y_{\min}(0) = -1.$$

Получили точку локального минимума, в этой точке $M_2(0;\ -1)$ график функции пересекает ось $0Y$.

Так как функция в точке $x = 1$ не определена, терпит разрыв 2-го рода и при переходе через нее производная первого порядка меняет знак с плюса на минус, то точка $x = 0$ – точка бесконечного максимума.

***Шаг 8.*** Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

Найдем производную второго порядка:

$$y'' = (y')',$$

$$y'' = \left(-\frac{2x}{(x-1)^3}\right)' = -2\left(\frac{x}{(x-1)^3}\right)' = -2\frac{x' \cdot (x-1)^3 - x \cdot \left((x-1)^3\right)'}{\left((x-1)^3\right)^2} =$$

$$= -2\frac{1 \cdot (x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^6} = -2\frac{(x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1}{(x-1)^6} =$$

$$= -2\frac{(x-1)^2[x-1-3x]}{(x-1)^6} = -2\frac{(-2x-1)}{(x-1)^4} = -2\frac{-(2x+1)}{(x-1)^4} = 2\frac{2x+1}{(x-1)^4},$$

$$y'' = 2\frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Производная второго порядка не существует при $x=1$ (точка разрыва). Найдем стационарные точки второго рода из условия $y''=0$:

$$2\frac{2x+1}{(x-1)^4}=0,$$

$$2x+1=0,$$

$$2x=-1,$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

Полученные стационарная точка $x=-\frac{1}{2}$ и точка разрыва $x=1$ разбивают область определения функции на два полуинтервала и интервал: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;\infty)$.

Определим знаки производной второго порядка на каждом промежутке:

– $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$, возьмем значение $x=-1$:

$$y''(-1)=2\cdot\frac{2\cdot(-1)+1}{(-1-1)^4}=2\cdot\frac{-2+1}{(-2)^4}=2\cdot\frac{-1}{16}=-\frac{1}{8}<0;$$

– $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right)$, возьмем значение $x=0$:

$$y''(0)=2\cdot\frac{2\cdot 0+1}{(0-1)^4}=2\cdot\frac{0+1}{(-1)^4}=2\cdot\frac{1}{1}=2>0;$$

– $x\in(1;\infty)$, возьмем значение $x=2$:

$$y''(2)=2\cdot\frac{2\cdot 2+1}{(2-1)^4}=2\cdot\frac{4+1}{1^4}=2\cdot 5=10>0.$$

***Вывод:*** на полуинтервале $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ график функции выпуклый; на полуинтервале и интервале $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;\infty)$ график функции вогнутый.

На рис. 18.19 изображены интервалы монотонности со знаками производной второго порядка.

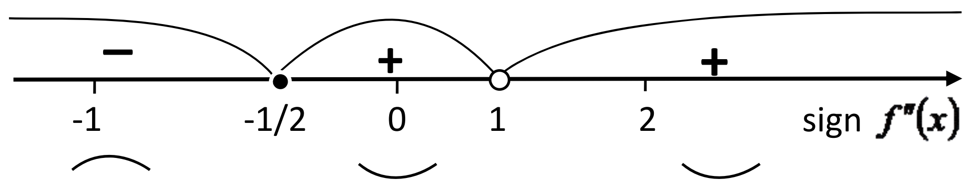



Рис. 18.19. Интервалы выпуклости, вогнутости функции $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Так как функция в точке $x=-\dfrac{1}{2}$ определена, непрерывна и при переходе через нее производная второго порядка меняет знак с минуса на плюс, то данная точка – точка перегиба.

Вычислим значение функции в точке перегиба:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{-1-1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{-2}{\frac{9}{4}}=-\frac{8}{9}.$$

Получили координаты точки перегиба $M_3\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$.

***Шаг 9.*** Сводная таблица.

Критические точки:

– стационарные точки первого рода: $x=0$;

– стационарные точки второго рода: $x=-\dfrac{1}{2}$;

– точки разрыва: $x=1$;

– точки, в которых производная первого порядка не существует: $x=1$;

– точки, в которых производная второго порядка не существует: $x=1$.

Получили при этом промежутки $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$, $(1;\infty)$.

На полученных промежутках отобразим определенные выше знаки производных первого и второго порядка, определяющие поведение функции на промежутках, а также в критических точках и их окрестностях (табл. 18.2).

Для более адекватной визуализации графика вычислим координаты дополнительных точек, например при $x=-1$ и $x=2$:

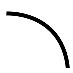
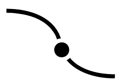
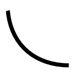
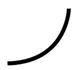
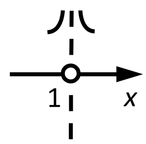
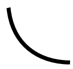
$$y(-1)=\frac{2\cdot(-1)-1}{(-1-1)^2}=\frac{-2-1}{(-2)^2}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4},$$

$$y(2)=\frac{2\cdot 2-1}{(2-1)^2}=\frac{4-1}{1^2}=\frac{3}{1}=3\,.$$

Получили точки $M_4\left(-1;\ -\frac{3}{4}\right)$, $M_5(2;\ 3)$. Данные о них также занесём в сводную таблицу (см. табл. 18.2).

Таблица 18.2

Сводная таблица

| $x$ | $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ | $0$ | $(0; 1)$ | $1$ | $(1; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | – | – | $0$ | + | $\nexists$ | – |
| $y''$ | – | $0$ | + | + | + | $\nexists$ | + |
| $y$ | убывает, выпукла  | $M_3\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$  | убывает, вогнута  | min $M_2(0;\ -1)$  | возрастает, вогнута  | вертикальная асимптота   | убывает, вогнута  |
| Примечание. Дополнительные точки $M_4\left(-1;\ -\frac{3}{4}\right)$, $M_5(2;\ 3)$ | | | | | | | |

***Шаг 10.*** На рис. 18.20 отображены данные, полученные в ходе исследования функции, а окончательный вид графика изображен на рис. 18.21.

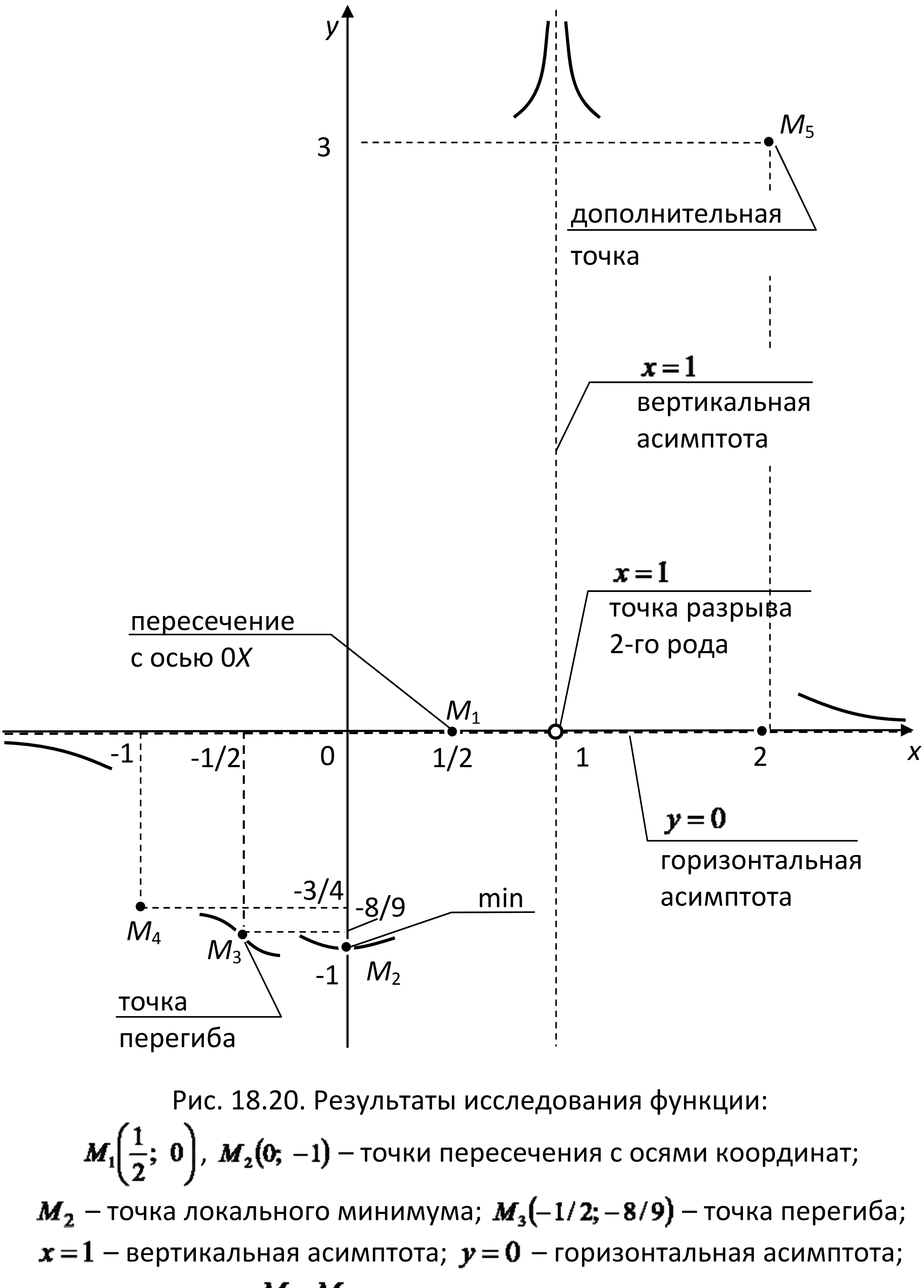



Рис. 18.20. Результаты исследования функции:
$M_1\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $M_2(0;\ -1)$ – точки пересечения с осями координат;
$M_2$ – точка локального минимума; $M_3(-1/2; -8/9)$ – точка перегиба;
$x = 1$ – вертикальная асимптота; $y = 0$ – горизонтальная асимптота;
$M_4, M_5$ – дополнительные точки

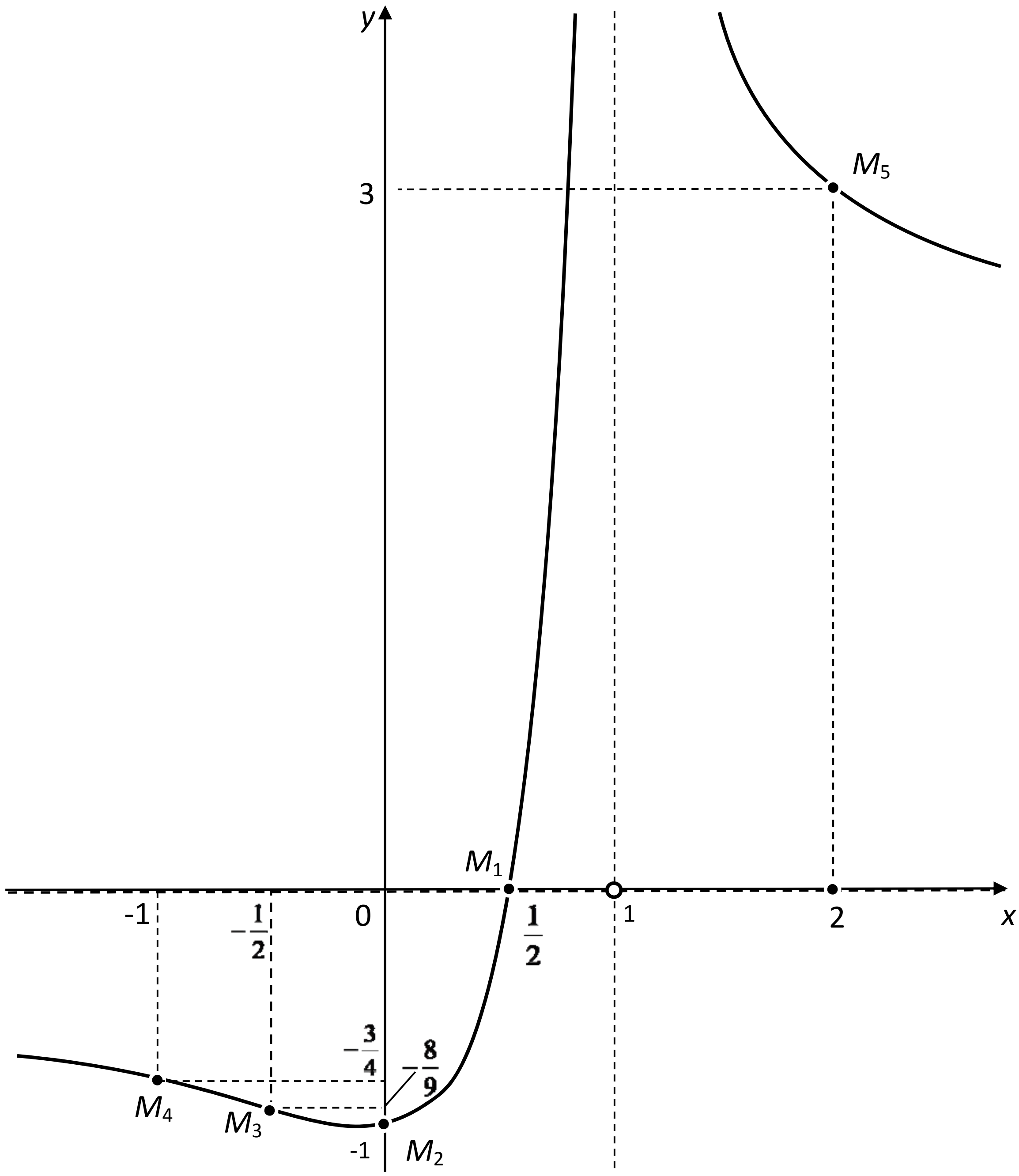



Рис. 18.21. График функции $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

**ПРИМЕР 18.5.2.**

Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x).$$

***Вывод:*** выполняется условие $y(-x) = -y(x)$, следовательно, функция нечетная, симметричная относительно начала координат.

Исследование достаточно провести на полуинтервале $[0; \infty)$.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** ООФ (приложение 4):

$$x^2 - 4 \neq 0,$$

$$x^2 \neq 4,$$

$$x \neq \pm\sqrt{4},$$

$$x \neq \pm 2.$$

ООФ: $x \in (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

***Шаг 4.*** Проанализируем непрерывность функции. Так как функция четная, то ограничимся исследованием точки разрыва $x = 2$. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2+} \frac{2^3}{2^2 - 4} = \frac{8}{+0} \overset{\text{пр.1}}{=\!=} \infty,$$

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2-} \frac{2^3}{2^2 - 4} = \frac{8}{-0} \overset{\text{пр.1}}{=\!=} -\infty.$$

***Вывод:*** $x = 2$ – точка разрыва 2-го рода, прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота.

***Шаг 5.*** Исследуем точки пересечения функции с осями координат:

– с осью $0X$: решим уравнение $f(x) = 0$:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0,$$

$$x^3 = 0,$$

$$x = 0.$$

Получили точку $M_1(0;\ 0)$;

– с осью $0Y$: вычислим значение функции при $x = 0$:

$$y(0) = \frac{0^3}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Получили точку $M_1(0;\ 0)$, эта точка найдена выше.

***Шаг 6.*** Исследуем наличие асимптот:

1) наличие горизонтальной асимптоты. Вычислим предел $k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\text{старшая степень } x^3\right\} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{4}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}} = \frac{1}{0 - 0} = \frac{1}{0} \overset{\text{п.1}}{\equiv} \infty.$$

***Вывод:*** горизонтальной асимптоты нет;

2) наличие наклонной асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$. Вычислим пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx),$$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{\left(x^2 - 4\right)}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \left\{\text{ старшая степень } x^3\right\} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \overset{\text{п.2}}{\equiv} \frac{1}{1 - 0} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x\left(x^2-4\right)}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\left\{\text{старшая степень } x^2\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}\overset{\text{п.2}}{=\!=}\frac{0}{1-0}=0\quad\Rightarrow\quad b=0.$$

Таким образом, $y=1\cdot x+0$, $y=x$.

***Вывод:*** $y=x$ – наклонная асимптота.

***Шаг 7.*** Промежутки монотонности, точки экстремума.

Найдем производную первого порядка:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(x^2-4\right)-x^3\cdot\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2\left(x^2-4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2},$$

$$y'=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Производная первого порядка не существует при $x=\pm 2$ (точки разрыва).

Найдем стационарные точки первого рода из условия $y'=0$:

$$y'=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=0,$$

$$x^2\left(x^2-12\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2=0,\\ x^2-12=0.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm\sqrt{12}.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm 2\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Полученные стационарные точки первого рода $x=0$, $x=2\sqrt{3}$ и точка разрыва $x=2$ разбивают полуобласть определения функции $[0;\infty)$ на полуинтервалы $[0;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};\infty\right)$.

Определим знак производной первого порядка на каждом промежутке:

– $x\in[0;2)$, возьмем значение $x=1$:

$$y'(1)=\frac{1^2\cdot\left(1^2-12\right)}{\left(1^2-4\right)^2}=\frac{1-12}{(-3)^2}=\frac{-11}{9}<0;$$

– $x\in\left(2;2\sqrt{3}\right]$, возьмем значение $x=3$:

$$y'(3)=\frac{3^2\cdot\left(3^2-12\right)}{\left(3^2-4\right)^2}=\frac{9\cdot(9-12)}{(5)^2}=\frac{9\cdot(-3)}{25}=\frac{-27}{25}<0;$$

– $x\in\left[2\sqrt{3};\infty\right)$, возьмем значение $x=5$:

$$y'(5)=\frac{5^2\cdot\left(5^2-12\right)}{\left(5^2-4\right)^2}=\frac{25\cdot(25-12)}{(21)^2}=\frac{25\cdot13}{25^2}>0.$$

***Вывод:*** на полуинтервале $[0;2)$ функция убывает; на полуинтервале $\left(2;2\sqrt{3}\right]$ функция убывает; на полуинтервале $\left[2\sqrt{3};\infty\right)$ функция возрастает.

На рис. 18.22 изображены промежутки монотонности со знаками производной первого порядка.

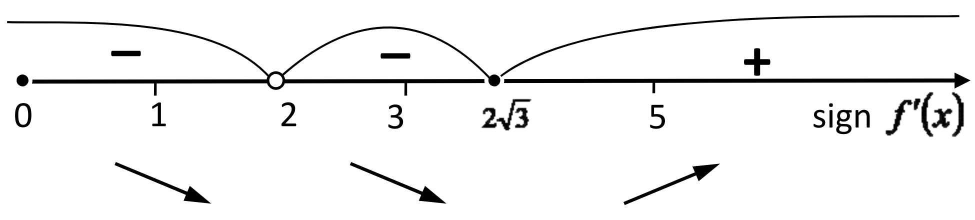



Рис. 18.22. Интервалы монотонности функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Так как функция в точке $x = 2\sqrt{3}$ определена, непрерывна и при переходе через нее производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, то точка $x = 2\sqrt{3}$ – точка локального минимума (см. рис. 18.22).

Вычислим значение функции в точке экстремума:

$$y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = \frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{12 - 4} = \frac{8 \cdot 3\sqrt{3}}{8} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\,.$$

Получили точку локального минимума $M_2\left(2\sqrt{3};\ 5{,}2\right)$.

***Шаг 8.*** Промежутки выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба.

Найдем производную второго порядка $y'' = \left(y'\right)'$:

$$y'' = \left(\frac{x^2\left(x^2 - 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}\right)' = \left(\frac{x^4 - 12x^2}{\left(x^2 - 4\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^4 - 12x^2\right)' \cdot \left(x^2 - 4\right)^2 - \left(x^4 - 12x^2\right) \cdot \left(\left(x^2 - 4\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2 - 4\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(4x^3 - 24x\right) \cdot \left(x^2 - 4\right)^2 - \left(x^4 - 12x^2\right) \cdot 2\left(x^2 - 4\right) \cdot \left(x^2 - 4\right)'}{\left(x^2 - 4\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2 - 4\right)\left[\left(4x^3 - 24x\right) \cdot \left(x^2 - 4\right) - \left(x^4 - 12x^2\right) \cdot 2 \cdot 2x\right]}{\left(x^2 - 4\right)^4} =$$

$$= \frac{4x\left(x^2 - 4\right)\left[\left(x^2 - 6\right) \cdot \left(x^2 - 4\right) - x^4 + 12x^2\right]}{\left(x^2 - 4\right)^4} =$$

$$= \frac{4x\left(x^2 - 4\right)\left(x^4 - 6x^2 - 4x^2 + 24 - x^4 + 12x^2\right)}{\left(x^2 - 4\right)^4} = \frac{4x\left(2x^2 + 24\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3} = \frac{8x\left(x^2 + 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3},$$

$$y'' = \frac{8x\left(x^2 + 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3}.$$

Производная второго порядка не существует при $x = \pm 2$ (точка разрыва).

Найдем стационарные точки второго рода из условия $y'' = 0$:

$$\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} 8x = 0, \\ x^2+12 = 0. \end{array}\right. \tag{18.1}$$

Решим каждое уравнение из системы (18.1):

$$8x = 0,$$

$$x = 0;$$

$$x^2 + 12 = 0, \text{ решений нет.}$$

Полученная стационарная точка $x = 0$ и точка разрыва $x = 2$ разбивают полуобласть определения функции на промежутки $[0;\,2) \cup (2;\,\infty)$.

Определим знаки производной второго порядка на каждом промежутке:

– $x \in [0;\,2)$, возьмем значение $x = 1$:

$$y''(1) = \frac{8\cdot 1\cdot\left(1^2+12\right)}{\left(1^2-4\right)^3} = \frac{8\cdot 13}{(-3)^3} = \frac{104}{-27} < 0;$$

– $x \in (2;\,\infty)$, возьмем значение $x = 3$:

$$y''(3) = \frac{8\cdot 3\cdot\left(3^2+12\right)}{\left(3^2-4\right)^3} = \frac{24\cdot 21}{(5)^3} > 0.$$

***Вывод:*** на полуинтервале $x \in [0;\,2)$ график функции выпуклый; на интервале $x \in (2;\,\infty)$ график функция вогнутый.

На рис. 18.23 изображены интервалы выпуклости, вогнутости со знаками производной второго порядка.

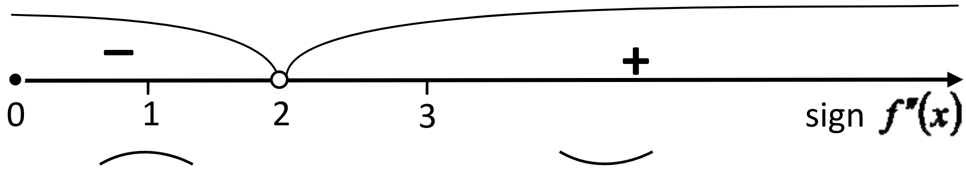



Рис. 18.23. Интервалы выпуклости, вогнутости функции $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

***Шаг 9.*** Сводная таблица.

Критические точки:

– стационарные точки первого рода: $x=0$, $x=2\sqrt{3}$;
– стационарные точки второго рода: $x=0$;
– точки разрыва: $x=2$;
– точки, в которых производная первого порядка не существует: $x=2$;
– точки, в которых производная второго порядка не существует: $x=2$.

При этом получены промежутки $(0;2)$, $\left(2;2\sqrt{3}\right)$, $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$.

На полученных промежутках отобразим знаки производных первого и второго порядка, определяющие поведение функции на промежутках, а также в критических точках и их окрестностях (табл. 18.3).

Для более адекватной визуализации графика вычислим координаты дополнительных точек, например при $x=1$ и $x=3$:

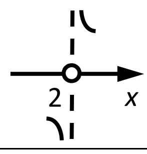
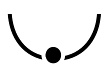
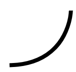
$$y(1)=\frac{1^3}{1^2-4}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3},$$

$$y(3)=\frac{3^3}{3^2-4}=\frac{27}{5}=5{,}4.$$

Получили дополнительные точки $M_3(3;\ 5{,}4)$ и $M_4\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$.

Таблица 18.3

Сводная таблица

| $x$ | 0 | $(0;2)$ | 2 | $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ | $2\sqrt{3}$ | $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 0 | − | $\nexists$ | − | 0 | + |
| $y''$ | 0 | − | $\nexists$ | + | + | + |
| $y$ | $y(0)=0$ | убывает, выпукла  | верти-кальная асимптота: $x=2$  | убывает, вогнута  | min $M_2(0;\ -1)$  | возрастает, вогнута  |
| Примечание. Дополнительные точки $M_4\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$, $M_5\left(3;\ \frac{27}{5}\right)$ | | | | | | |

***Шаг 10.*** На рис. 18.24 отображены данные, полученные в ходе исследования функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

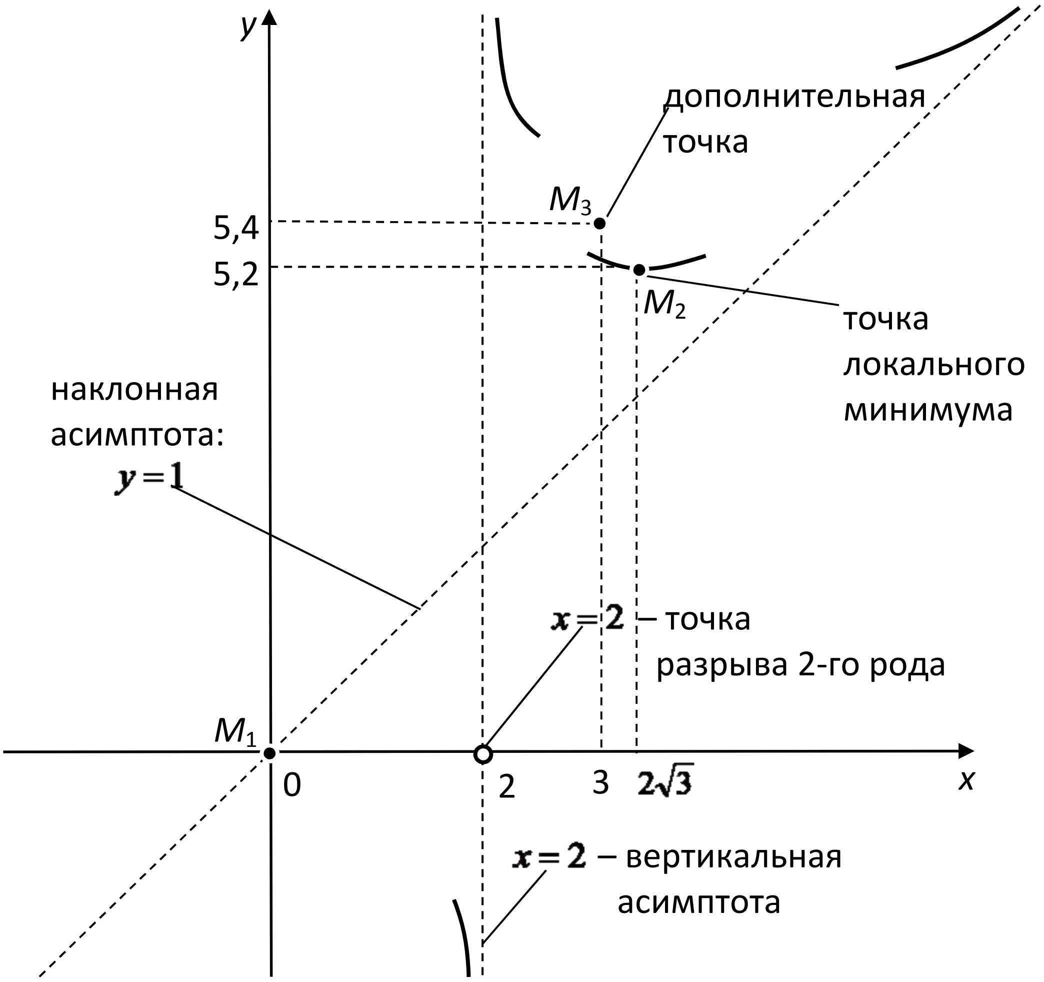



Рис. 18.24. Результаты исследования функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$:

$M_1(0;\ 0)$ – точка пересечения с осями координат 0*X* и 0*Y*;

$M_2\left(2\sqrt{3};\ 5{,}2\right)$ – точка локального минимума;

$x = 2$ – вертикальная асимптота; $y = 1$ – наклонная асимптота;

$M_3$ – дополнительная точка

***Шаг 11.*** Исследуемая функция нечетная, график функции симметричен относительно начала координат.

Применим свойство симметрии:

1) точка локального минимума $M_{\min}\left(2\sqrt{3};\ 5,2\right)$ отображается в точку локального максимума $M_{\max}{}^{*}\left(-2\sqrt{3};\ -5,2\right)$;

2) дополнительная точка $M_3(3;\ 5,4)$ отображается в точку $M_3{}^{*}(-3;\ -5,4)$, точка $M_4\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$ отображается в точку $M_4{}^{*}\left(-1;\ \frac{1}{3}\right)$;

3) полуинтервал выпуклости $x \in [0;2)$ графика функции отображается в полуинтервал вогнутости $x \in (-2;0]$.

***Вывод:*** получили точку перегиба $x = 0$. Координаты точки перегиба: $M_1(0;\ 0)$;

4) интервал вогнутости $x \in (2;\infty)$ отображается в интервал выпуклости $x \in (-\infty;-2)$;

5) симметричное отображение данных, представленных на рис. 18.24, относительно начала координат показано на рис. 18.25.

***Шаг 12.*** Окончательный вид графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ представлен на рис. 18.26. ■

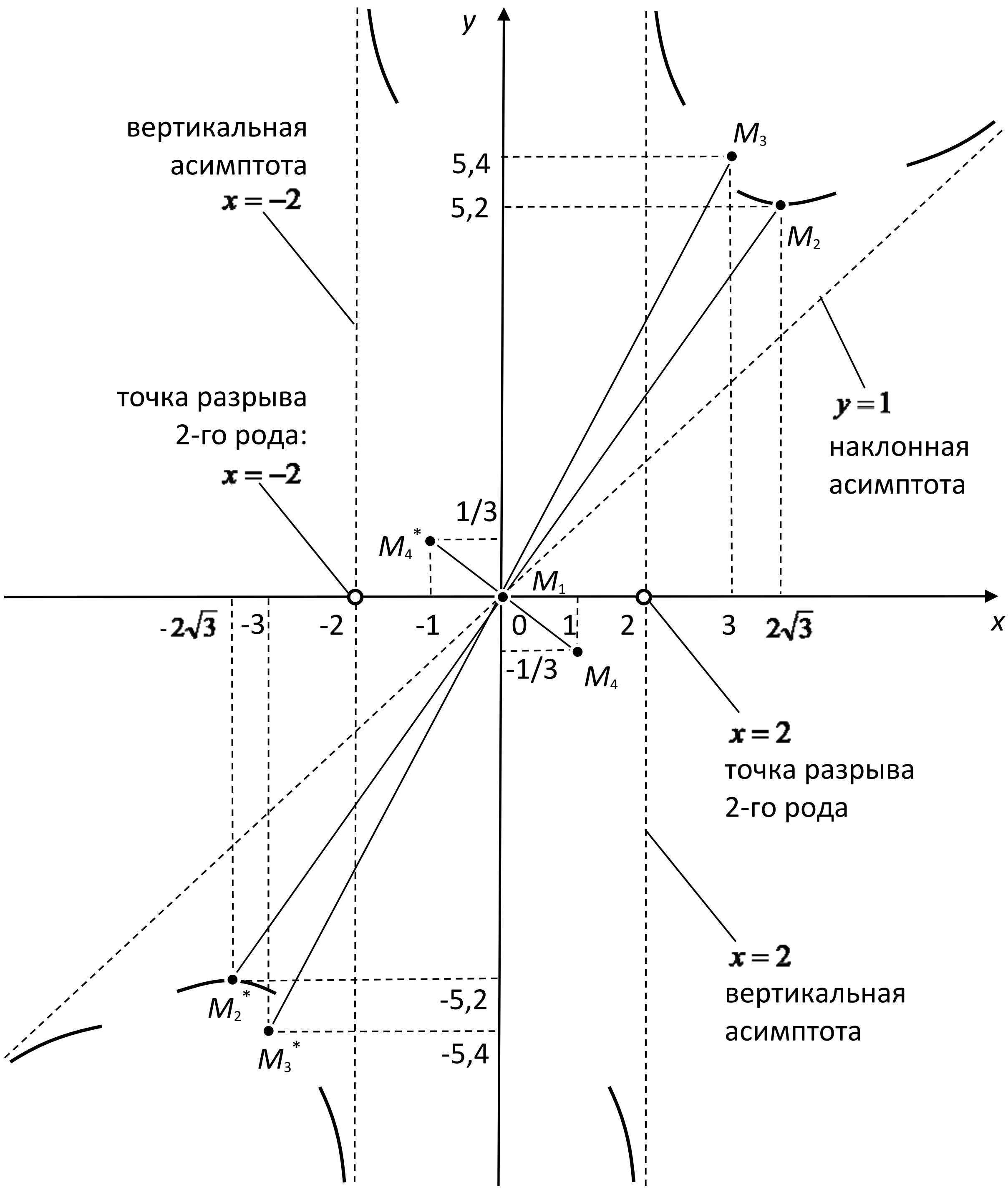



Рис. 18.25. Симметричное отображение данных, представленных на рис. 18.24, относительно начала координат:

$M_1(0;\ 0)$ – точка пересечения с осями координат 0*X* и 0*Y*;

$M_2^*\left(-2\sqrt{3};\ -5{,}2\right)$ – точка локального максимума;

$x=-2$ – вертикальная асимптота, $y=1$ – наклонная асимптота;

$M_3^*$, $M_4^*$ – дополнительные точки

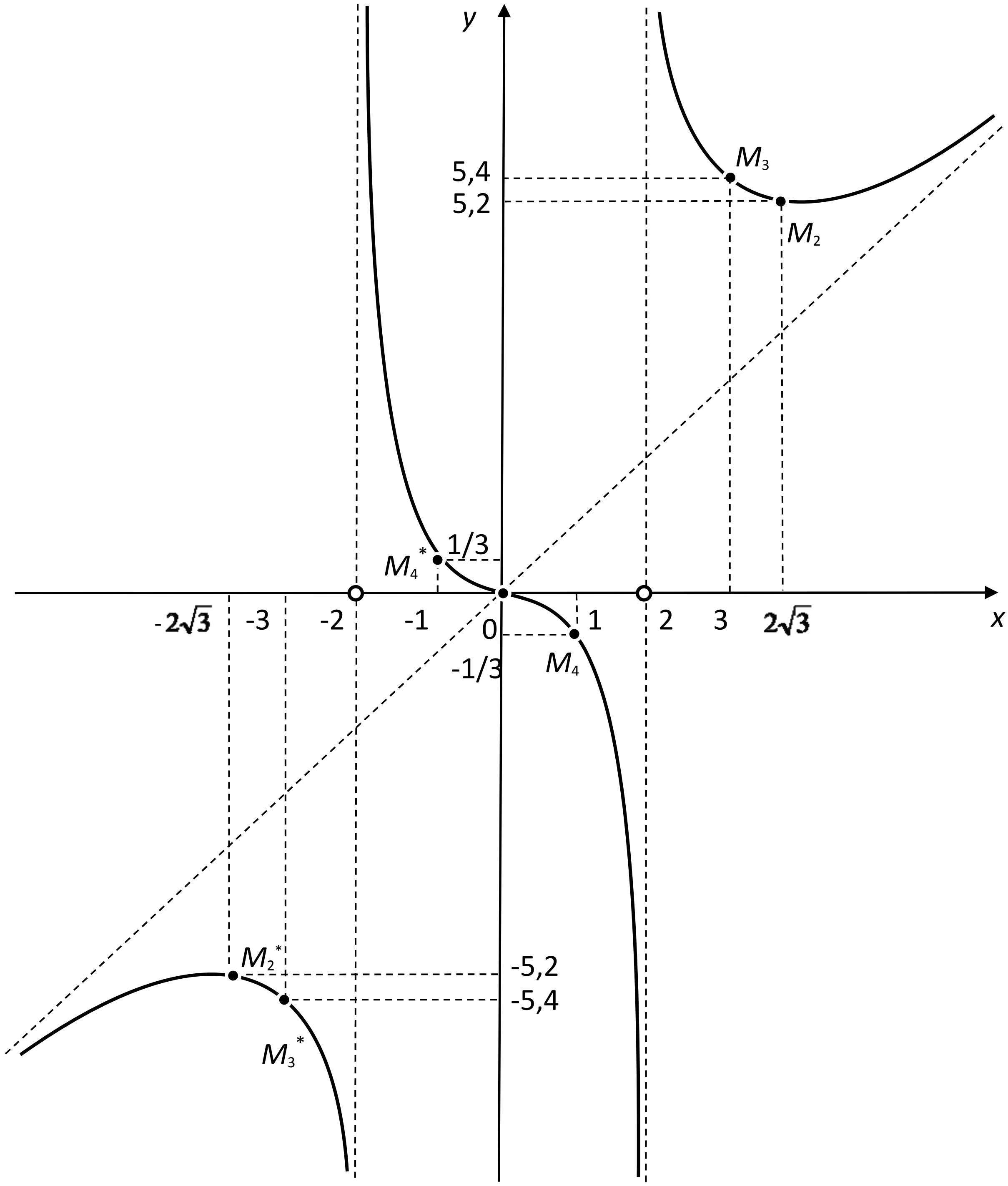



Рис. 18.26. График функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

## 18.6. Схема исследования функции, заданной параметрически

1. Найти множество $T$, определяющее область определения функции

$$\begin{cases} y = g(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Составить таблицу области определения функции.

Найденным промежуткам области $T$ найти соответствующие области определения переменных $x$ и $y$.

2. Проверить свойство симметрии для исследования функции на промежутке $[0; \infty)$:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{наложение,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{симметрия относительно оси } 0X,$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{симметрия относительно оси } 0Y,$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{симметрия относительно начала координат.}$$

3. Найти точки пересечения с осями координат, решив следующие уравнения:

– $y(t) = 0$. Для найденного значения $t_i$ найти соответствующее значение $x$, получим точку $M(x(t_i); 0)$ пересечения с осью $0X$;

– $x(t) = 0$. Для найденного значения $t_j$ найти соответствующее значение $y$, получим точку $M(0; y(t_j))$ пересечения с осью $0Y$.

4. Найти промежутки монотонности, стационарные точки первого рода, экстремум функции.

5. Найти промежутки выпуклости, вогнутости, стационарные точки второго рода.

**Примечание.** Стационарные точки первого и второго рода, найденные в п. 4 и 5, делят область $T$ на промежутки знакопостоянства производных.

6. Выяснить наличие асимптот. Проверить следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0\\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow\ x=x_0 \text{ – вертикальная асимптота,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\infty\\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0\end{array}\right\} \Rightarrow\ y=y_0 \text{ – горизонтальная асимптота,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\infty\\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ возможна наклонная асимптота.}$$

7. Составить сводную таблицу данных, полученных в ходе исследования.

8. Построить график функции:

– изобразить точки пересечения с осями координат, точки разрыва, стационарные точки первого и второго рода;

– построить асимптоты пунктирными линиями;

– пользуясь сводной таблицей, построить фрагменты графика функции для каждого промежутка в отдельности;

– учитывая свойство симметрии, сделать необходимые отображения;

– провести плавные соединительные линии с учетом поведения функции вблизи асимптот, получить таким образом график функции.

**ПРИМЕР 18.6.1.**

Провести полное исследование функции $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1-t^2},\\ y=\dfrac{t-2t^3}{1-t^2}\end{cases}$, построить её график.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$x(-t)=\frac{-t}{1-(-t)^2}=\frac{-t}{1-t^2}=-x(t),$$

$$y(-t)=\frac{-t-2(-t)^3}{1-(-t)^2}=\frac{-t-2\left(-t^3\right)}{1-t^2}=\frac{-t+2t^3}{1-t^2}=\frac{-\left(t-2t^3\right)}{1-t^2}=-y(t).$$

***Вывод:*** $\left.\begin{array}{l} x(t)=-x(-t) \\ y(t)=-y(-t) \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ симметрия относительно начала системы координат.

Выявили наличие симметрии относительно начала координат, следовательно, исследование достаточно провести на полуинтервале $t\in[0;\infty)$ области определения функции.

***Шаг 2.*** ООФ (приложение 4):

$$1-t^2\neq 0,$$

$$t\neq\pm1.$$

Получили множество $T$ области определения функции: $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Определим множество $X$ области определения переменной $x$:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=}\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-2t}=\frac{1}{-(-\infty)}\overset{\text{п.2}}{=\!=}+0,$$

$$\lim_{t\to-1-}\frac{t}{1-t^2}=\frac{-1}{-0}\overset{\text{п.1}}{=\!=}+\infty,$$

$$\lim_{t\to-1+}\frac{t}{1-t^2}=\frac{-1}{+0}\overset{\text{п.1}}{=\!=}-\infty,$$

$$\lim_{t\to1-}\frac{t}{1-t^2}=\frac{1}{+0}\overset{\text{п.1}}{=\!=}+\infty,$$

$$\lim_{t\to1+}\frac{t}{1-t^2}=\frac{1}{-0}\overset{\text{п.1}}{=\!=}-\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{1-t^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{п.Л.}}{=\!=}\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-2t}=\frac{1}{-\infty}\overset{\text{п.2}}{=\!=}-0.$$

Таким образом, $x\in(0;\infty)\cup(-\infty;\infty)\cup(-\infty;0)$.

$\left.\begin{array}{l} x:\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t}{1-t^2}=0 \\ x:\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{1-t^2}=0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ наличие вертикальной асимптоты.

***Вывод:*** $x=0$ – вертикальная асимптота.

Определим множество $Y$ области определения переменной $y$:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underline{\underline{\text{п.Л.}}}\lim_{t\to-\infty}\frac{1-6t^2}{-2t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underline{\underline{\text{п.Л.}}}\lim_{t\to-\infty}\frac{-12t}{-2}=\lim_{t\to-\infty}6t=-\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\frac{-1-2(-1)^3}{-0}=\frac{1}{-0}\underline{\underline{\text{п.1}}}-\infty,$$

$$\lim_{t\to-1+}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\frac{-1-2(-1)^3}{+0}=\frac{1}{+0}\underline{\underline{\text{п.1}}}\infty,$$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\frac{1-2(1)^3}{+0}=\frac{1-2}{+0}=\frac{-1}{0}\underline{\underline{\text{п.1}}}-\infty,$$

$$\lim_{t\to 1+}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\frac{1-2(1)^3}{-0}=\frac{1-2}{-0}=\frac{-1}{-0}\underline{\underline{\text{п.1}}}\infty,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t-2t^3}{1-t^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underline{\underline{\text{п.Л.}}}\lim_{t\to-\infty}\frac{1-6t^2}{-2t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underline{\underline{\text{п.Л.}}}\lim_{t\to-\infty}\frac{-12t}{-2}=\lim_{t\to-\infty}6t=\infty.$$

Таким образом, $y\in(-\infty;-\infty)\cup(\infty;-\infty)\cup(\infty;\infty)$.

***Вывод:*** $\left.\begin{array}{l} x:\lim\limits_{t\to\pm1}\dfrac{t}{1-t^2}=\mp\infty \\ y:\lim\limits_{t\to\pm1}\dfrac{t-2t^3}{1-t^2}=\pm\infty \end{array}\right\}\Rightarrow$ возможна наклонная асимптота.

Составим таблицу области определения функции (табл. 18.4).

Таблица 18.4

Область определения функции

| $t$ | $(-\infty;-1)$ | $(-1;1)$ | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $(0;\infty)$ | $(-\infty;\infty)$ | $(-\infty;0)$ |
| $y$ | $(-\infty;-\infty)$ | $(\infty;-\infty)$ | $(\infty;\infty)$ |

***Вывод:*** вертикальная асимптота $x=0$.

***Шаг 3.*** Найдем точки пересечения с осями координат:

– с осью $0Y$. Решим уравнение $x(t)=0$:

$$x=\frac{t}{1-t^2}=0,$$

$$t=0.$$

Вычислим соответствующую ординату:

$$y = \frac{t - 2t^3}{1 - t^2},$$

$$y(0) = \frac{0 - 2 \cdot 0^3}{1 - 0^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Получили точку $M_1(0;0)$;

– с осью $0X$. Решим уравнение $y(t) = 0$:

$$y = \frac{t - 2t^3}{1 - t^2} = 0,$$

$$t - 2t^3 = 0,$$

$$t \cdot \left(1 - 2t^2\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ 1 - 2t^2 = 0. \end{array}\right. \qquad (18.2)$$

Решим каждое уравнение из системы (18.2):

1) $x = \dfrac{t}{1 - t^2}$. Вычислим соответствующие абсциссы: $x(0) = 0$, получили координаты точки $M_1(0;0)$;

2) $$1 - 2t^2 = 0,$$

$$t^2 = \frac{1}{2},$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вычислим соответствующие абсциссы:

$$x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

Получили точку $M_2\left(\sqrt{2}; 0\right)$.

***Шаг 4.*** Определим промежутки монотонности, стационарные точки первого рода, экстремум функции.

Найдем производную первого порядка:

$$x'_t = \left(\frac{t}{1-t^2}\right)' = \frac{t' \cdot \left(1-t^2\right) - \left(1-t^2\right)' \cdot t}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{1 \cdot \left(1-t^2\right) - (-2t) \cdot t}{\left(1-t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-t^2 + 1 + 2t^2}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2},$$

$$y'_t = \left(\frac{t-2t^3}{1-t^2}\right)' = \frac{\left(t-2t^3\right)'\left(1-t^2\right) - \left(1-t^2\right)' \cdot \left(t-2t^3\right)}{\left(1-t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1-6t^2\right)\left(1-t^2\right) - \left(-2t^2\right) \cdot \left(t-2t^3\right)}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{6t^4 - 6t^2 - t^2 + 1 - 4t^4 - 2t^2}{\left(1-t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{\left(1-t^2\right)^2},$$

$$y'_x = \frac{\dfrac{2t^4 - 5t^2 + 1}{\left(1-t^2\right)^2}}{\dfrac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}} = \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{t^2+1}.$$

Найдем стационарные точки из условия $y'_x = 0$:

$$y'_x = \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{t^2+1} = 0,$$

$$\frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{t^2+1} = 0,$$

$$2t^4 - 5t^2 + 1 = 0,$$

$$t^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$t_{1,2}=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}}=\frac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2},$$

$$t_1=\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\approx 1{,}51,$$

$$t_2=\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\approx 0{,}47\,.$$

Стационарные точки первого рода делят полуобласть $[0;\infty)$ на следующие промежутки:

$$t\in\left[0;\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2};\infty\right).$$

Определим знаки производной первого порядка на полученных промежутках:

1) $t\in\left(0;\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}\right)$, возьмем значение $t=\frac{1}{3}$:

$$y'_x\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4-5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{81}-5\cdot\frac{1}{9}+1}{\frac{1}{9}+1}=\frac{\frac{2}{81}-\frac{5}{9}+1}{\frac{10}{9}}=\frac{\frac{2-5\cdot 9+81}{81}}{\frac{10}{9}}=$$

$$=\frac{\frac{2-5\cdot 9+81}{81}}{\frac{10}{9}}=\frac{\frac{38}{9}}{10}=\frac{38}{90}>0\,;$$

2) $t\in\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}};1\right)$, возьмем значение $t=\frac{1}{2}$:

$$y'_x\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{16}-5\cdot\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{1-5\cdot 2+8}{8}}{\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{\frac{1-10+8}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{-1}{2}}{5}=-\frac{1}{10}<0;$$

3) $t\in\left(1;\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)$, возьмем значение $t=1{,}1$:

$$y'_x(1{,}1)=\frac{2\cdot(1{,}1)^4-5\cdot(1{,}1)^2+1}{(1{,}1)^2+1}\approx\frac{2{,}93-6{,}05+1}{2{,}21}\approx\frac{-2{,}12}{2{,}21}\approx-0{,}96<0;$$

4) $t\in\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}};\infty\right)$, возьмем значение $t=2$:

$$y'_x(2)=\frac{2\cdot2^4-5\cdot2^2+1}{2^2+1}=\frac{32-20+1}{5}=\frac{11}{5}>0.$$

***Вывод***: на отрезке $t\in\left[0;\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}\right]$ функция возрастает; на полуинтервале $t\in\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}};1\right)$ функция убывает; на полуинтервале $t\in\left(1;\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}\right]$ функция убывает; на полуинтервале $x\in\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}};\infty\right)$ функция возрастает.

На рис. 18.27 изображены промежутки монотонности функции.

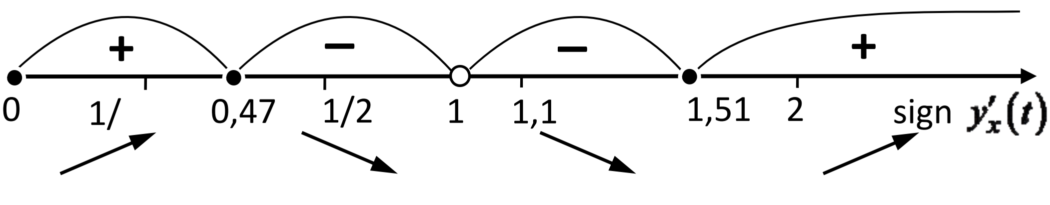



Рис. 18.27. Интервалы монотонности функции

При $t=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}$ производная первого порядка меняет знак с плюса на минус, имеем точку локального максимума.

Вычислим координаты точки максимума $(x;\,y)$, подставив значение параметра $t$ в систему уравнений:

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}\right)\approx 0{,}6, \\ y\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{17}}\right)\approx 0{,}3. \end{cases}$$

Получим координаты точки максимума $M_3(0{,}6;\, 0{,}3)$.

При $t=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}$ производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, имеем точку локального минимума.

Вычислим координаты точки минимума $(x;\, y)$, подставив значение параметра $t$ в систему уравнений

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)\approx -0{,}7, \\ y\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)\approx 2{,}3. \end{cases}$$

Получим координаты точки минимума $M_4(-\,0{,}7;\, 2{,}3)$.

***Шаг 5.*** Найдем промежутки выпуклости, вогнутости, стационарные точки второго рода.

Найдем производную второго порядка:

$$(y'_x)_t=\left(\frac{2t^4-5t^2+1}{t^2+1}\right)'=\frac{\left(2t^4-5t^2+1\right)'\cdot\left(t^2+1\right)-\left(t^2+1\right)'\cdot\left(2t^4-5t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(8t^3-10t\right)\cdot\left(t^2+1\right)-2t\cdot\left(2t^4-5t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{8t^5-10t^3+8t^3-10t-4t^5+10t^3-2t}{\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4t^5+8t^3-12t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{4t\cdot\left(t^4+2t^2-3\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{4t\cdot\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)},$$

$$y''_{xx}=\frac{\dfrac{4t\cdot\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)^2}}{\dfrac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}}=\frac{4t\cdot\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2+3\right)\cdot\left(1-t^2\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2+1\right)}=\frac{-4t\cdot\left(1-t^2\right)^3\cdot\left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)^3},$$

$$y''_{xx} = \frac{-4t \cdot \left(1-t^2\right)^3 \cdot \left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)^3}.$$

Найдем стационарные точки второго рода из условия $y''_{xx} = 0$:

$$y''_{xx} = \frac{-4t \cdot \left(1-t^2\right)^3 \cdot \left(t^2+3\right)}{\left(t^2+1\right)^3} = 0,$$

$$\left[\begin{aligned} & t = 0, \\ & \left(1-t^2\right)^3 = 0, \\ & \left(t^2+3\right) = 0. \end{aligned}\right. \qquad (18.3)$$

Решим каждое уравнение из системы (18.3):

1) $t_1 = 0$;

2) $\left(1-t^2\right)^3 = 0$,

$1 - t^2 = 0$,

$t_{2,3} = \pm 1$.

3) $t^2 + 3 = 0$, решений нет.

Полученные стационарные точки второго рода разбивают полуобласть $[0;\infty)$ на промежутки $[0;1)\cup(1;\infty)$.

Определим знаки производной второго порядка на полученных промежутках:

1) $t \in [0;1)$, возьмем значение $x = \frac{1}{2}$:

$$y''_{xx}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right)^3} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}+1\right)^3} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = -\frac{\frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 4}}{\frac{125}{4\cdot 4\cdot 4}} = -\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 2}{125} = \frac{42}{125} < 0;$$

2) $t \in (1; \infty)$, возьмем значение $x = 2$:

$$y''_{xx}(2) = \frac{-4 \cdot (2) \cdot \left(1 - 2^2\right)^3 \cdot \left(2^2 + 3\right)}{\left(2^2 + 1\right)^3} = \frac{-8 \cdot (1 - 4) \cdot (4 + 3)}{(4 + 1)^3} = \frac{-8 \cdot (-3) \cdot 7}{5^3} = \frac{168}{125} > 0.$$

***Вывод:*** на полуинтервале $t \in [0; 1)$ график функции выпуклый, на интервале $t \in (1; \infty)$ график функции вогнутый.

На рис. 18.28 изображены промежутки выпуклости, вогнутости функции со знаками производной.

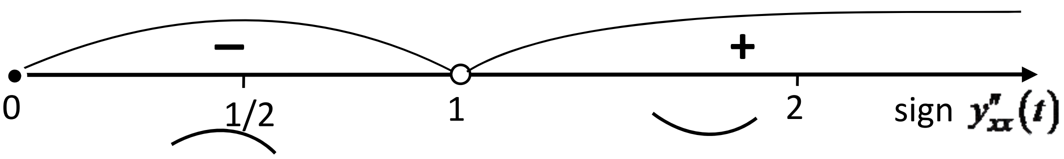



Рис. 18.28. Промежутки монотонности функции

***Шаг 6.*** Выясним наличие асимптот.

Наклонная асимптота.

Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$ (приложение 5):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx).$$

Определим отношение $\dfrac{y}{x}$ из условия функции $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1 - t^2}, \\ y = \dfrac{t - 2t^3}{1 - t^2} \end{cases}$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\dfrac{t - 2t^3}{1 - t^2}}{\dfrac{t}{1 - t^2}} = \frac{t - 2t^3}{t} = \frac{t\left(1 - 2t^2\right)}{t} = 1 - 2t^2.$$

Вычислим пределы:

1) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x}$. С учетом области определения функции, найденной на шаге 2, следует, что $x \to \infty$ при $t \to 1-$:

$$k = \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \left(1 - 2t^2\right) = 1 - 2\cdot 1^2 = 1 - 2 = -1,$$

$$b = \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \left( \frac{t - 2t^3}{1 - t^2} - (-1)\frac{t}{1 - t^2} \right) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \left( \frac{t - 2t^3}{1 - t^2} + \frac{t}{1 - t^2} \right) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \left( \frac{t - 2t^3 + t}{1 - t^2} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \frac{-2t^3 + 2t}{1 - t^2} = -2 \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \frac{t^3 - t}{1 - t^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{п.Л.}}{=\!=} -2 \lim_{\substack{x\to\infty \\ t\to 1-}} \frac{3t^2 - 1}{-2t} = -2 \cdot \frac{3\cdot 1^2 - 1}{-2\cdot 1} =$$

$$= -2 \cdot \frac{3 - 1}{-2} = 2.$$

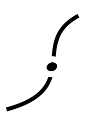
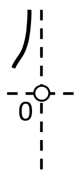
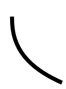
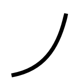
Таким образом, $k = -1$, $b = 2$.

Получили уравнение наклонной асимптоты $y = -x + 2$.

***Шаг 7.*** Результаты исследования занесем в сводную таблицу (табл. 18.5).

Таблица 18.5

Сводная таблица

| $t$ | 0 | (0; 0,47) | 0,47 | (0,47; 1) | 1 | (1; 1,51) | 1,51 | (1,51; ∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | (0;0,6) | 0,6 | (0,6; ∞) | ∄ | (-∞; -0,07) | -0,7 | (-0,7; 0) |
| $y$ | 0 | (0; 0,3) | 0,3 | (0,3; -∞) | ∄ | (∞; 2,3) | 2,3 | (2,3; ∞) |
| $y'_x$ | + | + | 0 | − | ∄ | − | 0 | + |
| $y''_x$ | 0 | − | − | − | ∄ | + | + | + |
| *y(x)* |  |  | max  |  |   |  | min  |  |

***Шаг 8.*** Построение графика начинается с изображения:

1) точек пересечения с осями координат $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\sqrt{2};0\right)$;

2) точки разрыва 2-го рода $x = 0$;

3) точки локального минимума $M_4(-0{,}7;2{,}3)$;

4) точки локального максимума $M_3(0{,}6;\,0{,}3)$;

5) наклонной асимптоты $y=-x+2$;

6) вертикальной асимптоты $x=0$.

Результаты исследования изображены на рис. 18.29.

***Шаг 9.*** Исследуемая функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Применим свойство симметрии:

1) точка $M_2(\sqrt{2};\,0)$ отображается в точку $M^*{}_2(-\sqrt{2};\,0)$;

2) полуинтервал $x\in[0;\,\infty)$ выпуклости с точкой локального максимума $M_3(0{,}6;\,0{,}3)$ отображается в полуинтервал $x\in(-\infty;\,0]$ вогнутости с точкой локального минимума $M^*{}_3(-0{,}6;\,-0{,}3)$.

***Вывод:*** получили точку перегиба $x=0$;

3) полуинтервал $x\in(-\infty;\,0)$ вогнутости с точкой локального минимума $M_4(-0{,}7;\,2{,}3)$ отображается в полуинтервал $x\in[0;\,\infty)$ выпуклости с точкой локального максимума $M^*{}_4(0{,}7;\,-2{,}3)$;

4) наклонная асимптота $y=-x+2$ отображается в наклонную асимптоту $y=-x-2$.

Результаты симметричного отображения графика исследования представлены на рис. 18.30.

Окончательный график функции показан на рис. 18.31.

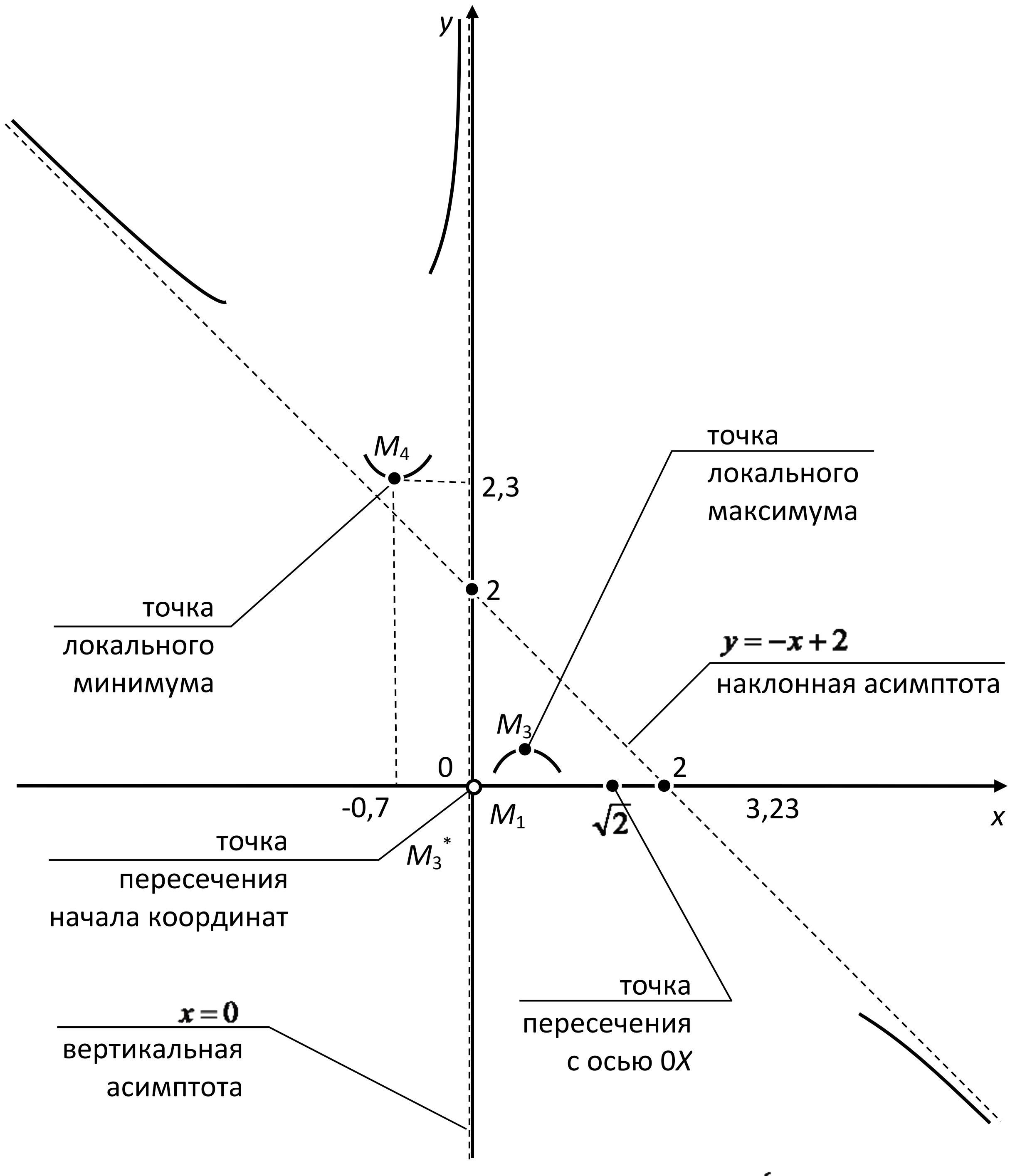



Рис. 18.29. Результаты исследования функции $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1-t^2}, \\ y=\dfrac{t-2t^3}{1-t^2} \end{cases}$ :

$M_1(0;0)$, $M_2(\sqrt{2};0)$ – точки пересечения с осями координат;
$M_4(-0{,}7;2{,}3)$ – точка локального минимума;
$M_3(0{,}6;0{,}3)$ – точка локального максимума;
$y=-x+2$ – наклонная асимптота;
$x=0$ – вертикальная асимптота

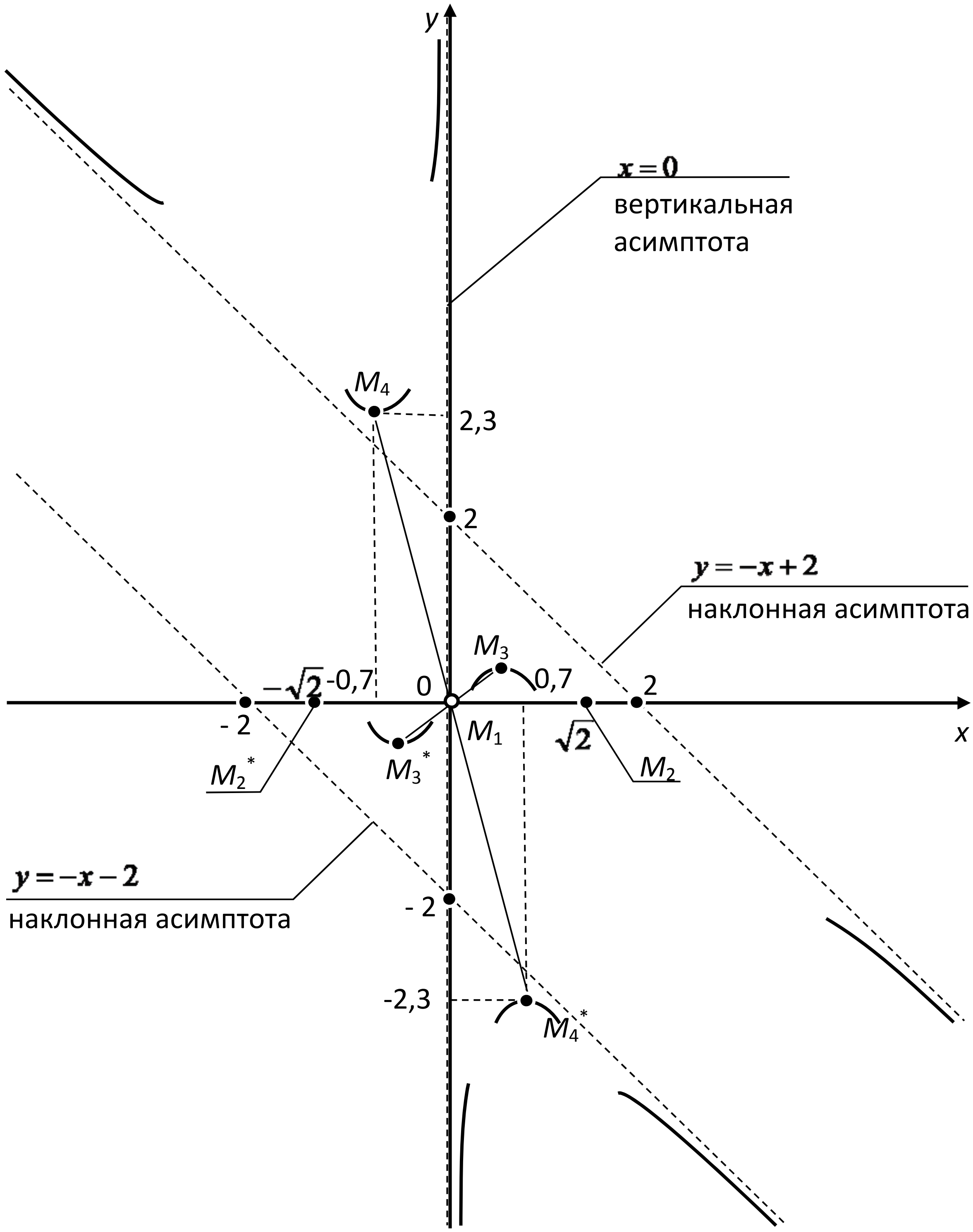



Рис. 18.30. Симметричное отображение данных, представленных на рис. 18.29:
$M_2^*\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ – точки пересечения с осями координат;
$M_4^*\left(0,7; -2,3\right)$ – точка локального максимума;
$M_3^*\left(-0,6; -0,3\right)$ – точка локального минимума;
$y = -x - 2$ – наклонная асимптота

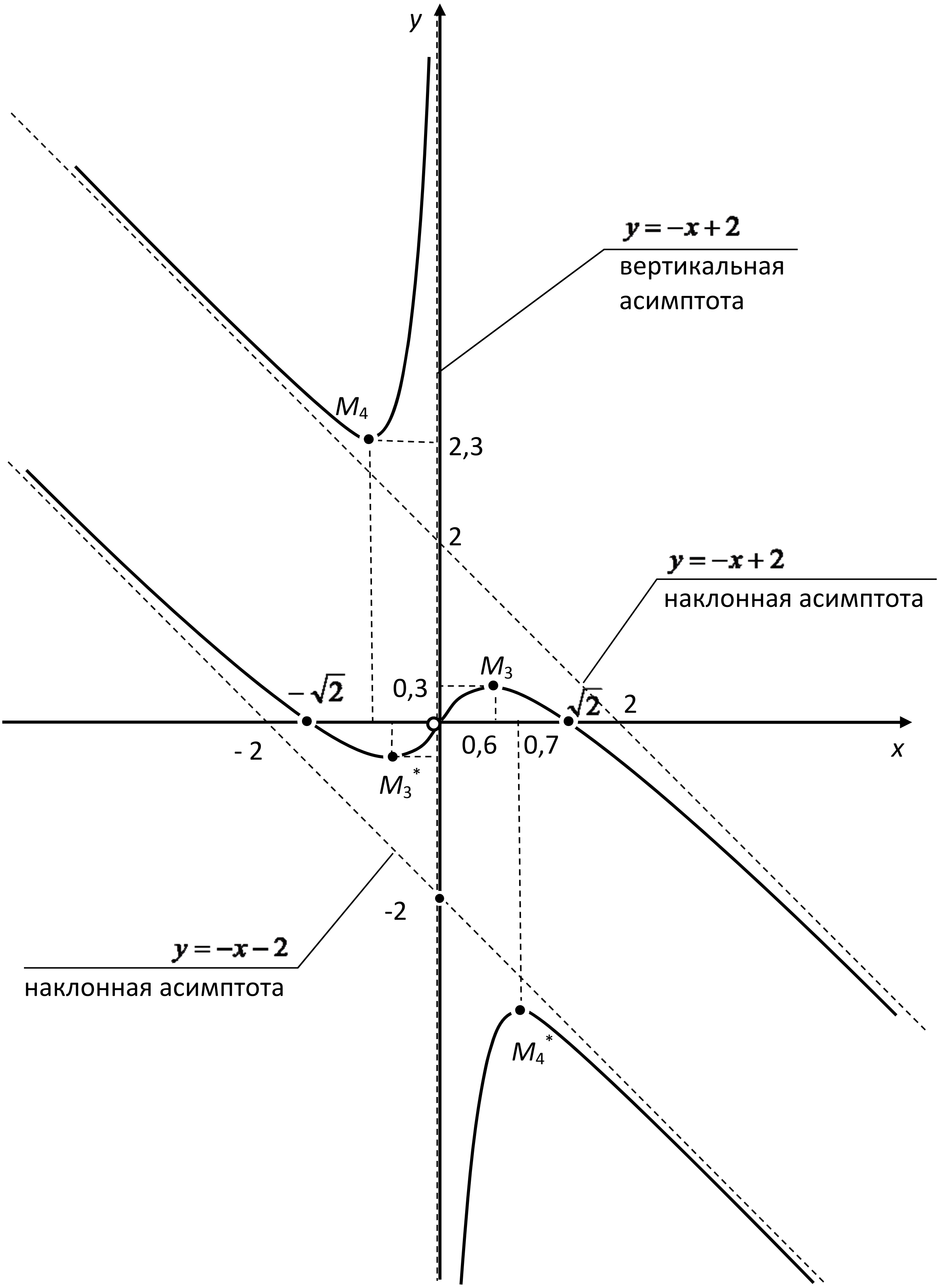



Рис. 18.31. Окончательный график функции

## 18.7. Наибольшее и наименьшее значения функции

На практике часто решаются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значения функции на некотором промежутке.

***Теорема Вейерштрасса***

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения.

Наибольшее и наименьшее значения функции достигаются либо в критических точках, принадлежащих отрезку $[a;\ b]$, либо на его границах.

***Алгоритм*** нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$:

1) найти производную первого порядка;
2) найти стационарные точки первого рода, принадлежащие отрезку $[a;\ b]$ и вычислить значения функции в этих точках;
3) вычислить значения функции $f(a)$, $f(b)$ на границах отрезка;
4) провести сравнительный анализ полученных значений, выбрать наибольшее и наименьшее значения.

**Примечание.** Если в промежутке $[a;\ b]$ одна критическая точка и в ней достигается максимум (минимум), то в этой точке функция достигает наибольшего (наименьшего) значения.

**ПРИМЕР 18.7.1.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^2 - 6x + 3$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка:

$$y' = 3x^2 - 6x + 3,$$

$$y' = 3 \cdot 2x - 6 = 6x - 6.$$

***Шаг 2.*** Найдем стационарные точки первого рода, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$, для чего решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$6x - 6 = 0,$$

$$x = 1,\ x \in [-1;\ 2].$$

Вычислим значение функции в стационарной точке $x = 1$:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = 3 - 6 + 3 = 0.$$

***Шаг 3.*** Вычислим значение функции на границах отрезка $[-1;\ 2]$, в точках $x=-1$ и $x=2$:

$$f(-1)=3\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)+3=3+6+3=12,$$

$$f(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2+3=12-12+3=3.$$

***Шаг 4.*** Проведем сравнительный анализ:

$$f_{\text{наиб}}\{0;\ 3;\ 12\}=12 \text{ при } x=-1,$$

$$f_{\text{наим}}\{0;\ 3;\ 12\}=0 \text{ при } x=1.$$

ОТВЕТ

$f_{\text{наиб}}(-1)=12$, $f_{\text{наим}}(1)=0$ ■

**ПРИМЕР 18.7.2.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Найдем производную первого порядка:

$$y'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)',$$

$$y'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

***Шаг 2.*** Найдем стационарные точки, принадлежащие интервалу $[1;\ e]$, для чего решим уравнение $f'(x)=0$:

$$\ln x+1=0,$$

$$\ln x=-1,$$

$$x=e^{-1},$$

$$x=\frac{1}{e}\approx\frac{1}{2{,}71}\approx 0{,}37,\ x\notin[1;\ e].$$

***Шаг 3.*** Вычислим значения функции на границах отрезка $[1;\ e]$, в точках $x=1$ и $x=e$:

$$f(1)=1\cdot\ln 1=1\cdot 0=0,$$

$$f(e)=e\cdot\ln e=e\cdot 1=e.$$

***Шаг 4.*** Проведем сравнительный анализ:

$$f_{\text{наиб}}\{0;\ e\} = e \ \text{при} \ x = e,$$

$$f_{\text{наим}}\{0;\ e\} = 0 \ \text{при} \ x = 1.$$

ОТВЕТ

$f_{\text{наиб}}(e) = e$, $f_{\text{наим}}(1) = 0$ ■

## 19. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

На практике многие технические, экономические, физические, биологические и другие задачи решаются с применением производной. Рассмотрим некоторые из таких задач.

**ПРИМЕР 19.1.**

В трудовом коллективе заработная плата каждого рабочего составляет $Q$ рублей. Число занятых на производстве мест – *x*. Заработная плата и число рабочих мест связаны соотношением

$$Q = L - x^2 - \frac{a}{x},$$

где $L$, $a$ – постоянные, характеризующие производственные возможности коллектива.

Согласно «золотому правилу роста» определить число *x* так, чтобы $Q$ принимало наибольшее из возможных значений. При $L = 1500$, $a = 16\ 000$ найти по указанному правилу число рабочих мест, если дополнительно известно, что трудовой коллектив располагает $N = \{15,\ 18,\ 25\}$ рабочими местами.

РЕШЕНИЕ

Задача заключается в определении оптимальных соотношений рабочих мест и заработной платы. Так как величины $L$, $a$ – постоянные, то величина $Q$ зависит от *x*, следовательно, функцию $Q = Q(x)$ необходимо исследовать на экстремум на промежутке $[1; 25]$, так как число рабочих мест не превышает 25.

***Шаг 1.*** Найдем экстремум функции $Q = Q(x)$ на промежутке $[1; 25]$, для чего вычислим производную первого порядка $Q'_x$:

$$Q'_x = \left(L - x^2 - \frac{a}{x}\right)' = L' - \left(x^2\right)' - a\left(x^{-1}\right)' = 0 - 2x - a\left(-x^{-2}\right) = -2x + \frac{a}{x^2},$$

$$Q'_x = -2x + \frac{a}{x^2}.$$

Найдем стационарную точку, решив уравнение $Q'_x = 0$:

$$-2x + \frac{a}{x^2} = 0,$$

$$\frac{-2x^3 + a}{x^2} = 0,$$

$$-2x^3 + a = 0,$$

$$2x^3 = a,$$

$$x^3 = \frac{a}{2}.$$

Получили одну стационарную точку $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$.

При $a = 16\ 000$ число рабочих мест составит

$$x = \sqrt[3]{\frac{16\ 000}{2}} = \sqrt[3]{8000} = 20.$$

$x = 20$ – стационарная точка.

***Шаг 2.*** Определим знаки производной первого порядка $Q'_x$ на промежутке $[1; 20]$. Пусть $x = 10$ при $a = 16\ 000$, тогда имеем

$$Q'_x(10) = -2 \cdot 10 + \frac{16\ 000}{10^2} = -20 + 160 = 140,$$

$$Q'_x(10) > 0.$$

***Вывод:*** на данном промежутке функция возрастает.

Определим знаки производной первого порядка $Q'_x$ на промежутке $[20; 25]$. Пусть $x = 22$ при $a = 16\ 000$, тогда имеем

$$Q'_x(22) = -2 \cdot 22 + \frac{16\ 000}{22^2} = -44 + \frac{16\ 000}{484} = -44 + 33{,}06 = -10{,}94,$$

$$Q'_x(22) < 0.$$

***Вывод:*** на данном промежутке функция убывает.

Учитывая, что на отрезке $[1; 25]$ производная первого порядка $Q'_x$, проходя через единственную стационарную точку $x = 20$, меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке достигает наибольшего значения (рис. 19.1).

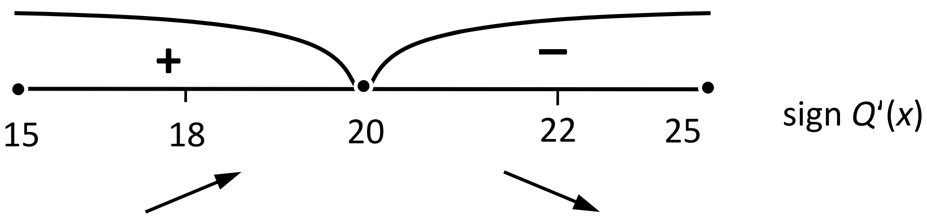



Рис. 19.1. Интервалы монотонности функции $Q(x)$

Таким образом, заработная плата рабочих будет достигать наибольшего размера, если работодатель организует на участках 15, 18 и 20 рабочих мест.

ОТВЕТ

15; 18; 20 ■

**ПРИМЕР 19.2.**

Найти положительное число, которое в сумме с обратным ему числом дает наименьшую сумму.

**Примечание.** Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице. Например, для числа 5 взаимно обратным является число $\frac{1}{5}$; для числа (– 7) взаимно обратным является $(-\frac{1}{7})$ и т.д.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Обозначим неизвестное число через $x$, тогда взаимно обратным ему числом будет $\frac{1}{x}$.

Найдем сумму взаимно обратных чисел: $S = x + \frac{1}{x}$. Сумму $S$ рассмотрим как функцию.

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции на интервале $(0; \infty)$.

***Шаг 2.*** Найдем экстремум функции $S = S(x)$, для чего найдем производную первого порядка $S'_x$:

$$S'_x = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = \left(x + x^{-1}\right)' = 1 + \left(-x^{-2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2},$$

$$S'_x = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Найдем стационарную точку, решив уравнение $S'_x = 0$:

$$1-\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\frac{x^2-1}{x^2}=0,$$

$$x^2-1=0,$$

$$x^2=1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=1. \end{array}\right.$$

Значение $x=-1$ не принадлежит интервалу $(0;\infty)$, противоречит условию задачи, следовательно, стационарная точка одна: $x=1$.

***Шаг 3.*** Применим второе достаточное условие существования экстремума. Вычислим значение производной второго порядка $S''_{xx}$ в стационарной точке $x=1$:

$$S''_{xx}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\left(1-x^{-2}\right)'=0-\left(-2x^{-3}\right)=\frac{2}{x^3},$$

$$S''_{xx}(1)=\frac{2}{1^3}=2>0.$$

Так как $S''_{xx}(1)>0$, то в точке $x=1$ функция достигает локального минимума.

Для числа $x=1$ взаимно обратным является число $\frac{1}{1}=1$.

***Вывод:*** сумма положительных взаимно обратных чисел 1 и 1 является наименьшей и равна $1+1=2$.

ОТВЕТ

1 ■

**ПРИМЕР 19.3.**

Из квадратного листа картона со стороной *a* сделать открытую коробку наибольшей вместимости, отрезав по углам одну из сторон квадрата и загнув выступы для придания формы.

РЕШЕНИЕ

Задача заключается в определении наибольшей вместимости коробки. Учитывая, что размер картона для изготовления коробки – заданная величина, составим функцию, описывающую объем коробки, и исследуем ее на экстремум.

***Шаг 1.*** Определим объем коробки.

По углам квадратного картона со стороной $a$ требуется вырезать четыре одинаковых квадрата. Неизвестные стороны квадратов обозначим через $x$.

Учитывая, что коробка открытая, изобразим схему ее развертки. Пунктирными линиями по углам картона изобразим квадраты, выделенные штрихом, по сторонам которых планируется сделать разрезы и загибы (рис. 19.2).

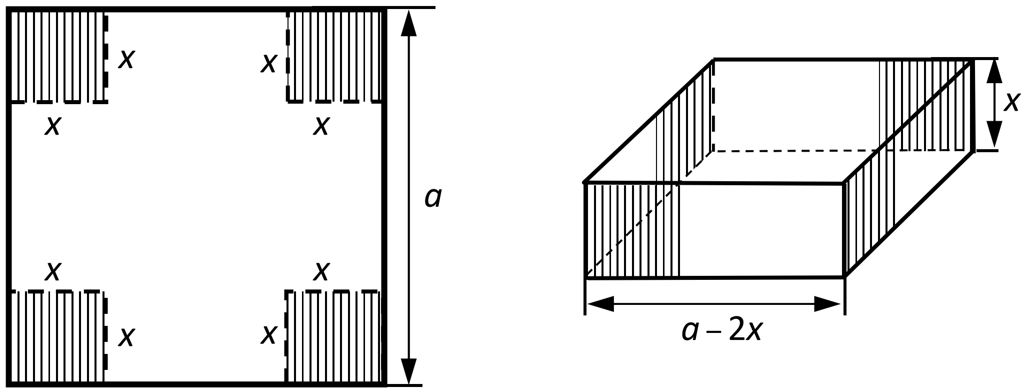



Рис. 19.2. Чертеж заготовки коробки

Коробка имеет вид прямоугольного параллелепипеда, объем которого $V$ равен

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H .$$

Основанием коробки является квадрат со стороной $(a-2x)$, следовательно, площадь основания $S_{\text{осн}}$ равна

$$S_{\text{осн}} = (a-2x)^2 .$$

Высота коробки $H$ равна стороне заштрихованного квадрата $x$. Таким образом, объем коробки выражается соотношением

$$V = (a-2x)^2 \cdot x .$$

Полученную формулу объема коробки можно рассматривать как функцию $V = V(x)$ относительно переменной $x$.

***Шаг 2.*** Найдем экстремум функции $V = V(x)$ на интервале $(0; \infty)$, для чего найдем производную первого порядка $V'_x$:

$$V'_x = \left((a-2x)^2 \cdot x\right)' = \left(a^2x - 2 \cdot a \cdot 2x \cdot x + (2x)^2 \cdot x\right)' = \left(a^2x - 4ax^2 + 4x^3\right)' =$$

$$= \left(a^2 x - 4ax^2 + 4x^3\right)' = a^2 (x)' - 4a\left(x^2\right)' + 4\left(x^3\right)' = a^2 \cdot 1 - 4a \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 =$$

$$= a^2 - 8\,a\,x + 12x^2,$$

$$V'_x = a^2 - 8\,a\,x + 12x^2.$$

Найдем стационарную точку, решив уравнение $V'_x = 0$ относительно переменной $x$. Напомним, что $a$ – величина постоянная:

$$V'_x = 12x^2 - 8\,a\,x + a^2 = 0.$$

Найдем корни квадратного уравнения:

$$x = \frac{8\,a \pm \sqrt{(-8\,a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12} = \frac{8\,a \pm \sqrt{64\,a^2 - 48\,a^2}}{24} = \frac{8\,a \pm \sqrt{16\,a^2}}{24} =$$

$$= \frac{8\,a \pm \sqrt{16\,a^2}}{24} = \frac{8\,a \pm 4a}{24} = \frac{2\,a \pm a}{6} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2a + a}{6} = \dfrac{3a}{6} = \dfrac{a}{2}, \\ \dfrac{2a - a}{6} = \dfrac{a}{6}. \end{array}\right.$$

Таким образом, получили две стационарные точки: $x_1 = \dfrac{a}{2}$ – при данном значении задача не имеет смысла, $x_2 = \dfrac{a}{6}$.

***Шаг 3.*** Применим второе достаточное условие существования экстремума. Вычислим значение производной второго порядка $V''_{xx}$ в стационарной точке $x = \dfrac{a}{6}$:

$$V''_{xx} = \left(12x^2 - 8\,a\,x + a^2\right)' = 12\left(x^2\right)' - 8\,a(x)' + \left(a^2\right)' =$$

$$= 12 \cdot 2x - 8\,a \cdot 1 + 0 = 24x - 8a,$$

$$V''_{xx} = 24x - 8a,$$

$$V''_{xx}\left(\frac{a}{6}\right) = 24 \cdot \frac{a}{6} - 8a = \frac{a}{4} - 8a = \frac{a - 32a}{4} = -\frac{31}{8}a,$$

$$\left.\begin{array}{l} V''_{xx}\left(\dfrac{a}{6}\right) = -\dfrac{31}{8}a \\ a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V''_{xx}\left(\dfrac{a}{6}\right) < 0,$$

значит, полученная стационарная точка $x = \dfrac{a}{6}$ является точкой локального максимума функции $V(x)$, а объем коробки в данной точке будет максимальным.

ОТВЕТ

$\dfrac{a}{6}$ ■

**ПРИМЕР 19.4.**

Бак имеет форму цилиндра объемом $V$ (м$^3$). Определить такие значения высоты бака и диаметра его основания (м), чтобы на изготовление открытого бака пошло наименьшее количество материала.

РЕШЕНИЕ

Задача заключается в определении наименьшего количества материала, необходимого для изготовления бака. Учитывая, что объем бака $V$ – заданная величина, составим функцию, которая описывает площадь расходного материала, и исследуем ее на экстремум.

***Шаг 1.*** Определим количество материала, необходимого для изготовления бака.

Изобразим развертку бака, учитывая, что он открытый (рис. 19.3).

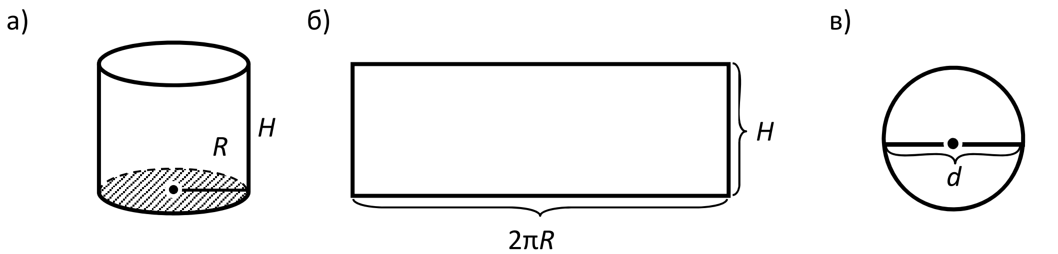



Рис. 19.3. Чертеж открытого бака в форме цилиндра:
а – цилиндр; б – боковая поверхность цилиндра; в – основание цилиндра

Площадь материала $S$ определяется суммой площади основания $S_{\text{осн}}$ и площади боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}}$, откуда

$$S = \pi R^2 + 2\pi RH. \tag{19.1}$$

Неизвестную высоту бака $H$ выразим из формулы объема бака $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, определяющей его вместимость:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}. \tag{19.2}$$

Подставим соотношение (19.2) в формулу (19.1):

$$S = \pi R^2 + 2\cancel{\pi R}\frac{V}{\cancel{\pi R^2}} = \pi R^2 + 2\frac{V}{R}.$$

Таким образом, получили формулу площади расходного материала, которую можно рассматривать как функцию $S = S(R)$ относительно переменной $R$.

***Шаг 2.*** Найдем экстремум функции $S = S(R)$ на интервале $(0; \infty)$, для чего найдем производную первого порядка $S'_R$:

$$S'_R(R) = \left(\pi R^2 + 2\frac{V}{R}\right)' = \left(\pi R^2\right)' + \left(2V(R)^{-1}\right)' = \pi\left(R^2\right)' + 2V\left(R^{-1}\right)' =$$

$$= \pi \cdot 2R + 2V\left(-R^{-2}\right) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2},$$

$$S'_R = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}.$$

Найдем стационарную точку, решив уравнение $S'_R = 0$:

$$2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0,$$

$$\frac{2\pi R^3 - 2V}{R^2} = 0,$$

$$2\pi R^3 - 2V = 0,$$

$$\pi R^3 - V = 0,$$

$$\pi R^3 = V,$$

$$R^3 = \frac{V}{\pi}.$$

Получили одну стационарную точку $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

***Шаг 3.*** Применим второе достаточное условие существования экстремума. Вычислим значение производной второго порядка $S''_{RR}$ в стационарной точке $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$:

$$S''_{RR} = \left( 2\pi R - \frac{2V}{R^2} \right)' = \left(2\pi R\right)' - \left(2\,VR^{-2}\right)' = 2\pi\left( R\right)' - 2\,V\left(R^{-2}\right)' =$$

$$= 2\pi \cdot 1 - 2\,V\left(-2R^{-3}\right) = 2\pi + \frac{4\,V}{R^3},$$

$$S''_{RR} = 2\pi + \frac{4\,V}{R^3}.$$

Так как радиус $R$ и объем $V$ – величины положительные, то $S''_{RR} > 0$, следовательно, полученная стационарная точка $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ является точкой локального минимума функции $S(R)$, а площадь расходного материала в данной точке будет минимальной.

***Шаг 4.*** Определим размеры высоты и диаметра основания бака, выраженные через заданную величину $V$ в точке минимума $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

Диаметр определяется по формуле

$$d = 2\,R,$$

$$d = 2\,\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Высота бака выражается формулой

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{V}{\pi R^2} \\ R &= \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\,\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\dfrac{\pi^3 V^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

ОТВЕТ

$d = 2\,\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ (м), $H = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ (м) ■

**ПРИМЕР 19.5.**

Из круглого бревна диаметром $d$ требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы она, находясь в горизонтальном положении, оказывала наибольшее сопротивление на изгиб.

***Указание:*** сопротивление изгибу балки прямо пропорционально произведению ширины поперечного сечения на квадрат высоты сечения.

РЕШЕНИЕ

Задача заключается в определении оптимальных размеров поперечного сечения, оказывающего наибольшее сопротивление на изгиб балки, следовательно, необходимо сформировать функцию, описывающую прочность бруса на изгиб, и исследовать ее на экстремум.

***Шаг 1.*** Запишем закон прочности бруса $N$:

$$N = k \cdot a \cdot H^2, \tag{19.3}$$

где $k$ – коэффициент пропорциональности, $k > 0$; $a$ – ширина поперечного сечения балки, $a > 0$; $H$ – высота поперечного сечения балки, $H > 0$.

Брус с прямоугольным поперечным сечением вырезается из круглого бревна диаметром $d$ (рис. 19.4).

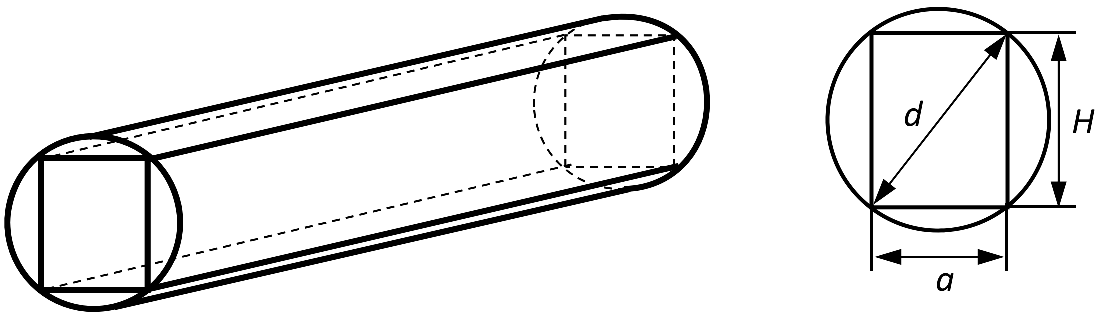



Рис. 19.4. Балка

Площадь прямоугольного поперечного сечения $S_{\text{сеч}}$ балки выражается формулой $S_{\text{сеч}} = a \cdot H$ .

Диаметр $d$ делит поперечное сечение на два равных прямоугольных треугольника с катетами $H$, $a$ и гипотенузой $d$. Согласно теореме Пифагора

$$d^2 = a^2 + H^2. \tag{19.4}$$

Из соотношения (19.4) выразим высоту сечения $H$:

$$H^2 = d^2 - a^2,$$

подставим в формулу (19.3):

$$N = k \cdot a \cdot \left(d^2 - a^2\right).$$

Таким образом, получили формулу сопротивления балки на изгиб, которую можно рассмотреть как функцию $N = N(a)$ относительно переменной $a$.

***Шаг 2.*** Найдем экстремум функции $N = N(a)$ на интервале $(0; \infty)$, для чего найдем производную первого порядка $N'_a$:

$$N'_a = \left(k \cdot a \cdot \left(d^2 - a^2\right)\right)' = \left(k\, d^2 a - k\, a^3\right)' = k\, d^2 \left(a\right)' - k\left(a^3\right)' = k\, d^2 - k \cdot 3a^2,$$

$$N'_a = k\, d^2 - 3k\, a^2.$$

Найдем стационарную точку, решив уравнение $N'_a = 0$:

$$k\, d^2 - 3k\, a^2 = 0,$$

$$k\left(d^2 - 3a^2\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} k \neq 0, \\ d^2 - 3a^2 = 0, \end{array}\right.$$

$$d^2 = 3a^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = \dfrac{d^2}{3} \\ a > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Получили одну стационарную точку $a = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

***Шаг 3.*** Применим второе достаточное условие существования экстремума. Вычислим значение производной второго порядка $N''_{aa}$ в стационарной точке $a = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$:

$$N''_{aa} = \left(k\, d^2 - 3k\, a^2\right)'_a = \left(k\, d^2\right)'_a - \left(3k\, a^2\right)'_a = 0 - 3k\left(a^2\right)'_a = -3k \cdot 2a = -6k\, a,$$

$$\left.\begin{array}{l} N''_{aa} = -6k\, a \\ k > 0 \\ a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow N''_{aa}\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) < 0,$$

значит, стационарная точка $a=\frac{d}{\sqrt{3}}$ является точкой локального максимума. Следовательно, полученная прочность бруса в данной точке будет максимальной.

***Шаг 4.*** Определим высоту в точке локального максимума:

$$H^2=d^2-a^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}=\sqrt{d^2-a^2} \\ a=\dfrac{d}{\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad H=\sqrt{d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=\sqrt{\frac{3d^2-d^2}{3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2d^2}{3}}=d\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$H=d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

ОТВЕТ

$a=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $H=d\sqrt{\frac{2}{3}}$ ■

## 20. ПРАКТИКУМ С УКАЗАНИЯМИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1. Найти производную первого порядка функции, используя определение производной**

***Указания к упражнениям 20.1.1. – 20.1.10.:***

1) аргументу $x$ придать приращение $\Delta x$;
2) вычислить приращение $\Delta y$;
3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

**ПРИМЕР 20.1.1.**

$y=-4x+1$

ОТВЕТ

$y'=-4$

**ПРИМЕР 20.1.2.**

$y = 5x^2 + 14x - 9$

ОТВЕТ

$y' = 10x + 14$

**ПРИМЕР 20.1.3.**

$y = 4x^2 + 7x$

ОТВЕТ

$y' = 8x + 7$

**ПРИМЕР 20.1.4.**

$y = -9x^2 - 8x + 3$

ОТВЕТ

$y' = -18x - 8$

**ПРИМЕР 20.1.5.**

$y = -3x^2 + 5x + 2$

ОТВЕТ

$y' = -6x + 5$

**ПРИМЕР 20.1.6.**

$y = -2x^2 + 5x + 3$

ОТВЕТ

$y' = -4x + 5$

**ПРИМЕР 20.1.7.**

$y = x^3 + 4$

ОТВЕТ

$y' = 3x^2$

**ПРИМЕР 20.1.8.**

$y = -2x^3 - x$

ОТВЕТ

$y' = -6x^2 - 1$

**ПРИМЕР 20.1.9.**

$y = x^3 + 4x$

ОТВЕТ

$y' = 3x^2 + 4$

**ПРИМЕР 20.1.10.**

$y = 2x^3 - 3x + 5$

ОТВЕТ

$y' = 6x^2 - 3$

**2. Вычислить значение производной первого порядка функции в указанной точке, используя определение производной**

**ПРИМЕР 20.2.1.**

$y = 7x^2 + 1$ в точке $x = 1$

***Указания:***

1) аргументу $x = 1$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ

$y'(1) = 14$

**ПРИМЕР 20.2.2.**

$y = 2x^2 - 3x - 9$ в точке $x = 2$

***Указания:***

1) аргументу $x = 2$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ

$y'(2) = 5$

**ПРИМЕР 20.2.3.**

$y = 3x^2 - 8x$ в точке $x = 3$

***Указания:***

1) аргументу $x = 3$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ

$y'(3) = 10$

**ПРИМЕР 20.2.4.**

$y = -6x^2 - x + 3$ в точке $x = -2$

***Указания:***

1) аргументу $x = -2$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(-2 + \Delta x) - f(-2)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ

$y'(-2) = 23$

**ПРИМЕР 20.2.5.**

$y = -2x^2 - 5x - 3$ в точке $x = -1$

***Указания:***

1) аргументу $x = -1$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(-1 + \Delta x) - f(-1)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ

$y'(-1) = -1$

**ПРИМЕР 20.2.6.**

$y = -4x^2 - 3x + 3$ в точке $x = 4$

***Указания:***

1) аргументу $x = 4$ придать приращение $\Delta x$;

2) вычислить приращение $\Delta y = f(4 + \Delta x) - f(4)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ
$y'(4) = -35$

**ПРИМЕР 20.2.7.**
$y = 5x^3 + 4$ в точке $x = 1$
***Указания:***
1) аргументу $x = 1$ придать приращение $\Delta x$;
2) вычислить приращение $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ
$y'(1) = 15$

**ПРИМЕР 20.2.8.**
$y = -x^3 + x$ в точке $x = 2$
***Указания:***
1) аргументу $x = 2$ придать приращение $\Delta x$;
2) вычислить приращение $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ
$y'(2) = -11$

**ПРИМЕР 20.2.9.**
$y = 2x^3 - 3x$ в точке $x = 3$
***Указания:***
1) аргументу $x = 3$ придать приращение $\Delta x$;
2) вычислить приращение $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ
$y'(3) = 51$

**ПРИМЕР 20.2.10.**
$y = 3x^3 + 7x + 5$ в точке $x = 2$
***Указания:***
1) аргументу $x = 2$ придать приращение $\Delta x$;
2) вычислить приращение $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2)$;
3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

ОТВЕТ
$y'(2) = 43$

**3. Составить уравнения нормали и касательной, проведенной к линии в заданной точке**

**ПРИМЕР 20.3.1.**
$y = x^2 - 5x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$
***Указания:***
1) вычислить значение производной функции в точке $x_0 = 2$;
2) определить координаты точки касания, для чего вычислить ординату $y_0 = y(2)$; точка касания $M(2; -3)$;
3) записать уравнение касательной, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(2) = y_0$: $y - y_0 = f'(2) \cdot (x - 2)$;
4) записать уравнение нормали, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(2) = y_0$: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2)$;
5) записать ответ.
ОТВЕТ
Уравнение касательной $y + x + 1 = 0$, уравнение нормали $x - y - 5 = 0$.

**ПРИМЕР 20.3.2.**
$y = x^2 + 4x - 9$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$

***Указания:***

1) вычислить значение производной функции в точке $x_0 = 3$;

2) определить координаты точки касания, для чего вычислить ординату $y_0 = y(3)$; точка касания $M(3; 12)$;

3) записать уравнение касательной, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(3) = y_0$: $y - y_0 = f'(3) \cdot (x - 3)$;

4) записать уравнение нормали, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(3) = y_0$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(3)} \cdot (x - 3)$;

5) записать ответ.

ОТВЕТ

Уравнение касательной $10x - y - 18 = 0$, уравнение нормали $10y + x - 123 = 0$.

**ПРИМЕР 20.3.3.**

$y = \sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x_0 = 5$

***Указания:***

1) вычислить значение производной функции в точке $x_0 = 5$;

2) определить координаты точки касания, для чего вычислить ординату $y_0 = y(5)$; точка касания $M(5; 3)$;

3) записать уравнение касательной, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(5) = y_0$: $y - y_0 = f'(5) \cdot (x - 5)$;

4) записать уравнение нормали, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(5) = y_0$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(5)} \cdot (x - 5)$;

5) записать ответ.

ОТВЕТ

Уравнение касательной $x - 6y + 13 = 0$, уравнение нормали $6x + y - 33 = 0$.

**ПРИМЕР 20.3.4.**

$y = \mathrm{tg}6x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$

***Указания:***

1) вычислить значение производной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

2) определить координаты точки касания, для чего вычислить ординату $y_0 = y(\frac{\pi}{3})$ (приложение 1); получим точку касания $M(\frac{\pi}{3}; -1)$;

3) записать уравнение касательной, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(\frac{\pi}{3}) = y_0$: $y - y_0 = f'(\frac{\pi}{3}) \cdot (x - \frac{\pi}{3})$;

4) записать уравнение нормали, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(\frac{\pi}{3}) = y_0$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} \cdot (x - \frac{\pi}{3})$;

5) записать ответ.

ОТВЕТ

Уравнение касательной $6x - y - 1 - 2\pi = 0$, уравнение нормали $x + 6y + 6 - \frac{\pi}{3} = 0$.

**ПРИМЕР 20.3.5.**

$y = \sin 4x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{8}$

***Указания:***

1) вычислить значение производной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{8}$;

2) определить координаты точки касания, для чего вычислить ординату $y_0 = y(\frac{\pi}{8})$ (приложение 1); точка касания $M(\frac{\pi}{8}; 3)$;

3) записать уравнение касательной, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(\frac{\pi}{8}) = y_0$: $y - y_0 = f'(\frac{\pi}{8}) \cdot (x - \frac{\pi}{8})$;

4) записать уравнение нормали, подставив найденные координаты точки $M$ и значение производной $f'(\frac{\pi}{8}) = y_0$: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(\frac{\pi}{8})} \cdot (x - \frac{\pi}{8})$;

5) записать ответ.

ОТВЕТ

Уравнение касательной $y - 3 = 0$, уравнение нормали $x - \frac{\pi}{8} = 0$.

## 4. Приложение производной к задачам геометрии и механики

**ПРИМЕР 20.4.1.**

Закон движения материальной точки $s = 3t^4 - 2t^2 + 2t - 1$. Найти скорость и ускорение движения точки в момент времени $t = 2$ с.

***Указания:***

1) скорость движения материальной точки равна производной первого порядка закона движения по времени *t*: $V = s'(t)$;

2) найти скорость движения через 2 с, для чего вычислить значение производной первого порядка в момент времени $t = 2$ с : $V = s'(2)$;

3) найти ускорение движения через 2 с, для чего вычислить значение производной второго порядка в момент времени $t = 2$ с : $W = s''(2)$.

ОТВЕТ

$V = 90$ м/с, $W = 140$ м/с$^2$

**ПРИМЕР 20.4.2.**

Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени ее скорость будет равна 174 м/с?

***Указания:***

1) скорость движения материальной точки равна производной первого порядка закона движения по времени *t*: $V = s'(t)$;

2) найти время *t*, при котором скорость движения будет равна 174 м/с, для чего решить уравнение относительно времени *t*: $s'(t) = 174$.

ОТВЕТ

$t = 6$ с

**ПРИМЕР 20.4.3.**

По оси $0X$ движутся две материальные точки, законы движения которых $s_1 = 5t^2 + 2t + 6$ и $s_2 = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

***Указания:***

1) найти время $t_0$, через которое точки встретятся после начала движения, для чего решить уравнение относительно времени *t*: $s_1 = s_2$;

2) скорости движения материальных точек равны производной первого порядка закона движения по времени *t*: $V_1 = s_1'(t)$, $V_2 = s_2'(t)$;

3) найти скорости движения через $t_0$ с, для чего вычислить значения производных первого порядка в момент времени $t_0$: $V_1 = s_1'(t_0)$, $V_2 = s_2'(t_0)$.

ОТВЕТ

42 м/с и 35 м/с

**ПРИМЕР 20.4.4.**

Кубическая парабола $x^3 - 36y = 0$ является траекторией движения тела. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы?

***Указания:***

1) рассмотрим переменные $x$ и $y$ как функции, зависящие от переменной $t$. Продифференцировать обе части уравнения $x^3 = 36y$ по переменной $t$: $\left(x^3\right)'_t$, $\left(36y\right)'_t$;

2) составить соотношение между скоростями изменения координат $\left(x^3\right)'_t = \left(36y\right)'_t$;

3) найти координаты точки, в которой скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковые.

ОТВЕТ

$$M_1\left(2\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \quad M_2\left(-2\sqrt{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

**5. Исследовать дифференцируемость функции**

***Указания к упражнениям 20.5.1. – 20.5.4.:***

1) вычислить односторонние пределы функции в точке $x_0$;

2) сравнить значения односторонних пределов;

3) сделать вывод, записать ответ.

**ПРИМЕР 20.5.1.**

$$y = \begin{cases} 3^x - 1, & x \le 0; \\ -\operatorname{tg} x, & x > 0. \end{cases}$$

***Указания:***

1) вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-}\left(3^x - 1\right)$, $\lim\limits_{x\to 0+}\left(-\operatorname{tg} x\right)$;

2) сделать вывод и записать ответ.

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 20.5.2.**

$$y = \begin{cases} 3 - x, & x \le 0; \\ 4^x + 2, & x > 0. \end{cases}$$

***Указания:***

1) вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 0-}\left(3 - x\right)$, $\lim\limits_{x\to 0+}\left(4^x + 2\right)$;

2) сравнить значения односторонних пределов, сделать вывод и записать ответ.

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 20.5.3.**

$$y = \begin{cases} \ln x, & x \le 6; \\ 4, & x > 6. \end{cases}$$

***Указания:***

1) вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x \to 6-} (\ln x)$, $\lim\limits_{x \to 6+} (6)$;

2) сравнить значения односторонних пределов, сделать вывод и записать ответ.

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 20.5.4.**

$$y = \begin{cases} 1 - x^2, & x \le 1; \\ 2 - 2x, & x > 1. \end{cases}$$

***Указания:***

1) вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x \to 1-} \left(1 - x^2\right)$, $\lim\limits_{x \to 1+} (2 - 2x)$;

2) сравнить значения односторонних пределов, сделать вывод и записать ответ.

ОТВЕТ

Функция дифференцируема

**6. Найти производную первого порядка сложной функции**

**ПРИМЕР 20.6.1.**

$$y = 2^{x^4} - \operatorname{tg}^4 x$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) для производной разности $y' = \left(2^{x^4}\right)' - \left(\operatorname{tg}^4 x\right)'$;

2) $\left(2^{x^4}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $x^4$;

3) $\left(\operatorname{tg}^4 x\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\operatorname{tg} x$.

ОТВЕТ

$$y' = 2^{x^4} \cdot \ln 2 \cdot 4x^3 - 4\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

**ПРИМЕР 20.6.2.**

$$y = \sin(\operatorname{tg}\sqrt{x+4})$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(\sin(\operatorname{tg}\sqrt{x+4})\right)'$ – производная сложной функции синуса с промежуточным аргументом $\operatorname{tg}\sqrt{x+4}$;

2) $\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+4}\right)'$ – производная сложной функции тангенса с промежуточным аргументом $\sqrt{x+4}$;

3) $\left(\sqrt{x+4}\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(x+4)$.

ОТВЕТ

$$y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+4}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x+4}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

**ПРИМЕР 20.6.3.**

$$y = 2^{x/\ln x}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(2^{x/\ln x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $\dfrac{x}{\ln x}$;

2) $\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'$ – производная частного.

ОТВЕТ

$$y' = 2^{x/\ln x}\cdot\ln 2\cdot\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

**ПРИМЕР 20.6.4.**

$$y = \ln(x - 2^{-x})$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(\ln(x - 2^{-x})\right)'$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $\left(x - 2^{-x}\right)$;

2) $\left(x - 2^{-x}\right)'$ – производная разности;

3) $\left(2^{-x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(-x)$.

ОТВЕТ

$$y' = \frac{1 + 2^{-x}\cdot\ln 2}{x - 2^{-x}}$$

**ПРИМЕР 20.6.5.**

$y = \sin^2 x \cdot 2^{x^2}$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(\sin^2 x \cdot 2^{x^2}\right)'$ – производная произведения;

2) $\left(\sin^2 x\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\sin x$;

3) $\left(2^{x^2}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $\left(x^2\right)$.

ОТВЕТ

$y' = 2\sin x \cdot 2^{x^2}\left(\cos x + x \cdot \sin x \cdot \ln 2\right)$

**ПРИМЕР 20.6.6.**

$y = \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\right)'$ – производная сложной функции арктангенса с промежуточным аргументом $\sqrt{1+x^2}$;

2) $\left(\sqrt{1+x^2}\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\left(1+x^2\right)$;

3) $\left(1+x^2\right)'$ – производная суммы.

ОТВЕТ

$$y' = \frac{x}{\left(2+x^2\right) \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

**ПРИМЕР 20.6.7.**

$y = \dfrac{\cos 5x}{e^{x^3}}$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $y' = \left(\dfrac{\cos 5x}{e^{x^3}}\right)'$ – производная частного;

2) $\left(\cos 5x\right)'$ – производная сложной функции косинуса с промежуточным аргументом $5x$;

3) $\left(e^{x^3}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $\left(x^3\right)$.

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{5\sin 5x + \cos 5x \cdot 3x^2}{e^{x^3}}$$

**7. Найти производные первого и второго порядка функции, заданной параметрически**

***Указания к упражнениям 20.7.1. – 20.7.5.:***

1) вычислить производные $x'_t$ и $y'_t$;

2) применить формулу для производной первого порядка $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$;

3) применить формулу для производной второго порядка $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x(t)\right)'_t}{x'_t(t)}$;

4) сделать необходимые преобразования, записать ответ.

**ПРИМЕР 20.7.1.**

$$\begin{cases} x = (3t-2)\sin t, \\ y = 5t^2. \end{cases}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left((3t-2)\sin t\right)'_t$ – производная произведения;

2) $\left(5t^2\right)'_t$ – производная степенной функции, константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{10t}{3\sin t + (3t-2)\cos t}, \quad y''_{xx} = 10\frac{\left(3t^2-2t+3\right)\sin t - (9t+2)\cos t}{\left(3\sin t + (3t-2)\cos t\right)^3}$$

**ПРИМЕР 20.7.2.**

$$\begin{cases} x = 4\sin^2 t, \\ y = 2\cos 9t. \end{cases}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(4\sin^2 t\right)'_t$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\sin t$, константу вынести за знак производной;

2) $\left(2\cos 9t\right)'$ – производная сложной функции косинуса с промежуточным аргументом $9t$, константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$y'_x=-\frac{9\sin 9t}{2\sin 2t},\ y''_{xx}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{9\cos t\cdot\sin 2t-2\cos 2t\cdot\sin 9t}{(\sin 2t)^3}$$

**ПРИМЕР 20.7.3.**

$$\begin{cases} x=e-4^t, \\ y=e^{5t+1}. \end{cases}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(e-4^t\right)'_t$ – производная разности;

2) $\left(4^t\right)'_t$ – производная показательной функции;

3) $\left(e^{5t+1}\right)'_t$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(5t+1)$.

ОТВЕТ

$$y'_t=-\frac{5e^{5t+1}}{4^t\ln 4},\ y''_{xx}=\frac{5}{\ln^2 4}\cdot\frac{e^{5t+1}\cdot 4^t(5-\ln 4)}{\left(4^t\right)^3}$$

**ПРИМЕР 20.7.4.**

$$\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[3]{2t+1}. \end{cases}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\sqrt{t}\right)'_t$ – производная степенной функции, применить свойство степени $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\sqrt[3]{2t+1}\right)'_t$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(2t+1)$, применить свойство степени $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ОТВЕТ

$$y'_x=\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt[3]{(2t+1)^2}},\ y''_{xx}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt[3]{(2t+1)^2}}{2\sqrt{t}}-\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{(2t+1)^2}}}{(2t+1)^2}$$

**ПРИМЕР 20.7.5.**

$$\begin{cases} x=3t^4-t^2, \\ y=\cos(2-5t). \end{cases}$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\ln\left(3t^4 - t^2\right)\right)'_t$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $\left(3t^4 - t^2\right)$;

2) $\left(3t^4 - t^2\right)'_t$ – производная разности;

3) $\left(3t^4\right)'_t$ – производная степенной функции, константу вынести за знак производной;

4) $\left(t^2\right)'_t$ – производная степенной функции;

5) $\left(\cos\left(2-5t\right)\right)'_t$ – производная сложной функции косинуса с промежуточным аргументом $\left(2-5t\right)$.

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sin\left(2-5t\right)}{6t^3 - t},\ y''_{xx} = -\frac{5}{4}\cdot\frac{5\cos\left(2-5t\right)\cdot\left(6t^3-t\right)+\left(18t^2-1\right)\sin\left(2-5t\right)}{\left(6t^3-t\right)^3}$$

**8. Найти производную первого порядка функции, заданной неявно**

***Указания к упражнениям 20.8.1. – 20.8.5.:***

1) продифференцировать левую и правую части по переменной $x$;

2) применить правила дифференцирования: $\left(x\right)' = 1$, $\left(y\right)'_x = y'$;

3) слагаемые, содержащие $y'$, оставить в левой части, а остальные слагаемые перенести в правую часть, меняя знаки на противоположные;

4) в левой части вынести $y'$ за скобки;

5) выразить $y'$;

6) записать ответ.

**ПРИМЕР 20.8.1.**

$\cos\left(x+y\right) - 3x^3y + y^2 = 2xy$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\cos\left(x+y\right)\right)'$ - производная сложной функции косинуса с промежуточным аргументом $\left(x+y\right)$;

2) $\left(3x^3y\right)'$ – производная произведения, константу вынести за знак производной;

3) $\left(y^2\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\left(y\right)$;

4) $\left(2xy\right)'$ – производная произведения, константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{\sin(x+y) + 9x^2 y + 2y}{\sin(x+y) + 3x^3 + 2x - 2y}$$

**ПРИМЕР 20.8.2.**

$\sin(x^3 + y) - 5x^2 y^3 + 5y - 4 = 7x$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $(\sin(x^3 + y))'$ – производная сложной функции синуса с промежуточным аргументом $(x^3 + y)$;

2) $(x^3)'$ – производная степенной функции;

3) $(5x^2 y^3)'$ – производная произведения, константу вынести за знак производной;

4) $(5y)'$ – константу вынести за знак производной;

5) $(7x)'$ – константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$y' = \frac{7 - 3x^2 \cos(x^3 + y) + 10xy^3}{\cos(x^3 + y) - 15x^2 y^2 + 5}$$

**ПРИМЕР 20.8.3.**

$\ln(x + y) - 2x^3 y^2 - 7x^2 = 2 + y$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $(\ln(x + y))'$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $(x + y)$;

2) $(2x^3 y^2)'$ – производная произведения, константу вынести за знак производной;

3) $(x^3)'$ – производная степенной функции;

4) $(y^2)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(y)$;

5) $(7x^2)'$ – производная степенной функции, константу вынести за знак производной;

6) $(2)'$ – производная константы.

ОТВЕТ

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x+y} - 6x^2y^2 - 14x}{1 + 4x^3y - \dfrac{1}{x+y}}$$

**ПРИМЕР 20.8.4.**

$$\mathrm{tg}(2x-3) - 2x^5y + \ln\left(4-y^2\right) = 2x^3 - 5$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\mathrm{tg}\,(2x-3)\right)'$ – производная сложной функции тангенса с промежуточным аргументом $(2x-3)$;

2) $(2x-3)'$ – производная разности;

3) $\left(2x^5y\right)'$ – производная произведения, константу вынести за знак производной;

4) $\left(x^5\right)'$ – производная степенной функции;

5) $\left(\ln\left(4-y^2\right)\right)'$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $\left(4-y^2\right)$;

6) $\left(4-y^2\right)'$ – производная разности;

7) $\left(y^2\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(y)$;

8) $\left(2x^3\right)'$ – производная степенной функции, константу вынести за знак производной;

9) $(5)'$ – производная константы.

ОТВЕТ

$$y' = \frac{\dfrac{2}{\cos^2(2x-3)} - 10x^4y - 6x^2}{2x^5 + \dfrac{2y}{4-y^2}}$$

**ПРИМЕР 20.8.5.**

$$e^{2x}(x+3y) - 3y^4 + x = 12 - 4y$$

***Указания.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\left(e^{2x}\left(x+3y\right)\right)'$ – производная произведения;

2) $\left(e^{2x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(2x)$;

3) $\left(x+3y\right)'$ – производная суммы;

4) $\left(3y^4\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(y)$, константу вынести за знак производной;

5) $(12)'$ – производная константы.

ОТВЕТ

$$y'=-\frac{2e^{2x}\left(x+3y\right)+e^{2x}+1}{3e^{2x}-12y^3+4}$$

**9. Найти производную первого порядка показательно-степенной функции**

***Указания к упражнениям 20.9.1. – 20.9.6.:***

1) функцию $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ прологарифмировать по основанию *e*, $\ln y=\ln f(x)^{\varphi(x)}$;

2) применить свойство логарифмов $\ln b^p=p\cdot\ln b$;

3) продифференцировать равенство $\ln y=\varphi(x)\cdot\ln f(x)$;

4) $\ln y$ – сложная логарифмическая функция с промежуточным аргументом *y*, $\left(\ln y\right)'=\dfrac{y'}{y}$;

5) $\left(\varphi(x)\cdot\ln f(x)\right)'$ – производная произведения;

6) выразить $y'$;

7) сделать подстановку $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ и записать ответ.

**ПРИМЕР 20.9.1.**

$y=x^x$

ОТВЕТ

$y'=x^x\cdot\left(\ln x+1\right)$

**ПРИМЕР 20.9.2.**

$y=(1-\sin 2x)^{\mathrm{ctg}x}$

ОТВЕТ

$$y' = -(1-\sin 2x)^{\mathrm{ctg}x} \cdot \left( \frac{\ln(1-\sin 2x)}{\cos^2 x} + \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x \cdot \cos 2x}{1-\sin 2x} \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.3.**

$$y = \sqrt[x]{x}$$

ОТВЕТ

$$y' = \frac{\sqrt[x]{x} \cdot (-\ln x + 1)}{x^2}$$

**ПРИМЕР 20.9.4.**

$$y = (\ln(1/x))^x$$

ОТВЕТ

$$y' = (\ln(1/x))^x \cdot \left( \ln\left( \ln\left( \frac{1}{x} \right) \right) + \frac{1}{\ln x} \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.5.**

$$y = (\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$$

ОТВЕТ

$$y' = (\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x} \cdot \left( -2\frac{\mathrm{ctg}x \cdot \ln(\cos x)}{\sin^2 x} - \mathrm{ctg}\,x \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.6.**

$$y = (\ln 2x)^{1/\ln x}$$

ОТВЕТ

$$y' = (\ln 2x)^{1/\ln x} \cdot \left( -\frac{\ln(\ln x)}{x\ln^2 x} + \frac{1}{x\ln x \ln 2x} \right)$$

***Указание к упражнениям 20.9.7. – 20.9.10.:*** применить свойство степени $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ (приложение 3).

**ПРИМЕР 20.9.7.**

$$y = \sqrt[x]{\ln(x+e)}$$

ОТВЕТ

$$y' = \sqrt[x]{\ln(x+e)} \cdot \left( -\frac{\ln(\ln(x+e))}{x^2} + \frac{1}{x(x+e)\ln(x+e)} \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.8.**

$y = \sqrt[x]{\sin x}$

ОТВЕТ

$$y' = \sqrt[x]{\sin x} \cdot \left( \frac{-\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x}{x^2} \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.9.**

$y = \sqrt[x]{1 + x^2}$

ОТВЕТ

$$y' = \sqrt[x]{1 + x^2} \cdot \left( -\frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} + \frac{2}{1 + x^2} \right)$$

**ПРИМЕР 20.9.10.**

$y = \sqrt[x-1]{x}$

ОТВЕТ

$$y' = \sqrt[x-1]{x} \cdot \left( -\frac{\ln x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 - x} \right)$$

## 10. Найти дифференциал первого и второго порядка функции

***Указание к упражнениям 20.10.1. – 20.10.3.:*** для функции $y = f(x)$ дифференциалы первого и второго порядка находятся по формулам $d\,y = f'(x)dx$, $d^{\,2}y = f''(x)dx^2$.

**ПРИМЕР 20.10.1.**

$y = \sqrt[3]{x^2} + e^{3x}$

***Указание.*** Применить правила дифференцирования:

1) $\sqrt[3]{x^2}$ – применить свойство степени (приложение 3);

2) $\left(e^{3x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(3x)$.

ОТВЕТ

$$d\,y = \left( \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 3e^{3x} \right) d\,x, \quad d^{\,2}y = \left( -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} + 9e^{3x} \right) d\,x^2$$

**ПРИМЕР 20.10.2.**

$y = \ln\left(x^4 - 3\sin 7x\right)$

***Указания***. Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\ln\left(x^4-3\sin 7x\right)\right)'$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $\left(x^4-3\sin 7x\right)$;

2) $\left(3\sin 7x\right)'$ – производная сложной функции синуса с промежуточным аргументом $(7x)$, константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$dy=\frac{4x^3-21\cos 7x}{x^4-3\sin 7x}dx,\ d^2y=\left(\frac{12\left(x^2+12\sin 7x\right)\left(x^4-3\sin 7x\right)}{\left(4x^3-21\cos 7x\right)^2}-1\right)dx^2$$

**ПРИМЕР 20.10.3.**

$y=\sin 9x-8\operatorname{tg}5x$

***Указания***. Применить правила дифференцирования:

1) $\left(\sin 9x\right)'$ – производная сложной функции синуса с промежуточным аргументом $(9x)$;

2) $\left(8\operatorname{tg}5x\right)'$ – производная сложной функции тангенса с промежуточным аргументом $(5x)$, константу вынести за знак производной.

ОТВЕТ

$$dy=\left(9\cos 9x-\frac{40}{\cos^2 5x}\right)dx,\ d^2y=\left(-81\sin 9x+400\frac{\sin 5x}{\cos^3 5x}\right)dx^2$$

**11. Вычислить приближенное значение функции с точностью до трех знаков после запятой**

**ПРИМЕР 20.11.1.**

$\sqrt{8{,}76}$

***Указания:***

1) ввести функцию $y=\sqrt{x}$;

2) $x=x_0+\Delta x$, придать значение $x_0=9$;

3) вычислить значение $\Delta x=x-x_0$;

4) вычислить значение функции в точке $x_0=9$;

5) вычислить значение производной первого порядка функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=9$;

6) применить формулу $f(8{,}76)\approx f(9)+f'(9)\Delta x$;

7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta=\left|\dfrac{\Delta y-dy}{dy}\right|\cdot 100$;

8) записать ответ.

ОТВЕТ
2,960

**ПРИМЕР 20.11.2.**
$\sqrt[5]{31}$
***Указания:***
1) ввести функцию $y=\sqrt[5]{x}$;
2) $x=x_0+\Delta x$, придать значение $x_0=32$;
3) вычислить значение $\Delta x=x-x_0$;
4) вычислить значение функции в точке $x_0=32$;
5) вычислить значение производной первого порядка функции $y=\sqrt[5]{x}$ в точке $x_0=32$;
6) применить формулу $f(31)\approx f(32)+f'(32)\Delta x$;
7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta=\left|\frac{\Delta y-dy}{dy}\right|\cdot 100$;
8) записать ответ.
ОТВЕТ
1,987

**ПРИМЕР 20.11.3.**
$\sqrt[3]{123}$
***Указания:***
1) ввести функцию $y=\sqrt[3]{x}$;
2) $x=x_0+\Delta x$, придать значение $x_0=125$;
3) вычислить значение $\Delta x=x-x_0$;
4) вычислить значение функции в точке $x_0=125$;
5) вычислить значение производной первого порядка функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=125$;
6) применить формулу $f(123)\approx f(125)+f'(125)\Delta x$;
7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta=\left|\frac{\Delta y-dy}{dy}\right|\cdot 100$;
8) записать ответ.
ОТВЕТ
4,973

**ПРИМЕР 20.11.4.**

$(2{,}01)^3 + (2{,}01)^2$

***Указания:***

1) ввести функцию $y = x^3 + x^2$;

2) $x = x_0 + \Delta x$, придать значение $x_0 = 2$;

3) вычислить значение $\Delta x = x - x_0$;

4) вычислить значение функции в точке $x_0 = 2$;

5) вычислить значение производной первого порядка функции $y = x^3 + x^2$ в точке $x_0 = 2$;

6) применить формулу $f(2{,}01) \approx f(2) + f'(2)\Delta x$;

7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \cdot 100$.

ОТВЕТ

12,161

**ПРИМЕР 20.11.5.**

$$\frac{2{,}7}{\sqrt{(2{,}7)^2 + 16}}$$

***Указания:***

1) ввести функцию $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$;

2) $x = x_0 + \Delta x$, придать значение $x_0 = 3$;

3) вычислить значение $\Delta x = x - x_0$;

4) вычислить значение функции в точке $x_0 = 3$;

5) вычислить значение производной первого порядка функции $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$ в точке $x_0 = 3$;

6) применить формулу $f(2{,}7) \approx f(3) + f'(3)\Delta x$;

7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \cdot 100$;

8) записать ответ.

ОТВЕТ

0,559

**ПРИМЕР 20.11.6.**

$$\sqrt{\frac{4-2{,}97}{1+2{,}97}}$$

***Указания:***

1) ввести функцию $y=\sqrt{\dfrac{4-x}{1+x}}$;

2) $x=x_0+\Delta x$, придать значение $x_0=3$;

3) вычислить значение $\Delta x=x-x_0$;

4) вычислить значение функции в точке $x_0=3$;

5) вычислить значение производной первого порядка функции $y=\sqrt{\dfrac{4-x}{1+x}}$ в точке $x_0=3$;

6) применить формулу $f(2{,}97)\approx f(3)+f'(3)\Delta x$;

7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta=\left|\dfrac{\Delta y-dy}{dy}\right|\cdot 100$;

8) записать ответ.

ОТВЕТ

0,509

**ПРИМЕР 20.11.7.**

$$\sqrt{\frac{(1{,}98)^2-3}{(1{,}98)^2+5}}$$

***Указания:***

1) ввести функцию $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$;

2) $x=x_0+\Delta x$, придать значение $x_0=2$;

3) вычислить значение $\Delta x=x-x_0$;

4) вычислить значение функции в точке $x_0=2$;

5) вычислить значение производной первого порядка функции $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$ в точке $x_0=2$;

6) применить формулу $f(2{,}97)\approx f(3)+f'(3)\Delta x$;

7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta=\left|\dfrac{\Delta y-dy}{dy}\right|\cdot 100$;

8) записать ответ.

ОТВЕТ
0,321

**ПРИМЕР 20.11.8.**
$\cos 59^{\circ}$
***Указания:***
1) ввести функцию $y = \cos x$;
2) $x = x_0 + \Delta x$, придать значение $x_0 = 60^{\circ}$;
3) вычислить значение $\Delta x = x - x_0$;
4) вычислить значение функции в точке $x_0 = 60^{\circ}$ (приложение 1);
5) вычислить значение производной первого порядка функции $y = \cos x$ в точке $x_0 = 60^{\circ}$ (приложение 1);
6) приращение $\Delta x = 1^{\circ}$; выразить градус в радианах по формуле $\Delta x = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$;
7) применить формулу $f\left(59^{\circ}\right) \approx f\left(60^{\circ}\right) + f'\left(60^{\circ}\right)\Delta x$;
8) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \cdot 100$;
9) записать ответ.
ОТВЕТ
0,515

**ПРИМЕР 20.11.9.**
$\mathrm{arctg}\, 1{,}02$
***Указания:***
1) ввести функцию $y = \mathrm{arctg}\, x$;
2) $x = x_0 + \Delta x$, придать значение $x_0 = 1$;
3) вычислить значение $\Delta x = x - x_0$;
4) вычислить значение функции в точке $x_0 = 1$ (приложение 1);
5) вычислить значение производной функции $y = \mathrm{arctg}\, x$ в точке $x_0 = 1$ (приложение 1);
6) применить формулу $f(1{,}02) \approx f(1) + f'(1)\Delta x$;
7) оценить относительную погрешность δ, %, применив формулу $\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| \cdot 100$;
8) записать ответ.

ОТВЕТ
$45°57'$

**12. Вычислить указанные пределы, применив правило Лопиталя**

**ПРИМЕР 20.12.1.**
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$$
***Указания:***

1) подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, применить правило Лопиталя (приложение 2);

2) $\left(\ln(x+5)\right)'$ – производная сложной логарифмической функции с промежуточным аргументом $(x+5)$;

3) $\left(\sqrt[4]{x+3}\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $(x+3)$.

ОТВЕТ
0

**ПРИМЕР 20.12.2.**
$$\lim_{x\to 1}\frac{3^{\ln x}-x}{x-1}$$
***Указания:***

1) подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, применить правило Лопиталя (приложения 5, 6);

2) $\left(3^{\ln x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(\ln x)$.

ОТВЕТ
$\ln 3-1$

**ПРИМЕР 20.12.3.**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$$
***Указание.*** Подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, применить правило Лопиталя (приложения 1, 5, 6).

ОТВЕТ
$\infty$

**ПРИМЕР 20.12.4.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{1-x^2}$$

***Указания:***

1) подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, применить правило Лопиталя (приложения 1, 5);

2) $\left(4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)'$ – производная сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)$, константу вынести за знак производной;

3) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right)'$ – производная сложной функции синуса с промежуточным аргументом $\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

ОТВЕТ

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

**ПРИМЕР 20.12.5.**

$$\lim_{x\to\infty}(4^{1/x}-1)\,x$$

***Указания:***

1) подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $(0\cdot\infty)$ (приложение 6);

2) применить алгебраическое преобразование $(4^{1/x}-1)\,x=\dfrac{4^{1/x}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)}$;

3) предел содержит неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, применить правило Лопиталя (приложение 5);

4) $\left(4^{\frac{1}{x}}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $\left(\frac{1}{x}=x^{-1}\right)$.

ОТВЕТ

$\ln 4$

**ПРИМЕР 20.12.6.**

$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctgx})\ln x$

***Указания:***

1) подставить предельное значение. Предел содержит неопределенность $(0\cdot\infty)$ (приложения 1, 5, 6);

2) применить алгебраическое преобразование

$$(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x=\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{\ln x}};$$

3) предел содержит неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, применить правило Лопиталя (приложения 1, 6);

4) $\left(\dfrac{1}{\ln x}=(\ln x)^{-1}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(\ln x)$.

ОТВЕТ

0

## 13. Провести полное исследование функции и построить ее график

**ПРИМЕР 20.13.1.**

$y=x-\ln\left(x^2-4\right)$

***Указания:***

***Шаг 1.*** Исследовать функцию на четность, нечетность (четность: $y(-x)=y(x)$, нечетность: $y(-x)=-y(x)$):

$$y(-x)=(-x)-\ln\left((-x)^2-4\right)=-x-\ln\left(x^2-4\right).$$

***Вывод:*** функция общего вида, исследование провести на всей числовой оси $0X$.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** ООФ (приложение 4): решить неравенство $x^2-4>0$.

***Вывод:*** $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

***Шаг 4.*** Исследовать непрерывность функции (приложения 5, 6).

Вычислить левосторонний предел функции в точке $x_1=-2$:

$$\lim_{x\to-2-}\left(x-\ln\left(x^2-4\right)\right)=\infty\ \Rightarrow x=-2.$$

$x=-2$ – точка разрыва 2-го рода.

Вычислить правосторонний предел функции в точке $x_2 = 2$:

$$\lim_{x\to 2+}\left(x-\ln\left(x^2-4\right)\right)=\infty \Rightarrow x=2.$$

$x=2$ – точка разрыва 2-го рода.

***Вывод:*** прямые $x=-2$ и $x=2$ – вертикальные асимптоты.

***Шаг 5.*** Найти точки пересечения с осями координат:

– с осью $0X$: решить уравнение $x-\ln\left(x^2-4\right)=0$;

– с осью $0Y$: вычислить значение функции в точке $x = 0$.

***Вывод:*** $M_1(-2{,}03;\,0)$, с осью $0Y$ пересечения нет.

***Шаг 6.*** Выяснить наличие асимптот:

– горизонтальная асимптота: вычислить предел $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (приложения 5, 6):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(x^2-4\right)\right)=\infty,$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(x^2-4\right)\right)=-\infty.$$

***Вывод:*** горизонтальной асимптоты нет;

– наклонная асимптота: уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$, вычислить пределы

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\ln\left(x^2-4\right)}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(x^2-4\right)-1\cdot x\right)=-\infty.$$

***Вывод:*** наклонной асимптоты нет.

***Шаг 7.*** Определить промежутки монотонности, точки экстремума.

Найти производную первого порядка $y'=\dfrac{x^2-2x-4}{x^2-4}$.

Производная первого порядка не существует при $x=\pm 2$.

Найти стационарные точки 1-го рода, для чего решить уравнение

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} = 0,$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}23,$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5} \approx -1{,}23.$$

В данной точке функция не определена.

Изобразить полученные точки на числовой оси 0*X*.

Определить знаки производной первого порядка на следующих интервалах:

– $x \in (-\infty; -2)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает;

– $x \in (2; 3{,}23)$, $y' < 0 \Rightarrow$ функция убывает;

– $x \in (3{,}23; \infty)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

В точке $x_1 = 3{,}23$ производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, подтверждаем наличие экстремума.

Найти значение функции в точке $x_1 = 3{,}23$:

$$y(3{,}23) = 3{,}23 - \ln\left(3{,}23^2 - 4\right) \approx 1{,}14.$$

***Вывод:*** $M_2(3{,}23; 1{,}14)$ – точка локального минимума.

***Шаг 8.*** Определить промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найти производную второго порядка $y'' = 2\dfrac{x^2 + 4}{\left(x^2 - 4\right)^2}$.

Производная второго порядка не существует при $x = \pm 2$.

Найти стационарные точки 2-го рода, для чего решить уравнение

$$y'' = 2\frac{x^2 + 4}{\left(x^2 - 4\right)^2} = 0,$$

$x^2 + 4 = 0$, решений нет.

Изобразить полученные точки на числовой оси 0*X*.

Определить знаки производной второго порядка на следующих интервалах:

– $x \in (-\infty; -2)$, $y'' > 0 \Rightarrow$ вогнутость;

– $x \in (2; \infty)$, $y'' > 0 \Rightarrow$ вогнутость.

Точек перегиба нет.

***Шаг 9.*** Составить сводную таблицу (табл. 20.1).

Таблица 20.1

Сводная таблица

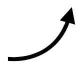
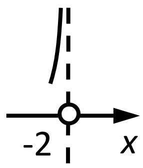
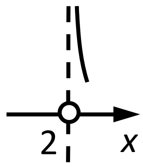
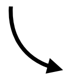
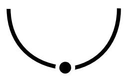
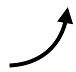
| $x$ | $(-\infty; -2)$ | -2 | 2 | $(2; 3{,}23)$ | 3,23 | $(2; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | $\nexists$ | $\nexists$ | - | 0 | + |
| $y''$ | + | $\nexists$ | $\nexists$ | + | + | + |
| $y$ |  |  |  |  | min $y = 1{,}14$  |  |
| Примечание. Дополнительная точка $M_3(4; 2{,}7)$ | | | | | | |

График функции представлен на рис. 20.1.

**ПРИМЕР 20.13.2.**

$$y = 4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2$$

***Указания.***

***Шаг 1.*** Исследовать функцию на четность, нечетность (четность: $y(-x) = y(x)$; нечетность: $y(-x) = -y(x)$):

$$y(-x) = 4\left(\frac{(-x)+1}{2(-x)-1}\right)^2 = 4\left(\frac{-x+1}{-2x-1}\right)^2.$$

***Вывод:*** функция общего вида, исследование провести на всей числовой оси $0X$.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** ООФ (приложение 4). Решить уравнение $2x-1 \neq 0$.

***Вывод:*** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

***Шаг 4.*** Исследовать непрерывность функции.

Вычислить односторонние пределы в точке $x = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{1}{2}-} 4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = \infty \\ &\lim_{x \to \frac{1}{2}+} 4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ – точка разрыва 2-го рода.}$$

***Вывод:*** прямая $x=\dfrac{1}{2}$ – вертикальная асимптота.

***Шаг 5.*** Найти точки пересечения с осями координат:

– с осью $0X$: решить уравнение $4\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^2=0$;

– с осью $0Y$: вычислить значение функции в точке $x = 0$.

***Вывод:*** $M_1(-1;0)$, $M_2(0;4)$.

***Шаг 6.*** Выяснить наличие асимптот.

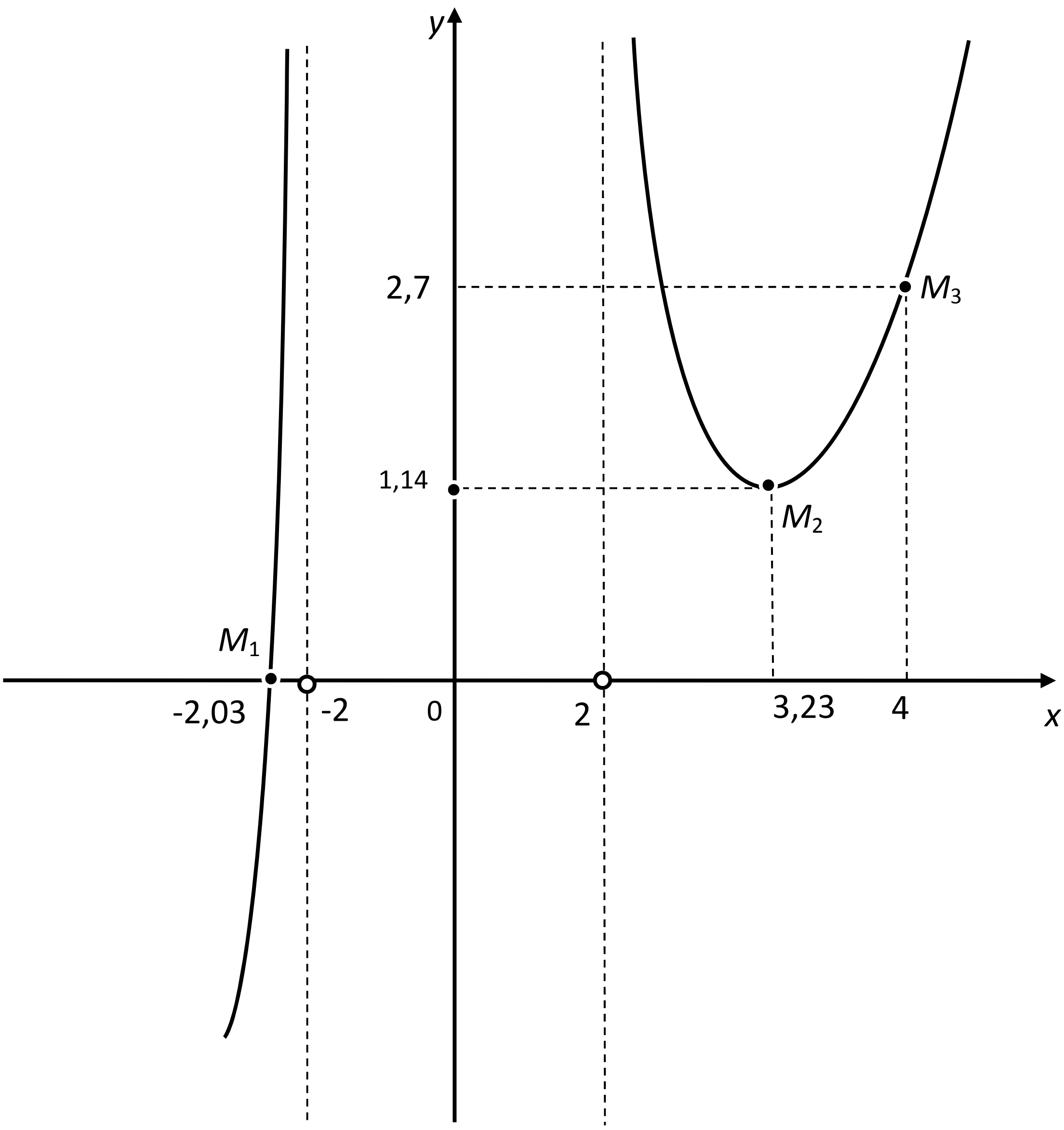



Рис. 20.1. График функции $\boldsymbol{y=x-\ln\left(x^2-4\right)}$

Горизонтальная асимптота. Вычислить предел $k = \lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$:

$$k = \lim_{x\to +\infty} 4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = 1,$$

$$k = \lim_{x\to -\infty} 4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 = 1.$$

***Вывод:*** горизонтальная асимптота $y=1$.

Наклонная асимптота. Уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$. Вычислить следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 - 0\cdot x\right) = 1.$$

***Вывод:*** уравнение наклонной асимптоты $y=1$.

***Шаг 7.*** Найти промежутки монотонности, точки экстремума.

Определить производную первого порядка $y' = -24\dfrac{x+1}{(2x-1)^3}$.

Производная первого порядка не существует при $x = \dfrac{1}{2}$.

Найти стационарные точки 1-го рода, для чего решить уравнение

$$y' = -24\frac{x+1}{(2x-1)^3} = 0, \quad x = -1.$$

Изобразить полученные точки на числовой оси $0X$.

Определить знаки производной первого порядка на следующих интервалах:

– $x \in (-\infty; -1)$, $y' < 0 \Rightarrow$ функция убывает;

– $x \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает;

– $x \in \left(\dfrac{1}{2}; \infty\right)$, $y' < 0 \Rightarrow$ функция убывает.

В точке $x=-1$ производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, подтверждаем наличие экстремума.

Найти значение функции в точке $x=-1$:

$$y(-1)=4\left(\frac{-1+1}{2\cdot(-1)-1}\right)^2=0.$$

***Вывод:*** $M_1(-1;0)$ – точка локального минимума, $x=\frac{1}{2}$ – точка локального максимума.

***Шаг 8.*** Найти промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Определить производную второго порядка $y''=24\frac{4x+7}{(2x-1)^4}$.

Производная второго порядка не существует при $x=\frac{1}{2}$.

Найти стационарные точки 2-го рода, для чего решить уравнение

$$y''=24\frac{4x+7}{(2x-1)^4}=0,$$

$$x=-\frac{7}{4}.$$

Изобразить полученные точки на числовой оси $0X$.

Определить знаки производной второго порядка на следующих интервалах:

– $x\in\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)$, $y''<0 \Rightarrow$ выпуклость;

– $x\in\left(-\frac{7}{4};-1\right)$, $y''>0 \Rightarrow$ вогнутость;

– $x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $y''>0 \Rightarrow$ вогнутость;

– $x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$, $y''>0 \Rightarrow$ вогнутость.

В точке $x=-\frac{7}{4}$ производная второго порядка меняет знак с минуса на плюс.

Найти значение функции в точке $x=-\frac{7}{4}$:

$$y\left(-\frac{7}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{-\frac{7}{4}+1}{2\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)-1}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

***Вывод:*** $M_3\left(-\frac{7}{4};\frac{2}{3}\right)$ – точка перегиба.

***Шаг 9.*** Составить сводную таблицу (табл. 20.2).

Таблица 20.2

Сводная таблица

| $x$ | $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)$ | $-\frac{7}{4}$ | $\left(-\frac{7}{4};-1\right)$ | $-1$ | $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | – | – | 0 | + | $\nexists$ | – |
| $y''$ | – | 0 | + | + | + | $\nexists$ | + |
| $y$ | | | | min | | | |

График функции $y=4\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2$ представлен на рис. 20.2.

**ПРИМЕР 20.13.3.**

$y=x\sqrt[x+1]{e}$

***Указания***

Преобразовать выражение $y=x\sqrt[x+1]{e}=x\,e^{\frac{1}{x+1}}$ (приложение 3).

***Шаг 1.*** Исследовать функцию на четность, нечетность (четность: $y(-x)=y(x)$, нечетность: $y(-x)=-y(x)$):

$$y(-x)=(-x)\,e^{\frac{1}{(-x)+1}}=-x\,e^{\frac{1}{-x+1}}.$$

***Вывод:*** функция общего вида, исследование провести на всей числовой оси $0X$.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** ООФ (приложение 4). Решить уравнение $x+1\neq 0$.

***Вывод***: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

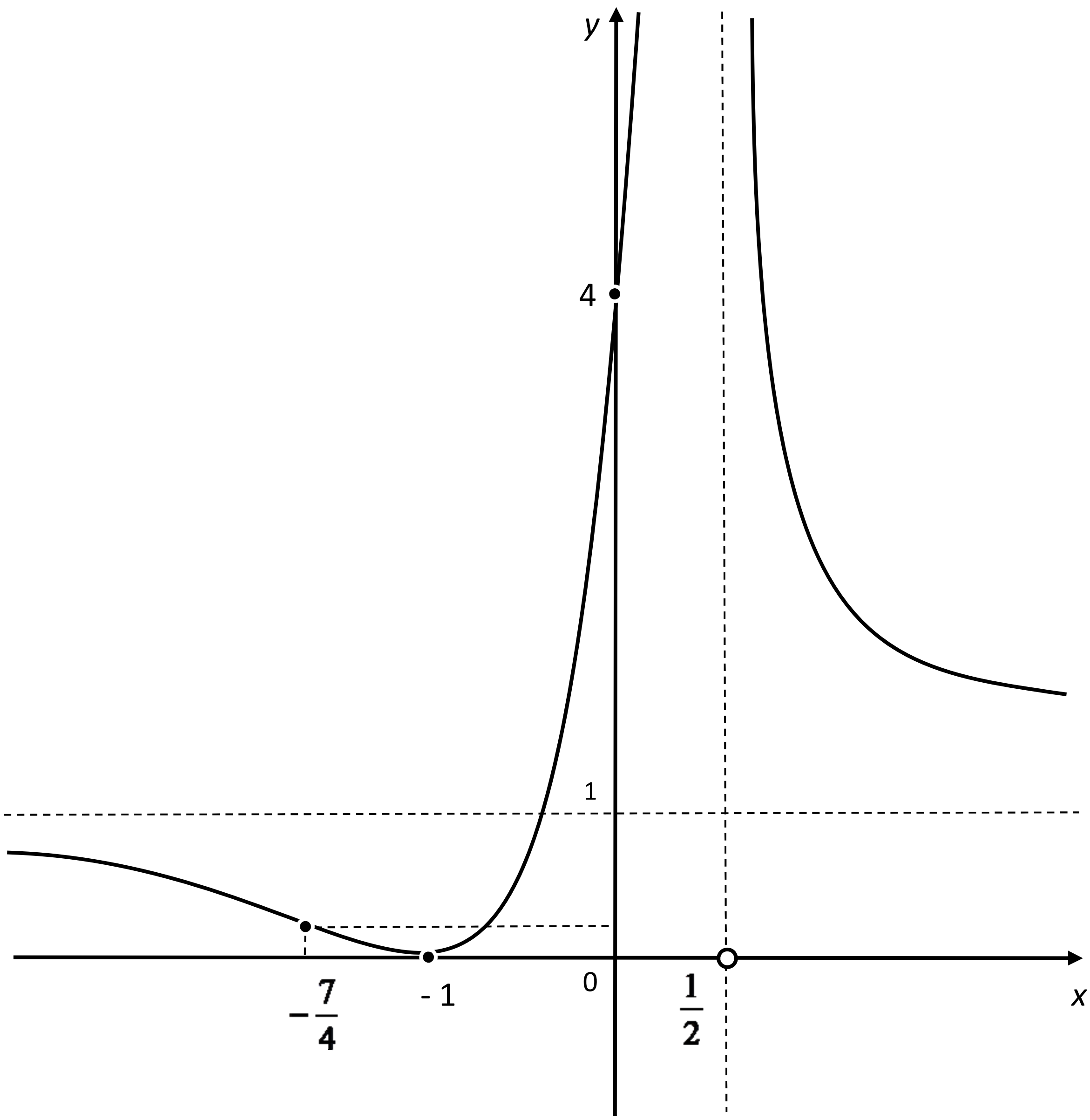



Рис. 20.2. График функции $y = 4\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^2$

***Шаг 4.*** Исследовать непрерывность функции. Вычислить односторонние пределы в точке $x = -1$ (приложения 5, 6):

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1-} x e^{\frac{1}{x+1}} = 0 \\ &\lim_{x \to -1+} x e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = -1 \text{ – точка разрыва 2-го рода.}$$

***Вывод:*** прямая $x=-1$ – вертикальная асимптота.

***Шаг 5.*** Найти точки пересечения с осями координат:

– с осью $0X$: решить уравнение $x e^{\frac{1}{x+1}}=0$;

– с осью $0Y$: вычислить значение функции в точке $x = 0$.

***Вывод:*** $M_1(0;0)$.

***Шаг 6.*** Выяснить наличие асимптот.

Горизонтальная асимптота. Вычислить предел $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (приложения 5, 6):

$$k=\lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x+1}}=\infty,$$

$$k=\lim_{x\to-\infty} x e^{\frac{1}{x+1}}=-\infty.$$

***Вывод:*** горизонтальной асимптоты нет.

Наклонная асимптота. Уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$. Вычислить следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right),$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x e^{\frac{1}{x+1}}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{1}{x+1}}-1\cdot x\right)=1.$$

***Вывод:*** уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

***Шаг 7.*** Определить промежутки монотонности, точки экстремума.

Найти производную первого порядка $y'=e^{\frac{1}{x+1}}\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$.

Производная первого порядка не существует при $x=-1$.

Найти стационарные точки 1-го рода, для чего решить уравнение

$$y'=e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=0.$$

Решений нет.

Изобразить полученные точки на числовой оси 0*X*.

Определить знаки производной первого порядка на следующих интервалах:

– $x \in (-\infty; -1)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает;

– $x \in (-1; \infty)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

Производная первого порядка знак не меняет.

***Вывод:*** экстремума нет.

***Шаг 8.*** Определить промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба. Найти производную второго порядка $y'' = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x+2}{(x+1)^3}$.

Производная второго порядка не существует при $x = -1$.

Найти стационарные точки 2-го рода, для чего решить уравнение

$$y'' = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x+2}{(x+1)^3} = 0,$$

$$x = -2.$$

Изобразить полученные точки на числовой оси 0*X*.

Определить знаки производной второго порядка на следующих интервалах:

– $x \in (-\infty; -2)$, $y'' > 0 \Rightarrow$ вогнутость;

– $x \in \left(-\frac{7}{4}; -1\right)$, $y'' < 0 \Rightarrow$ выпуклость;

– $x \in (-1; \infty)$, $y'' < 0 \Rightarrow$ выпуклость.

В точке $x = -2$ производная второго порядка меняет знак с плюса на минус.

Найти значение функции в точке $x = -2$:

$$y(-2) = -2 \cdot e^{\frac{1}{-2+1}} \approx -0,74.$$

***Вывод:*** $M_3(-2; 0,74)$ – точка перегиба.

***Шаг 9.*** Составить сводную таблицу (табл. 20.3) .

Таблица 20.3

Сводная таблица

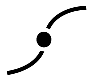
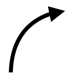
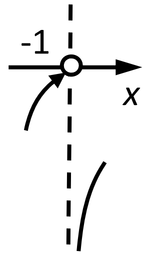
| $x$ | $(-\infty;-2)$ | $-2$ | $(-2;-1)$ | $-1$ | $(-1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | + | $\cancel{\exists}$ | + |
| $y''$ | + | 0 | – | $\cancel{\exists}$ | – |
| $y$ |  |  |  |   |  |

График функции $y = x\sqrt[x+1]{e}$ представлен на рис. 20.3.

**ПРИМЕР 20.13.4.**

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

***Указания***

***Шаг 1.*** Исследовать функцию на четность, нечетность (четность: $y(-x) = y(x)$, нечетность: $y(-x) = -y(x)$):

$$y(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1}.$$

***Вывод:*** функция нечетная, исследование достаточно провести на полуинтервале $[0;\infty)$.

***Шаг 2.*** Функция непериодическая.

***Шаг 3.*** ООФ (приложение 4): решить уравнение $x^2+1 \neq 0$.

***Вывод:*** $x \in R$.

***Шаг 4.*** Точек разрыва нет.

***Шаг 5.*** Точки пересечения с осями координат:

– с осью $0X$: решить уравнение $\frac{x}{x^2+1} = 0$;

– с осью $0Y$: вычислить значение функции в точке $x = 0$.

***Вывод:*** $M_1(0;0)$.

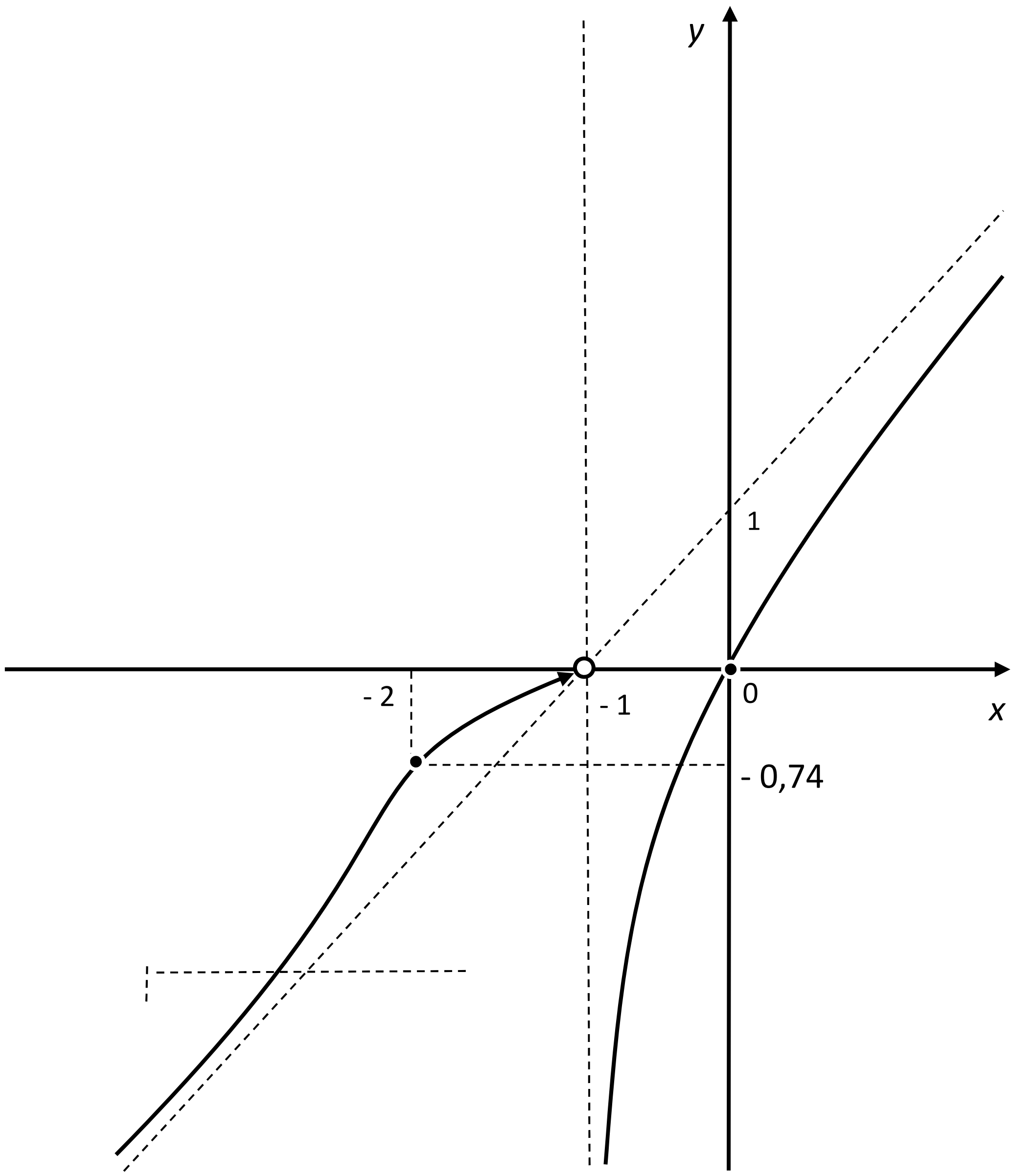



Рис. 20.3. График функции $y = x\sqrt[x+1]{e}$

***Шаг 6.*** Наличие асимптот.

Горизонтальная асимптота. Вычислить предел $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ (приложения 5, 6):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0,$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

***Вывод:*** уравнение горизонтальной асимптоты $y = 0$.

Наклонная асимптота. Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$. Вычислить следующие пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - kx \right),$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{x^2+1} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

***Вывод:*** уравнение наклонной асимптоты $y = 0$.

***Шаг 7.*** Определить промежутки монотонности, точки экстремума.

Найти производную первого порядка $y' = \dfrac{1 - x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Найти стационарные точки 1-го рода, для чего решить уравнение

$$y' = \frac{1 - x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0,$$

$$x = \pm 1.$$

Изобразить полученные точки на числовой оси $0X$.

Определить знаки производной первого порядка на следующих интервалах:

– $x \in (0;1)$, $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает;

– $x \in (1;\infty)$, $y' < 0 \Rightarrow$ функция убывает.

В точке $x = 1$ производная первого порядка меняет знак с плюса на минус.

Найти значение функции в точке $x = 1$:

$$y(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}.$$

***Вывод:*** $M_2\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ – точка локального максимума.

***Шаг 8.*** Определить промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Найти производную второго порядка $y'' = 2x\dfrac{x^2 - 3}{\left(x^2 + 1\right)^3}$.

Найти стационарные точки 2-го рода, для чего решить уравнение

$$y'' = 2x\frac{x^2 - 3}{\left(x^2 + 1\right)^3} = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}.$$

Изобразить полученные точки на числовой оси $0X$.

Определить знаки производной второго порядка на следующих интервалах:

– $x \in \left(0; \sqrt{3}\right)$, $y'' < 0 \Rightarrow$ выпуклость;

– $x \in \left(\sqrt{3}; \infty\right)$, $y'' > 0 \Rightarrow$ вогнутость.

В точке $x = \sqrt{3}$ производная второго порядка меняет знак с минуса на плюс.

Найти значение функции в точке $x = \sqrt{3}$:

$$y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} \approx 0,4.$$

***Вывод:*** $M_3\left(\sqrt{3}; 0,4\right)$ – точка перегиба.

***Шаг 9.*** Составить сводную таблицу (табл. 20.4).

Таблица 20.4

Сводная таблица

| $x$ | 0 | $(0; 1)$ | 1 | $\left(1; \sqrt{3}\right)$ | $\sqrt{3}$ | $\left(\sqrt{3}; \infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | 0 | – | – | – |
| $y''$ | 0 | – | – | – | 0 | + |
| $y$ | 0 | | | | | |

***Шаг 10.*** Построение графика.

Исследуемая функция нечетная, график симметричен относительно начала координат, применим свойство симметрии:

1) точка локального максимума $M_2\left(1;\frac{1}{2}\right)$ отображается в точку локального минимума $M_2^*\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$;

2) точка перегиба $M_3\left(\sqrt{3};0{,}4\right)$ отображается в точку перегиба $M_3^*\left(-\sqrt{3};-0{,}4\right)$;

3) интервал выпуклости $\left(0;\sqrt{3}\right)$ отображается в интервал вогнутости $\left(-\sqrt{3};0\right)$.

***Вывод:*** $M_1(0;0)$ – точка перегиба;

4) интервал вогнутости $x\in\left(\sqrt{3};\infty\right)$ отображается в интервал выпуклости $\left(-\sqrt{3};\infty\right)$;

5) ось $0X$ – горизонтальная асимптота.

График функции $y=\frac{x}{x^2+1}$ представлен на рис. 20.4.

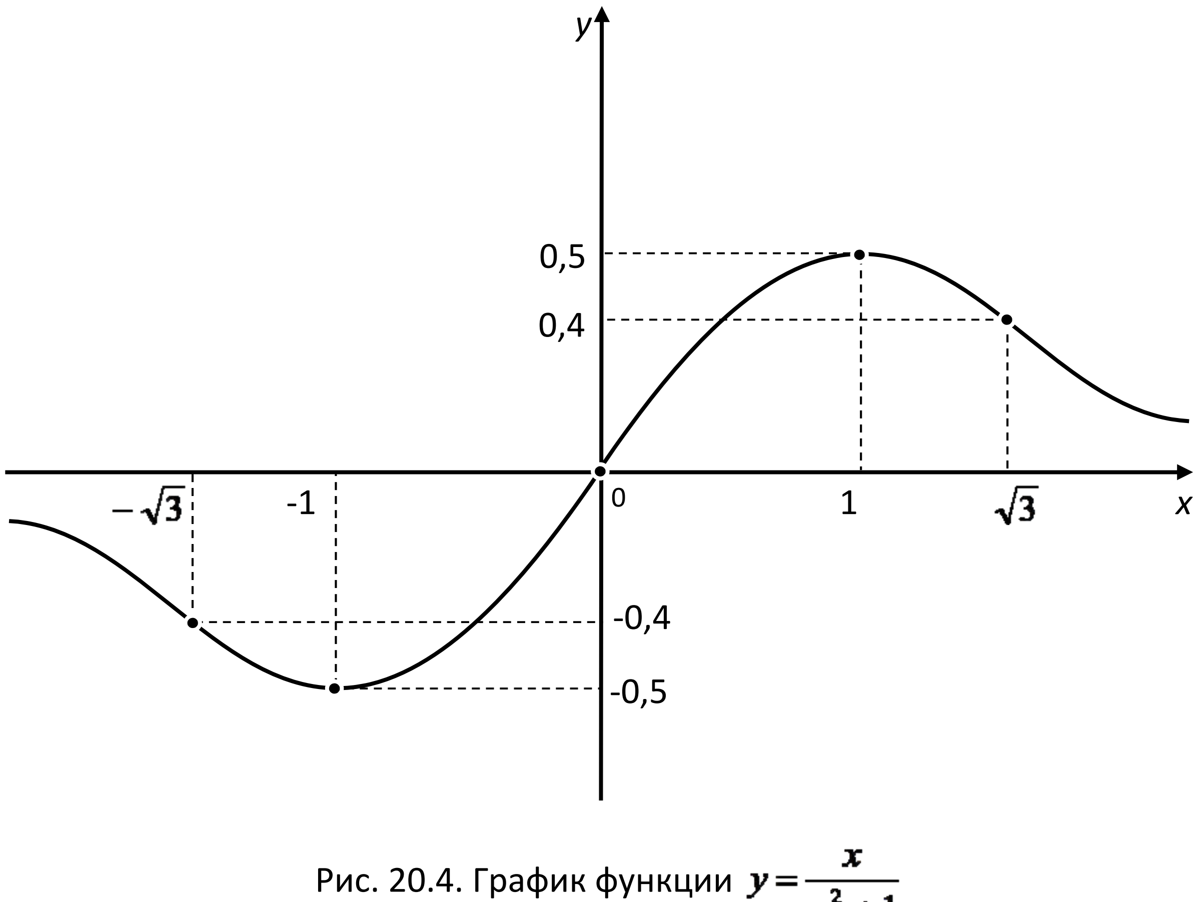



Рис. 20.4. График функции $\boldsymbol{y=\frac{x}{x^2+1}}$

## 14. Провести полное исследование функции, заданной параметрически, и построить ее график

**ПРИМЕР 14.1.**

Провести полное исследование функции $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = t^3 - 6t \end{cases}$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ

***Шаг 1.*** Исследовать функцию на четность, нечетность:

$$x(-t) = -x(t),$$

$$y(-t) = -y(t).$$

Наличие симметрии относительно начала координат. Исследование достаточно провести на полуинтервале $[0;\infty)$ области определения функции.

***Шаг 2.*** ООФ (приложения 4, 5, 6):

$$1 + t^2 \neq 0.$$

Определим множество *T* области определения функции: $t \in (-\infty;\infty)$.

Определим множество *X* области определения переменной *x*:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{2t}{1+t^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{1+t^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = +0.$$

Таким образом, $x \in (-0;0)$.

Определим множество *Y* области определения переменной *y*:

$$\lim_{t\to-\infty}\left(t^3 - 6t\right) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(t^3 - 6t\right) = \infty.$$

Таким образом, $y \in (-\infty;\infty)$.

Получили область определения функции: $t \in (-\infty;\infty)$, $x \in (-0;0)$, $y \in (-\infty;\infty)$.

***Вывод:*** вертикальной асимптоты нет.

***Шаг 3.*** Точки пересечения с осями координат:
– с осью 0*Y*: решить уравнение $x(t)=0$:

$$x=\frac{2t}{1+t^2}=0,$$

$$t=0.$$

Вычислить соответствующую ординату:

$$y=t^3-6t,$$

$$y(0)=0.$$

Получили точку $M_1(0;0)$;
– с осью 0*X*: решить уравнение $y(t)=0$:

$$y=t^3-6t=0,$$

$$t\cdot\left(t^2-6\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0, \\ t^2-6=0, \end{array}\right. \tag{20.1}$$

$$x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Решить каждое уравнение из системы (20.1):

1) $t=0$. Вычислить соответствующие абсциссы: $x(0)=0$, получили координаты точки $M_1(0;0)$;

2) $t=\pm\sqrt{6}$. Вычислить соответствующие абсциссы:

$$x\left(\sqrt{6}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{7}\approx 0{,}7,$$

$$x\left(-\sqrt{6}\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{7}\approx -0{,}7.$$

Получили точки $M_2(0{,}7;0)$ и $M(-0{,}7;0)$.

***Шаг 4.*** Найти промежутки монотонности, стационарные точки первого рода, экстремум функции.

Найти производную первого порядка: $y'_x=\dfrac{3\left(t^2-2\right)\cdot\left(t^2+1\right)^2}{2\cdot\left(1-t^2\right)}$.

Найти стационарные точки из условия $y'_x = 0$:

$$\frac{3(t^2-2)\cdot(t^2+1)^2}{2\cdot(1-t^2)} = 0,$$

$$t = \pm\sqrt{2}.$$

Производная $y'_x$ не существует при $t = \pm 1$.

Стационарные точки первого рода делят полуобласть $[0;\infty)$ на промежутки $t \in [0;1) \cup \left(1;\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\infty\right)$.

Определить знаки производной первого порядка на полученных интервалах:

1) $t \in [0;1)$, возьмем значение $t = \frac{1}{2}$: $y'_x\left(\frac{1}{2}\right) < 0$;

2) $t \in \left(1;\sqrt{2}\right]$, возьмем значение $t = 1{,}1$: $y'_x(1{,}1) > 0$;

3) $t \in \left[\sqrt{2};\infty\right)$, возьмем значение $t = 2$: $y'_x(2) < 0$.

***Вывод:*** на полуинтервале $t \in [0;1)$ функция убывает, на полуинтервале $t \in \left(1;\sqrt{2}\right]$ функция возрастает, на полуинтервале $t \in \left[\sqrt{2};\infty\right)$ функция убывает.

На рис. 20.5 изображены интервалы монотонности функции.

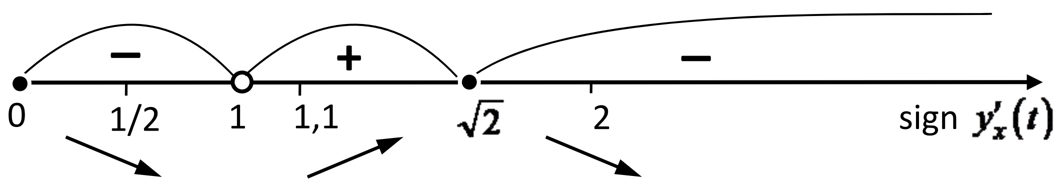



Рис. 20.5. Интервалы монотонности функции

При $t = \sqrt{2}$ производная первого порядка меняет знак с минуса на плюс, имеем точку локального минимума.

Вычислить координаты точки минимума $(x;\, y)$, подставив значение параметра *t* в систему уравнений

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9, \\ y\left(\sqrt{2}\right) \approx -5{,}7. \end{cases}$$

Получили координаты точки минимума $M_3(0{,}9;-5{,}7)$.

Вычислить координаты точки при $t=1$:

$$\begin{cases} x(t=1)=1, \\ y(t=1)=-5. \end{cases}$$

Получили координаты точки $M_4(1;-5)$.

В точке $M_4(1;-5)$ касательная, поведенная к графику функции, перпендикулярна оси $0X$.

***Шаг 5.*** Найти промежутки выпуклости, вогнутости, стационарные точки 2-го рода.

Найти производную второго порядка:

$$y''_{xx}=-\frac{3}{2}\frac{t\cdot\left(1+t^2\right)^3\cdot\left(2t^4-5t^2+5\right)}{\left(1-t^2\right)^3}.$$

Найти стационарные точки второго рода из условия $y''_{xx}=0$:

$$-\frac{3}{2}\frac{t\cdot\left(1+t^2\right)^3\cdot\left(2t^4-5t^2+5\right)}{\left(1-t^2\right)^3}=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0, \\ 2t^4-5t^2+5=0, \\ \left(1+t^2\right)^3=0, \\ \left(1-t^2\right)^3=0. \end{array}\right. \qquad (20.2)$$

Решить каждое уравнение из системы (20.2):

1) $t_1=0$;

2) $2t^4-5t^2+5=0$, решений нет;

3) $\left(1+t^2\right)^3=0$, решений нет;

4) $\left(1-t^2\right)^3\neq 0$, $t_{2,3}\neq\pm 1$.

Стационарные точки второго рода разбивают полуобласть $[0;\infty)$ на промежутки $[0;1)\cup(1;\infty)$.

Определим знаки производной второго порядка на полученных промежутках:

1) $t \in [0; 1)$, возьмем значение $t = \frac{1}{2}$: $y''_{xx}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$;

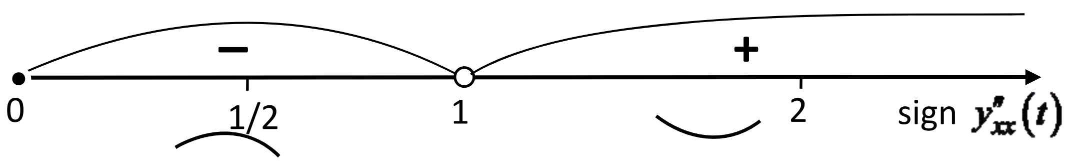



Рис. 20.6. Промежутки монотонности функции

2) $t \in (1; \infty)$, возьмем значение $t = 2$: $y''_{xx}(2) > 0$.

***Вывод:*** на полуинтервале $x \in [0; 1)$ график функции выпуклый, на интервале $x \in (1; \infty)$ график функции вогнутый.

На рис. 20.6 изображены промежутки выпуклости, вогнутости со знаками производной.

***Шаг 6.*** Выяснить наличие асимптот.

Наклонная асимптота. Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx).$$

Из области определения функции на шаге 2 видно, что переменная $x$ не стремится к бесконечности, следовательно, наклонной асимптоты нет.

***Шаг 7.*** Составить сводную таблицу (табл. 20.5).

Таблица 20.5

Сводная таблица

| $t$ | 0 | (0; 1) | 1 | (1; $\sqrt{2}$) | $\sqrt{2}$ | ($\sqrt{2}$; ∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | (0;1) | 1 | (1; 0,94) | 0,94 | (0,94; 0) |
| $y$ | 0 | (0; -5) | -5 | (-5; - 5,7) | -5,7 | (-5,7; ∞) |
| $y'_x$ | − | − | $\nexists$ | + | 0 | − |
| $y''_x$ | 0 | − | $\nexists$ | + | + | + |
| $y(x)$ | | | | | | |

***Шаг 8.*** Построение графика. Изобразить следующие точки:

1) точки пересечения с осями координат $M_1(0; 0)$ и $M_2(0,7; 0)$;

3) точку локального минимума $M_4(-0,94; -5,7)$,

4) стационарную точку первого и второго рода $M_4(1; -5)$.

***Шаг 9.*** Исследуемая функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Применим свойство симметрии:

1) точка $M_2(0{,}7;0)$ отображается в точку $M^*{}_2(-0{,}7;0)$;

2) стационарная точка первого и второго рода $M_4(1;-5)$ отображается в точку $M_4(-1;5)$;

3) полуинтервал $x \in [0;1)$ вогнутости с точкой локального минимума $M_4(-0{,}94;-5{,}7)$ отображается в полуинтервал $x \in (-1;0]$ выпуклости с точкой локального максимума $M_4^*(0{,}94;5{,}7)$.

***Вывод:*** получили точку перегиба $x = 0$.

График функции $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = t^3 - 6t \end{cases}$ представлен на рис. 20.7.

**15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке**

***Указания к упражнениям 20.15.1. – 20.15.5.:***

1) найти производную первого порядка функции $y'(x)$;

2) найти стационарные точки, принадлежащие отрезку $[a;b]$, решив уравнение $y'(x) = 0$;

3) вычислить значения функции в стационарных точках, принадлежащих отрезку и на границах отрезка, в точках $x = a$, $x = b$;

4) сравнить полученные значения функции и выбрать наибольшее и наименьшее значения.

**ПРИМЕР 20.15.1.**

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ на $[-1;2]$

***Указание:*** применить правила дифференцирования для производной суммы и разности.

ОТВЕТ

$y_{\text{наим}}(-1) = -7$, $y_{\text{наиб}}(2) = 2$ ■

**ПРИМЕР 20.15.2.**

$y = \dfrac{x}{x^2+1}$ на $(-\infty;\infty)$

***Указание:*** применить правила дифференцирования для производной частного.

ОТВЕТ

$y_{\text{наим}}(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $y_{\text{наиб}}(1) = \dfrac{1}{2}$ ■

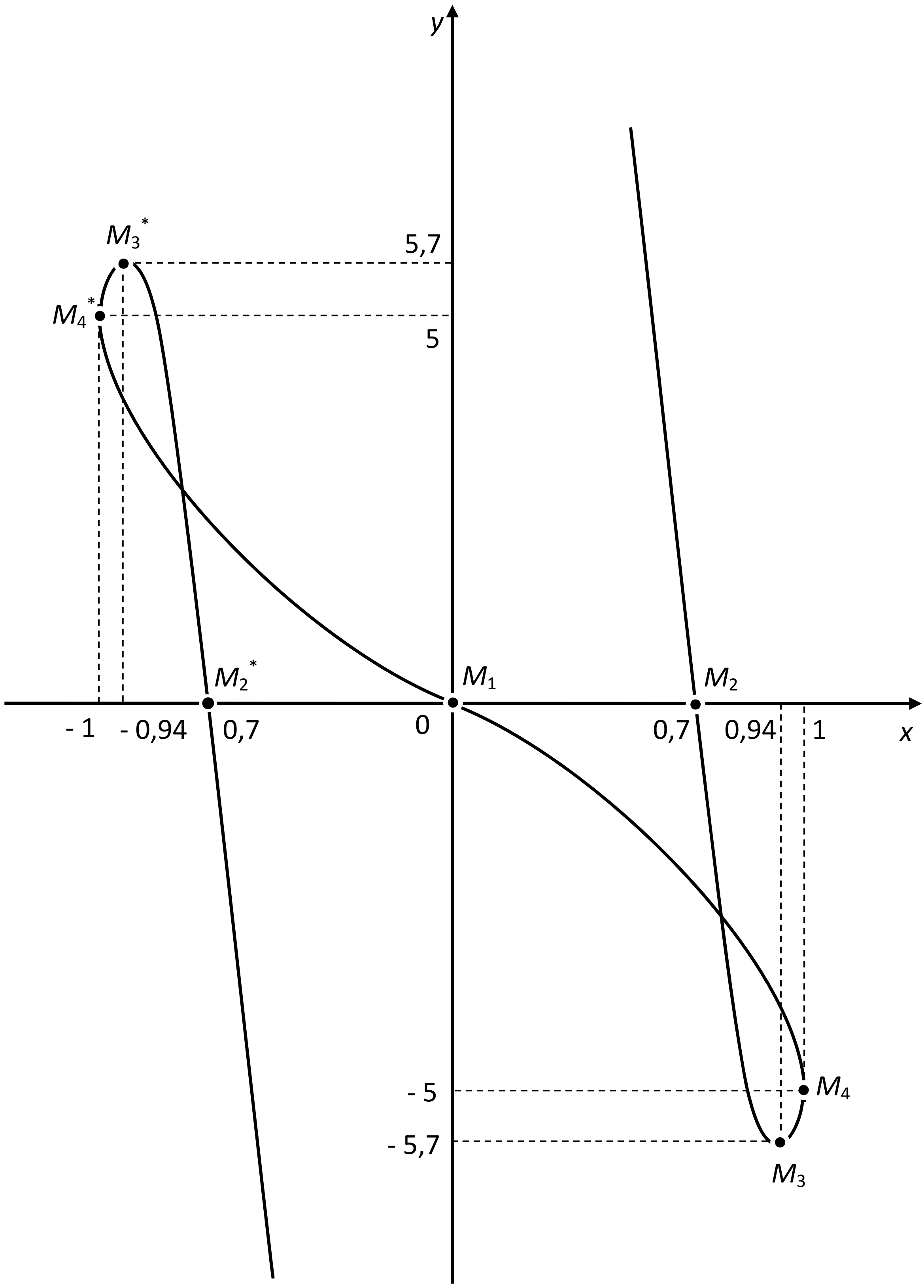



Рис. 20.7. График функции

**ПРИМЕР 20.15.3.**

$y = x\ln x$ на $[1; e]$

***Указание:*** применить правила дифференцирования для производной произведения.

ОТВЕТ

$y_{\text{наим}}(1) = 0$, $y_{\text{наиб}}(e) = e$ ■

**ПРИМЕР 20.15.4.**

$y = (x + 2)e^{1-x}$ на $[-2; 0]$

***Указания***

Применить правила дифференцирования:

1) $\left((x + 2)e^{1-x}\right)'$ – производная произведения;

2) $\left(e^{1-x}\right)'$ – производная сложной показательной функции с промежуточным аргументом $(1 - x)$.

ОТВЕТ

$y_{\text{наим}}(-2) = 0$, $y_{\text{наиб}}(-1) = e^2$ ■

**ПРИМЕР 20.15.5.**

$y = 4\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^2$ на $[-2; 0]$

***Указание:*** применить правила дифференцирования для производной сложной степенной функции с промежуточным аргументом $\left(\dfrac{1+x}{2x-1}\right)$, вынести константу за знак производной.

ОТВЕТ

$y_{\text{наим}}(-1) = 0$, $y_{\text{наиб}}(0) = 4$ ■

**16. Решить практические задачи на экстремум функции**

**ПРИМЕР 20.16.1.**

Требуется изготовить коническую воронку с образующей длиной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

***Указания:***

1) требуется изготовить воронку конической формы (рис. 20.8, *а*);

2) составить функцию объема относительно высоты $V_{\text{кон}} = V(H)$:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$$

3) длина образующей $l$ – известная величина, выразить радиус $R$ через высоту $H$, используя осевое сечение (см. рис. 20.8, *б*).

Применить теорему Пифагора $H^2 + R^2 = l^2$, откуда

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - H^2\right)H .$$

Исследовать полученную функцию на экстремум;

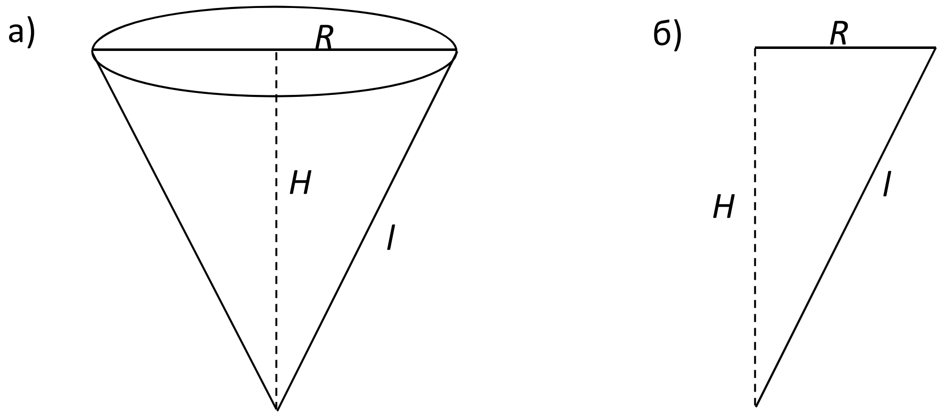



Рис. 20.8. Коническая воронка

4) найти стационарную точку 1-го рода, для чего решить уравнение $V'_H = 0$.

Стационарная точка $H = \frac{20}{\sqrt{3}}$;

5) применить второе достаточное условие существования экстремума в точке $H = \frac{20}{\sqrt{3}}$. Определить знак производной второго порядка в стационарной точке 1-го рода:

$$\mathrm{V}''_{HH} = \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) < 0 .$$

***Вывод:*** при $H = \frac{20}{\sqrt{3}}$ функция достигает локального максимума, следовательно, объем конуса является наибольшим.

ОТВЕТ

$H = \frac{20}{\sqrt{3}}$ ■

**ПРИМЕР 20.16.2.**

Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каким должно быть его основание, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

***Указания:***

1) высота равнобедренного треугольника делит его на два равных прямоугольных треугольника. Объем тела вращения $V_{\text{т.в}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

2) на рис. 20.9 изображено осевое сечение тела, полученного вращением вокруг основания равнобедренного треугольника. Пусть основание треугольника равно $2a$;

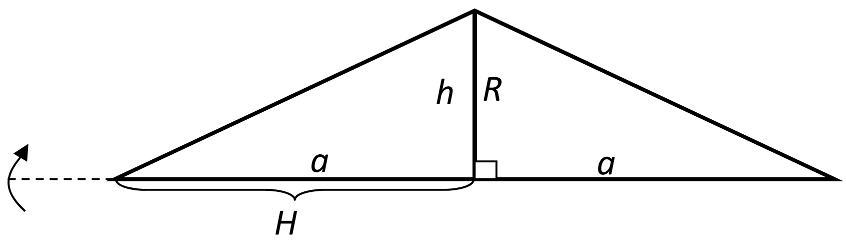



Рис. 20.9. Осевое сечение тела вращения

3) высота треугольника $h$ является радиусом $R$ основания тела вращения. Выразить радиус через сторону прямоугольного треугольника и данный периметр $2p$ с помощью теоремы Пифагора:

$$R^2 = p^2 - 2pa;$$

4) составить функцию объема тела вращения относительно основания треугольника, где высота $H = a$:

$$V_{\text{т.в}} = \frac{2}{3}\pi\left(p^2 - 2pa\right)a;$$

5) исследовать полученную функцию на экстремум. Найти стационарную точку 1-го рода, для чего решить уравнение $V'_a = 0$.

Стационарная точка: $a = \frac{p}{4}$;

6) применить второе достаточное условие существования экстремума в точке $a = \frac{p}{4}$. Определить знак производной второго порядка в стационарной точке 1-го рода: $V''_{aa}\left(\frac{p}{4}\right) < 0$.

***Вывод:*** при $a = \dfrac{p}{4}$ функция достигает локального максимума, следовательно, объем тела вращения будет наибольшим.

ОТВЕТ

$a = \dfrac{p}{4}$ ■

**ПРИМЕР 20.16.3.**

Пункт *B* находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта *A* до ближайшей к пункту *B* точки *C* составляет 285 км. На каком расстоянии от точки *C* надо построить станцию *P*, от которой проложат шоссе к пункту *B*, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами *A* и *B*, если скорости движения ограничены и составляют 52 км/ч по железной дороге и 20 км/ч по шоссе.

***Указания:***

1) изобразить схему передвижения (рис. 20.10);

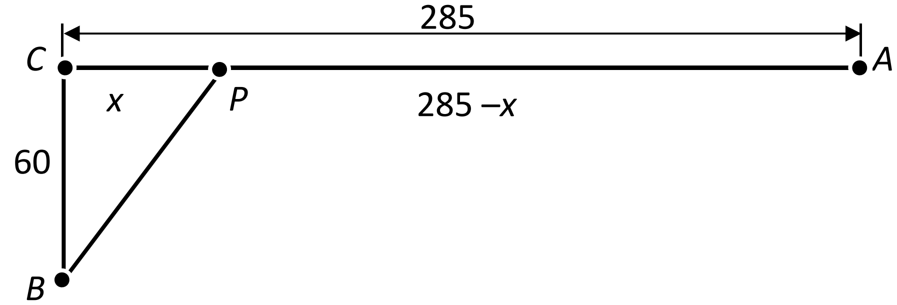



Рис. 20.10. Схема передвижения

2) путь передвижения $S = AP + PB$. Пусть расстояние $PC = x$. Выразить расстояние $PB$, применив теорему Пифагора;

3) пройденный путь, скорость движения и время связаны соотношением $S = v \cdot t$. Выразить время передвижения $T$ по пути $S$:

$$T = \frac{285 - x}{52} + \frac{\sqrt{x^2 + 60^2}}{20}.$$

Полученное соотношение рассмотреть как функцию $T = T(x)$;

4) исследовать полученную функцию на экстремум. Найти стационарную точку 1-го рода, для чего решить уравнение $T'_x = 0$.

Стационарная точка: $x = 25$ км;

5) применить второе достаточное условие существования экстремума в точке $x = 25$. Определить знак производной второго порядка в стационарной точке 1-го рода: $T''_{xx}(25) > 0$.

***Вывод:*** при $x = 25$ функция достигает локального минимума, следовательно, время передвижения будет наименьшим.

ОТВЕТ

$x = 25$

**ПРИМЕР 20.16.4.**

Найти соотношение между радиусом $R$ и высотой $H$ цилиндра, имеющего при заданном объеме $V$ наименьшую полную поверхность.

***Указания:***

1) изобразить развернутую полную поверхность цилиндра (рис. 20.11);

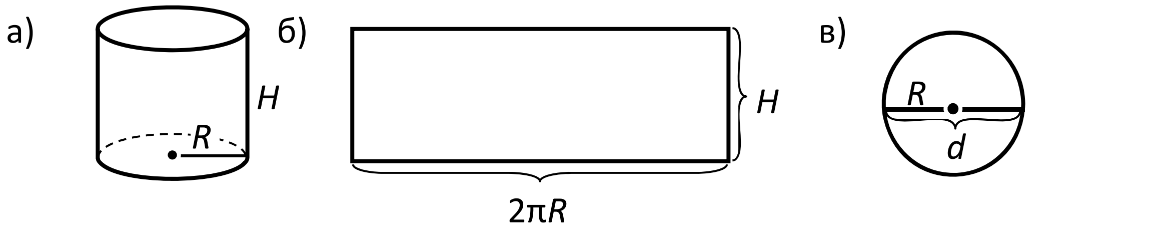



Рис. 20.11. Развернутая полная поверхность цилиндра:
а – цилиндр; б – боковая поверхность цилиндра; в – основание цилиндра

2) площадь полной поверхности $S_{\text{п.п}} = \pi R^2 + 2\pi RH$;

3) радиус $R$ и высота $H$ – неизвестные величины. Выразить высоту через известный объем и подставить в формулу площади полной поверхности цилиндра:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}, \quad S_{\text{п.п}} = \pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Полученное соотношение рассмотреть как функцию $S = S(R)$;

4) исследовать полученную функцию на экстремум. Найти стационарную точку 1-го рода, для чего решить уравнение $S'_R = 0$.

Стационарная точка: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$;

5) применить второе достаточное условие существования экстремума в точке $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Определить знак производной второго порядка в стационарной точке 1-го рода: $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$.

***Вывод:*** при $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функция достигает локального минимума, следовательно, площадь полной поверхности цилиндра будет наименьшей;

6) найти объем в точке экстремума $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ и приравнять его к объему $V=\pi R^2 H$;

7) найти соотношение $\frac{R}{H}$.

Ответ

$\frac{R}{H}=\frac{1}{2}$ ■

## 21. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1. Найти производную первого порядка функции, используя определение производной (см. разд. 1)**

**ПРИМЕР 21.1.1.**

$y=7x^2-6x+9$

ОТВЕТ

$y'=14x-6$

**ПРИМЕР 21.1.2.**

$y=-3x^2-5x+4$

ОТВЕТ

$y'=-6x-5$

**ПРИМЕР 21.1.3.**

$y=4x^3+x+3$

ОТВЕТ

$y'=12x^2+1$

**ПРИМЕР 21.1.4.**

$y=-5x^3-2$

ОТВЕТ

$y'=-15x^2$

**ПРИМЕР 21.1.5.**

$y=-2x^3+4x^2$

ОТВЕТ
$y' = -6x^2 + 4$

**ПРИМЕР 21.1.6.**
$y = -x^3 - 3x^2$
ОТВЕТ
$y' = -3x^2 - 6x$

**ПРИМЕР 21.1.7.**
$y = 3x^3 - 2x$
ОТВЕТ
$y' = 9x^2 - 2$

**ПРИМЕР 21.1.8.**
$y = x^3 - x$
ОТВЕТ
$y' = 3x^2 - 1$

**2. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции, используя правила дифференцирования (см. разд. 2) и таблицы производных (см. табл. 2.1, 6.1)**

**ПРИМЕР 21.2.1.**
$$y = \frac{5x + 2e^x}{x^3}$$
ОТВЕТ
$$dy = \frac{-10x + e^x(2x - 6)}{x^4}dx,\ d^2y = \frac{30x + 2e^x(x^2 - 6x + 12)}{x^5}dx^2$$

**ПРИМЕР 21.2.2.**
$$y = 3\sqrt[5]{x^6} \cdot e^x + 6x^4 - \frac{2}{5x^9}$$
ОТВЕТ
$$dy = \left( e^x \cdot \sqrt[5]{x} \cdot \left( \frac{18}{5} + 3x \right) + 24x^3 + \frac{18}{5x^{10}} \right) dx,$$
$$d^2y = \left( e^x \left( \frac{36}{5} \cdot \sqrt[5]{x} + 3 \cdot \sqrt[5]{x^6} + \frac{18}{25 \cdot \sqrt[5]{x^4}} \right) + 72x^2 - \frac{36}{x^{11}} \right) dx^2$$

**ПРИМЕР 21.2.3.**
$$y = \frac{5}{x^8} - 9\sqrt[4]{x^3} \cdot e^x + 25x^4$$

ОТВЕТ

$$dy=\left(-\frac{40}{x^9}-e^x\left(\frac{27}{4\sqrt[4]{x}}+9\sqrt[4]{x^3}\right)+100x^3\right)dx,$$

$$d^2y=\left(e^x\left(\frac{27}{2\sqrt[4]{x}}+9x^{\frac{3}{4}}-\frac{27}{16\sqrt[4]{x^5}}\right)+300x^2\right)dx^2$$

**ПРИМЕР 21.2.4.**

$$y=\frac{2-\sqrt[3]{x^5}}{3-2x}$$

ОТВЕТ

$$dy=\frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+4}{(3-2x)^2}dx,\quad d^2y=\frac{\frac{8}{9}\sqrt[3]{x^5}+\frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{10}{\sqrt[3]{x}}+16}{(3-2x)^3}dx^2$$

**ПРИМЕР 21.2.5.**

$$y=\frac{7^x+\sqrt[3]{x}}{e^x+1}$$

ОТВЕТ

$$dy=\frac{e^x\left(7^x\ln 7+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-7^x-\sqrt[3]{x}\right)+7^x\ln 7+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\left(e^x+1\right)^2}dx,$$

$$d^2y=\frac{7^x\ln^2 7-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}+e^x\left(7^x\ln^2 7-7^x-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}-\sqrt[3]{x}\right)}{\left(e^x+1\right)^4}dx^2$$

**3. Составить уравнения нормали и касательной, проведенной к линии в заданной точке**

**ПРИМЕР 21.3.1.**

$y=3x^2-8x$ в точке с абсциссой $x_0=1$

ОТВЕТ

Уравнение касательной $2x+y+3=0$, уравнение нормали $x-2y-11=0$

**ПРИМЕР 21.3.2.**

$y=x^3-4x^2-9$ в точке с абсциссой $x=-1$

ОТВЕТ

Уравнение касательной $11x - y - 3 = 0$, уравнение нормали $x + 112y + 155 = 0$

**ПРИМЕР 21.3.3.**

$y = \dfrac{\sqrt{2x+6}}{x-3}$ в точке с абсциссой $x = 5$

ОТВЕТ

Уравнение касательной $7x + 8y - 51 = 0$, уравнение нормали $8x - 7y - 26 = 0$

**ПРИМЕР 21.3.4.**

$y = 3\mathrm{tg}12x - 10$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{3}$

ОТВЕТ

Уравнение касательной $36x - y - 10 - 12\pi = 0$, уравнение нормали $x + 36y + 360 - \dfrac{\pi}{3} = 0$

**ПРИМЕР 21.3.5.**

$y = \cos 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{8}$

ОТВЕТ

Уравнение касательной $3\sqrt{2}x + y - 2 + \dfrac{\sqrt{2}(4-3\pi)}{8} = 0$, уравнение нормали $x - 3\sqrt{2}\,y + 6\sqrt{2} - 3 - \dfrac{\pi}{8} = 0$

## 4. Приложение производной к задачам геометрии и механики

**ПРИМЕР 21.4.1.**

Материальная точка движется по гиперболе $xy - 12 = 0$ так, что ее абсцисса $x$ равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината в точке $(6;\,2)$?

ОТВЕТ

1/3 м/с

**ПРИМЕР 21.4.2.**

В какой точке параболы $x^2 - y = 0$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

ОТВЕТ

$M\left(\frac{1}{4};1\right)$

**ПРИМЕР 21.4.3.**

В какой точке параболы $8x-y^2=0$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

ОТВЕТ

$M\left(\frac{1}{2};2\right)$

**ПРИМЕР 21.4.4.**

Закон движения материальной точки $s=3t^4+t^3-1$. Найти скорость и ускорение движения точки в момент времени $t=2$ с.

ОТВЕТ

108 м/с, 156 м/с

**ПРИМЕР 21.4.5.**

Закон движения материальной точки $s=4\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+8t$. Найти скорость и ускорение движения точки в момент времени $t=\frac{\pi}{4}$ с.

ОТВЕТ

26/3 м/с

**ПРИМЕР 21.4.6.**

Закон движения материальной точки $s=2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)+5$. Найти скорость и ускорение движения точки в момент времени $t=\frac{\pi}{4}$ с.

ОТВЕТ

$-2\sqrt{2}$ м/с, $4\sqrt{2}$ м/с$^2$

**ПРИМЕР 21.4.7.**

Закон движения материальной точки $s=2t^3-\frac{1}{2}t^2+10$. В какой момент времени ее скорость будет равна 210 м/с?

ОТВЕТ

6 с

**ПРИМЕР 21.4.8.**

По оси $0X$ движутся две материальные точки, законы движения которых $s = 3t^2 - 8$ и $s = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи?

ОТВЕТ

42 м/с и 33 м/с

**ПРИМЕР 21.4.9.**

По оси $0X$ движутся две материальные точки, законы движения которых $s = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $s = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?

ОТВЕТ

6 с

**ПРИМЕР 21.4.10.**

Материальная точка движется по гиперболе так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината в точке (4; 5)?

ОТВЕТ

-1,25 м/с

**5. Исследовать дифференцируемость функции**

**ПРИМЕР 21.5.1.**

$$y = \begin{cases} x+1, & x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, & x > 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.2.**

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \le \pi; \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x > \pi. \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.3.**

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2; \\ 4x - 3, & x \ge 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.4.**

$$y = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 3; \\ \ln(x-2), & x \geq 3. \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.5.**

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 3; \\ 4 - x^3, & x > 3. \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.6.**

$$y = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 2; \\ \sqrt{x+2}, & x > 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**ПРИМЕР 21.5.7.**

$y = \sqrt[5]{x-2}$ в точке $x = 2$

ОТВЕТ

Функция не дифференцируема

**6. Найти угол между кривыми в точке их пересечения**

**ПРИМЕР 21.6.1.**

$xy - 8 = 0$ и $x^2 - y^2 - 12 = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 77^{\circ}47'$

**ПРИМЕР 21.6.2.**

$x^2 + y^2 - 8 = 0$ и $2x - y^2 = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 71^{\circ}57'$

**ПРИМЕР 21.6.3.**

$x - x^3 - y = 0$ и $5x - y = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 30^{\circ}96'$ и $\varphi = 16^{\circ}50'$

**ПРИМЕР 21.6.4.**

$\sin x - y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 45^{\circ}$

**ПРИМЕР 21.6.5.**

$\sqrt{2}\sin x - y = 0$ и $\sqrt{2}\cos x - y = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 90^{\circ}$

**ПРИМЕР 21.6.6.**

$x^3 - y = 0$ и $\dfrac{1}{x^2} - y = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 45^{\circ}$

**ПРИМЕР 21.6.7.**

$x^2 + y^2 - 5 = 0$ и $4x - y^2 = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 71^{\circ}57'$

**ПРИМЕР 21.6.8.**

$\dfrac{x-1}{x^2+1} - y = 0$ и ось абсцисс

ОТВЕТ

$\varphi = 26^{\circ}57'$

**ПРИМЕР 21.6.9.**

$(x-2)^2 - y = 0$ и $x^2 - 6x + 4 + y = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 40^{\circ}60'$

**ПРИМЕР 21.6.10.**

$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ и $5x^2 + 4y - 4 = 0$

ОТВЕТ

$\varphi = 0^{\circ}$

## 7. Найти дифференциал сложной функции

**ПРИМЕР 21.7.1.**

$$y = e^{5\sqrt{x^3-4x+2}} \cdot \left(x^2 - 4x\right)$$

ОТВЕТ

$$d\,y = \left( \frac{5e^{5\cdot\sqrt{x^3-4x+2}}\left(3x^2-4\right)\left(x^2-4x\right)}{2\sqrt{x^3-4x+2}} + e^{5\cdot\sqrt{x^3-4x+2}}\left(2x-4\right) \right) d\,x$$

**ПРИМЕР 21.7.2.**

$$y = \sin^4\left(\ln\left(x^2\right) - e^x\right)$$

ОТВЕТ

$$d\,y = \left( 4\sin^3\left(\ln\left(x^2\right) - e^x\right) \cdot \cos\left(\ln\left(x^2\right) - e^x\right) \cdot \left(\frac{2}{x} - e^x\right) \right) d\,x$$

**ПРИМЕР 21.7.3.**

$$y = \frac{2^{\operatorname{tg}^3\left(5+x^2\right)}}{x+1} - 6x^3$$

ОТВЕТ

$$d\,y = \left( \frac{\dfrac{2^{\operatorname{tg}^3\left(5+x^2\right)} \ln 2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(5+x^2\right) \cdot \left(6x^2+6x\right)}{\cos^2\left(5+x^2\right)} - 2^{\operatorname{tg}^3\left(5+x^2\right)}}{\left(x+1\right)^2} - 18x^2 \right) d\,x$$

**ПРИМЕР 21.7.4.**

$$y = \sqrt{e^{\operatorname{tg}(9x+1)} + \operatorname{ctg}\left(2-x\right)}$$

ОТВЕТ

$$d\,y = \left( \frac{\dfrac{9e^{\operatorname{tg}(9x+1)}}{2\sqrt{x^3-4x+2} \cdot \cos^2\left(9x+1\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(2-x\right)}}{2\sqrt{e^{\operatorname{tg}(9x+1)} + \operatorname{ctg}\left(2-x\right)}} \right) d\,x$$

**ПРИМЕР 21.7.5.**

$$y = 7x^5 \cdot \sqrt{\cos\left(4+3x\right)} \cdot 3^x$$

ОТВЕТ

$$d\,y=\left(35\,x^{4}\cdot\sqrt{\cos\left(4+3x\right)}\cdot 3^{x}-\frac{21}{2}x^{5}\cdot\frac{\sin\left(4+3x\right)}{\sqrt{\cos\left(4+3x\right)}}\cdot 3^{x}+\right.$$

$$\left.+\;7x^{5}\cdot\sqrt{\cos\left(4+3x\right)}\cdot 3^{x}\cdot\ln 3\right)dx$$

**ПРИМЕР 21.7.6.**

$$y=\sqrt[7]{\left(6^{\cos 9x}+\sin\left(7x^{3}-5x\right)\right)^{3}}$$

ОТВЕТ

$$d\,y=\frac{3}{7}\left(6^{\cos 9x}+\sin\left(7x^{3}-5x\right)\right)^{-\frac{4}{7}}\cdot\left(9\cdot 6^{\cos 9x}\cdot\ln 6\cdot\left(-\sin 9x\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(7x^{3}-5x\right)\cdot\left(21x^{3}-5\right)\right)dx$$

**ПРИМЕР 21.7.7.**

$$y=\sqrt{\frac{\ln^{3}x+\cos 7x}{2x^{3}-4x}}$$

ОТВЕТ

$$d\,y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x^{3}-4x}{\ln^{3}x+\cos 7x}}\times$$

$$\times\frac{\left(3\ln^{2}x-7\sin 7x\right)\cdot\left(2x^{3}-4x\right)-\left(6x^{3}-4x\right)\cdot\left(\ln^{3}x-\cos 7x\right)}{x\cdot\left(2x^{3}-4x\right)^{2}}dx$$

**ПРИМЕР 21.7.8.**

$$y=\cos^{2}8x\cdot e^{x^{2}}+\ln\left(\operatorname{tg}\left(5x^{2}+8\right)\right)$$

ОТВЕТ

$$d\,y=\left(-8\sin 16x\cdot e^{x^{2}}+\cos^{2}8x\cdot e^{x^{2}}\cdot 2x+\frac{10x}{\operatorname{tg}\left(5x^{2}+8\right)\cdot\cos^{2}\left(5x^{2}+8\right)}\right)dx$$

**8. Найти производную первого и второго порядка функции, заданной параметрически**

**ПРИМЕР 21.8.1.**

$$\begin{cases}x=3t^{3}-2,\\ y=7t^{4}.\end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{28}{9}t\,,\ y''_{xx} = \frac{28}{81t^2}$$

**ПРИМЕР 21.8.2.**

$$\begin{cases} x = 4\sin^2\sqrt{t}, \\ y = 3\cos^2(9-5t). \end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{15}{2}\sqrt{t}\cdot\sin(18-10t),\ y''_{xx} = \frac{15}{4\sqrt{t}}\cdot(-20t\cos(18-10t)+\sin(18-10t))$$

**ПРИМЕР 21.8.3.**

$$\begin{cases} x = e^t - 2^{3t}, \\ y = e^{5t+1}. \end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{5e^{5t+1}}{e^t - 8^t\ln 8},\ y''_{xx} = \frac{5e^{5t+1}\left(4e^t - 8^t\left(5\ln 8 + \ln^2 8\right)\right)}{\left(e^t - 8^t\ln 8\right)^3}$$

**ПРИМЕР 21.8.4.**

$$\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 - 3, \\ y = 2t^4 + 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{8t^2}{3t+4},\ y''_{xx} = 8\frac{3t+8}{(3t+4)^3}$$

**ПРИМЕР 21.8.5.**

$$\begin{cases} x = \ln\left(3t^3 - 9t^2\right), \\ y = \left(2t^4 - 5t\right). \end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{1}{3}\cdot\frac{8t^5 - 5t^2 - 24t^4 + 15t}{t-2},$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{9}\cdot\frac{\left(t^2-3t\right)\left(32t^5 - 152t^4 + 192t^3 - 5t^2 + 20t - 30\right)}{(t-2)^3}$$

**ПРИМЕР 21.8.6.**

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

ОТВЕТ

$$y'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3t^2-1\right)\cdot\left(1+t^2\right)}{1-t^2},\ y''_{xx} = -\frac{t^3\cdot\left(3t^2-5\right)\left(1+t^2\right)^3}{\left(1-t^2\right)^3}$$

**9. Найти производную первого порядка функции, заданной неявно**

**ПРИМЕР 21.9.1.**

$$\cos^2\left(x^3+y\right)-3x^3y^4+y^2=2x$$

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{3x^2\left(\sin\left(2x^3+2y\right)+3y^2\right)+2}{\sin\left(2x^3+2y\right)+2y\left(6x^3y-1\right)}$$

**ПРИМЕР 21.9.2.**

$$\sin\left(x^3+7y^3-1\right)-5x^2y^3+5\ln y-4=7x$$

ОТВЕТ

$$y' = \frac{7+10xy^3-3x^2\cos\left(x^3+7y^3-1\right)}{21y^2\cos\left(x^3+7y^3-1\right)-15x^2y^2+\dfrac{5}{y}}$$

**ПРИМЕР 21.9.3.**

$$\ln\left(3\sqrt{x}+y\right)-2x^3\sqrt{y}-7x^2=2+y^2$$

ОТВЕТ

$$y' = \frac{6x^2\sqrt{y}+14x-\dfrac{3}{6x+2\sqrt{x}\,y}}{\dfrac{1}{3\sqrt{x}+y}-\dfrac{x^3}{\sqrt{y}}-2y}$$

**ПРИМЕР 21.9.4.**

$$\operatorname{ctg}\left(2x^4-3\right)-2^{x^5}y+2x^3\left(4-y^2\right)=2y^5-x^3$$

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{\dfrac{8x^3}{\sin^2\left(2x^4-3\right)} + 5x^4 y \cdot 2^{x^5}\ln 2 - 21x^2}{2^{x^5} + 4x^3 y + 10y^4}$$

**ПРИМЕР 21.9.5.**

$$\sqrt[5]{x^2} + 3^{2y} - 3\ln\left(y^4\right) + x = \frac{12}{xy} - 4y$$

ОТВЕТ

$$y' = -\frac{\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} + \dfrac{12}{xy} + 1}{4 + 7^{2x}\cdot 2\ln 7 - \dfrac{12}{y}}$$

**10. Найти производную первого порядка показательно-степенной функции**

**ПРИМЕР 21.10.1.**

$$y = (1+\sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$$

ОТВЕТ

$$y' = 2\cdot(1+\sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}\left(-\frac{\operatorname{ctg}x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x + \sin^3 x}\right)$$

**ПРИМЕР 21.10.2.**

$$y = (1-x)^{\ln x}$$

ОТВЕТ

$$y' = (1-x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1-x}{x} - \frac{\ln x}{x-1}\right)$$

**ПРИМЕР 21.10.3.**

$$y = (\sin x)^{\operatorname{tg}x}$$

ОТВЕТ

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{tg}x}\cdot\left(\frac{\ln\left(\sin x\right)}{\cos^2 x} + 1\right)$$

**ПРИМЕР 21.10.4.**

$$y = x^{\sin x}$$

ОТВЕТ

$$y' = x^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

**ПРИМЕР 21.10.5.**

$$y = (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$$

ОТВЕТ

$$y' = (1-x)^{\cos(\pi x/2)} \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x) - \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x} \right)$$

**ПРИМЕР 21.10.6.**

$$y = \left( \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} \right)^{\sin(\pi x)}$$

ОТВЕТ

$$y' = \left( \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} \right)^{\sin(\pi x)} \cdot \left( \pi \cos(\pi x) \cdot \ln\left( \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} \right) + \frac{\pi \sin(\pi x)}{2\sin\frac{\pi x}{2}} \right)$$

**ПРИМЕР 21.10.7.**

$$y = \left( \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4} \right)^{e^x}$$

ОТВЕТ

$$y' = \left( \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4} \right)^{e^x} \cdot e^x \cdot \left( \ln\left( \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4} \right) - \frac{\cos\frac{\pi x}{4}}{\sin^3\frac{\pi x}{4}} \right)$$

**ПРИМЕР 21.10.8.**

$$y = \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

ОТВЕТ

$$y' = \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left( \frac{\ln\left( \frac{1}{x} \right)}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$$

**ПРИМЕР 21.10.9.**

$$y=\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$$

ОТВЕТ

$$y'=3\cdot\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}\cdot\left(\ln\left(\frac{x-4}{x+3}\right)+\frac{7x}{(x-4)(x+3)}\right)$$

**ПРИМЕР 21.10.10.**

$$y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$$

ОТВЕТ

$$y'=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln\left(\operatorname{ctg}x\right)-\frac{1}{\cos x}\right)$$

**11. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции**

**ПРИМЕР 21.11.1.**

$$y=\sqrt[5]{\frac{x}{x+2}}$$

ОТВЕТ

$$y'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{x+2}{x}\right)^4}\cdot\frac{1}{(x+2)^2},\ y''=\frac{2}{25}\cdot\frac{5x+4}{\sqrt[5]{x^9\cdot(x+2)^{11}}}$$

**ПРИМЕР 21.11.2.**

$$y=2\frac{x^4}{\operatorname{ctg}4x}$$

ОТВЕТ

$$y'=4\cdot\frac{x^3\sin 8x+2x^4}{\cos^2 4x},$$

$$y''=4\frac{x^2\cos^2 4x(3\sin 8x+8x\cos 8x+8x)+x^3\sin 8x(\sin 8x+2x)}{\cos^4 4x}$$

**ПРИМЕР 21.11.3.**

$$y=\cos 3x\cdot e^{-x^2}$$

ОТВЕТ

$$y'=-e^{-x^2}\left(3\sin 3x+2x\cos 3x\right),\ y''=e^{-x^2}\left(12x\sin 3x+4x^2\cos 3x-9\cos 3x\right)$$

**ПРИМЕР 21.11.4.**

$y = 5x^6 + \ln(3 + x)$

ОТВЕТ

$y' = 30x^5 + \dfrac{1}{x+3}$, $y'' = 150x^4 - \dfrac{1}{(x+3)^2}$

**ПРИМЕР 21.11.5.**

$y = \sqrt[5]{x^3} + \mathrm{tg}\, 2x$

ОТВЕТ

$y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{2}{\cos^2 2x}$, $y'' = -\dfrac{6}{25\sqrt[5]{x^7}} - 8\dfrac{\sin 2x}{\cos^3 2x}$

**12. Вычислить с точностью до $10^{-3}$ приближенное значение. Найти относительную погрешность**

**ПРИМЕР 21.12.1.**

$\sqrt[5]{34}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}024$

**ПРИМЕР 21.12.2.**

$\sqrt[3]{26{,}19}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}97$

**ПРИМЕР 21.12.3.**

$\sqrt[4]{16{,}64}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}020$

**ПРИМЕР 21.12.4.**

$\sqrt[4]{15{,}8}$

ОТВЕТ

$\approx 1{,}994$

**ПРИМЕР 21.12.5.**

$\sqrt[3]{10}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}154$

**ПРИМЕР 21.12.6.**

$\sqrt[5]{200}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}885$

**ПРИМЕР 21.12.7.**

$(3{,}03)^5$

ОТВЕТ

$\approx 255{,}395$

**ПРИМЕР 21.12.8.**

$\sqrt[7]{130}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}004$

**ПРИМЕР 21.12.9.**

$\sqrt[3]{27{,}5}$

ОТВЕТ

$\approx 3{,}018$

**ПРИМЕР 21.12.10.**

$\sqrt{17}$

ОТВЕТ

$\approx 4{,}123$

**ПРИМЕР 21.12.11.**

$\sqrt{640}$

ОТВЕТ

$\approx 25{,}298$

**ПРИМЕР 21.12.12.**

$\sqrt{1.2}$

ОТВЕТ

$\approx 1{,}095$

**ПРИМЕР 21.12.13.**

$\sqrt[10]{1028}$

ОТВЕТ

$\approx 2{,}001$

**ПРИМЕР 21.12.14.**

$\sqrt[3]{1{,}02}$

ОТВЕТ

$\approx 1{,}007$

**ПРИМЕР 21.12.15.**

$(5{,}07)^3$

ОТВЕТ

$\approx 130{,}324$

**ПРИМЕР 21.12.16.**

$(4{,}01)^3$

ОТВЕТ

$\approx 64{,}481$

**ПРИМЕР 21.12.17.**

$\mathrm{arctg}(0{,}97)$

ОТВЕТ

$\approx 44°12'$

**ПРИМЕР 21.12.18.**

$\cos 151^{\circ}$

ОТВЕТ

$\approx -0{,}875$

**ПРИМЕР 21.12.19.**

$\arcsin(0{,}97)$

ОТВЕТ

$\approx 75°93'$

**ПРИМЕР 21.12.20.**

$\cos 149^{\circ}$

ОТВЕТ

$\approx -0{,}857$

**ПРИМЕР 21.12.21.**

$\arccos(0{,}98)$

ОТВЕТ

$\approx 75°93'$

**ПРИМЕР 21.12.22.**

$\sin 213^{\circ}$

ОТВЕТ

$\approx -0{,}545$

**ПРИМЕР 21.12.23.**

$\mathrm{arctg}(0{,}05)$

ОТВЕТ

$\approx 2°862'$

**ПРИМЕР 21.12.24.**

$\mathrm{tg}\, 59^{\circ}$

ОТВЕТ

$\approx 1{,}664$

**ПРИМЕР 21.12.25.**

$\mathrm{arctg}(1{,}05)$

ОТВЕТ

$\approx 46°4'$

**ПРИМЕР 21.12.26.**

$\mathrm{tg}\, 44^{\circ}$

ОТВЕТ

$\approx 0{,}966$

### 13. Вычислить указанные пределы, применив правило Лопиталя

**ПРИМЕР 21.13.1.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$$

ОТВЕТ

$\infty$

**ПРИМЕР 21.13.2.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x - x}{2\sin x + x}$$

ОТВЕТ

0

**ПРИМЕР 21.13.3.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$$

ОТВЕТ

1/2

**ПРИМЕР 21.13.4.**

$$\lim_{x\to \infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\mathrm{arctg}x^2-\pi}$$

ОТВЕТ

–1/2

**ПРИМЕР 21.13.5.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

ОТВЕТ

$-\frac{1}{3}$

**ПРИМЕР 21.13.6.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$$

ОТВЕТ

$\infty$

**ПРИМЕР 21.13.7.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

ОТВЕТ

$-\frac{1}{3}$

**ПРИМЕР 21.13.8.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

ОТВЕТ

0

**ПРИМЕР 21.13.9.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{1-\cos^2 x}$$

ОТВЕТ

$-\frac{9}{2}$

**ПРИМЕР 21.13.10.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$$

ОТВЕТ

$\frac{\pi^2}{2}$

**ПРИМЕР 21.13.11.**

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{1/\cos^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$$

ОТВЕТ

1/2

**ПРИМЕР 21.13.12.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$$

ОТВЕТ

1

**ПРИМЕР 21.13.13.**

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}.$$

ОТВЕТ

5

**ПРИМЕР 21.13.14.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}4x-\sin 3x}{4x-\sin 2x}.$$

ОТВЕТ

1/2

**ПРИМЕР 21.13.15.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$$

ОТВЕТ

0

**ПРИМЕР 21.13.16.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$$

ОТВЕТ

0

**ПРИМЕР 21.13.17.**

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$$

ОТВЕТ

5/3

**ПРИМЕР 21.13.18.**

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}.$$

ОТВЕТ

1/2

**ПРИМЕР 21.13.19.**

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}(\pi x/2)$$

ОТВЕТ

$$\frac{2}{\pi}$$

**ПРИМЕР 21.13.20.**

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin(3/x)$$

ОТВЕТ

3

**ПРИМЕР 21.13.21.**

$$\lim_{x\to 2}\sin\frac{x-2}{2}\cdot\mathrm{ctg}(x-2)$$

ОТВЕТ

$$\frac{1}{2}$$

**ПРИМЕР 21.13.22.**

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\,\mathrm{ctg}x$$

ОТВЕТ

$$\frac{1}{2}$$

## 14. Провести полное исследование функции и построить ее график

**ПРИМЕР 21.14.1.**

$$y=-\frac{2x}{x^2+2}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.1.

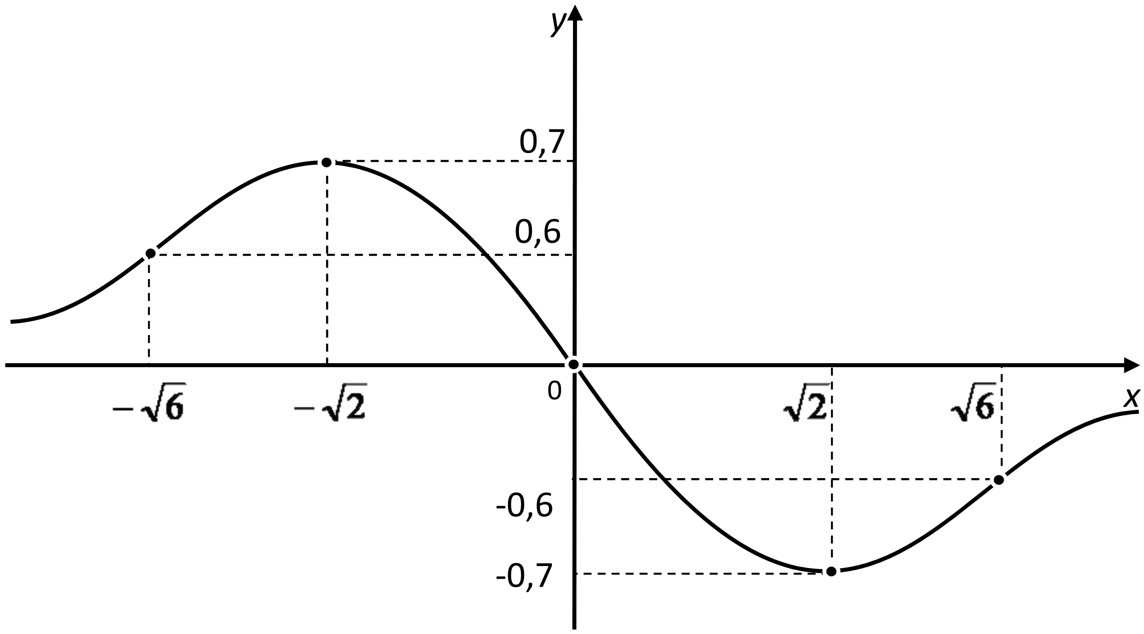



Рис. 21.1. График функции $y=-\dfrac{2x}{x^2+2}$

**ПРИМЕР 21.14.2.**

$y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.2.

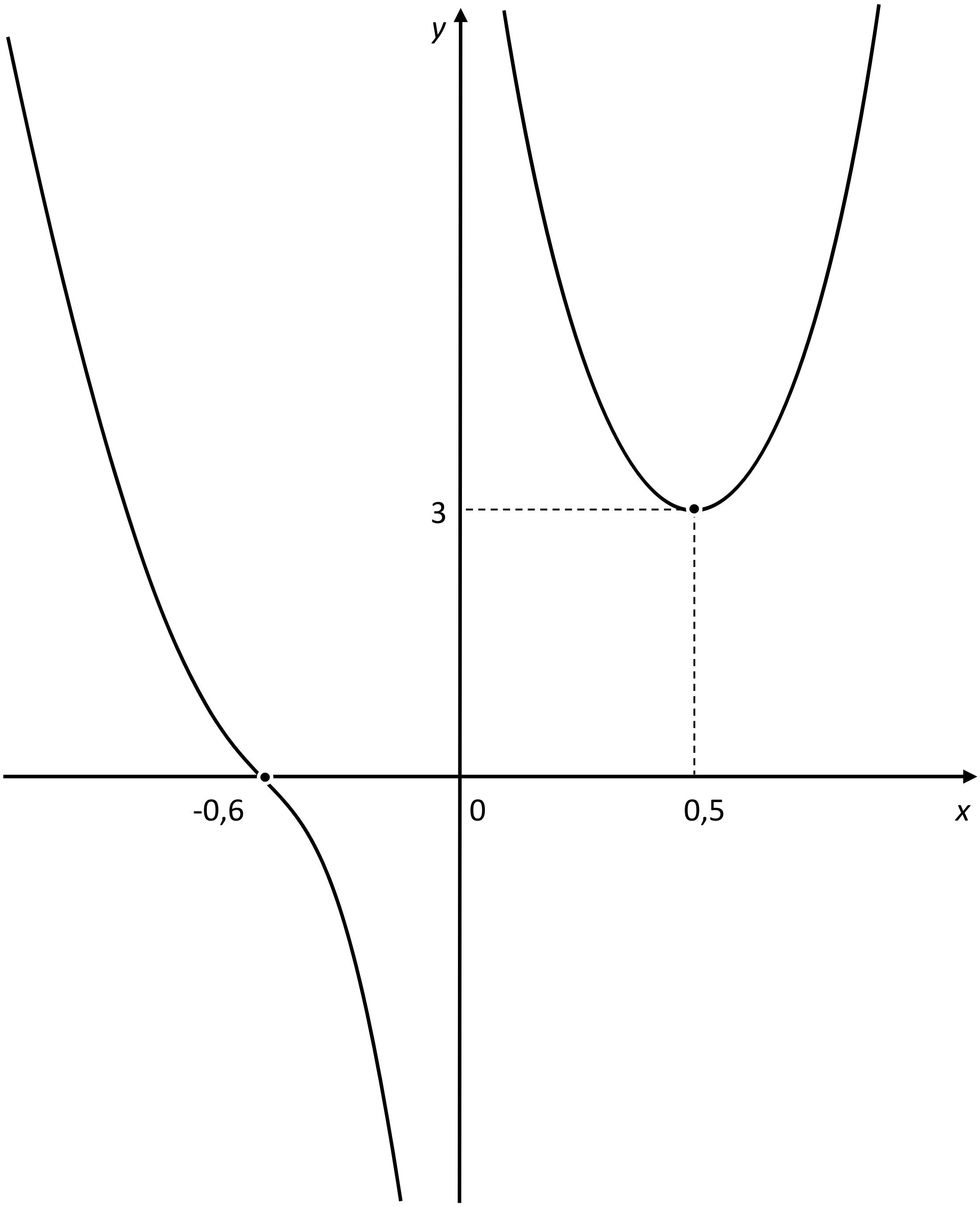



Рис. 21.2. График функции $\boldsymbol{y = 4x^2 + \frac{1}{x}}$

**ПРИМЕР 21.14.3.**

$$y=\frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.3.

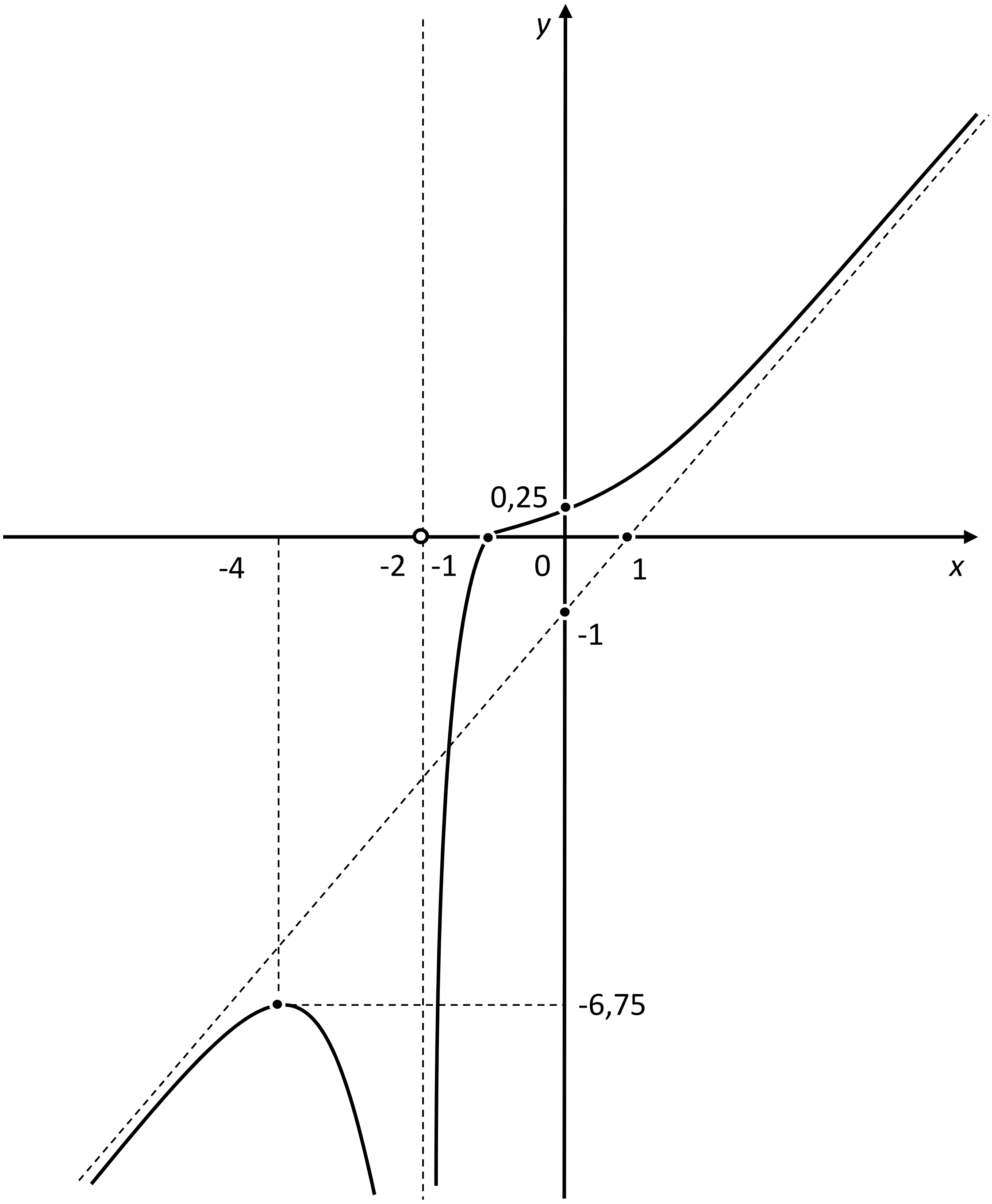



Рис. 21.3. График функции $\boldsymbol{y=\frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}}$

**ПРИМЕР 21.14.4.**

$$y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.4.

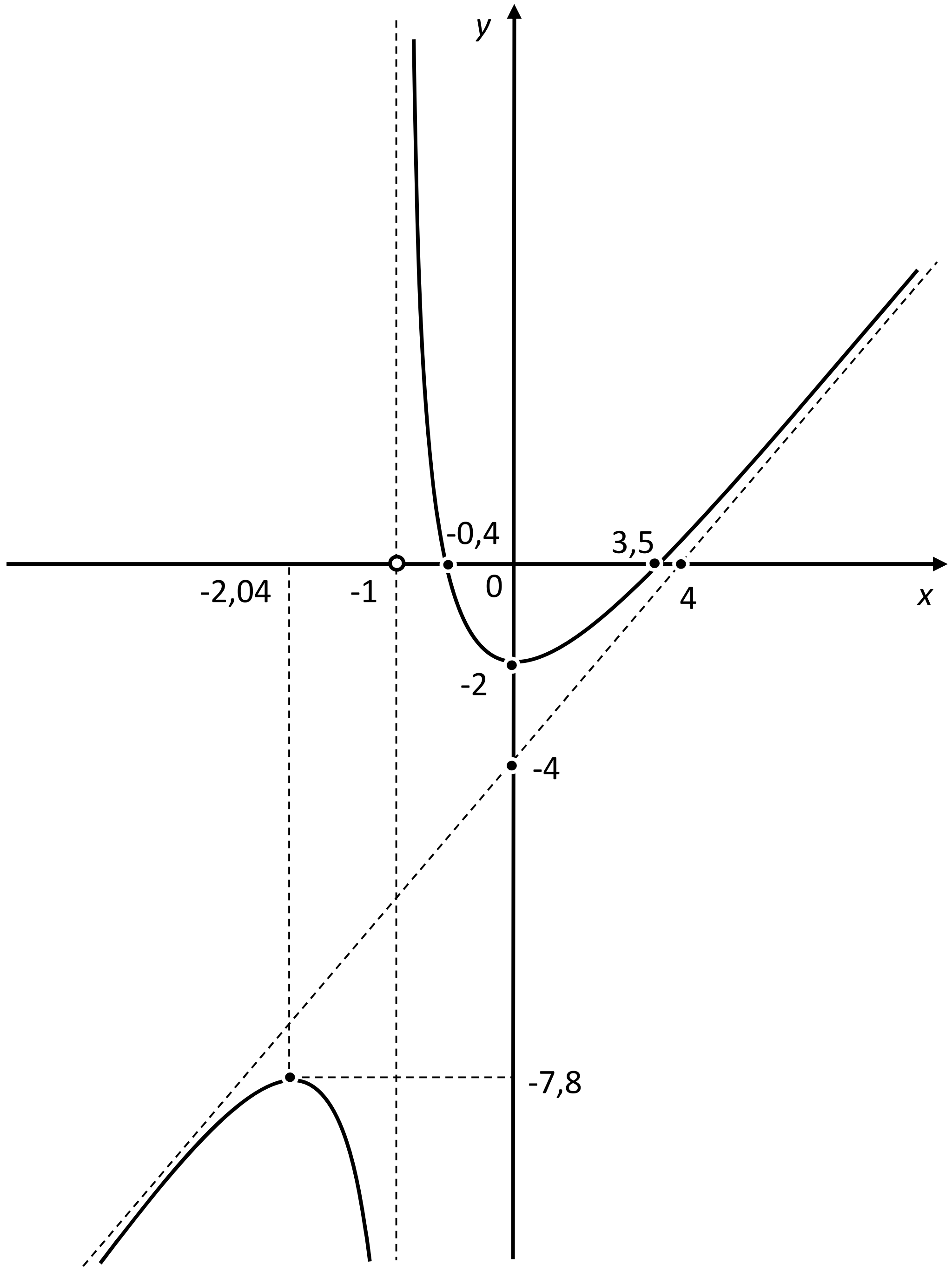



Рис. 21.4. График функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$

**ПРИМЕР 21.14.5.**

$$y = \frac{x^3}{9x - 18}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.5.

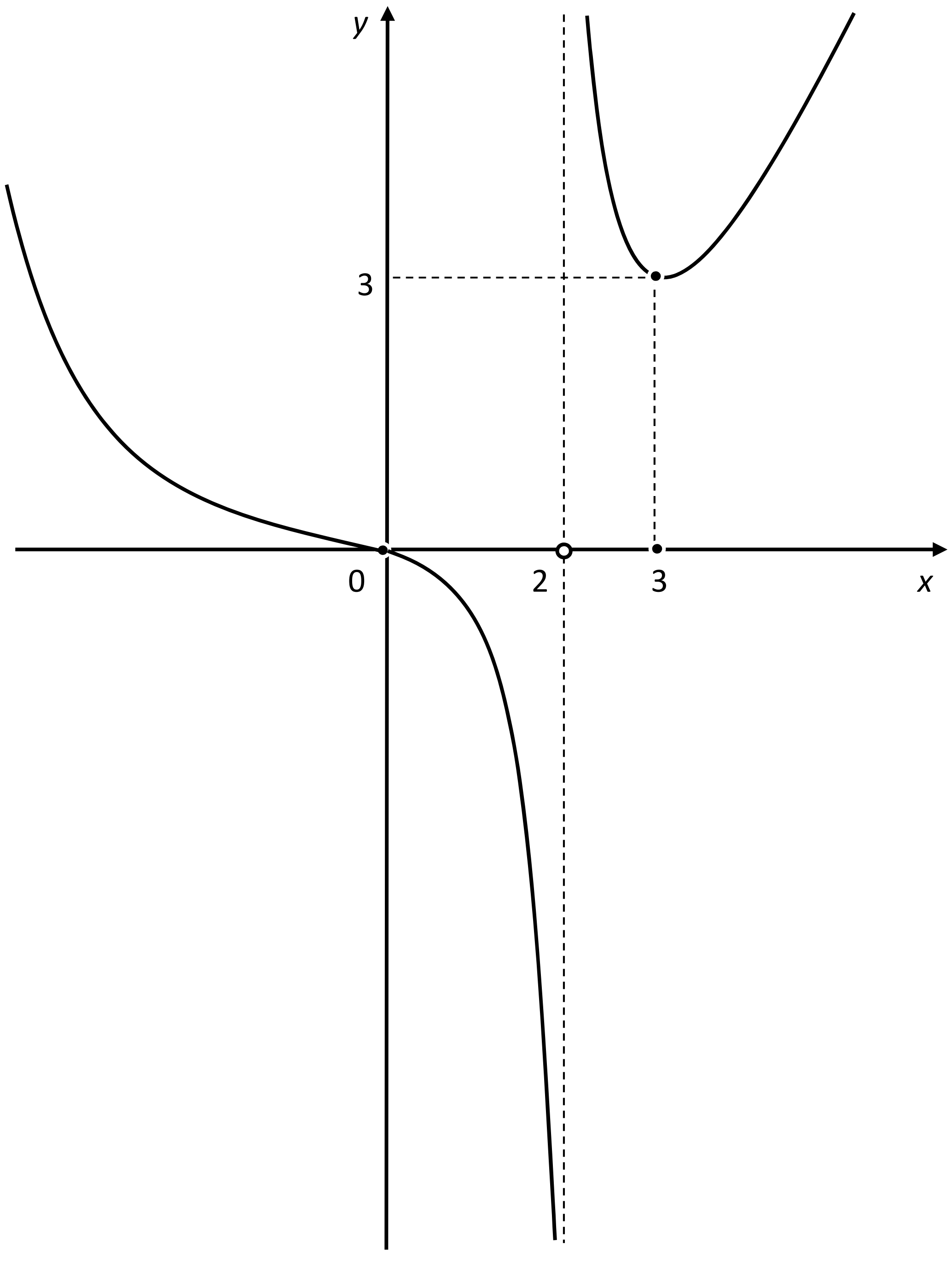



Рис. 21.5. График функции $\boldsymbol{y = \frac{x^3}{9x - 18}}$

**ПРИМЕР 21.14.6.**

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.6.

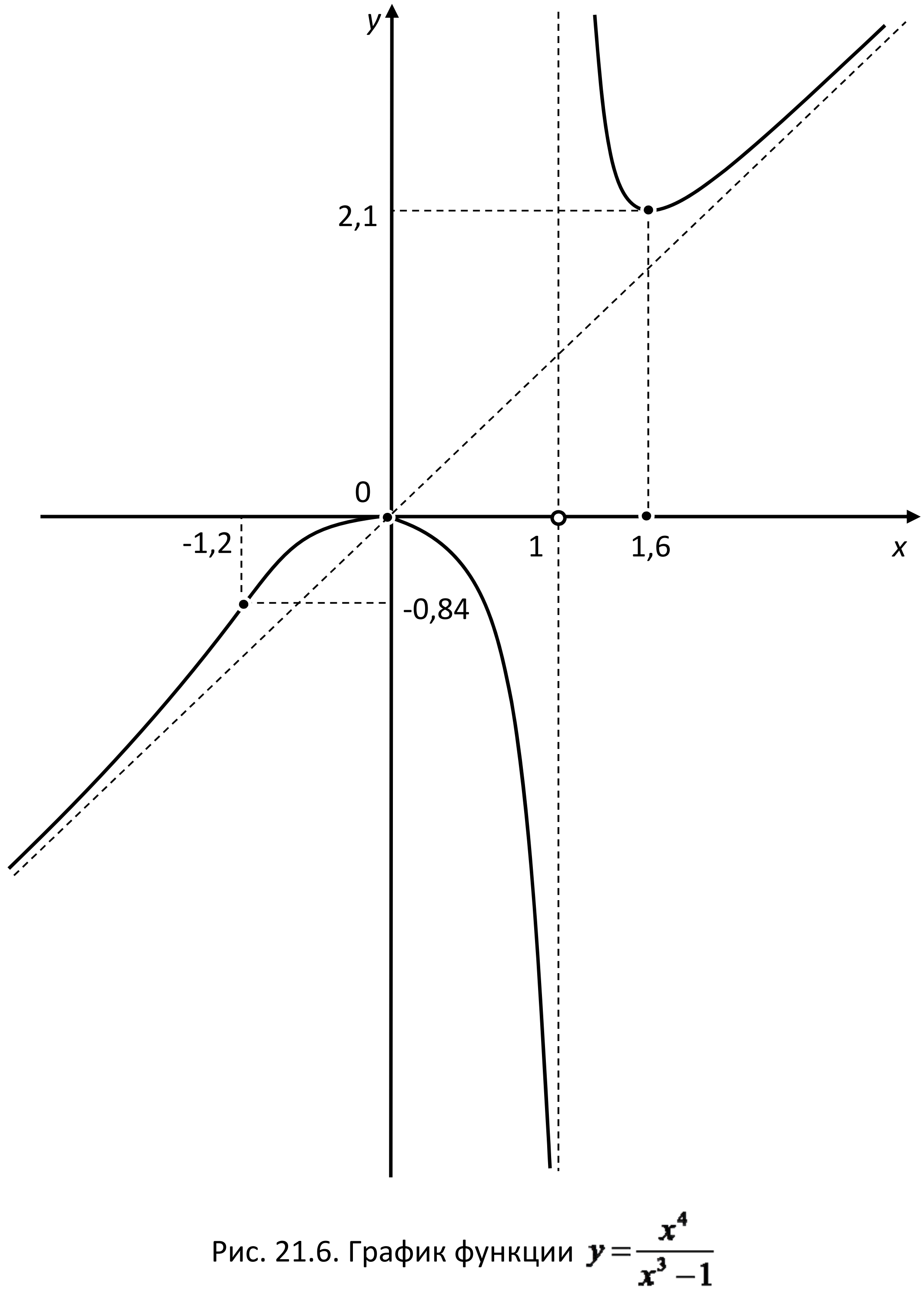



Рис. 21.6. График функции $\boldsymbol{y = \frac{x^4}{x^3 - 1}}$

**ПРИМЕР 21.14.7.**

$$y=\frac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.7.

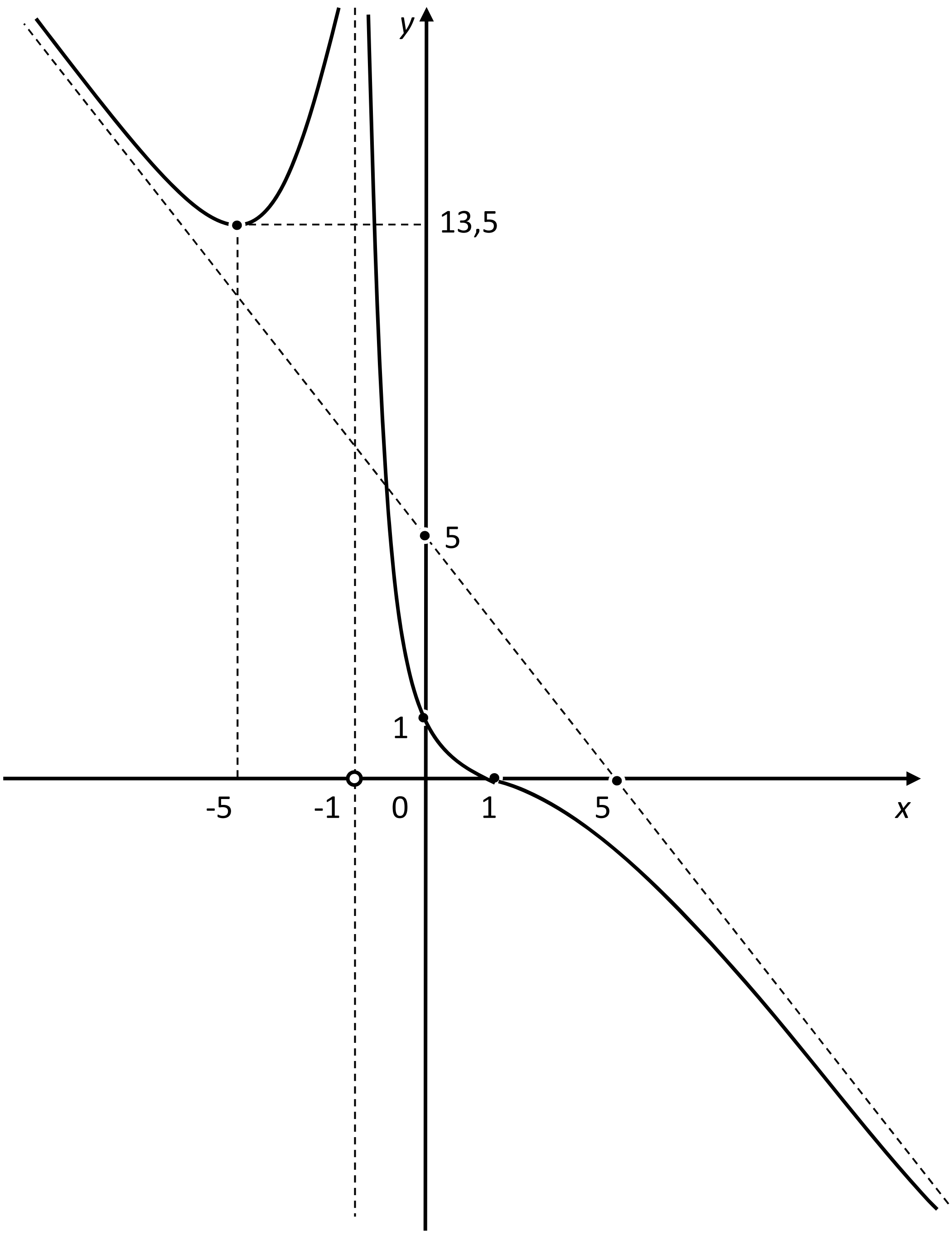



Рис. 21.7. График функции $y=\frac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$

**ПРИМЕР 21.14.8.**

$$y = 4\frac{x^2}{x^3 - 1}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.8.

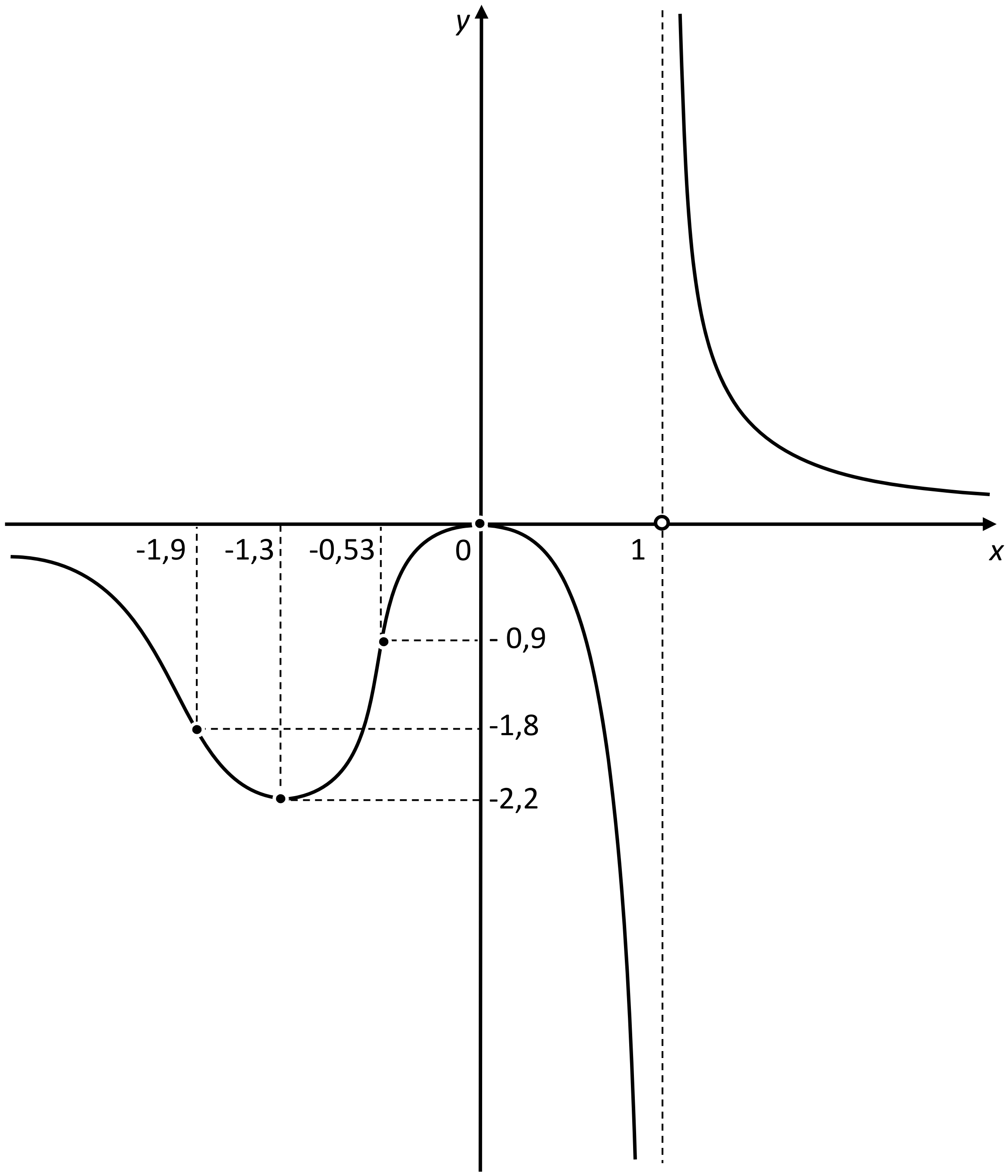



Рис. 21.8. График функции $y = 4\frac{x^2}{x^3 - 1}$

**ПРИМЕР 21.14.9.**

$y = \sqrt{x} \cdot \ln x$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.9.

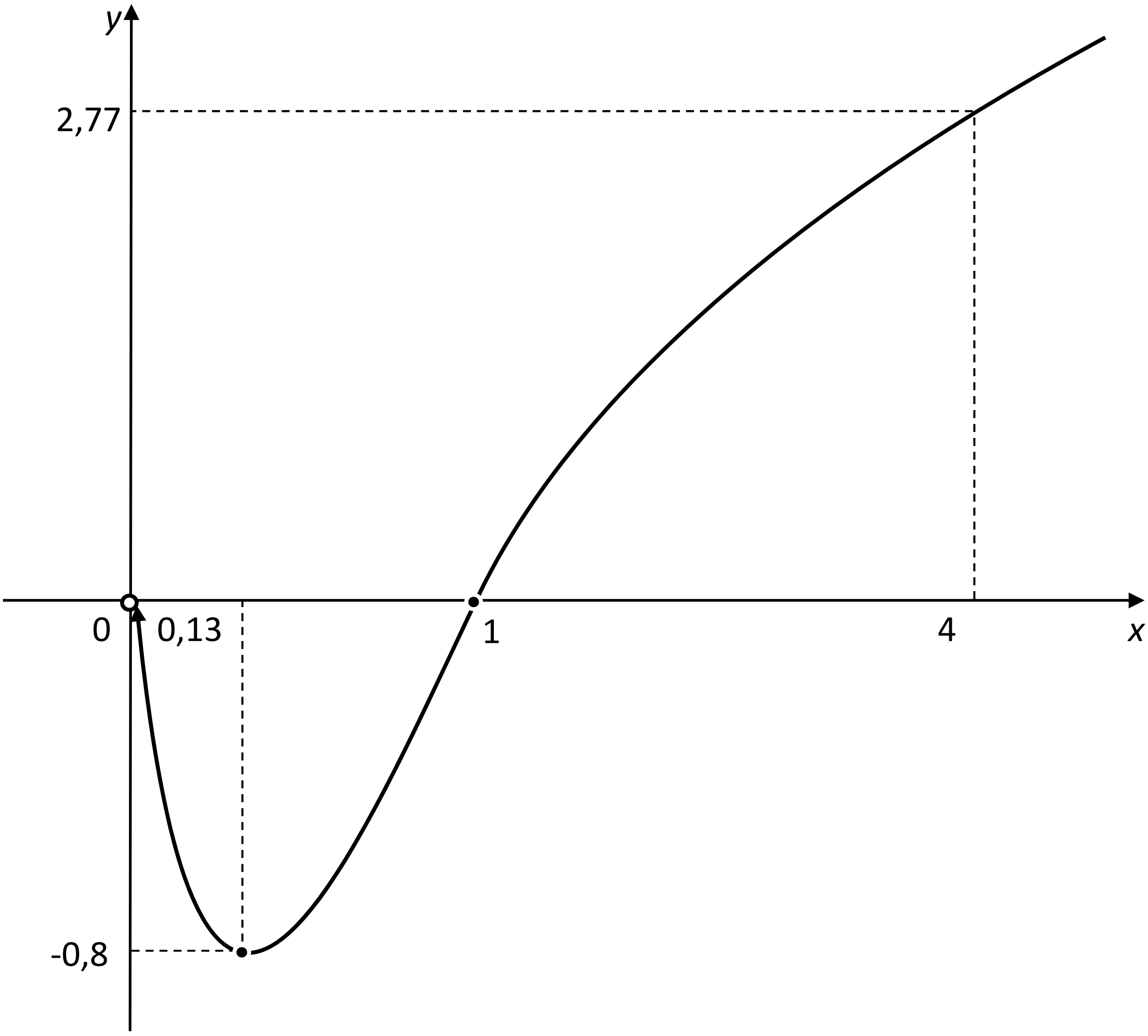



Рис. 21.9. График функции $\boldsymbol{y = \sqrt{x} \cdot \ln x}$

**ПРИМЕР 21.14.10.**

$y = e^{\frac{1}{2-x}}$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.10.

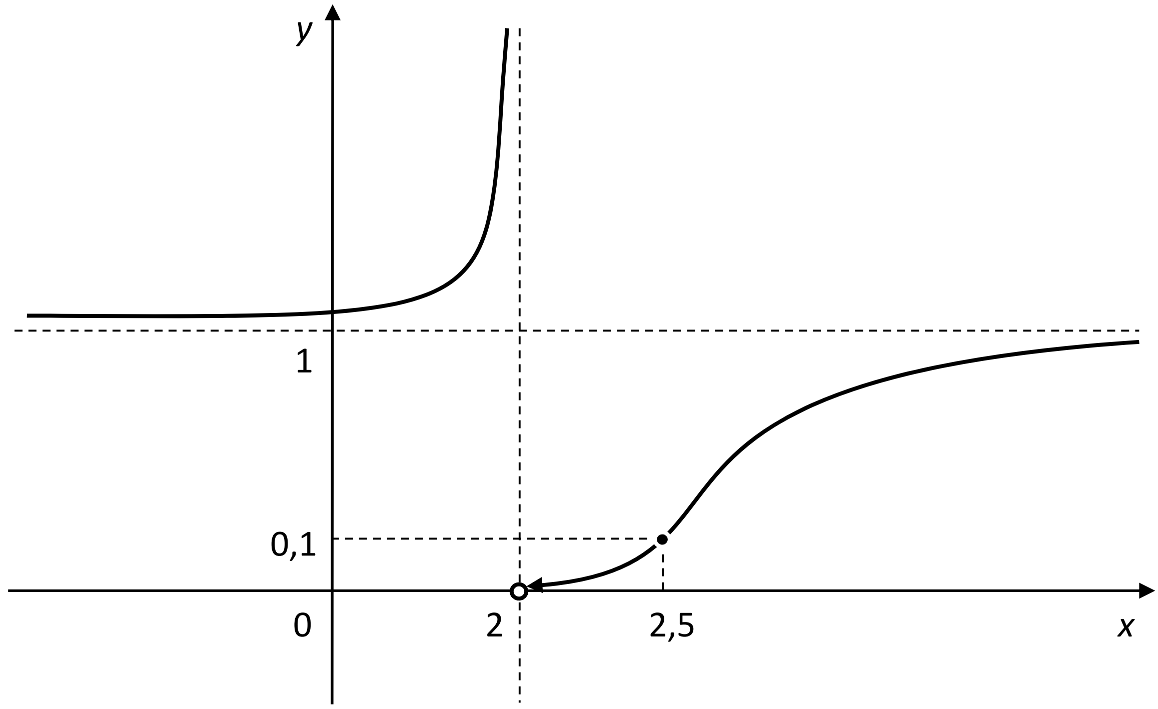



Рис. 21.10. График функции $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

**ПРИМЕР 21.14.11.**

$$y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$$

ОТВЕТ

График функции изображен на рис. 21.11.

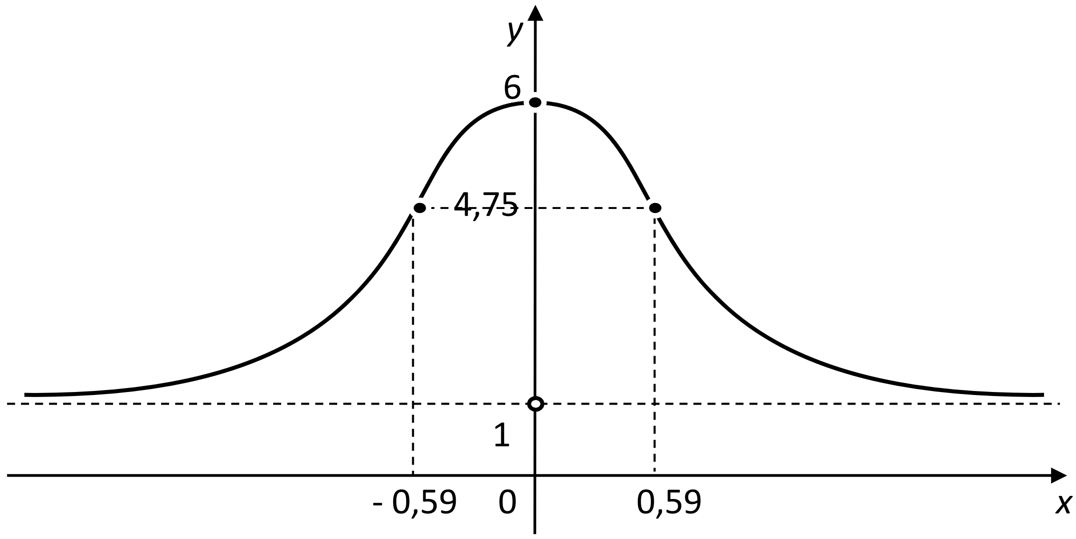



Рис. 21.11. График функции $y = \dfrac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$

**15. Провести полное исследование функции, заданной параметрически, и построить ее график**

**ПРИМЕР 21.15.1.**

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Эта кривая называется астроидой.

ОТВЕТ

График астроиды представлен на рис. 21.12.

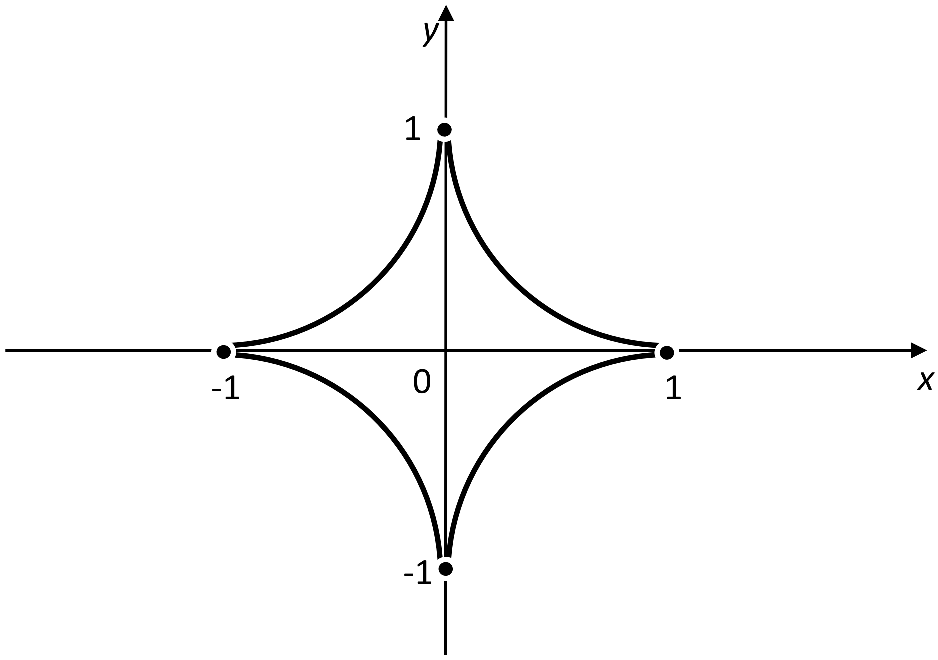



Рис. 21.12. Астроида

**ПРИМЕР 21.15.2.**

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Эта кривая называется декартов лист.

ОТВЕТ

График функции представлен на рис. 21.13.

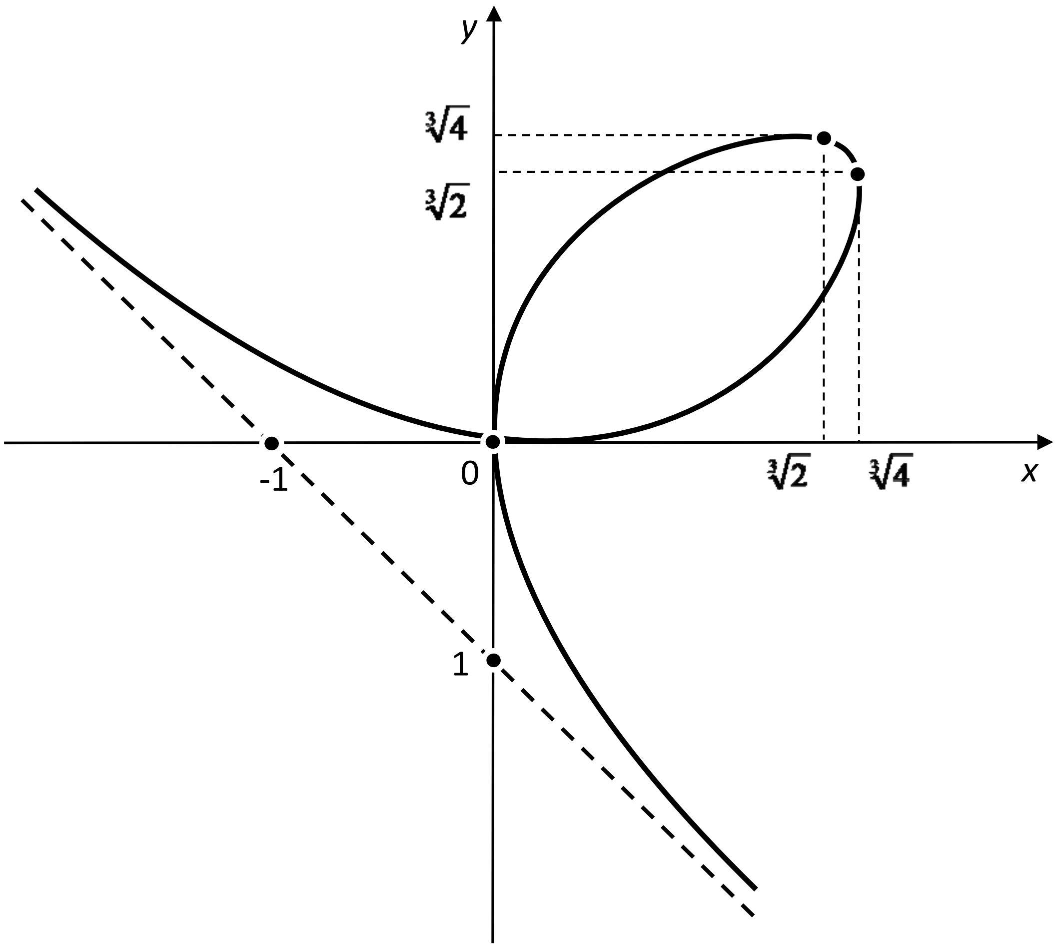



Рис. 21.13. Декартов лист

**16. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке**

**ПРИМЕР 21.16.1.**

$y=-x+\ln\left(x^2-4\right),\ [e;4]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}\left(1+\sqrt{5}\right)=-1{,}37$; $y_{\text{наим}}(4)\approx-1{,}7$

**ПРИМЕР 21.16.2.**

$y=\dfrac{x}{x^2+1},\ [-1;2]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(1)=\dfrac{1}{2}$; $y_{\text{наим}}(-1)=-\dfrac{1}{2}$

**ПРИМЕР 21.16.3.**

$y=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $[0,5;\,5]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(0,5)=1$; $y_{\text{наим}}(1)=0$

**ПРИМЕР 21.16.4.**

$y=\frac{x^2+3}{x+1}$, $[0;\,3]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(3)=y(0)=3$; $y_{\text{наим}}(1)=2$

**ПРИМЕР 21.16.5.**

$y=e^{2x-x^2}$, $[0;\,2]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(1)=e$; $y_{\text{наим}}(0)=y(2)=1$

**ПРИМЕР 21.16.6.**

$y=\sqrt[x]{e}$, $[0,5;\,2]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(0,5)=7,39$; $y_{\text{наим}}(2)=1,65$

**ПРИМЕР 21.16.7.**

$y=(x-1)e^{3x+1}$, $[0;\,1]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(1)=0$; $y_{\text{наим}}\left(\frac{2}{3}\right)=-6,6$

**ПРИМЕР 21.16.8.**

$y=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$, $[-3;\,0]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(-3)=0,22$; $y_{\text{наим}}(0)=-0,7$

**ПРИМЕР 21.16.9.**

$y=xe^{1-2x}$, $[0;\,1]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}}(0)=0$

**ПРИМЕР 21.16.10.**

$y = \sqrt[2-x]{e}$, $[-2;1]$

ОТВЕТ

$y_{\text{наиб}}(1) = 2{,}714$; $y_{\text{наим}}(-2) = 1{,}28$

### 17. Решить практические задачи на экстремум функции

**ПРИМЕР 21.17.1.**

Определить значения высоты $H$ и диаметра $d$ основания открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимости, если для его изготовления отпущено $S$, м$^2$, расходного материала.

ОТВЕТ

$H = 3$ м, $d = 6$ м

**ПРИМЕР 21.17.2.**

Положительное число $x$ разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

ОТВЕТ

$x_1 = x_2 = \dfrac{a}{2}$

**ПРИМЕР 21.17.3.**

Найти размеры поперечного сечения бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из круглого бревна радиуса $R = 2\sqrt{3}$ дм.

ОТВЕТ

Ширина бруса 4 дм, высота $H = 4\sqrt{2}$ дм.

**ПРИМЕР 21.17.4.**

Из круглого листа бумаги радиуса $R$ вырезать сектор так, чтобы при его сворачивании получилась воронка наибольшей вместимости.

ОТВЕТ

Центральный угол $\varphi = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

**ПРИМЕР 21.17.5.**

Изгородью длиной $l$ огородить прямоугольный участок наибольшей площади, примыкающей одной стороной к стене постройки.

ОТВЕТ

Наибольшая площадь $S = \dfrac{l}{16}$ со стороной квадрата $\dfrac{l}{4}$

**ПРИМЕР 21.17.6.**

Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен $P$. Какие должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало больше света?

ОТВЕТ

Ширина окна $\dfrac{2P}{4+\pi}$

**ПРИМЕР 21.17.7.**

Предполагается изготовить пластину в виде прямоугольника с приставленными к нему с двух противоположных сторон полукругами. Какими должны быть размеры пластины, чтобы при заданном периметре $2P$ ее площадь была наибольшей?

ОТВЕТ

Форма пластины круглая с радиусом $\dfrac{P}{\pi}$

**ПРИМЕР 21.17.8.**

На странице книги печатный текст должен занимать площадь $S$, см$^2$. Верхнее и нижнее поля должны быть по $b$ см, правое и левое по $a$ см. Какими должны быть размеры страницы с целью экономии бумаги?

ОТВЕТ

$\sqrt{\dfrac{S\,b}{a}}$, $\sqrt{\dfrac{S\,a}{b}}$

**ПРИМЕР 21.17.9.**

Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры основания 2 м и 1 м. Из бревна требуется вырубить балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпала бы с осью бревна. Какими должны быть размеры балки, чтобы ее объем был наибольшим?

ОТВЕТ

Длина балки $\dfrac{40}{3}$ м, сторона поперечного сечения $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ м

**ПРИМЕР 21.17.10.**

Полоса жести шириной $a$ должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба так, чтобы сечение желоба имело форму дуги кругового сегмента. Вычислить значение центрального угла, опирающегося на дугу, при котором вместимость желоба будет максимальной.

ОТВЕТ

$\pi$

## 22. ТЕСТ – САМОКОНТРОЛЬ

Для проверки усвоения изложенного материала решите тест. Ответы прилагаются.

**ВОПРОС 1**

Дана функция $y=\sqrt{3-2x-x^2}+\log_2(x+1)$. Областью определения функции является множество …

**ВОПРОС 2**

Производная частного $\dfrac{2x-1}{3x+1}$ равна …

**ВОПРОС 3**

Значение производной функции $y=\dfrac{e^{3x}}{2x+1}$ в точке $x=0$ равно …

**ВОПРОС 4**

Укажите вид графика функции, изображенного на рис. 22.1, для которого на всем отрезке $[a;b]$ одновременно выполняются условия $y<0,\ \ y'>0,\ \ y''<0$.

(*выберите один правильный ответ, время 2 мин*)

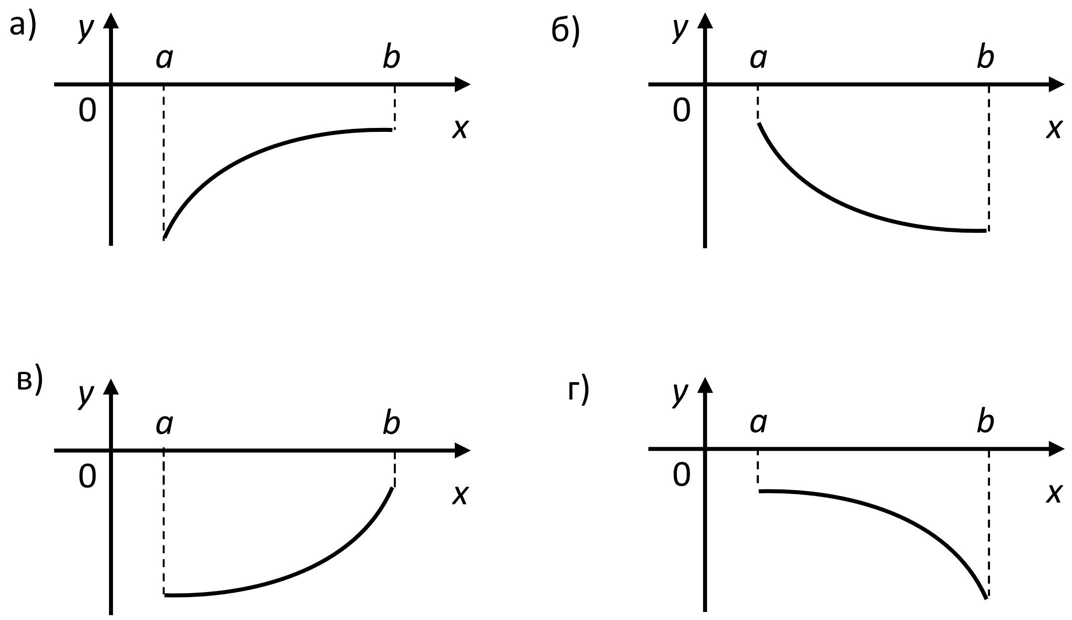



Рис. 22.1. Графики функций

**ВОПРОС 5**

На рис. 22.2 изображен график функции $y = f(x)$. Тогда верны следующие утверждения:

1) $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$;

2) график не имеет точек перегиба;

3) $f''(x) < 0$ при $x \in (-1; -1)$;

4) $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$ при $x \in (-1; 0)$;

5) $x = -1, \quad x = 1$ – точки перегиба.

(*выберите несколько правильных ответов, время 2 мин*)

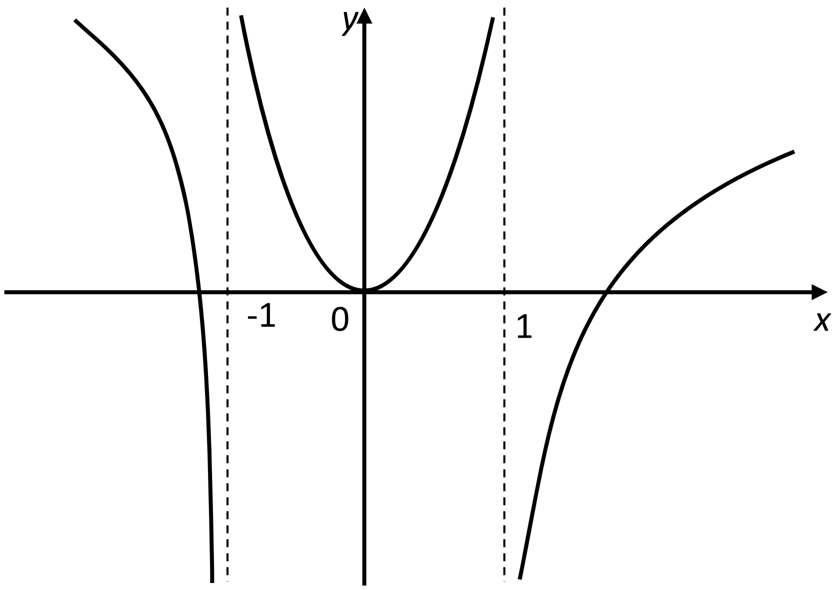



Рис. 22.2. Графики функций *y = f(x)*

**ВОПРОС 6**

Значение производной первого порядка функции $y = \dfrac{\cos 6x}{9x - 1}$ в точке $x = 0$ равно…

**ВОПРОС 7**

На рис. 22.3 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(-3; 6)$. Тогда:

1) число интервалов, на которых $f'(x) < 0$, равно …;

2) число точек экстремума равно ….

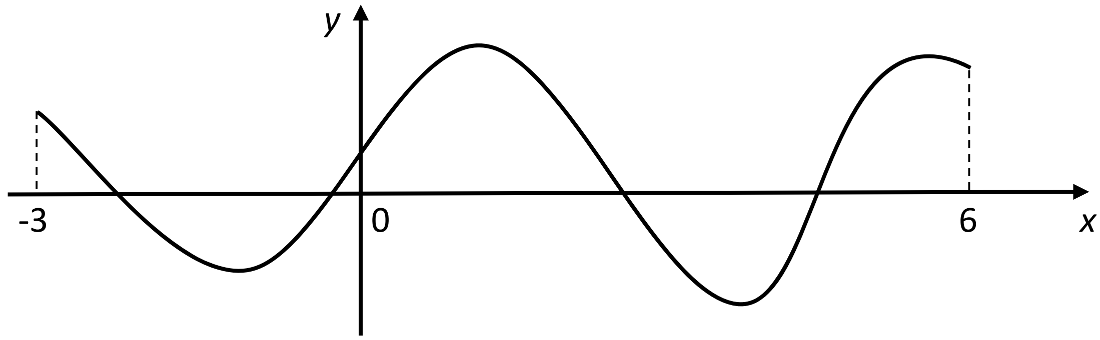



Рис. 22.3. График функции *y = f (x)*, заданной на интервале (-3; 6)

## ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

1. $(-1;1]$
2. $y' = \dfrac{5}{(3x+1)^2}$
3. 0,25
4. а
5. 1; 4; 5
6. -9
7. 1) 3; 2) 4

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии «Функции одной переменной» изложены важнейшие разделы математического анализа, которые необходимо изучить будущему инженеру.

Овладев понятиями данного пособия, студент технического университета будет подготовлен к изучению не менее важных разделов математики: интегральные исчисления функции одной и нескольких переменных. Интегральные исчисления неразрывно связаны с понятиями производной и дифференциала функции, вместе эти разделы составляют основу математического анализа, имеющего чрезвычайное значение в многочисленных приложениях технических, естественных и экономических дисциплин.

Понятия производной и дифференциала функции, кроме применения в интегральном исчислении, имеют немаловажное значение при изучении таких разделов математического анализа, как ряды, дифференциальные уравнения, теория функции комплексной переменной, теория поля, теория вероятностей, а также при изучении вариативных курсов: действительный анализ, уравнения с частными производными, математическая статистика, методы оптимизации и математическое моделирование.

Рассмотренные в пособии методы и алгоритмы решения задач закладывают фундамент для дальнейшего изучения математических и специализированных профильных дисциплин на старших курсах.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 416 с.

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – 446 с.

3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – М. : Высш. шк., 1984. – 223 с.

4. Каталажнова, И. Н. Начала математического анализа / И. Н. Каталажнова. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2013. – 116 с.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. В 2 т. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1981. – 688 с.

6. Кузнецов, Л. А. Сборник задач по высшей математике: типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – М. : Высш. шк., 1983. – 176 с.

7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко [и др.] ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1978. – 380 с.

8. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк [и др.] ; под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

## ТАБЛИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

| Функция | Угол, рад (град) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 (0º) | $\frac{\pi}{6}$ (30º) | $\frac{\pi}{4}$ (45º) | $\frac{\pi}{3}$ (60º) | $\frac{\pi}{2}$ (90º) | $\frac{2\pi}{3}$ (120º) | $\frac{3\pi}{4}$ (135º) | $\frac{5\pi}{6}$ (150º) | $\pi$ (180º) |
| cosα | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| sinα | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tgα | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| ctgα | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | – |

| Функция | Угол, рад (град) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{7\pi}{6}$ (210º) | $\frac{5\pi}{4}$ (225º) | $\frac{4\pi}{3}$ (240º) | $\frac{3\pi}{2}$ (270º) | $\frac{5\pi}{3}$ (300º) | $\frac{7\pi}{4}$ (315º) | $\frac{11\pi}{6}$ (330º) | $2\pi$ (360º) |
| cosα | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| sinα | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| tgα | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| ctgα | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | – |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Основные тригонометрические тождества

| | |
|---|---|
| $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; | $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{ctg}\alpha=1$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. |

Формулы разности и суммы аргументов

| | |
|---|---|
| $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$; | $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. |

Сумма и разность тригонометрических функций

| | |
|---|---|
| $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; | $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. |

| Формулы половинного аргумента | Формулы двойного аргумента |
|---|---|
| $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;<br>$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;<br>$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;<br>$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;<br>$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;<br>$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. | $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;<br>$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;<br>$\sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;<br>$\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;<br>$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;<br>$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$;<br>$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$;<br>$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{2}$. |

| Формулы произведения тригонометрических функций | Формулы понижения степени |
|---|---|
| $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$;<br>$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;<br>$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;<br>$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$;<br>$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$;<br>$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;<br>$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}$. | $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;<br>$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;<br>$\sin^2\alpha=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;<br>$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;<br>$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

# СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
7. $a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$
8. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$
9. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n, \quad b \neq 0$
10. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad a \geq 0$
11. $\sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{2n}}, \quad a \geq 0$
12. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
13. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
14. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
15. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
16. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
17. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$
18. $\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$
19. $\sqrt{a^2} = |a|$
20. $\sqrt[2\cdot n]{a^{2\cdot n}} = |a|$
21. $\sqrt[2\cdot n+1]{a^{2\cdot n+1}} = a$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

## ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

| Номер функции | Функция | Общий вид функции | Область определения функции |
|---|---|---|---|
| 1. | Степенная | $y=\left[f(x)\right]^n$ | $f(x)\in R,\ n\in N$ |
| 1.1. | Иррациональная: алгебраический корень нечетной степени | $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ | $f(x)\in R,\ n\in N$ |
| 1.2. | Иррациональная: алгебраический корень четной степени | $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ | $f(x)\geq 0,\ n\in N$ |
| 2. | Дробно-рациональная | $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $g(x)\neq 0$ |
| 3. | Показательная | $y=a^{f(x)}$ $a\neq 1,\ a>0$ | $f(x)\in R$ |
| 4. | Показательно-степенная | $y=g(x)^{f(x)}$ | $\begin{cases} f(x)\in R, \\ g(x)>0,\ g(x)\neq 1. \end{cases}$ |
| 5. | Логарифмическая | $y=\log_{g(x)} f(x)$ | $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0,\ g(x)\neq 1. \end{cases}$ |
| 6. | Тригонометрические функции | | |
| 6.1. | косинус | $y=\cos(f(x))$ | $f(x)\in R$ |
| 6.2. | синус | $y=\sin(f(x))$ | $f(x)\in R$ |
| 6.3. | тангенс | $y=\mathrm{tg}(f(x))$ | $\cos(f(x))\neq 0$ |
| 6.4. | котангенс | $y=\mathrm{ctg}(f(x))$ | $\sin(f(x))\neq 0$ |
| 7. | Обратные тригонометрические функции | | |
| 7.1. | арксинус | $y=\arcsin(f(x))$ | $\lvert f(x)\rvert\leq 1$ |
| 7.2. | арккосинус | $y=\arccos(f(x))$ | $\lvert f(x)\rvert\leq 1$ |
| 7.3. | арктангенс | $y=\mathrm{arctg}(f(x))$ | $f(x)\in R$ |
| 7.4. | арккотангенс | $y=\mathrm{arcctg}(f(x))$ | $f(x)\in R$ |

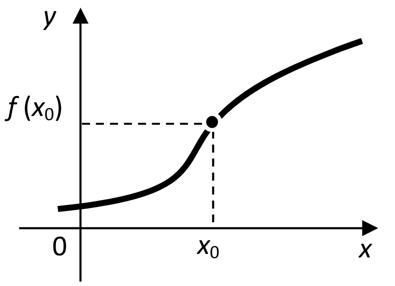
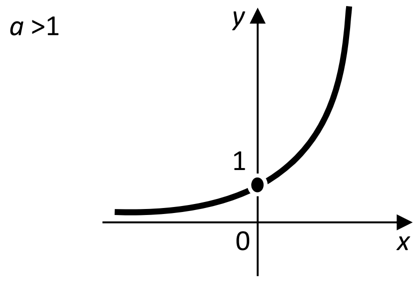
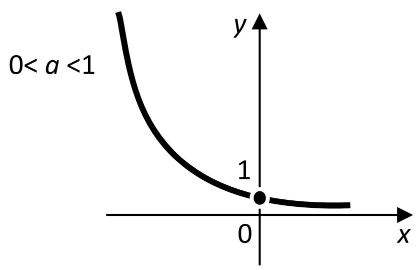
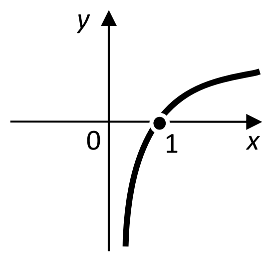
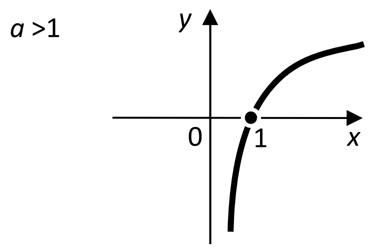
## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

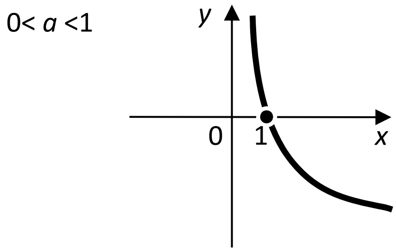
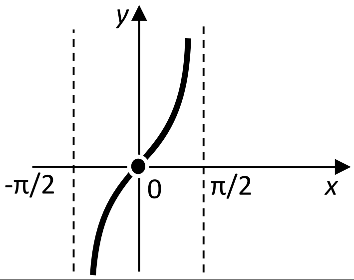
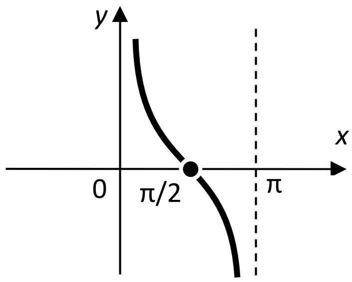
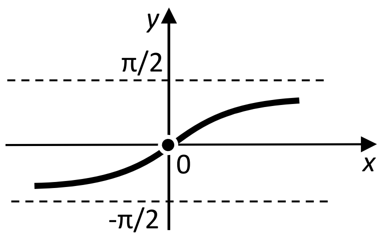
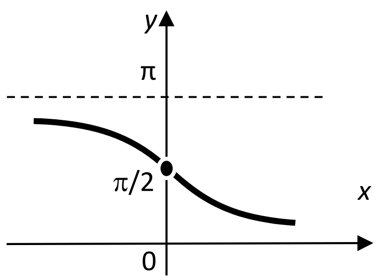
# ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

| Номер теоремы | Теорема | Формула | Примечание |
|---|---|---|---|
| 1. | Предел константы равен константе | $\lim\limits_{x\to\alpha} C = C$ | $C$ = const |
| 2. | Постоянный множитель $C$ можно выносить за знак предела | $\lim\limits_{x\to\alpha} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $C$ = const |
| 3. | Предел алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов тех же функций | $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | Сумма (разность) может содержать более двух слагаемых (вычитаемых) |
| 4. | Предел произведения двух функций равен произведению пределов тех же функций | $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | Произведение может содержать более двух множителей |
| 5. | Предел частного двух функций равен частному пределов | $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\neq 0$. |
| 6. | Предел степени функции равен степени предела функции | $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)\right)^m = \left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)$ | $m\in N$, где $N$ – множество натуральных чисел |
| 7. | Предел показательной функции равен показательной функции с пределом в степени | $\lim\limits_{x\to\alpha} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}$ | $a$ = const, $a\neq 1$, $a>0$ |
| 8. | Предел сложной функции равен функции предела промежуточного аргумента | $\lim\limits_{x\to\alpha} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\right)$ | Внешняя функция может быть, например, логарифмической, тригонометрической и др. |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

# ПРЕДЕЛЫ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

| Номер предела | Предел функции | Геометрическая интерпретация |
|---|---|---|
| 1. | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$<br>$f(x)$ – непрерывная в точке $x_0$ функция |  |
| 2. | $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0, \quad a > 1;$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad a > 1$ |  |
| 3. | $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = \infty, \quad 0 < a < 1;$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$ |  |
| 4. | $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ |  |
| 5. | $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty, \quad a > 1;$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \quad a > 1$ |  |

| Номер предела | Предел функции | Геометрическая интерпретация |
|---|---|---|
| 6. | $\lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = \infty, \quad 0 < a < 1;$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, \quad 0 < a < 1$ |  |
| 7. | $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$<br>$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$ |  |
| 8. | $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{ctg} x = \infty$<br>$\lim\limits_{x\to \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty$ |  |
| 9. | $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ |  |
| 10. | $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$<br>$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$ |  |

*Учебное издание*

**Каталажнова** Ирина Николаевна

# ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

Научный редактор – кандидат физико-математических наук,
доцент А. Л. Григорьева

Редактор Е. В. Назаренко

Подписано в печать 24.12.2015.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага 80 г/м$^2$. Ризограф EZ570E.
Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 13,66. Тираж 50 экз. Заказ 27547.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

Полиграфическая лаборатория
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.