9. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 302 с.

10. Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – 4-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.

11. Самарский, А. А. Уравнения математической физики : учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

12. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Изд-во «Мир и Образование», 2003. – 304 с.

13. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учеб. пособие для втузов / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1983. – 112 с.



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

**О. В. Козлова, И. В. Слабожанина, Е. С. Каминская**

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Утверждено в качестве учебного пособия
Ученым советом Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»

Комсомольск-на-Амуре
2012



## ВВЕДЕНИЕ

Комфортное отображение относится к одному из основных понятий теории функций комплексного переменного и играет исключительно важную роль как в теоретическом отношении, так и при решении многих задач аэро- и гидромеханики, теории упругости, электро- и радиотехники, теплотехники, теории фильтрации и многих других технических дисциплин.

Поэтому в предлагаемом учебном пособии общая теория конформных отображений изложена с максимально возможной краткостью для такого обширного материала, а главное внимание уделено использованию данной теории в прикладных задачах.

Назначение учебного пособия обусловило и характер изложения. В пособии опущены ряд доказательств, но основные понятия и теоремы полностью приведены. Пособие содержит обязательный цикл задач для студентов, изучающих курс теории функций комплексного переменного (ТФКП), а также задачи, выходящие за рамки программы. Некоторые из них могут служить основой для курсовых студенческих работ и материалом для занятий на семинарах по ТФКП.

Пособие предназначается в основном для студентов прикладной математики, для научных и инженерно-технических работников, специализирующихся по механике и физике, а также для аспирантов и студентов.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### 1.1. Комплексные числа и действия над ними

*Комплексным числом z называется пара действительных чисел (a,b) с установленным порядком следования чисел a и b. Это условно записывается в виде $z = (a, b)$. Первое число a пары (a, b) называется действительной частью комплексного числа z и обозначается символом $a = Rez$; второе число b пары (a, b) называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается символом $b = Imz$.*

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

*Суммой* комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a, b)$, где $a = a_1 + a_2$ и $b = b_1 + b_2$.

При таком определении сохраняются переместительный и сочетательный законы сложения.

*Нулем* называется такое комплексное число 0, сумма которого с любым комплексным числом $z$ равна этому числу $z$, т.е. $z + 0 = z$. Очевидно,

20. а) $\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{z} dz$, $\Gamma$ – отрезок прямой от $z_1 = 2 - i$ до $z_2 = i$,

б) $\int_{z=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z-1)} dz$,

в) $\int_{2i}^{3-i} cos^2 z \, dz$.

Задание 12. Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\frac{e^{1/z}}{\sin(\frac{1}{z})}$ | 11. | $ctg\ \pi z$ |
| 2. | $\frac{1}{\cos z}$ | 12. | $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ |
| 3. | $tg^2 z$ | 13. | $\frac{1}{\sin z^2}$ |
| 4. | $ztgze^{1/z}$ | 14. | $\frac{\sin 3z - 3\sin z}{z\,(\sin z - z)}$ |
| 5. | $\frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}$ | 15. | $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ |
| 6. | $\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z^2+4)}$ | 16. | $\frac{e^z - 1}{\sin \pi z}$ |
| 7. | $\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\,\sin^2 z}$ | 17. | th z |
| 8. | $tg\ \frac{1}{z}$ | 18. | $\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$ |
| 9. | $ctg\ \frac{1}{z}$ | 19. | $\frac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$ |
| 10. | $\frac{1}{e^z+1}$ | 20. | $\frac{1}{z^2} + \sin\frac{1}{z^2}$ |

Задание 13. Вычислить интеграл.

1. $\oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z\,(z^2+1)}$

2. $\oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$

3. $\oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z\,(z^2+4)}$

4. $\oint_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z\,(z+2i)}\,dz$

5. $\oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}$

6. $\oint_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz$

7. $\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z}\,dz$

8. $\oint_{|z-3/2|=2} \frac{2z\,|z-1|}{\sin z}\,dz$

9. $\oint_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}\,dz$

10. $\oint_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,dz$

11. $\oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}\,dz$

12. $\oint_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}\,dz$

13. $\oint_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}\,dz$

14. $\oint_{|z-2|=3} \frac{cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$

15. $\oint_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z}\,dz$

16. $\oint_{|z-6|=1} \frac{sin^2 z+2}{z^2-4\pi^2}\,dz$

17. $\oint_{|z+1|=1/2} \frac{tg\,z+2}{4z^2+\pi z}\,dz$

18. $\oint_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}\,dz$

19. $\oint_{|z+1|=2} \frac{sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}\,dz$

20. $\oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z\sin(z+\frac{\pi}{4})}\,dz$



## ОГЛАВЛЕНИЕ


ВВЕДЕНИЕ ..... 4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ..... 4
1.1. Комплексные числа и действия над ними ..... 4
1.2. Функции комплексного переменного ..... 8
1.3. Дифференцирование функции комплексного переменного ..... 12
1.4. Интегрирование функций комплексного переменного ..... 16
2. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ..... 17
2.1. Общие положения ..... 17
2.2. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями ..... 20
2.3. Примеры конформных отображений ..... 31
3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ..... 44
3.1. Собственно приближенные методы ..... 45
3.2. Методы интегральных уравнений ..... 50
4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ..... 63
4.1. Гармонические функции и их свойства ..... 63
4.2. Задача Дирихле ..... 72
4.3. Интеграл Шварца ..... 79
4.4. Задача Дирихле для полуплоскости ..... 80
4.5. Вывод интеграла Шварца-Кристоффеля ..... 82
4.6. Интеграл Шварца для полосы $-h < Imz < h$. ..... 82
4.7. Формула Чизотти ..... 83
4.8. Задача Неймана ..... 84
5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ПОЛЯ ..... 86
5.1. Плоские векторные поля ..... 86
5.2. Примеры плоских полей ..... 87
5.3. Свойства плоских векторных полей ..... 90
6. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ ..... 94
6.1 Силовая и потенциальная функции ..... 94
6.2. Комплексный потенциал в электростатике ..... 99
6.3. Комплексный потенциал в гидромеханике и теплотехнике ..... 104
6.4. Метод конформных отображений ..... 107
6.5. Задача обтекания бесконечной кривой ..... 114
6.6. Задача полного обтекания. Условие Чаплыгина ..... 117
6.7. Другие методы ..... 122
7. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ ..... 125
8. ЗАДАЧИ ..... 137
8.1. Задачи для дополнительного изучения курса ТФКП ..... 137
8.2. Задачи для расчетно-графических заданий ..... 139
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ..... 155
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ..... 155




## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии были рассмотрены основные понятия и принципы конформных отображений, а также их приложения к задачам механики, электростатики и физики.

Некоторые разделы пособия, например приближенные методы конформных отображений, могут быть дополнены как теоретическим материалом, так и практическими примерами.

Область использования конформных отображений в последнее время значительно расширилась, поэтому не все прикладные задачи вошли в данное пособие, такие как: задачи теории упругости, устойчивости и др.

В связи с быстрым ростом информационных технологий появляется возможность реализовать некоторые прикладные задачи в виде программного продукта.

Данное пособие может быть рекомендовано студентам и аспирантам, имеющим специальную математическую подготовку.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Лунц, Г. Л. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – 2-е изд. – СПб. : Лань, 2002. – 304 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – 6-е изд., стер. – М. : Лань, 2002. – 688 с.
3. Фукс, Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. – М., 1964. – 388 с.
4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учеб. / И. И. Привалов. – 15-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 432 с.
5. Фильчаков, П. Ф. Приближенные методы конформных отображений : справочное руководство / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1964. – 536 с.
6. Коппенфельс, В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. – 407 с.
7. Лаврентьев, М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики / М. А. Лаврентьев. – М. : ОГИЗ Изд-во технико-теоретической литературы, 1946.
8. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учеб. для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – 6-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2010. – 335 с.





УДК 517.55(07)
ББК 22.161.55я7
К592

***Рецензенты:***

Н. А. Дейнекина, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» ФГБОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения»;

В. В. Черномас, д-р техн. наук, доцент, зав. лабораторией новых технологий в металлургии Института машиноведения и металлургии ДВО РАН

**Козлова, О. В.**

К592 Теория функций комплексного переменного в приложениях : учеб. пособие / О. В. Козлова, И. В. Слабожанина, Е. С. Каминская. – Комсомольск-на-Амуре : ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2012. – 156 с.
ISBN 978-5-7765-0955-1

Рассматриваются основные понятия и принципы конформных отображений, а также их приложения к задачам механики, электростатики и физики. Содержатся разделы для самостоятельной работы студентов, собраны воедино различные типы прикладных задач и методы их решения.

Данное учебное издание предназначено как для основной, так и для дополнительной работы студентов по специальностям 231300.62 – «Прикладная математика», 010400.62 – «Прикладная математика и информатика», удовлетворяет требованиям квалификационной характеристики выпускника по основной образовательной программе.

УДК 517.55(07)
ББК 22.161.55я7

ISBN 978-5-7765-0955-1


© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», 2012

в) $\int_{\frac{1}{2}i}^{2-i} sin^2\, z\, dz.$

15. а) $\int_\Gamma |z|\bar{z}dz$, $\Gamma$ – дуга $y = 2x^2$ от A(1; 2) до B(−1; 2),

б) $\int_{z=3} \frac{\sin(z+1)}{z+1} dz$,

в) $\int_i^{3-i} \cos(z+1)\, dz.$

16. а) $\int_\Gamma z^3 dz$, $\Gamma$: $z = 2 - 3i + ti,\ 0 \le t \le 2$,

б) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-i^2)(z-2)}$,

в) $\int_{-2i}^{3+i} \sin(3z - i)dz.$

17. а) $\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{z} dz$, $\Gamma: z = 3 + it, 1 \le t \le 3$,

б) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-i^2)(z-2)}$,

в) $\int_{-2i}^{3+i} \sin(3z - i)\, dz.$

18. а) $\int_\Gamma Rezdz$, $\Gamma: |z - i| = 1,\ Re\ z > 0$,

б) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$,

в) $\int_i^{3+i} \frac{dz}{z^2+2}$.

19. а) $\int_\Gamma |z|dz$, $\Gamma$ – дуга $y = 2x^2$ от A(1; 1) до B(2; 4),

б) $\int_{z=5} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$,

в) $\int_{1+i}^{1-i} \frac{\ln z}{z} dz.$



что существует единственное комплексное число $0 = (0,0)$, обладающее этим свойством.

*Произведением* комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число *z = (a, b)* такое, что $a = a_1a_2 - b_1b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_1$.

При таком определении произведения выполняются:

- переместительный: $z_1z_2 = z_2z_1$,
- сочетательный: $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$,
- распределительный: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1z_3$ законы.

Включим действительные числа в множество комплексных чисел, рассматривая действительное число *a* как комплексное число *a* = (*a*, 0). Тогда, как следует из определения действий сложения и умножения, для комплексных чисел сохраняются известные правила действий над действительными числами. Поэтому множество комплексных чисел рассматривается как расширение множества действительных чисел. Заметим, что умножение на действительную единицу (1,0) не меняет комплексного числа: $z \cdot 1 = z$.

Комплексное число вида *z* = (0,*b*) называется *чисто мнимым* и символически обозначается *z = ib.* Чисто мнимое число *(0,b) = ib* можно рассматривать как произведение мнимой единицы (0,1) и действительного числа (*b,* 0). Мнимую единицу обычно обозначают символом (0,1) = *i*. В силу определения произведения комплексных чисел справедливо соотношение $i \cdot i = i^2 = -1$.

Оно позволяет придать прямой алгебраический смысл, так называемой *алгебраической форме* записи комплексного числа *z = (a, b) = a + ib,* и производить операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры многочленов.

Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ *называется комплексно сопряженным числу z = a+ib.*

Операция вычитания комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Комплексное число *z = a + ib* называется *разностью* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, если $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$.

Операция деления комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению. Комплексное число *z = a + ib* называется *частным* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0$, если $z_1 = z \cdot z_2$. Отсюда следует, что действительная *a* и мнимая *b* части частного *z* определяются из линейной системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_2a - b_2b = a_1, \\ b_2a + a_2b = b_1, \end{cases}$$

с определителем $a_2^2 + b_2^2$, отличным от нуля. Решив эту систему, получим





т.е. модуль частного равен частному модулей $\rho = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, а аргумент – разности аргументов:

$$\varphi = Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg\, z_1 - Arg\, z_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа удобны при рассмотрении алгебраических операций возведения комплексного числа в целую положительную степень и извлечения корня из комплексного числа:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. $|z^n| = |z|^n$, $Arg\, z^n = nArg\, z + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$.

Отсюда получается формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

*Корень n-ой степени* из комплексного числа z имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, $\varphi = \arg z$.

Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня *n*-й степени из комплексного числа *z*, расположены в вершинах правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z = 0$.

Классический анализ поставил задачу так расширить множество дифференцируемых чисел, чтобы не только элементарные алгебраические операции сложения и умножения, но и операция извлечения корня не выводила из этого расширенного множества. Как мы видим, введение комплексных чисел решает эту задачу.

## 1.2. Функции комплексного переменного

Для построения ТФКП большое значение имеет перенесение основных понятий анализа в комплексную область. Одним из фундаментальных понятий анализа является понятие предела и, в частности, понятие сходящейся числовой последовательности. Аналогичную роль играют соответствующие понятия и в области комплексных чисел. При этом многие определения, связанные с предельным переходом, полностью повторяют соответствующие определения теории функций действительной переменной.



4. а) $\int_\Gamma Imzdz$, $\Gamma: |z| = 1, Re\ z \ge 0$,

б) $\int_{z-1=2} \frac{dz}{z^2-5z+4}$,

в) $\int_{-i}^{2+i} e^{-z} dz.$

3. а) $\int_\Gamma \frac{\bar{z}}{z} dz$, $\Gamma: |z| = 3, Re\ z \le 0$,

б) $\int_{z=3} \frac{\sin z}{(z-2)^3} dz$,

в) $\int_0^{2+i} z\cos z\, dz.$

2. а) $\int_\Gamma |z|zdz$, где $\Gamma$ – ломаная кривая с вершинами $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$,

б) $\int_{|z|=2} e^{2z} \frac{1}{z} dz$,

в) $z_1 = 0.$

1. а) $\int_\Gamma |z|^2 dz$, $\Gamma: |z| = 4, Im\ z \ge 0$,

Задание 11. Вычислить интегралы.

7. $u = x^2 - y^2 + x$;
8. $v = e^y \cos x$;
9. $u = 3x^2y - y^3$;
10. $v = \frac{x}{x^2+y^2}$;
11. $v = x + y - 3$;
12. $u = x^2 - y^2 + x$;
13. $u = y^2 - x^2$;
14. $v = arctg\frac{y}{x},\ x > 0$;
15. $u = e^{-2x}\cos 2y$;
16. $v = xy + 1$;
17. $v = \ln(x^2 + y^2)$ ;
18. $u = 2^y \sin x$;
19. $u = e^y \cos x$;
20. $v = e^{-x}\sin 2y$.

б) $\int_{z-i=1}\frac{dz}{(z-i)(z+2)}$,

в) $\int_{2-i}^{3+i}(z^2+2e^z)dz$.

5. а) $\int_\Gamma |z|zdz$, где Γ – ломанная кривая с вершинами $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=2-i$,

б) $\int_{|z+1|=2}\frac{\sin z}{z+i}dz$,

в) $\int_{3i}^{4-i}\frac{z}{1+z^2}dz$.

6. а) $\int_\Gamma z^2dz$, Γ: $|z|=3, Im\, z>0$,

б) $\int_{|z|=5}\frac{dz}{(z-i)(z+6)}$,

в) $\int_i^{2-3i} z\, e^{iz}dz$.

7. а) $\int_\Gamma |z|dz$, где Γ – ломаная кривая от A(0;1) до B(0;1),

б) $\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh} z}{(z+\frac{\pi}{4}i)}dz$,

в) $\int_0^{2i}(z^2+3z-1)dz$.

8. а) $\int_\Gamma e^2dz$, где Γ – ломанная кривая с вершинами $z_1=0$, $z_2=2i$, $z_3=i-1$,

б) $\int_{|z+1|=2}\frac{\sin z}{(z+i)^{10}}dz$,

в) $\int_{-i}^{1+i}\frac{z}{\sqrt{1-z^4}}dz$.

9. а) $\int_\Gamma z^2dz$, Γ: $z=(3+i)t$, $0\le t\le 1$,



При изучении свойств комплексных чисел весьма удобной является их геометрическая интерпретация. Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z=a+ib$ точкой плоскости $(x, y)$ с декартовыми координатами $x=a$ и $y=b$. Число $z=0$ ставится в соответствие началу координат данной плоскости. Такую плоскость называют *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной*, а ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости. При этом, очевидно, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел $z=x+iy$ и множеством свободных векторов, проекции $x$ и $y$ которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны $a$ и $b$.

Комплексное число $z=x+iy$ изображается в плоскости $XOY$ точкой $M$ с координатами $(x, y)$ либо вектором $OM$ (рис. 1.1). Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами $(\rho,\varphi)$, где $\rho$ – расстояние точки от начала координат, а $\varphi$ – угол, который составляет радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла $\varphi$ считается направление против часовой стрелки $(-\infty<\varphi<\infty)$. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим так называемую *тригонометрическую форму* записи комплексного числа: $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

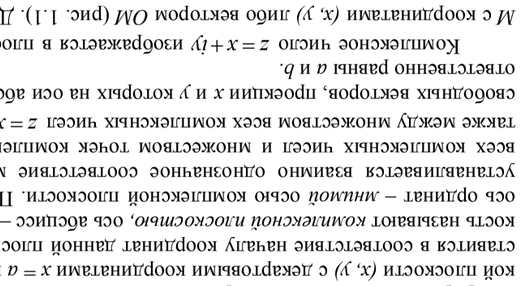



**Рис. 1.1**

При этом $\rho$ обычно называют *модулем*, а $\varphi$ – *аргументом* комплексного числа и обозначают $\rho=|z|$, $\varphi=Arg\, z$. Представляющие формулы дают выражение действительной и мнимой частей комплексного числа через его модуль и аргумент.

Выразим модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части:

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{y}{x}$$



При изучении свойств комплексных чисел весьма удобной является их геометрическая интерпретация. Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то естественной геометрической интерпретацией является изображение комплексного числа $z=a+ib$ точкой плоскости $(x, y)$ с декартовыми координатами $x=a$ и $y=b$. Число $z=0$ ставится в соответствие началу координат данной плоскости. Такую плоскость называют *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной*, а ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости. При этом, очевидно, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел $z=x+iy$ и множеством свободных векторов, проекции $x$ и $y$ которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны $a$ и $b$.

Комплексное число $z=x+iy$ изображается в плоскости $XOY$ точкой $M$ с координатами $(x, y)$ либо вектором $OM$ (рис. 1.1). Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами $(\rho,\varphi)$, где $\rho$ – расстояние точки от начала координат, а $\varphi$ – угол, который составляет радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла $\varphi$ считается направление против часовой стрелки $(-\infty<\varphi<\infty)$. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим так называемую *тригонометрическую форму* записи комплексного числа: $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.




**Рис. 1.1**

При этом $\rho$ обычно называют *модулем*, а $\varphi$ – *аргументом* комплексного числа и обозначают $\rho=|z|$, $\varphi=Arg\, z$. Представляющие формулы дают выражение действительной и мнимой частей комплексного числа через его модуль и аргумент.

Выразим модуль и аргумент комплексного числа через его действительную и мнимую части:

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{y}{x}$$

(при выборе из решений последнего уравнения значения $\varphi$ следует учесть знаки $a$ и $b$). Отметим, что аргумент комплексного числа определен, не однозначно, а с точностью до аддитивного слагаемого, кратного $2\pi$. В ряде случаев удобно через arg$z$ обозначать значение аргумента, заключенное в пределах $\varphi_0\le\arg z<2\pi+\varphi_0$, где $\varphi_0$ — произвольное фиксированное число (например, $\varphi_0=0$ или $\varphi_0=\pi$). Тогда $Arg\, z=\arg z+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$, причем

$$\varphi=\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x>0 \\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x<0, y\ge 0, \\ -\pi+arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x<0, y<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x=0, y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x=0, y<0. \end{cases}$$

Аргумент комплексного числа $z=0$ вообще не определен, а его модуль равен нулю. Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число, кратное $2\pi$. Комплексно сопряженные числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов при соответствующем выборе областей их изменения различаются знаком.

Используя известную формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа: $z=\rho e^{i\varphi}$.

Для выполнения операции умножения удобно пользоваться тригонометрической формой представления комплексных чисел. Согласно правилам умножения, получаем:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Отсюда $\rho=\rho_1\rho_2$, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, т.е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей. В случае деления комплексных чисел, при $\rho_2\ne0$ имеет место аналогичное соотношение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$



б) $\int_{|z+1|=3}\frac{z^4}{z-i}dz$,

в) $\int_0^i(z^2e^{z^3})dz$.

10. а) $\int_\Gamma Imzdz$, Γ – отрезок прямой от A(0;0) до B(2;1),

б) $\int_{z=1}\frac{z^2}{(z-2)(z+2i)}dz$,

в) $\int_{2+i}^{3-i}e^{3z}dz$.

11. а) $\int_\Gamma(\bar{z}-Imz)dz$, Γ – дуга $y=x^2$ от A(0;0) до B(1;1),

б) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$,

в) $\int_{i-1}^{1-i}(z^3-z)dz$.

12. а) $\int_\Gamma\frac{dz}{\bar{z}}$, Γ – отрезок прямой от $z_1=3i$ до $z_2=i-1$,

б) $\int_{z-3=2}\frac{z^2}{(z-2)(z+i)}dz$,

в) $\int_{2-i}^{2-3i}\frac{z}{z^4+1}dz$.

13. а) $\int_\Gamma z\bar{z}dz$, Γ – дуга $y=\sqrt{x}$ от A(1;1) до B(4;2),

б) $\int_{z+i=2}\frac{z^3+1}{z+i}dz$,

в) $\int_{i-2}^{4+i}\sqrt{z+3}dz$.

14. а) $\int_\Gamma(z+3Rez)dz$, Γ: $z=(2-i)t$, $1\le t\le 2$,

б) $\int_{|z|=2}\frac{e^{\pi z}}{z}dz$,

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ такая, что для любого положительного числа $R$ найдется номер $N$, начиная с которого члены последовательности удовлетворяют условию $\{z_n\} > R$ при $n \geq N$. Такую последовательность назовем неограниченно возрастающей. Согласно введенным ранее определениям данная последовательность, так же как и всякая ее подпоследовательность, предела не имеет. Такое особое положение неограниченно возрастающей последовательности вызывает ряд неудобств. Чтобы избежать этого, введем комплексное число $z=\infty$ и будем считать *всякую неограниченно возрастающую последовательность сходящейся к этому числу,* которому мы поставим в соответствие бесконечно удаленную точку комплексной плоскости. Введем понятие полной комплексной плоскости, состоящей из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удаленного элемента − бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Если мы будем пользоваться геометрической иллюстрацией, ставя в соответствие элементам неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ точки комплексной плоскости, то обнаружим, что точки рассматриваемой последовательности с возрастанием их номера располагаются вне концентрических кругов с центром в начале координат, радиусы которых могут быть сколь угодно большими. Отметим, что точки данной последовательности стремятся к точке $\infty$ *независимо от направления* на полной комплексной плоскости. Определим алгебраические свойства числа $z=\infty$. Из элементов неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ составим последовательность $\frac{1}{\{z_n\}}$. Эта последовательность сходится к точке $z=0$. Действительно, из предыдущих рассмотрений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N$, что $\frac{1}{\{z_n\}} < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Очевидно и обратное утверждение, т.е. если последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится к нулю и состоит из отличных от нуля элементов, то последовательность $\frac{1}{\{\zeta_n\}}$ сходится к бесконечно удаленной точке.

В связи с этим полагают $\frac{1}{\infty}=0$ и $\frac{1}{0}=\infty$. Вообще для бесконечно удаленной точки устанавливаются следующие соотношения: $z\cdot\infty=\infty$ при $z\neq 0$ и $z+\infty=\infty$, $\frac{z}{\infty}=0$ при $z\neq\infty$, которые естественны с точки зрения предельного перехода в операциях сложения и умножения. С этой точки зрения операция $\frac{\infty}{\infty}$ естественно является неопределенной.



10. а) $\int_{|z|=2}\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+3)^2}$;

11. а) $\int_{|z|=4}\frac{ze^{\frac{1}{3z}}}{(z+3)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2)(x^2+1)}$;

12. а) $\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)(z+2)(z-4)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^3}$;

13. а) $\int_{z=4}\frac{z^2}{(z-3i)(z-i)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+5)}$;

14. а) $\int_{z=2}\frac{tgz}{(z-i)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$;

15. а) $\int_{z-1=2}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+1)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$;

16. а) $\int_{z=\frac{3}{2}}\frac{z+2}{z(1-\cos z)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+2)}$;

17. а) $\int_{z=4}\frac{z}{(z-2)(z+1)^2}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)}{(x^2+2)(x^2+4)}dx$;

18. а) $\int_{z=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^4-2)}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-1)}{(x^4+4x^2+5)}dx$;

19. а) $\int_{z=3}\frac{dz}{(z^2-2)^2(z-4)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+2)}{(x^2+4)}dx$;

20. а) $\int_{|z|=1}\frac{z^2}{(3z^4+6)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+3)^2}$.

Задание 10. Найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части.

1. $u = e^x \sin y$;
2. $v = e^{-2y}\cos 2x$;
3. $v = x^3 - 3xy^2$;
4. $u = 3x^2y - y^3$;
5. $u = \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}$;
6. $v = -e^{-2y} + x$;



Геометрически это означает, что функция комплексной переменной, непрерывная в некоторой точке $z_0$, ставит в соответствие каждой точке из $\delta$-окрестности точки $z_0$ некоторую точку, принадлежащую $\varepsilon$-окрестности точки $w_0 = f(z_0)$.

Из непрерывности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ следует непрерывность ее действительной и мнимой частей по совокупности переменных $x$, $y$. Имеет место и обратное утверждение, т.е. если $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывные функции по совокупности переменных $x$, $y$ в некоторой точке $(x_0,y_0)$, то $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является функцией комплексной переменной $z=x+iy$, непрерывной в точке $z_0=x_0+iy_0$.

Данные утверждения являются следствием того, что необходимым и достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является сходимость последовательностей их действительных и мнимых частей.

Это позволяет перенести на функции комплексной переменной основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных.

## 1.3. Дифференцирование функции комплексного переменного

Пусть в области $G$ комплексной плоскости $z$ задана функция $f(z)$. *Если для точки* $z_0 \in G$ *существует при* $\Delta z \to 0$ *предел разностного отношения* $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, *то этот предел называется производной функции* $f(z)$ *по комплексной переменной* $z$ *в точке* $z_0$ *и обозначается* $f'(z_0)$, *т.е.*

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (1.1)$$

Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой* в точке $z_0$.

Т.е. если существует предел (1.1), то он не зависит от способа стремления $\Delta z$ к нулю, т.е. от способа приближения точки $z_0 + \Delta z$ к точке $z_0$. Требование дифференцируемости функции комплексной переменной в точке $z_0$ налагает весьма важные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки $(x_0, y_0)$. Эти условия известны под названием условий Коши-Римана, которые могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

*Теорема. Если функция* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *то в точке* $(x_0, y_0)$ *существуют частные производные функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *по переменным* $x$ *и* $y$, *причем имеют место соотношения:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \qquad (1.2)$$



16. а) $\omega = (z+1)^2 - z - i$, б) $\omega = 2ie^{z-i+1}$.

17. а) $\omega = \bar{z}z + i$, б) $\omega = \sin\frac{(z-i)}{i}$.

18. а) $\omega = z^2(1+2i)$, б) $\omega = e^{2\bar{z}} + z$.

19. а) $\omega = z^3(i-2)$, б) $\omega = \bar{z}\,e^{\bar{z}+1}$.

20. а) $\omega = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$, б) $\omega = \frac{e^z+i}{z}$.

Задание 7. Разложить функцию в ряд Тейлора и в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$. Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z_1$ и $z=\infty$.

1. $f(z) = \frac{z}{z^2-z-2}$, $z_0 = 1$, $z_1 = -1$;
2. $f(z)=\frac{z}{z^2-3z-4}$, $z_0 = 2$, $z_1 = -1$;
3. $f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 2$, $z_1 = 0$;
4. $f(z)=\frac{z^3}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = -2$, $z_1 = 1$;
5. $f(z)=\frac{z}{(z+i+1)(z-i)}$, $z_0 = 1$, $z_1 = i$;
6. $f(z)=\frac{z^2}{z^2-z-6}$, $z_0 = 0$, $z_1 = -2$;
7. $f(z)=\frac{z+1}{z(1-z)}$, $z_0 = 2$, $z_1 = 1$;
8. $f(z)=\frac{z-1}{(z-i)(z+1)}$, $z_0 = 1$, $z_1 = i$;
9. $f(z)=\frac{z+2}{z(z-3i)}$, $z_0 = 1$, $z_1 = 3i$;
10. $f(z)=\frac{z-i}{(z+i)(z+2i)}$, $z_0 = 1$, $z_1 = -i$;

11. $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z-i)}$, $z_0=1$, $z_1=i$;

12. $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z+3i)}$, $z_0=1$, $z_1=0$;

13. $f(z)=\frac{z^3}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=-1$, $z_1=1$;

14. $f(z)=\frac{z}{z^2+4}$, $z_0=1$, $z_1=2i$;

15. $f(z)=\frac{z}{z^2+2}$, $z_0=2$, $z_1=\sqrt{2i}$;

16. $f(z)=\frac{z^2}{(z+i)(z+1)}$, $z_0=1$, $z_1=-i$;

17. $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-4)}$, $z_0=0$, $z_1=-1$;

18. $f(z)=\frac{z-i}{z^2+9}$, $z_0=1$, $z_1=3i$;

19. $f(z)=\frac{z}{3z^2-z+4}$, $z_0=1$, $z_1=-1$;

20. $f(z)=\frac{z}{z^2+2z-14}$, $z_0=0$, $z_1=3$.

Задание 8. Определить вид особых точек функции и относительно каждой особой точки вычислить вычет.

1. $f(z)=\frac{\sin \pi z}{(z-1)(z-2)^3}$;
2. $f(z)=\frac{\sin z}{(z-\pi)(z+1)^2}$;
3. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z(z-i)^2}$;
4. $f(z)=\frac{z^2-z}{z(z+i)^2}$;
5. $f(z)=\frac{(z+1)\sin z}{(z-2)(z-2i)^2}$;
6. $f(z)=\frac{\sin z-1}{(z+\pi)z^2(z-\frac{\pi}{2})}$;
7. $f(z)=\frac{z+1}{(z^2-1)z^2(z+i)}$;
8. $f(z)=\frac{\sin(z+1)}{(z+\pi)^2z(z+1)}$;
9. $f(z)=\frac{e^{z^3}}{(z+1)^2(z^2+2)}$;
10. $f(z)=\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})(z^2+3)z^2}$;



Говорят, что на множестве $E$ комплексной плоскости задана функция комплексной переменной, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества $E$ некоторое комплексное число. Множество $E$ будем называть множеством значений независимой переменной.

Точка $z$ называется *внутренней точкой множества* $E$, если существует $\varepsilon$-окрестность точки $z$, все точки которой принадлежат множеству $E$.

Множество $E$ называется *областью*, если выполняются следующие два условия:

1) $E$ состоит из одних внутренних точек,

2) любые две точки множества можно соединить ломаной с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству.

Точка $z$ называется *внешней точкой области* $G$, если существует та-кая $\varepsilon$-окрестность $z$, все точки которой не принадлежат области $G$.

Точка $z$ называется *граничной точкой области* $G$, если в любой ее $\varepsilon$-окрестности содержатся как точки, принадлежащие области $G$, так и точки, не принадлежащие области $G$. Совокупность всех граничных точек образует границу области.

Множество, полученное присоединением к области всех ее границ-ных точек, называется *замкнутой областью* и обозначается $\overline{G}$.

Если область $G$ целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса, то она называется *ограниченной*. В противном случае *неограниченной*.

Пусть множество $E$ комплексных чисел представляет собой область $G$ или замкнутую область $\overline{G}$. Тогда однозначная функция комплексной переменной $z$, заданная в области $G$, определяется законом, ставящим каждому комплексному значению $z$ из области $G$ в соответствие определенное комплексное число $w$: $w=f(z)$.

Множество комплексных чисел $w$, соответствующих всем $z\in G$, называется множеством значений функции $f(z)$. Поскольку каждое комплексное число характеризуется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w=u+vi$ комплексной переменной $z=x+iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что может быть записано в виде:

$$w(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определены в области $G$ плоскости действительных переменных $x$, $y$, соответствующей области $G$ комплексной плоскости $z$. Функция $u(x,y)$ называется действительной, а функция $v(x,y)$ – мнимой частью функции $w=f(z)$.



Если каждому значению комплексного переменного $z$ соответствует несколько различных значений переменного $w$, то $w$называется *многозначной функцией* комплексного переменного $z$, иначе она называется *однозначной* функцией.

*Геометрическая интерпретация* понятия функции $f(z)$ комплексной переменной заключается в том, что равенством $w=f(z)$ устанавливается закон соответствия между точками области $G$ комплексной плоскости $z$ и точками области $G'$ комплексной плоскости $w$. Устанавливается и обратное соответствие – каждой точке $w\in G'$ ставится в соответствие одна или несколько точек $z$ области $G$. Это означает, что в области $G'$ задана (однозначная или многозначная) функция комплексной переменной $w$: $z=\varphi(w)$. Эта функция называется *обратной функции f(z)*. Область $G'$ задания функции $\varphi(w)$ является областью значений функции *f(z)*. Если функция $\varphi(w)$, обратная однозначной функции *f(z)*, заданной в области $G$, является однозначной функцией в области $G'$, то между областями $G$ и $G'$ установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Функция *f(z)* называется однолистной функцией в области $G$, если в различных точках $z$ этой области она принимает различные значения.

Пусть функция *f(z)* определена на некотором множестве $E$. Рассмотрим различные последовательности точек этого множества $\{z_n\}$, сходящиеся к некоторой точке $z_0$ и состоящие из точек $z_n$, отличных от точки $z_0$ $(z_n\neq z_0)$, и соответствующие им последовательности значений функции $\{f(z_n)\}$. Если независимо от выбора последовательности $\{z_n\}$ существует единственный предел $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=w_0$, то этот предел называется *предельным значением*, или пределом функции *f(z)* в точке $z_0$, что записывается в виде: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$.

Часто употребляется другое определение: число $w_0$ называется *предельным значением* функции *f(z)* в точке $z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек $z\in E$ и удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$, имеет место неравенство $|f(z)-w_0|<\varepsilon$.

*Функция f(z)*, заданная на множестве $E$, называется *непрерывной* в точке $z_0\in E$, если предельное значение этой функции в точке $z_0$ существует, конечно и совпадает со значением $f(z_0)$ функции *f(z)* в точке $z_0$, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

*Функция f(z) непрерывна* в точке $z_0$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек $z\in E$ и удовлетворяющих условию $0<|z-z_0|<\delta$, имеет место неравенство $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.



11. $f(z)=\frac{z-i}{z^3(z^2+1)}$;
12. $f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)(z^2+2)z^2}$;
13. $f(z)=\frac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)z^3(z-i)}$;
14. $f(z)=\frac{e^{-z}-1}{z(z^2+4)(z-i)^2}$;
15. $f(z)=\frac{\cos z\, z+1}{(z-\pi)z^2(z^2+1)}$;
16. $f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)z^3(z+2)}$;
17. $f(z)=\frac{e^z-1}{z(z+2)^2(z^2+3)}$;
18. $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z(z+i)^2(z^2-1)}$;
19. $f(z)=\frac{z^2-2}{(z+\sqrt{2})z^3(z-i)}$;
20. $f(z)=\frac{e^{z-1}-1}{(z-1)(z+1)^3z}$.

Задание 9. Вычислить интеграл с помощью вычетов.

1. а) $\int_{|z|=2}\frac{(z+1)}{(z-1)\sin z}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}$;
2. а) $\int_{z=3}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)^2}$;
3. а) $\int_{z=2}\frac{dz}{(z^4-1)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x+2)}{(x^4+10x^2+9)}dx$;
4. а) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)}{(x^4+1)}dx$;
5. а) $\int_{z=i}\frac{z^3}{(2z^4+1)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$;
6. а) $\int_{z=2}\frac{dz}{z^3(z^{10}-3)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+9)}dx$;
7. а) $\int_{z-3i=4}\frac{dz}{(e^z-1)(z-3i)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$;
8. а) $\int_{|z|=3}\frac{tgz}{(z-1)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{(x^2+1)}dx$;
9. а) $\int_{|z|=2}\frac{z^3}{(z^4-1)}dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+1)}dx$;

18. $D: |z+2i| \le 2, f(z) = (1-i)z - 2i;$

19. $D: -1 \le Imz \le 1, f(z) = -iz + i;$

20. $D: -1 \le Rez \le 1, f(z) = iz - 2i.$

Задание 6. Определить, в каких точках комплексной плоскости имеют производную указанные функции. Чему равна производная в каждой из этих точек? В каких данных функции аналитические?

1. а) $\omega = z^2 + i|z|^2$, б) $\omega = \sin(iz+1)$.

2. а) $\omega = x^2 + iy^2$, б) $\omega = z^2 \cos z$.

3. а) $\omega = yx + i(x^2 - y^2)$, б) $\omega = \sin(iz)$.

4. а) $\omega = \frac{1}{z}$, б) $\omega = \frac{zcos\, z}{1+z^2}$.

5. а) $\omega = z^2 + i|z|^2$, б) $\omega = \sin(iz+1)$.

6. а) $\omega = |z| + Re\, z$ , б) $\omega = ie^{z+i}$.

7. а) $\omega = |z|z + 1$, б) $\omega = \frac{\cos(z+i)}{i}$.

8. а) $\omega = z^3(1+i)$, б) $\omega = e^{2z} + \bar{z}$.

9. а) $\omega = z^2(2-i)$, б) $\omega = e^z z^{-1}$.

10. а) $\omega = z^2 + \frac{1}{z}$, б) $\omega = \frac{e^z+1}{z}$.

11. а) $\omega = (z+1)^2 + iz$, б) $\omega = \cos(z+i)$.

12. а) $\omega = y^2 + ix^2$, б) $\omega = z\sin z$.

13. а) $\omega = x^2 + y^2 - ixy$, б) $\omega = \cos(iz+1)$ .

14. а) $= \frac{1}{z}$, б) $\omega = \frac{z\sin z}{1+i}$.

15. а) $\omega = z + Re\, \bar{z}$, б) $\omega = (z+1)e^{z-i}$.



*Соотношения (1.2) называются соотношениями Коши-Римана.*

***Теорема.*** *Если в точке ($x_0$, $y_0$) функции u(x, y) и v(x, y) дифференцируемы, а их частные производные связаны соотношениями (1.2), то функция f(z) = u(x, y) + iv(x, y) является дифференцируемой функцией комплексной переменной z в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.*

*Если функция f(z) дифференцируема во всех точках некоторой области G, а ее производная непрерывна в этой области, то функция f(z) называется* ***аналитической функцией*** *в области G.*

Как известно, непрерывность частных производных является достаточным условием существования первого дифференциала (дифференцируемости) функции многих переменных. Поэтому из теорем следует, что *необходимым и достаточным условием аналитичности функции f(z) = u(x, y) + iv(x, y) в области G является существование в этой области непрерывных частных производных функций u (x, y) и v (x, y), связанных соотношениями Коши-Римана (1.2).*

Понятие аналитической функции является основным понятием теории функций комплексной переменной в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций как при решении многочисленных чисто математических проблем, так и в различных приложениях функций комплексной переменной в смежных областях естествознания.

Определение производной (1.1) позволяет перенести на аналитические функции комплексной переменной ***ряд свойств*** дифференцируемых функций действительной переменной:

1°. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ суть аналитические функции в области $G$, то их сумма и произведение также являются аналитическими функциями в области $G$, а функция $\varphi(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ является аналитической функцией всюду, где $f_2(z) \neq 0$.

2°. Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в области $G$ плоскости комплексной переменной $z$, причем в области ее значений $G'$ на плоскости $w$ определена аналитическая функция $\varsigma = \varphi(w)$, то функция $F(z) = \varphi[f(z)]$ является аналитической функцией комплексной переменной $z$ в области $G$.

3°. Если в области $G$ определена аналитическая функция $f(z)$, причем $|f'(z)| \neq 0$, то в области $G'$ значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией $w$. При этом если $w_0 = f(z_0)$, то имеет место соотношение $f'(z_0) = \dfrac{1}{\varphi'(w_0)}$.



## 1.4. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области $D$, а $C$ – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в $D$.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, где $u$, $v$ – действительные функции переменных $x$ и $y$.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного $z$ сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\int f(z)dz = \int udx - ivdy + \int vdx + udy\,.$$

Интеграл $\int f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования.

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области $D$, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае $\int\limits_L f(z)dz = 0$, где $L$ – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области $D$.

Если кривая $C$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и начальная, и конечные точки дуги $C$ соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f[z(t)]\, z'(t)dt\,,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$, содержащей точки $z_0$ и $z_1$, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области $D$.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитические в односвязной области $D$, а $z_0$, $z_1$ – произвольные точки этой области, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = \big[f(z)\varphi(z)\big]_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz\,.$$

Замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится аналогично случаю функции действительного переменного. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур $C$ в $z$-плоскости на контур $C_1$ в $w$-плоскости. Тогда

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f\big[\varphi(w)\big]\varphi'(w)dw\,.$$



9. $w = \frac{1+2i}{(1-i)(2+i)}$, $w = (2i-2)^4$, $w = \sqrt[3]{3-5i}$;

10. $w = \frac{(i-2)i^2}{(i-1)^2}$, $w = (3-i)^3$, $w = \sqrt[4]{2+i}$;

11. $w = \frac{(i+i^2)^2}{1-2i}$, $w = (2+i)^4$, $w = \sqrt[3]{i-4}$;

12. $w = \frac{(i+3)(i-4)}{i^2-2i}$, $w = (3+3i)^3$, $w = \sqrt[4]{3+2i}$;

13. $w = \frac{(i+3)^2}{i-3}$, $w = (4-i)^3$, $w = \sqrt[4]{2-i}$;

14. $w = \frac{(1-i)(2+2i)}{i-3}$, $w = (1-i)^4$, $w = \sqrt[3]{\frac{1}{i-1}}$;

15. $w = \frac{(3+2i)i}{i-4}$, $w = (3+i)^3$, $w = \sqrt[3]{\frac{2}{i+2}}$;

16. $w = \frac{i(i+4)}{(i+1)^2}$, $w = (4+i)^3$, $w = \sqrt[3]{\frac{2}{i-2}}$;

17. $w = \frac{3(i-2)}{i+4}$, $w = (2+i)^4$, $w = \sqrt[3]{3+4i}$;

18. $w = \frac{4(i+3)}{i+2}$, $w = 2(i+3)^4$, $w = \sqrt[3]{\frac{3}{i+2}}$;

19. $w = \frac{(2+i)(2+3i)}{i(i-1)}$, $w = (3+2i)^3$, $w = \sqrt[3]{\frac{1}{2i+1}}$;

20. $w = \frac{(3+2i)i}{i-4}$, $w = (3-2i)^4$, $w = \sqrt[3]{\frac{i}{2+i}}$.

Задание 4. Определить и построить линии и области, удовлетворяющие уравнениям и неравенствам.

1. $|z-i| = 2|z+1|$, $Im\frac{z-1}{z+i} = 0$, $arg(z-1+2i) < \frac{\pi}{3}$;

2. $Re z^2 = 9$, $|z-2| = |z+i|$, $Im\frac{z-i}{z+i} \ge 0$;

3. $arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$, $Im\frac{z-1}{z+1}=0$, $|z|+|z-1|<1$;

4. $|z+i|=|z-2|$, $Re\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{6}\le arg(z+i)\le\frac{\pi}{3}$;

5. $Re\left(\frac{z-1}{z+2}\right)=0$, $|1+z|=4|z+i|$, $0\le Imz^2\le 3$;

6. $|z-i|+|z+i|=6$, $Re\frac{z}{i}=1$, $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\le 2$;

7. $|z-3-i|=4|z+1|$, $Im\frac{z+1}{z+i}=1$, $argz^2<0$;

8. $Re\left(\frac{2}{z}\right)=\frac{1}{2}$, $argz-4i=\frac{\pi}{4}$, $|z+1|-|z-2|<2$;

9. $|z-2+i|=|z+3|$, $Im\frac{z}{z-i}=2$, $0\le Rez^2\le 2$;

10. $arg\frac{z}{i}=0$, $Imz+Re(z-1)=3$, $|z|\le 2+|z-1|$;

11. $|z+i|-|z+2|=0$, $Re\frac{z}{z+i}=0$, $1\le Im(z-1)^2\le 2$;

12. $|z-3|=2|z+1|$, $arg\frac{z-4i}{i}=0$, $1\le Re(z-i)\le 3$;

13. $\frac{|z-3|}{|z|}=4$, $Im\frac{z}{i+1}=1$, $Rez\le Im\overline{z}$;

14. $Re\left(\frac{z+i}{z+2}\right)=0$, $arg\frac{z}{i}=1$, $|z+2|\le|z-i|$;

15. $|z-3|=2-|z|$, $Im\frac{z}{2i}=0$, $arg\left(\overline{z+i}\right)\le\frac{\pi}{3}$;

16. $|z-i|=1+|z|$, $argz^2=\frac{\pi}{4}$, $0\le Im(z-1)\le 3$;

17. $Im\left(\frac{z}{i+1}\right)=Re|z|$, $|z|=1-|z+1|$, $\frac{\pi}{6}\le arg\frac{\overline{z}}{i}\le\frac{\pi}{3}$;

18. $arg(z-2i)=\frac{\pi}{2}$, $\frac{|z|}{|z-3|}=2$; $Rez\le Im(z-1)$;

19. $|z+2|=1-|z+1|$, $Im\frac{z}{i+2}=2$, $0\le arg\frac{z+i}{i}\le\frac{\pi}{4}$;



20. $Imz+Re(z+i)=2$, $arg\frac{z}{2}=3$, $|z-i|\le|z+3|$.

Задание 5. Построить область $D$ и найти ее образ при отображении функцией комплексного переменного.

1. $D$: $|z+i-1|\le 1$, $f(z)=iz+1+i$;

2. $D$: $|z-1|\le 2$, $f(z)=3iz-2$;

3. $D$: $\left|z-\frac{1}{2}\right|\le 1$, $f(z)=(1+i)z-3i$;

4. $D$: $|z+2i|\le 1$, $f(z)=(1-i)z-2i$;

5. $D$: $|z+2i|\le 1$, $f(z)=2iz-1$;

6. $D$: $|z-2i|\le 2$, $f(z)=\frac{iz}{2}+2$;

7. $D$: $|z+2|\le 1$, $f(z)=2(z-1-i)$;

8. $D$: $0\le arg z\le\frac{\pi}{2}$, $f(z)=iz-i$;

9. $D$: $0<Imz<1$, $f(z)=2iz$;

10. $D$: $0<Rez<1$, $f(z)=-iz+1$;

11. $D$: $|z-1|\le 1$, $f(z)=3iz-2i$;

12. $D$: $|z-1|\le\frac{1}{2}$, $f(z)=iz+1$;

13. $D$: $|z-1|\le 1$, $f(z)=iz+i$;

14. $D$: $|z-1|<\frac{1}{2}$, $f(z)=iz+i+1$;

15. $D$: $Rez>1$, $f(z)=2iz+i-1$;

16. $D$: $|z-1|\le\frac{1}{2}$, $f(z)=(1+i)z+2i$;

17. $D$: $|z-2i|<1$, $f(z)=-iz+1$;



4°. Пусть в области $G$ плоскости $xOy$ задана функция $u(x, y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. Тогда мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной.

5°. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $G$. Рассмотрим в соответствующей области плоскости $xOy$ семейства кривых $u(x,y) = C$ и $v(x,y) = C$, представляющие собой линии уровней действительной и мнимой частей функции $f(z)$.

С помощью соотношений (1.2) легко показать, что во всех точках данной области $grad\,u \cdot grad\,v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0$. Т.к градиенты ортогональны линии уровня, то отсюда следует, что семейства кривых $u(x,y) = C$ и $v(x, y) = C$ взаимно ортогональны.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в некоторой области $G$. Выберем какую-либо точку $z_0 \in G$ и проведем через нее произвольную кривую $\gamma_1$, целиком лежащую в $G$. Функция $f(z)$ производит отображение области $G$ комплексной плоскости $z$ на некоторую область $G'$ комплексной плоскости $w$. Пусть точка $z_0$ переходит в точку $w_0$, а кривая $\gamma_1$ – в проходящую через $w_0$ кривую $\Gamma_1$ (рис. 1.2). По условию существует производная $f(z)$ функции $w = f(z)$ в точке $z_0$. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$, и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha}. \qquad (1.3)$$

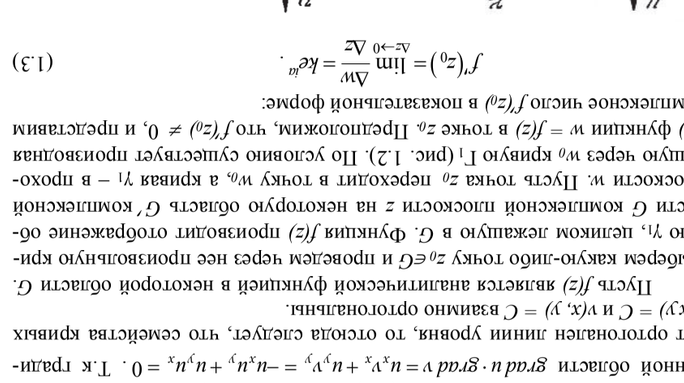



**Рис. 1.2**

Выберем такой способ стремления $\Delta z$ к нулю, при котором точки $z = z_0 + \Delta z$ лежат на кривой $\gamma_1$. Очевидно, соответствующие им точки $w = w_0 + \Delta w$ лежат на кривой $\Gamma_1$. Комплексные числа $\Delta z$ и $\Delta w$ отображаются векторами секущих к кривым $\gamma_1$ и $\Gamma_1$ соответственно. Заметим, что $arg\Delta z$ и $arg\Delta w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с



положительными направлениями осей $x$ и $u$, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ представляют собой длины этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из (1.3) следует, что

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1,$$

т.е. аргумент $\alpha$ производной имеет геометрический смысл разности угла $\Phi_1$ вектора касательной к кривой $\Gamma_1$ в точке $w_0$ с осью $u$ и угла $\varphi_1$ вектора касательной к кривой $\gamma_1$ в точке $z_0$ с осью $x$ (см. рис. 1.2). Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей через точку $z_0$ (хотя значения самих углов $\Phi_1$ и $\varphi_1$ могут измениться). Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между любыми кривыми $\gamma_2$, $\gamma_1$, пересекающимися в точке $z_0$, равен углу $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ между их образами (кривыми $\Gamma_2$ и $\Gamma_1$), пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Заметим, что при этом сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми $\gamma_2$, $\gamma_1$ и их образами, но и направление углов. Это свойство данного отображения носит название *свойства сохранения углов.*

Аналогично из соотношения (1.3) получим

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k.$$

То есть с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место равенство $|\Delta w| = k|\Delta z|$. Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой $\gamma_1$.

***Геометрический смысл*** этого соотношения состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия. Это свойство данного отображения носит название *свойства постоянства растяжения*.

***Конформным отображением*** называется отображение окрестности точки $z_0$ на окрестность точки $w_0$, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ и обладающее в точке $z_0$ свойством сохранения углов и постоянством растяжений. При конформном отображении окрестности точки $z_0$ на окрестность точки $w_0$ бесконечно малые треугольники с вершиной в точке $z_0$ преобразуются в подобные им бесконечно малые треугольники с вершиной в точке $w_0$.

Задание 2. Представить в алгебраической форме.

1. $\sin(\frac{\pi}{4}+2i)$
2. $\cos(\frac{\pi}{6}+2i)$
3. Ln 6
4. $\mathrm{sh}(2+\frac{\pi i}{4})$
5. $\mathrm{ch}(2+\frac{\pi i}{2})$
6. Ln(1+$i$)
7. $\sin(\frac{\pi}{3}+i)$
8. $\cos(\frac{\pi}{4}+i)$
9. $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$
10. $\mathrm{sh}(1+\frac{\pi i}{2})$
11. $\mathrm{ch}(1-\pi i)$
12. $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$
13. $\mathrm{Ln}(-1+i)$
14. $\cos(\frac{\pi}{4}-2i)$
15. $\sin(\frac{\pi}{2}-5i)$
16. $\mathrm{sh}(3+\frac{\pi i}{6})$
17. $\mathrm{ch}(1+\frac{\pi i}{3})$
18. $\mathrm{Ln}(-1-i)$
19. $\sin(\frac{\pi}{6}-3i)$
20. $\cos(\frac{\pi}{3}+3i)$

Задание 3. Вычислить $w$, найти $\overline{w}$, Rew, Imw, $|w|, Argw$. Изобразить $w$ на комплексной плоскости.

1. $w=\frac{(i^3-3)^2}{2i-1}$, $w=(2i-2)^4$, $w=\sqrt[3]{3-5i}$;
2. $w=\frac{(3+2i)^2}{2i-1}$, $w=(3-i)^3$, $w=\sqrt[4]{1-2i}$;
3. $w=\frac{(-1-i^3)}{i-2}$, $w=(2+3i)^4$, $w=\sqrt[4]{3-i}$;
4. $w=\frac{2+i}{(i^2-1)^2}$, $w=(1+i)^4$, $w=\sqrt[3]{i-4}$;
5. $w=\frac{(i^3-3)^2}{2i-1}$, $w=(2i-2)^4$, $w=\sqrt[3]{3-5i}$;
6. $w=\frac{i^3+2}{(2-i)^2}$, $w=(3+i)^4$, $w=\sqrt[3]{2+2i}$;
7. $w=\frac{i-2i^2}{(4+i)^2}$, $w=(i-1)^4$, $w=\sqrt[4]{1-i}$;
8. $w=\frac{(2+i)^2}{i-1}$, $w=i+1$, $w=\sqrt[3]{i-1}$;



Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки $z_0$, или окружностью с центром в точке $z_0$, то полезно делать замену переменной вида: $z-z_0=\rho e^{i\varphi}$.

В первом случае $\varphi$ = *const*, а $\rho$ – действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho$ = *const*, а $\varphi$ – действительная переменная интегрирования.

Если функция *f(z)* является аналитической в области *D*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром *C*, и на самом контуре, то справедлива ***интегральная формула Коши***

$$f(z_0)=\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_0},$$

где контур *C* обходится так, что область *D* остается все время слева.

Интегральная формула Коши позволяет вычислять некоторые интегралы.

Если функция *f(z)* аналитична в области *D* и на ее границе *C*, то для любого натурального *n* имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

где $z_0 \in D$, $z \in C$.

## 2. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### 2.1. Общие положения

*Отображение* $w=f(z)$*, сохраняющее углы между линиями, называется конформным*. Если при этом сохраняется и направление отсчета углов, то такое отображение называется конформным отображением первого рода.

Конформное отображение, при котором углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяется направление отсчета на противоположное, называется конформным отображением второго рода.

Отображение $w=f(z)$ называется конформным в области *D*, если оно конформно в каждой точке этой области. Для того чтобы отображение $w=f(z)$ было конформным в области *D*, необходимо и достаточно, чтобы в *D* функция $w=f(z)$ была аналитична и ее производная *f(z)* была отлична от нуля.

***I. Теорема Римана.*** Существует аналитическая функция $w=f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную плоскую область *D* на другую *G*, если только ни одна из этих областей не сов-





$V_2$ есть также скорость, которую приобретает тело при неупругом ударе о тело массы $\pi\rho a^2/2$. В соответствии с этим $\pi\rho a^2/2$ называется присоединенной массой пластинки, ударяющейся о жидкость.

## 8. ЗАДАЧИ

### 8.1. Задачи для дополнительного изучения курса ТФКП

1. Найти общий вид целых линейных функций, с помощью которых осуществляются преобразования:
   а) верхней полуплоскости на себя;
   б) верхней полуплоскости на нижнюю полуплоскость;
   в) верхней полуплоскости на правую полуплоскость.
2. Найти общий вид дробно-линейных преобразований, преобразующих верхнюю полуплоскость самое в себя.
3. Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг с разрезом, идущим от центра по действительной оси.
4. Отобразить плоскость с прямолинейным разрезом по вещественной оси $0<a<x<b$ на верхнюю полуплоскость $w$.
5. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, $i$ на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, 1+$i$.
6. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
   а) верхнюю полуплоскость на себя;
   б) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
   в) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость;
   г) правую полуплоскость на себя.
   Показать, что во всех случаях преобразование однозначно определяется заданием одной пары соответственных внутренних точек или двух пар граничных.
7. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
   а) полосу $0<x<1$ на себя;
   б) полосу $-2<y<1$ на себя;
   в) полосу, ограниченную прямыми $y=x$ и $y=x-1$, на себя.
   Выяснить, какие пары точек могут при этих отображениях соответствовать друг другу и в каком случае это соответствие будет однозначно определять отображение.
8. В задачах *а) – д)* выяснить, во что преобразуются указанные области при заданных отображающих функциях.

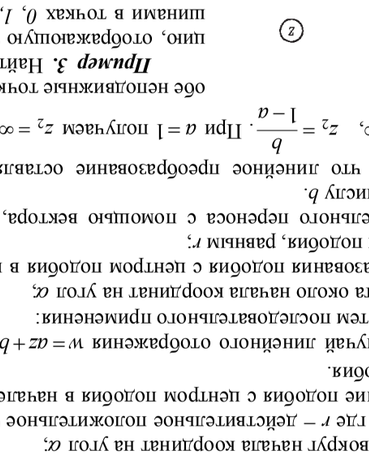



**Рис. 2.2**

***Пример 3.*** Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, *1*, *i* в плоскости *z* на подобный треугольник с вершинами *0*, *2*, 1+*i* плоскости w.

*Решение.* Первый способ. Из рис. 2.2 видим, что $\Delta ABC$ переходит в подобный ему $\Delta A_1B_1C_1$ путем следующих операций:

1) поворот около начала координат на угол $\frac{5}{4}\pi$, что соответствует преобразованию $w_1=e^{i\frac{5}{4}\pi}z$;

2) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия, равным $r$;

3) параллельного переноса с помощью вектора, соответствующего комплексному числу $b$.

Отметим, что линейное преобразование оставляет неподвижными две точки $z_1=\infty$, $z_2=\frac{b}{1-a}$. При $a=1$ получаем $z_2=\infty$, т.е. в этом случае обе неподвижные точки совпадают.

а) Квадрант $x > 0, y > 0$; $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

б) Полукруг $|z| < 1$, $Im\, z > 0$; $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

в) Угол $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$; $w = \dfrac{z}{z-1}$

г) Полоса $0 < x < 1$; 1) $w = \dfrac{z-1}{z}$; 2) $w = \dfrac{z-1}{z-2}$.

д) Кольцо $1 < |z| < 2$; $w = \dfrac{z}{z-1}$.

9. Найти дробно-линейные функции, переводящие точки –1, *i*, 1+*i* соответственно в точки: а) 0, 2i, 1 – *i*; б) *i*, ∞, 1.

10. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки –1, 0, 1 соответственно в точки 1, *i*, –1, и выяснить, во что при этом отображении переходит верхняя полуплоскость.

11. Найти точки, симметричные с точкой 2 + *i* относительно окружностей: а) $|z| = 1$; б) $|z - i| = 3$.

12. Отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы:

а) $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$; б) $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\dfrac{\pi}{2}$; г) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$;

13. Отобразить круг $|z| < R_1$ на круг $|w| < R_2$ так, чтобы $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ $(|a| < R_1, |b| < R_2)$.

14. Отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w - 1| < 1$ так, чтобы $w(0) = 1/2$ и $w(1) = 0$.

15. Отобразить кольцо $2 < |z| < 5$ на кольцо $4 < |w| < 10$ так, чтобы $w(5) = -4$.

16. Отобразить кольцо $1 < |z - 2i| < 2$ на кольцо $2 < |w - 3 + 2i| < 4$ так, чтобы $w(0) = -1 - 2i$.

17. Найти функцию *w(z)*, отображающую полукруг $|z| > 1$, Im *z* > 0, на верхнюю полуплоскость при условиях:

а) $w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty$;

б) $w(\pm 1) = \mp 1$, $w(0) = \infty$;

в) $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = i$, $\arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.



относительно прямой *l*, и обладает тем свойством, что любые две точки $z_1$ и $z_2$ (из которых одна лежит в *D*), симметричные относительно *l*, отображаются в точки $w_1$ и $w_2$, симметричные относительно прямой *L*.

***Пример 1.*** В области *D*, ограниченной контуром γ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ задана функция $w = 3z + i$.

В какую область перейдет *D* при отображении, осуществляемом этой функцией?

*Решение.* Пусть $z = x + iy, w = u + iv$. Тогда соотношение $w = 3z + i$ перепишется в виде $u + iv = 3(x + iy) + i$, так что $u = 3x, v = 3y + 1$. Отсюда $x = \dfrac{u}{3}, y = \dfrac{v-1}{3}$.

Контур γ отображается в контур Г: $\left(\dfrac{u}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{v-1}{3}\right)^2 - 2\left(\dfrac{u}{3}\right) = 0$ или $(u-3)^2 + (v-1)^2 = 0$, т.е. окружность радиуса 3 с центром в точке M(3, 1).

Положительное направление обхода контура γ соответствует положительному направлению обхода контура Г. В этом можно убедиться, задав контуры параметрическими уравнениями:

$\gamma: \; x = 1 + \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \; 0 \le \varphi < 2\pi$;

$\Gamma: \; u = 3 + 3\cos\varphi, v = 1 + 3\sin\varphi, \; 0 \le \varphi < 2\pi$.

Согласно принципу взаимно однозначного соответствия границ, область *D* отобразится в область *G*-внутренность окружности, ограниченной контуром Г.

Это можно проверить еще и так: взять любую точку $z \in D$ и найти ее образ при отображении $w = 3z + i$. Например, точка $z = 1$ переходит в точку $w = 3 + i$, которая находится внутри контура Г.

***Пример 2.*** Даны точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$, симметричные относительно прямой $y = x$. Показать, что функция $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ переводит $z_1$ и $z_2$ в точки $w_1 = 3 - 2i$ и $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $y = -x$.

*Решение.* Функция $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ отображает прямую $y = x$ в прямую $y = -x$. Функция $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$ аналитична всюду. В силу принципа симметрии точки $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 2i$, симметричные относительно прямой $y = x$, перейдут в точки $w_1 = 3 - 2i$ и $w_2 = 2 - 3i$, симметричные относительно прямой $y = -x$.



плает со всей плоскостью с одной выкинутой точкой или всей расширенной плоскостью.

Имеется бесконечное множество аналитических функций, осуществляющих отображение области *D* на область *G*. Единственность отображений функцией $w = f(z)$ будет обеспечена, если потребовать, чтобы выполнялось одно из условий:

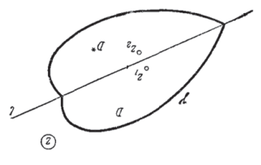
а) заданная точка $z_0$ области *D* перешла в заданную точку $w_0$ области *G*, а длина, выходящая из $z_0$, повернулась на данный угол $\alpha$ ($w_0 = f(z_0)$, $\arg f'(z) = \alpha$);

б) точка $z_0$ области *D* и точка $z_1$ границы γ перешли соответственно в точку $w_0$ области *G* и в точку $w_1$ границы Г [$w_0 = f(z_0)$, $w_1 = f(z_1)$];

в) три граничные точки $z_1, z_2, z_3$ области *D* перешли в три граничные точки $w_1, w_2, w_3$ области *G*.

В случаях б) и в) функция $f(z)$ предполагается непрерывной в замкнутой области *D*.

***II. Принцип взаимно однозначного соответствия границ.*** Пусть область *D* ограничена гладким или кусочно-гладким контуром γ. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в *D* и на γ, отображает контур γ на некоторый контур Г, ограничивающий область *G*, причем, когда точка *z* обходит контур γ так, что область *D* остается слева, соответствующая точка *w* обходит контур Г так, что область *G* также остается слева. Тогда область *D* с помощью функции $w = f(z)$ отображается взаимно однозначно и конформно на область *G*.



***III. Принцип симметрии.*** Пусть область *D*, содержащая в составе своей границы некоторый прямолинейный отрезок γ (конечной или бесконечной длины), отображается функцией $w = f(z)$ на область *G* так, что γ переходит в прямолинейный отрезок Γ, входящий в границу области (рис. 2.1). Обозначим соответственно через *l* и *L* прямые, на которых лежат отрезки γ и Γ. Принцип симметрии утверждает: если функция $w = f(z)$ аналитична в области *D*, а также во всех внутренних точках границного отрезка γ, то эта функция аналитична также в области $D^*$, симметричной с *D*

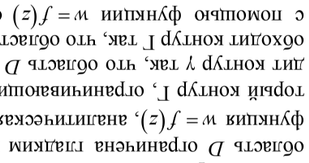


**Рис. 2.1**

18. Найти функцию $w(z)$, отображающую область $|z| > 1$, Im $z > 0$, на верхнюю полуплоскость.

19. Отобразить на верхнюю полуплоскость следующие круговые луночки (двуугольники):

а) $|z| < 1, |z - i| < 1$; б) $|z| < 1, |z - i| > 1$;

20. В задачах а) – в) отобразить указанные области на верхнюю полуплоскость.

а) Плоскость с разрезом по отрезку [–1,1].

б) Плоскость с разрезом по отрезку [–*i*,*i*].

в) Плоскость с разрезом по отрезку [$z_1$,$z_2$].

21. В задачах а) – в) найти область, получаемые при отображении заданных областей указанными функциями.

а) Круг $|z| < 1$; $w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$.

б) Полукруг $|z| < 1$, Im $z > 0$; $w = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

в) Угол $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}$; $w = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$.

## 8.2. Задачи для расчетно-графических заданий

Задание 1. Найти все значения корня.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\sqrt[4]{-1}$; | 8. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$ | 14. $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$ |
| 2. $\sqrt[3]{i}$ | 9. $\sqrt[4]{1}$ | 15. $\sqrt[3]{1}$ |
| 3. $\sqrt[3]{-1}$ | 10. $\sqrt[3]{-1}$ | 16. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ |
| 4. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}$ | 11. $\sqrt[3]{8}$ | 17. $\sqrt[4]{-16}$ |
| 5. $\sqrt[4]{16}$ | 12. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$ | 18. $\sqrt[3]{8i}$ |
| 6. $\sqrt[3]{-8i}$ | 13. $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ | 19. $\sqrt[3]{-8}$ |
| 7. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ | | 20. $\sqrt[4]{-8 + i\,8\sqrt{3}}$ |

$0<\varphi<\dfrac{2\pi}{n}$ функцией (2.2) отображается взаимно однозначно на всю плоскость $w$ с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\varphi = 0$ соответствует верхний, а лучу $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$ – нижний край разреза. Такое же отображение получим для каждого из углов, на которые плоскость $z$ разбивают лучи $\varphi=\dfrac{2k\pi}{n}$ ($k$ – целое число), причем при отображении угла $\dfrac{2(k-1)}{n}<\varphi<\dfrac{2k\pi}{n}$, ($k$ = 1, 2, ..., $n$) на плоскость с разрезом $\varphi=\dfrac{2(k-1)\pi}{n}$ соответствует верхний, а лучу $\varphi=\dfrac{2k\pi}{n}$ – нижний край разреза.

***Пример 6.*** Отобразить сектор $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы точка $z_1=e^{i\frac{\pi}{8}}$ перешла в центр $w_1 = 0$, а точка $z_2 = 0$ – в точку $w_2 = 1$.

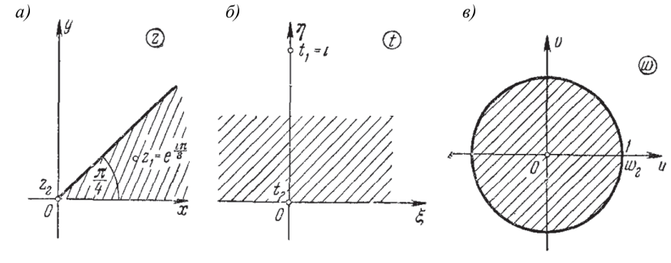



**Рис. 2.5**

*Решение.* Сектор $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ (рис. 2.5, *а*) с помощью функции $t = z^4$ отобразим на верхнюю полуплоскость Im $t > 0$ (рис. 2.5, *б*). Точка $z_1=e^{i\frac{\pi}{8}}$ перейдет в точку $t_1 = z_1^4 = i$, а $z_2 = 0$ перейдет в точку $t_2 = 0$. Затем отобразим полуплоскость Im $t > 0$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точка $t_1 = i$ перешла в центр круга (рис. 2.5, *в*). Воспользовавшись формулой $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ получим



$f(A_1)=-\infty$, $f(A_3)=\infty$. Отображение верхней полуплоскости на область поля:

$$z=z(\omega)=\frac{2i}{\pi}\left(h\ arctg\frac{h\omega}{H\sqrt{\omega^2-a^2}}+H\ arth\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-a^2}}\right), \qquad (7.8)$$

где $a^2=\dfrac{H^2+h^2}{H^2}$, причем отрезок (-1, 1) действительной оси плоскости ω переходит в прямую $A_1A_2A_3$, а остальная часть оси – в $A_3A_4A_5A_6A_1$. Применив дополнительное отображение полуплоскости $\omega$ на полосу $0<\operatorname{Im} w<V$ с нужным соответствием границ:

$$w=\frac{V}{\pi}\ln\frac{1+\omega}{1-\omega}=\frac{2V}{\pi}arth\omega \qquad (7.9)$$

и исключив ω из уравнений (7.8) и (7.9), получим функцию, обратную искомому комплексному потенциалу.

Найдем величину вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$, который в нашем случае совпадает с $\boldsymbol{H}$

$$|\boldsymbol{B}|=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{\frac{dw}{d\omega}}{\frac{dz}{d\omega}}\right|=\frac{2V}{\pi}\frac{1}{|1-\omega^2|}\cdot\frac{1}{\frac{2H}{\pi}\left|\frac{\sqrt{\omega^2-a^2}}{\omega^2-1}\right|}=\frac{V}{H}\frac{1}{\left|\sqrt{\omega^2-a^2}\right|}$$

(при вычислении производных мы воспользовались выражениями (7.8) и (7.9)).

Для характеристики машины важно знать степень пульсации магнитного потока, т.е. отношение минимальной индукции на статоре к максимальной. Из физических соображений ясно, что минимальная индукция $B_{min}$ достигается против паза ротора, т.е. в точке $A_2$, а максимальная индукция $B_{max}$ – против середины выступа, т.е. в точке $A_1$. Так как точка $A_2$ соответствует $\omega = 0$, а точке $A_1$ – точка $\omega = -1$, то искомое отношение равно:

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{h}{\sqrt{H^2+h^2}}.$$

3) *Обтекание наклонного прямолинейного отрезка* (0, $he^{i\alpha\pi}$) бесконечно глубоким плоским потоком с заданной величиной скорости в бесконечности $v_\infty$ (рис. 7.5). Задача принадлежит к типу краевой задачи 3 и сводится к конформному отображению области потока на верхнюю полуплоскость. Обратное отображение:

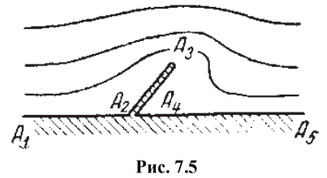



**Рис. 7.5**

$$z=z(w)=h(w-1)^{\alpha}(\beta w+1)^{1-\alpha}, \qquad (7.10)$$



Для решения этой задачи воспользуемся конформным отображением внешности отрезка *(-a, a)* на внешность единичного круга плоскости $\zeta=\xi+i\eta$:

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

Граничное условие при этом преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial n}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=V_0\cdot\frac{a}{2}\left|1-e^{-2i\varphi}\right|=\frac{V_0a}{2}\sqrt{(1-\cos2\varphi)^2+\sin^2 2\varphi}=-V_0a\sin\varphi,$$

где $\rho=|\zeta|$ и $\varphi=\arg\zeta$ (знак минус объясняется тем, что у нас на нижней полуокружности, где $\pi<\varphi<2\pi$, должно быть $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}>0$). На основании условий Коши-Римана в полярных координатах на окружности $\rho = 1$ получаем $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=-V_0a\sin\varphi$, следовательно, $v=V_0a\cos\varphi=V_0a\operatorname{Re}\zeta$. Таким образом, находим комплексный потенциал в плоскости $\zeta$: $w=iV_0a\zeta$. Подставляя выражение $\zeta$ через $z$, находим искомый комплексный потенциал в плоскости $z$:

$$f(z)=iV_0\left(z-\sqrt{z^2-a^2}\right).$$

По формуле (7.4) находим импульсивное давление в произвольной точке $x$ отрезка *(-a, a)*

$$p^{(i)}=\rho\operatorname{Re}f(z)=\rho V_0\sqrt{a^2-x^2}; \qquad (7.13)$$

в момент после удара скорости частиц на свободной поверхности ($|x|>a$) нормальны к этой поверхности и равны по величине

$$V=\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|=V_0\left|1-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right|.$$

Формула (7.13) позволяет решить следующую задачу: тело массы $m$ при свободном падении ударяется о воду вдоль плоской полосы шириной $2a$; найти скорость $V_2$ тела после удара, если скорость до удара равна $V_1$. По формуле (7.13) на тело в момент удара действует импульсивная сила

$$P=\rho V_2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\pi\rho V_2a^2.$$

С другой стороны, по теореме о количестве движения $P=m(V_1-V_2)$ и сравнивая это выражение с предыдущим, находим:

$$V_2=\frac{mV_1}{m+\frac{\pi\rho a^2}{2}}.$$



том $r=\sqrt{2}$, так как $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\sqrt{2}$ : $w_2=\sqrt{2}w_1$;

3) параллельный перенос, смещающий точку $C(0,0)$ в точку $C_1(1,1)$ (получаем $b = 1 + i$): $w = w_2 + 1 + i$.

Учитывая, что $e^{\frac{i\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, получим окончательно

$$w=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z+1+i=(1-z)(1+i).$$

Второй способ. Пусть искомая функция есть $w=az+b$, где $a$ и $b$ – пока неопределенные константы. По условию задачи точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ должны перейти соответственно в точки $w_1 = 1 + i$ и $w_2 = 0$. Получаем систему уравнений для определения $a$ и $b$: $\begin{cases}1+i=b\\0=a+b\end{cases}$. Отсюда $a=-1-i$, $b = 1 + i$, а значит, $w=(-1-i)z+1+i=(1+i)(1-z)$.

***Функция*** $\boldsymbol{w=\dfrac{I}{z}}$. Точки $M$ и $M'$ называются симметричными относительно окружности Γ, если:

1) они находятся на одном луче, выходящем из центра окружности;

2) произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса окружности: $OM\times OM' = R^2$ (рис. 2.3).

*Замечание.* Точки окружности Γ симметричны самим себе относительно этой окружности.

Для центра $O$ окружности Γ симметричной точкой относительно Γ является бесконечно удаленная точка.

Если центр окружности Γ находится в начале координат и одна из симметричных относительно Γ точек изображает комплексное число $z$, то другая соответствует комплексному числу $\dfrac{R^2}{z}$.

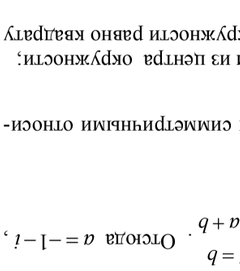



**Рис. 2.3**

Преобразование $w=\dfrac{1}{z}$ состоит из двух симметричных отражений: относительно единичной окружности и относительно действительной оси (рис. 2.4).

Преобразование $w=\frac{1}{z}$ является конформным во всей расширенной плоскости, причем точке $z = 0$ соответствует точка $w=\infty$, а точке $z=\infty$ – точка $w=0$. (Считают, что угол между линиями в бесконечно удаленной точке одной из плоскостей (*z* или *w*) равен углу между образами этих линий в начале координат другой плоскости.) Окружности (а также прямые) при отображении $w=\frac{1}{z}$ переходят в окружности или прямые. Неподвижные точки $z_1=+1$ и $z_2=-1$.

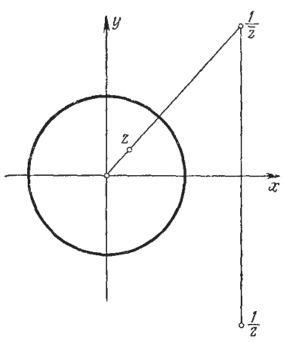


**Рис. 2.4**

***Пример 4.*** Найти образ окружности $|z|=3$ при отображении $w=\frac{25}{z}$.

*Решение.* Пусть $z=x+iy,\ w=u+iv$.

Тогда соотношение $w=\frac{25}{z}$ перепишется в виде

$$u+iv=\frac{25}{x+iy}=\frac{25x}{x^2+y^2}-i\frac{25y}{x^2+y^2},$$

откуда $u=\frac{25x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{25y}{x^2+y^2}$ (а) в декартовых координатах запишется $|z|=3$ уравнение окружности в виде $x^2+y^2=9$ (б).

Исключая из (а) и (б) *x* и *y*, получим $u^2+v^2=\left(\frac{25}{3}\right)^2$, т.е. окружность радиуса $R=\frac{25}{3}$ с центром в начале координат в плоскости *w*.

***Дробно-линейная функция*** $\boldsymbol{w=\frac{az+b}{cz+d}}$, где *a, b, c, d* – комплексные постоянные и $ad-bc\neq 0$ взаимно однозначно и конформно отображает расширенную плоскость *z* на расширенную плоскость *w*. Преобразование, осуществляемое дробно-линейной функцией, называется дробно-линейным. Каждое дробно-линейное преобразование может быть получено с помощью последовательного применения линейных преобразований и преобразования вида $w=\frac{1}{z}$.



*1°. Круговое свойство.* Дробно-линейное преобразование окружность отображает в окружность. (Прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса.)

*2°. Свойство симметрии.* Две точки $z_1$ и $z_2$, симметричные относительно окружности *C*, отображаются в точки $w_1$ и $w_2$, симметричные относительно окружности Г, на которую отображается окружность *C*.

Существует единственная дробно-линейная функция, которая три заданные точки $z_1, z_2, z_3$ плоскости *z* переводит в три заданные точки $w_1, w_2, w_3$ плоскости *w*. Она имеет вид:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \qquad (2.1)$$

***Пример 5.*** Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $z_1=1, z_2=i, z_3=-1$ в точки $w_1=-1, w_2=0, w_3=1$.

*Решение.* Воспользовавшись формулой (2.1), будем иметь

$$\frac{w+1}{w-0}\cdot\frac{1-0}{1+1}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1},\ \text{откуда}\ w=i\frac{i-z}{i+z}.$$

*Замечание.* Если одна из точек $z_k$ или $w_k$ ($k$ = 1, 2, 3) является бесконечно удаленной, то в формуле (2.1) надо заменить единицами все разности, содержащие эту точку.

Например, если $z_1=\infty$ и $w_2=\infty$, то получим

$$\frac{w-w_1}{1}\cdot\frac{1}{w_3-w_1}=\frac{1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{1}\ \text{или}\ w=w_1+\frac{(w_3-w_1)(z_3-z_2)}{z-z_2}.$$

*Приведем две часто употребляющиеся формулы:*

1) Функция $w=e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на единичный круг $|w|<1$ так, что точка $z=z_0$ данной полуплоскости переводится в центр $w = 0$ круга. Здесь $\varphi$ – любое действительное число.

2) Функция $w=e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-z\bar z_0}$ отображает единичный круг $|z|<1$ на единичный круг $|w|<1$ так, что точка $z = z_0$ первого круга переходит в центр $w = 0$ второго.

***Степенная функция***

$$\boldsymbol{w=z^n}, \qquad (2.2)$$

где $n\geq 2$ – целое положительное число.

Отображение, осуществляемое степенной функцией, является конформным во всей плоскости, кроме точки $z = 0$: при $z\neq 0$ имеем $w'=nz^{n-1}$; при $z = 0$, $w' = 0$. При $z = 0$ конформность нарушается, так как при отображении с помощью функции (2.2) углы увеличиваются в *n* раз. Угол



где $\beta=\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Очевидно, $z(\infty)=\infty$, но производная в бесконечности равна

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{w=\infty}=\alpha h\left[\left(\frac{\beta w+1}{w-1}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{w-1}{\beta w+1}\right)^{\alpha}\right]_{w=\infty}=\frac{\alpha h}{\beta^{\alpha}}(1+\beta)=\frac{h}{\beta^{\alpha-1}}=\frac{1}{\gamma}.$$

Заменив в формуле (7.10) *w* на $\gamma w/v_\infty$, получим функцию, обратную комплексному потенциалу, ибо ее производная в бесконечности будет равна $1/v_\infty$, как и требуется. На рис. 7.5 изображены линии тока. Отметим, что, как видно из выражения для производной $\frac{dz}{dw}$, скорость потока $|V|=\left|\frac{dw}{dz}\right|$ обращается в бесконечность в точке $A_3$, которой соответствует $w = 0$, и в нуль в точках $A_2$ и $A_4$, которым соответствуют $w=-1/\beta$ и $w = 1$.

4) *Распределение температур в канале*, дно которого поддерживается при температуре $t°$, а стенки – при температуре 0°; между стенками и дном имеется теплоизоляция. Сечение канала плоскостью, перпендикулярной к дну, изображено на рис. 7.6. Задача сводится к обобщенной задаче Дирихле для полуполосы. Отобразим сначала эту полуполосу на верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta=\sin\frac{\pi z}{a}$; дно *BC* переходит при этом в отрезок $(-1,1)$, а стенки – в лучи $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Остается воспользоваться формулой (4.29):

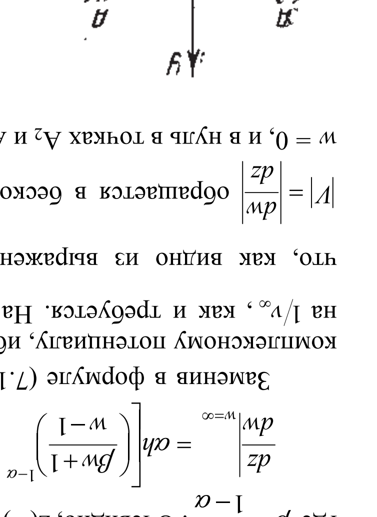


**Рис. 7.6**

$$u(\zeta)=-\frac{\varphi_1}{\pi}t+\frac{\varphi_2}{\pi}t=\frac{t}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{t}{\pi}\arg\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

($n = 2$, $u_0=u_2=0$, $u_1=t$, $\varphi_{1,2}=\arg(\zeta\pm 1)$) и заменить

$$\zeta=\sin\frac{\pi z}{a}=\sin\frac{\pi x}{a}ch\frac{\pi y}{a}+i\cos\frac{\pi x}{a}sh\frac{\pi y}{a}.$$

Получим:

$$u(z)=\frac{t}{\pi}\arg\frac{(\sin\cdot ch-1)+i\cos\cdot sh}{(\sin\cdot ch+1)+i\cos\cdot sh}=\frac{t}{h}arctg\frac{2\cos\cdot sh}{\sin^2\cdot ch^2-1+\cos^2\cdot sh^2}$$

(освободились от мнимости в знаменателе; аргументы круговых и гиперболических функций для простоты опускаем). После замены в знаменателе



$ch^2=1+sh^2$ приведем его к виду $sh^2-\cos^2$; если обозначить $arctg\frac{2\cos\cdot sh}{sh^2-\cos^2}=\alpha$, то будем иметь $\frac{sh^2-\cos^2}{sh^2+\cos^2}=\cos\alpha$, следовательно,

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\cos}{sh},$$

и формула для температуры принимает окончательный вид:

$$u(z)=\frac{2t}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{2t}{\pi}arctg\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{sh\frac{\pi y}{a}}.$$

Пользуясь интегралом Шварца для полуплоскости, можно было бы найти и комплексный потенциал теплового потока.

5) *Удар пластинки о воду.* Пусть жидкость заполняет нижнее полупространство, а твердое тело представляет собой плоскую пластинку в форме полосы шириной 2*a*, которая в момент удара $t = 0$ касается свободной поверхности и мгновенно приобретает скорость $V_0$, направленную вертикально вниз (рис. 7.7). Пусть *(-a, a)* будет след пластинки в плоскости, перпендикулярной ее ребрам, и $f(z) = u(z) + iv(z)$ – комплексный потенциал плоского поля, описывающего скорости жидкости после удара.

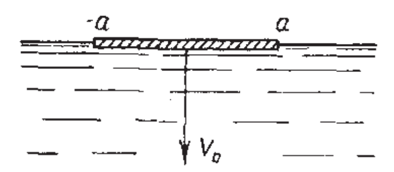


**Рис. 7.7**

Краевые условия задачи формулируются следующим образом: на отрезке *(-a, a)* имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-V_0, \qquad (7.11)$$

а на оставшейся части оси *x*, соответствующей свободной поверхности,

$$u=0. \qquad (7.12)$$

По принципу симметрии продолжаем гармоническую функцию и в верхнюю полуплоскость через лучи $(-\infty,-a)$ и $(a,\infty)$(это возможно на основании условия (7.12)); на верхнем берегу вместо (7.11) получаем тогда условие $\frac{\partial u}{\partial y}=V_0$. Задача свелась, таким образом, к задаче Неймана: найти гармоническую во внешности отрезка *(-a, a)* функцию *u(z)* по граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n}=V_0$ ($\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по нормали, направленной внутрь области).

когда косинус положителен, т.е. при $\frac{\pi}{V}|v|<\frac{\pi}{2}$ или $|v|<\frac{V}{2}$. Вдоль таких линий напряженность поля $|E|$ меняется монотонно, не имея ни максимума, ни минимума. Для $v=\pm\frac{V}{2}$ максимум $|E|=\frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u}+1}}$ достигается при $u=-\infty$, т.е. на левом крае конденсатора. Если построить конденсатор, пластины которого имеют форму линий равного потенциала $v=\pm\frac{V}{2}$ (жирные линии на рис. 7.3), то для такого конденсатора напряженность поля убывает при подходе к краям, а не возрастает неограниченно как для плоского конденсатора. Этот конденсатор называется конденсатором Роговского.

2) *Магнитное поле в зазоре электрической машины*.

Рассмотрим магнитное поле в зазоре между ротором и статором машины вблизи паза ротора. Радиусы и ширину статора и ротора мы будем считать столь большими, что это поле мало отличается от плоскопараллельного (на рис. 7.4, *а* изображено сечение машины плоскостью, перпендикулярной к оси вращения). Через $2H$ мы обозначим ширину паза ротора; так как практически лишь весьма небольшая часть силовых линий, проникших в паз, достигает его основания, то глубину этого паза можно считать бесконечно большой. Через $h$ обозначим величину межжелезного пространства, т.е. расстояние между статором и ротором; пренебрегая влиянием других пазов, мы будем предполагать, что это пространство представляет собой бесконечную в обе стороны полосу. После сделанных упрощений область интересующего нас поля принимает вид пятиугольника, изображенного на рис. 7.4, *б*. Предполагаем, что след границы ротора $A_1A_6A_5A_4A_3$ несет потенциал $V$, а след границы статора $A_1A_2A_3$ – потенциал 0. (Предполагается, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика.)

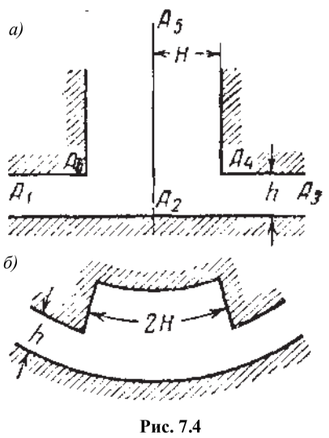



**Рис. 7.4**

Задача принадлежит к типу краевой задачи 2 и сводится к конформному отображению $w = f(z)$ области поля на полосу $0<\mathrm{Im}\,w<V$,



чим $w=e^{i\varphi}\frac{t-i}{t+i}$. Требование, чтобы точка $t_2 = 0$ перешла в точку $w_2 = 1$, дает $e^{i\varphi}=-1$. Подставляя в выражение для $w$ значение $e^{i\varphi}=-1$ и $t=z^4$, получим окончательно $w=-\frac{z^4-i}{z^4+i}$.

***Пример 7.*** Найти функцию, отображающую верхнюю половину круга $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\,z > 0$, на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,w > 0$.

*Решение.* Заданная область представляет собой двуугольник с вершинами в точках $z_1=-1$ и $z_2=1$ и углом при вершине $\alpha=\frac{\pi}{4}$ (рис. 2.6, *а*).

Вспомогательная функция $t=\frac{1+z}{1-z}$ осуществляет конформное отображение этого двуугольника на первый квадрант плоскости $t$ (рис. 2.6, *б*). Функция $w=t^2$ или $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ дает искомое отображение (рис. 2.6, *в*).

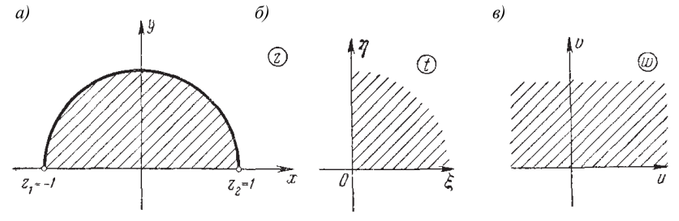



**Рис. 2.6**

***Показательная функция $w=e^z$.*** Отображение, осуществляемое показательной функцией конформно во всей плоскости, так как $w'=e^z\neq 0$ во всякой конечной точке плоскости $z$. Если плоскость $z$ разбить на полосы $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, ...$), то каждая из этих полос отобразится функцией $w=e^z$ взаимно однозначно на всю плоскость $w$ с разрезом вдоль положительной части действительной оси. При этом считаем, что нижней границе $y=2k\pi$ полосы соответствует верхний край разреза, а верхней границе $y=2(k+1)\pi$ – нижний край разреза.

При этом точки $z_0=x_0+iy_0$ и $z_k=x_0+i(y_0+2k\pi)$ ($k = \pm1, \pm2, ...$) переходят в одну и ту же точку плоскости $w$. Это означает, что показательная функция является бесконечнолистной периодической функцией комплексной переменной $z$ с мнимым периодом $2\pi k$. Областью ее однолистности



***Тригонометрические функции $w=\sin z$, $w=\cos z$.***

Для любого комплексного $z$: $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

***Пример 10.*** Во что отображается полуполоса $0<x<\pi, y>0$ (рис. 2.10) с помощью функции $\cos z$?

*Решение.* Имеем $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\mathrm{ch}\,y-i\sin x\mathrm{sh}\,y$.

Если точка $z$ пробегает участок границы $I$ от $y=+\infty$ до $y=0$ (при $x=0$), то соответствующая точка в плоскости $w$ пробегает участок $I'$ от $u=+\infty$ до $u=1$ (при $v=0$). Если точка $z$ пробегает участок $II$ от $x=0$ до $x=\pi$, (при $y=0$), то $w=\cos x$ опишет участок $II'$ от $u=1$ до $u=-1$ (при $y=0$). Наконец, если точка $z$ пробегает участок $III$ от $y=0$ до $y=+\infty$ (при $x=\pi$), то $w=-\mathrm{ch}\,y$ пробегает участок $III'$ от $u=-1$ до $u=-\infty$ (при $v=0$).

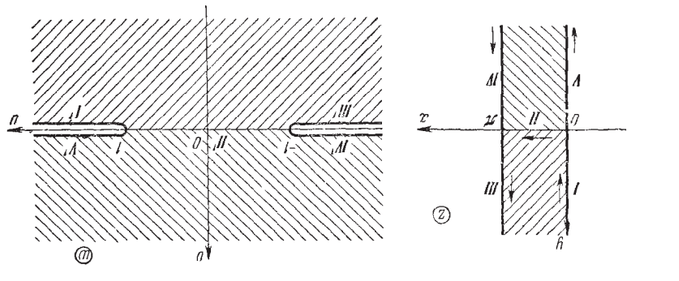



**Рис. 2.10**

Итак, если точка $z$ обходит границу полуполосы $0<x<\pi, y>0$ так, что полуполоса остается слева, то точка $w$ пробегает справа налево всю действительную ось, и поэтому из принципа взаимно однозначного соответствия следует, что функция $w=\cos z$ отображает рассматриваемую полуполосу на нижнюю полуплоскость $w$. Аналогично показывается, что полуполоса $0<x<\pi, y<0$ функцией $w=\cos z$ отображается на верхнюю полуплоскость $w$.

Строгое полуполосы $x=\pi, y<0$ соответствует отрезок $-\infty<u<-1$ действительной оси плоскости $w$, строгое $0<x<\pi, y=0$ (проходимой от $\pi$ к 0) – отрезок $-1<u<1$ и строгое $x=0, y<0$ – отрезок $1<u<+\infty$. Отрезок $-\infty<u<-1$ действительной оси плоскости $w$ пробегается дважды, а именно, на него отображается строгая $x=\pi, y>0$ первой полуполосы и строгая $x=\pi, y<0$ второй полуполосы. Чтобы отображение $w=\cos z$ было взаимно однозначным, надо в плоскости $w$ сделать разрез вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 (а также от 1 до $+\infty$).



давлений $P^{(t)}$ в жидкости в момент, непосредственно следующий за ударом.

Перейдем к математической постановке задачи, приняв для простоты отражением случаем, когда до удара жидкость покоится. Как известно, при отсутствии массовых импульсивных сил движение после удара потенциально, причем потенциал скоростей $u(x,y)$ в момент, непосредственно следующий за ударом, удовлетворяет условию

$$\rho u=P^{(t)}, \qquad (7.4)$$

где $\rho$ – плотность жидкости и $P^{(t)}$ импульсивное давление в ней. Обозначим через $D$ область, занятую жидкостью, через $C$ – ее границу. $C$ состоит из дуги $C_0$ – стенки сосуда, дуг $C_k$, поверхностей тел $B_k$ и из дуг $C'_k$ – участков свободной поверхности жидкости между двумя последовательными дугами $C_k$ $C_{k+1}$ (см. рис. 7.1). Для потенциала скоростей $u(x,y)$ имеем следующие граничные условия:

а) Вдоль стенки сосуда $C_0$: $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, ибо из условия отекания полагаем $v(x, y) = const$, и тогда из условий Коши-Римана, записанных для направлений $\boldsymbol{s}^\circ$ и $\boldsymbol{n}^\circ$, будем иметь: $\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}=0$.

б) Вдоль дуг $C_k$ соприкосновения жидкости с телом

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(\boldsymbol{V}^{(t)},\boldsymbol{n}^\circ\right), \qquad (7.5)$$

где $\boldsymbol{n}^\circ$ – единичный вектор внутренней нормали к $C_k$. При этом мы считаем, что не происходит отставания жидкости от стенок (кавитации); (7.5) следует из известной связи между $grad\,u = V^{(t)}$ и проекцией по направлению. Мгновенные скорости тел $B_k$ считаются известными, так что в правой части формулы (7.5) имеем известную функцию.

в) Вдоль дуг $C'_k$ (т. е. вдоль свободной поверхности)

$$u(x,y)=0, \qquad (7.6)$$

ибо давление на свободной поверхности конечно; следовательно, $P^{(t)}=0$ и тогда (7.6) следует из (7.4).

Найдем $u(x, y)$ в области $D$, мы получим распределение скоростей $V = grad\,u$, а давления определим по формуле (7.4).

Эта краевая задача является частным случаем смешанной краевой задачи теории гармонических функций.

5) *Обтекание со срывом струй*. Так называют обтекание, при котором одна из линий тока идет из бесконечности к некоторой точке $B$ обтекаемого тела, где она разделяется на две ветви, каждая из которых идет вдоль стенок тела до некоторых точек $C_1$ и $C_2$ и затем отрывается от стенок, снова уходя в бесконечность (рис. 7.2). При этом предполагается, что свободные струи $C_1A_1$ и $C_2A_2$ отделяют зону движения $I$ от зоны покоя $II$

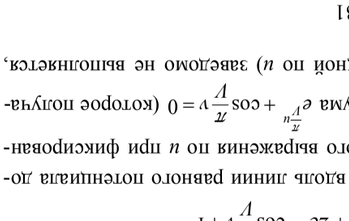



**Рис. 7.2**

так, что вдоль этих струй происходит разрыв скоростей[8]. В зоне *I* движение считается потенциальным; в зоне покоя *II* скорость везде равна нулю, следовательно, давление постоянно (см. формулу Бернулли-Эйлера) и струи $C_1A_1$ и $C_2A_2$ можно рассматривать как свободные границы жидкости. Мы приходим к следующей краевой задаче:

а) на участке $C_1BC_2$ тела (длина которого не известна) имеется обтекание, т.е. $v\,(x, y) = const$;

б) на свободных струях $C_1A_1$ и $C_2A_2$ (форма которых не известна) величина скорости постоянна: $|V| = |V_\infty|$, это следует на основании формулы Бернулли-Эйлера из постоянства давления в зоне покоя.

**Примеры. Приложения**

1) *Электростатическое поле у краев плоского конденсатора.*

Если при изучении поля внутри плоского конденсатора это поле практически можно считать равномерным, то вблизи краев равномерность поля существенно нарушается и необходим специальный расчет. Рассматривая поле вблизи одного края конденсатора, мы для простоты пренебрежем влиянием второго края и будем представлять конденсатор в виде двух полуплоскостей, расположенных друг над другом. Расстояние между пластинами обозначим $2h$, их потенциалы $\pm V$.

Задача сводится к расчету плоского поля внешности двух параллельных полупрямых (следов пластин конденсатора в плоскости, перпендикулярной краям пластин), т.е. к краевой задаче 2. Комплексный потенциал $w = f(z)$ реализует отображенние области поля на полосу $-V < \mathrm{Im}\, v < V$ с соответствием точек $f(A) = -\infty$, $f(C) = \infty$. Обратное отображение:

$$z = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}w} + \frac{\pi}{V}w\right), \qquad (7.7)$$

мы переменили роли $z$ и $w$, совершили подобное преобразование полосы и отбросили несущественное постоянное слагаемое.

На рис. 7.3 представлены линии равного потенциала и силовые линии поля; их параметрические уравнения получаются соответственно при

[8] Такая схема в известной мере отражает фактически наблюдаемый разрыв скоростей за движущимися в реальных жидкостях телами; однако в реальных жидкостях зона 11 является не зоной покоя, а зоной вихревого движения и не простирается в бесконечность.



$v = const$ или $u = const$, из соотношений, которые дают разделение действительных и мнимых частей формулы (7.7):

$$x = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}u\right), \quad y = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi}{V}u}\sin\frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}v\right)$$

(полагаем $z = x + iy$, $w = u + iv$).

Напряженность поля равна

$$E = -\overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} = -\frac{i}{\overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)}} = -i\frac{V}{h}\frac{1}{1+e^{\frac{\pi}{V}w}}.$$

Внутри конденсатора, т.е. при $z$, близких к точке $A$, $w$ близко к $-\infty$, следовательно, напряженность поля $E \approx -i\dfrac{V}{h}$ близка к напряженности равномерного поля. При приближении к краям конденсатора $w \to \pm Vi$, следовательно, напряженность поля неограниченно возрастает.

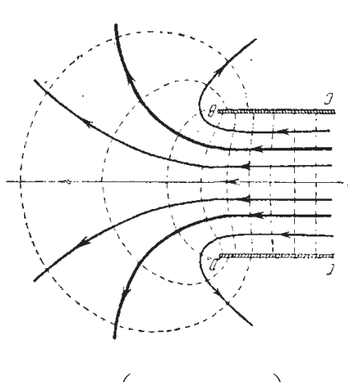



**Рис. 7.3**

Проследим изменение величин напряженности поля $|E| = \left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ вдоль линий равного потенциала. Так как величина производной аналитической функции не зависит от направления, по которому эта производная вычисляется, то можем вычислять ее в направлении силовой линии $u = const$. Тогда $|dw| = |dv|$, $|dz| = ds$, где $ds$ – дифференциал дуги силовой линии, при $u = const$:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{h}{V}\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + 1}\,dv$$

и, следовательно,

$$|E| = \frac{dv}{ds} = \frac{V}{h}\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 2e^{\frac{\pi}{V}u}\cos\frac{\pi}{V}v + 1}}.$$

Для нахождения максимума $|E|$ вдоль линии равного потенциала достаточно найти минимум подкоренного выражения по $u$ при фиксированном $v$. Необходимое условие экстремума $e^{\frac{\pi}{V}u} + \cos\frac{\pi}{V}v = 0$ (которое получается приравниванием нулю производной по $u$) заведомо не выполняется,



является полоса $y_0 < y < y_0 + 2\pi$, отображаемая на полную плоскость $w$ с разрезом по лучу $\arg w_0 = y_0$ (рис. 2.7).

Отметим, что показательная функция $w = e^z$ не обращается в нуль ни при каком значении $z$.

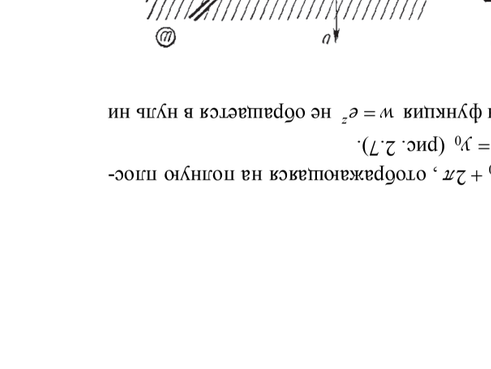



**Рис. 2.7**

***Пример 8.*** Во что преобразуется полуполоса $0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi$, $\mathrm{Re}\, z < 0$ с помощью функции $w = e^z$?

*Решение.* Положим $z = x + iy$, $w = e^z = e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$.

Тогда $\rho = e^x$, $\varphi = y$, $-\infty < x < 0$, $0 < y < 2\pi$, так что $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$. Очевидно, точки $w = \rho e^{i\varphi}$, удовлетворяющие этим условиям, заполняют круг $|w| < 1$ с разрезом по отрезку прямой, соединяющей точки $w = 0$ и $w = 1$.

В самом деле, обойдем контур у области $D$ в положительном направлении, начиная с участка $I$ $(-\infty < x < 0,\ y = 0)$.

Далее $II$ $(x = 0,\ 0 < y < 2\pi)$ и, наконец, $III$ $(y = 2\pi$, а $x$ изменяется от 0 до $-\infty)$. Очевидно, этим участкам в плоскости $w$ будут соответствовать участки $I'$, $II'$, $III'$, где участок $I'$ совпадает с верхним краем разреза, а $III'$ – с нижним краем (рис. 2.8).

***Логарифмическая функция $w = Ln\ z$*** определяется как функция, обратная показательной. Для определенности будем рассматривать главное значение логарифма $z$, т.е. то значение, которое соответствует главному значению аргумента $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi < x < \pi$. Эта функция аналитическая во всех конечных точках $z \neq 0$ и $w' = \dfrac{1}{z} \neq 0$. Значит, отображение с помощью функции $w = \ln z$ конформно во всех таких точках. Отметим, что точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками разветвления функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, причем $\mathrm{Ln}\, 0 = \infty$ и $\mathrm{Ln}\infty = \infty$.

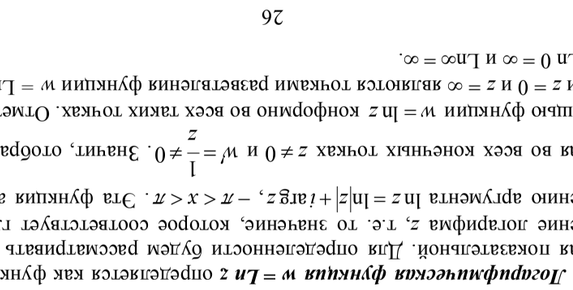



**Рис. 2.8**

Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведет вновь к первоначальной ветви функции $\mathrm{Ln}\, z$. Такие точки разветвления называются логарифмическими.

***Пример 9.*** Найти функцию, отображающую плоскость $z$ с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси от точки $z = 0$ до точки $z = -\infty$ на полосу $-\pi < v < \pi$ в плоскости $w$.

*Решение*. При рассмотрении показательной функции $w = e^z$ было указано, что любая полоса $y_0 \le y < y_0 + 2\pi$ отображается этой функцией на полную плоскость $w$ с разрезом по лучу $\arg w_0 = y_0$. Рассмотрим обратное отображение, а именно, отображение полосы $v_0 \le v < v_0 + 2\pi$, где $v_0 = -\pi$ плоскости $w$ на всю плоскость $z$ с разрезом по лучу $arg\, z_0 = v_0 = -\pi$ (рис. 2.9). Очевидно, такое отображение дает функция $z = e^w$; следовательно, искомое отображение будет $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$. Когда точка $z$ пробегает по нижнему берегу $I$ разреза от $x = -\infty$ до $x = 0$, то в плоскости $w$ соответствующая точка опишет линию $I'$ от $u = \infty$ до $u = -\infty$ ($v = -\pi$). Далее, когда точка $z$ пробегает по верхнему берегу разреза $II$ от $x = 0$ до $x = -\infty$, то в плоскости $w$ соответствующая точка опишет линию $II'$ от $u = -\infty$ до $u = \infty$ ($v = \pi$), так что область $D$ и соответствующая ей область $G$ остаются при обходе контуров справа.

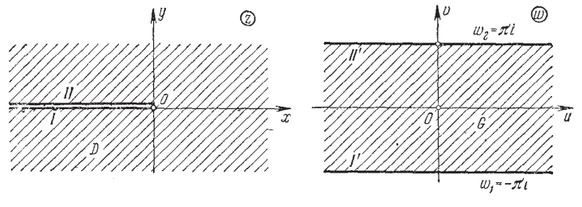



**Рис. 2.9**

В этих предположениях при заданном расходе $N$ существует единственный безвихревой поток в области $D$, обтекающий $C_0$ и $C_1$.

Искомый комплексный потенциал $w = f(z)$ реализует взаимнооднозначное конформное отображение области $D$ на полосу $0 < v < N$ с соответствием бесконечно удаленных точек: $f(\pm\infty) = \pm\infty$.

3) *Поток в криволинейной полуплоскости.*

Пусть дана линия $C$ без точек самопересечения, содержащая бесконечно удаленную точку и замкнутая на сфере комплексного переменного; $D$ пусть обозначает одну из двух областей, ограниченных линией $C$. В области $D$ требуется построить поток, обтекающий кривую $C$ и обладающий заданной по величине скоростью в бесконечности $|V_\infty|$.

Если дополнительно предположить, что $C$ во всех точках обладает непрерывно дифференцируемой кривизной, включая и бесконечно удаленную точку, и рассматривать лишь потоки с ограниченными скоростями, то решение будет единственным.

Искомый комплексный потенциал $w = f(z)$ реализует конформное отображение области $D$ на верхнюю полуплоскость при условиях $f(\infty) = \infty, |f'(\infty)| = |V_\infty|$.

В качестве примера укажем видоизменения, которые надлежит сделать в задачах 1 – 3 при рассмотрении электростатических полей. Всюду термин «обтекаемый контур» заменяется термином «проводник» (точнее, след проводящего цилиндра, перпендикулярного плоскости $z$), «скорость» заменяется «напряженностью поля», «функция тока» – «потенциалом», «потенциальная функция» – «силовой функцией», «расход» – «разностью потенциалов» и т.д. В задаче 1 задание циркуляции заменяется заданием суммарного заряда $e = \frac{1}{4\pi}\int_C f'(z)dz = \frac{ic_{-1}}{2}$, следовательно, в формуле (7.1) $c_{-1} = -2ei$ и член с логарифмом в формуле (7.2) имеет вид $2ei\,Ln\frac{1}{z}$.

4) *Ударные задачи.* Значительная часть таких задач охватывается следующей схемой. В сосуде А находится покоящаяся или движущаяся жидкость, в которой плавают твердые тела $B_k$ ($k$ = 1, 2, ... , $n$) (рис. 7.1). В момент времени $t = 0$ на тела подействовали импульсивные силы так, что тело $B_k$ получило мгновенно приращение скорости $V_k^{(i)}$ (удар). Требуется найти поле импульсивных скоростей $V^{(i)}$ и распределение импульсивных

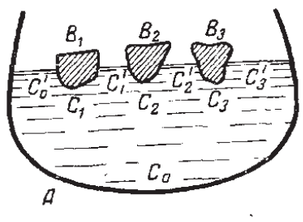



**Рис. 7.1**



В предыдущих разделах мы видели, что для изучения плоского поля достаточно знать его комплексный потенциал. Прикладные задачи обычно сводятся к определению комплексного потенциала по заданным условиям на границах поля (они диктуются самими физическими условиями данной задачи) или, как говорят, к решению заданной краевой, или граничной, задачи. При этом если задача физически правильно поставлена, то заданные условия должны полностью определять поле, т.е. комплексный потенциал поля должен определяться с точностью до постоянного слагаемого. Мы привыкли здесь простейшие постановки краевых задач теории плоского поля, причем для определенности будем пользоваться гидродинамической терминологией. В примерах решения этих задач будем рассматривать и другие интерпретации. Начнем с трех задач на обтекание:

1) *Поток во внешности замкнутой кривой.* Мы предполагаем, что область поля $D$ содержит внутри бесконечно удаленную точку и ограничена одним контуром $C$ – границей тела, погруженного в жидкость ($D$ – внешность контура $C$). Пусть тело поступательно движется с постоянной скоростью – $V_\infty$, или, что то же самое, тело покоится и на него набегает поток со скоростью $V_\infty$. Тогда производная комплексного потенциала – функция, комплексно сопряженная скорости потока, – должна быть правильной в бесконечности, однозначной в области $D$ аналитической функцией. Ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет, следовательно, вид

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \qquad (7.1)$$

## 7. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ



$q_1 = -q,\ q_2 = +q,\ q_3 = -q,\ q_4 = +q,$

соответственных в точках $z_1 = ai,\ z_2 = -ae^{\frac{i\pi}{6}},\ z_4 = -ai,\ z_5 = ae^{\frac{-i\pi}{6}}$ (см. рис. 6.21). Простая выкладка показывает совпадение с (6.41) комплексного потенциала, полученного этим способом. Метод изображений может быть с успехом использован и при решении ряда других задач как электростатических, так и гидромеханических. В гидромеханике на основании этого метода при рассмотрении поля точечного вихря интенсивности Γ в полуплоскости заменяют стенку, ограничивающую полуплоскость, вихрем интенсивности – Γ, расположенным симметрично данному относительно этой стенки. При решении аналогичной задачи для поля точечного источника интенсивности $Q$ стенку можно заменить симметричным точечным источником той же интенсивности $Q$ (а не $-Q$, как для вихря и заряда).



дает отображение круга $|z| < 1$ на лучевую область, получаемую удалением из плоскости $w$ лучей $\arg w = 0, |w| > a$, $\arg w = \pi, |w| > ka$ (рис. 2.15).

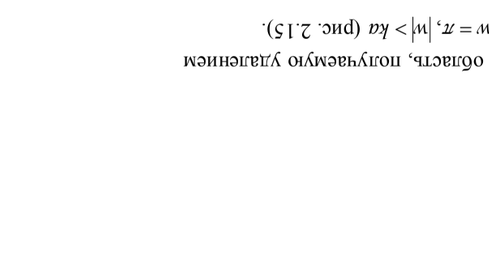



**Рис. 2.15**

3) Функция

$$w = f(z) = \sqrt[n]{4}\frac{z}{(z^n+1)^{2/n}},\quad f(0) = 0,\quad f'(0) = \sqrt[n]{4}$$

дает отображение единичного круга $|z| < 1$ на область, получаемую удалением из плоскости $n$ лучей: $\arg w = \frac{2k\pi}{n}$, $|w| \ge 1$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ (рис. 2.16, $n = 4$).

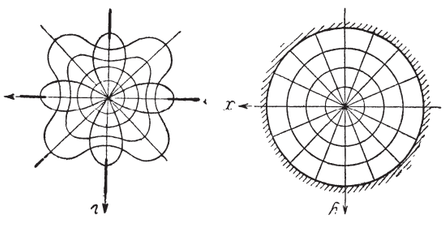



**Рис. 2.16**

4) Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (2.4)$$

дает конформное отображение единичного круга и его внешности $|z| > 1$ на внешность отрезка $(-1, +1)$ оси $u$ (рис. 2.17).

Простым подсчетом легко убедиться, что при отображении (2.4) любая окружность $|z| = r, r \ne 1$ переходит в эллипс с фокусами в точках $-1, +1$, при $r \to 0$ или $r \to \infty$ эксцентриситет этого эллипса стремится к нулю.

Итак, функция $w = \cos z$ отображает полосу $0 < x < \pi$ на всю плоскость $w$ с разрезами по действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$.

***Функция Жуковского***

$$\boldsymbol{w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \qquad (2.3)$$

является аналитической во всей плоскости, кроме точки $z = 0$, где она имеет полюс первого порядка. Производная функции Жуковского $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \ne 0$ при $z \ne \pm 1$, а значит, отображение, осуществляемое этой функцией, везде конформно, кроме точек $z = \pm 1$. Функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает конформно область $|z| < 1$ на всю плоскость $w$, разрезанную по отрезку [-1, 1] действительной оси. Граница области – окружность $|z| = 1$ – отображается на этот отрезок, причем верхняя полуокружность отображается на нижний, а нижняя – на верхний край разреза.

Аналогично область $|z| > 1$ отображается на второй экземпляр плоскости $w$, разрезанной по отрезку [-1, 1] действительной оси, причем верхняя полуокружность $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z > 0$ отображается на верхний берег, а нижняя полуокружность $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z < 0$ – на нижний берег разреза (рис. 2.11).

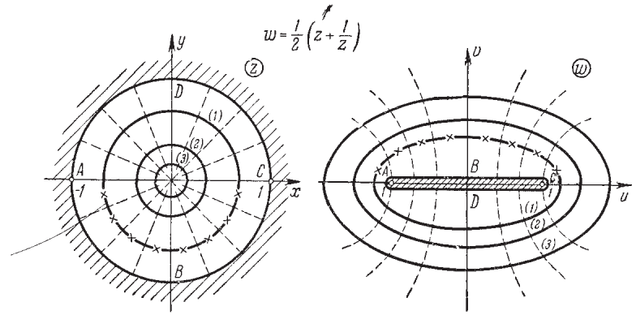



**Рис. 2.11**

Всякая окружность радиуса $R \ne 1$ отображается функцией (2.3) в эллипс с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left|R - \frac{1}{R}\right|$ и фокусами в точках (-1, 0) и (1, 0).

Из формулы комплексного потенциала поля следует тогда, что $c_{-1}\cdot 2\pi i=\Gamma+iN$, где $\Gamma$ и $N$ – циркуляция и поток вдоль любого замкнутого контура, охватывающего С. Но так как поток обтекает *С* и в области *D* нет источников, то $N=0$ и, интегрируя (7.1), мы получаем следующее разложение комплексного потенциала в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$w=f(z)=\overline{V}_\infty z+c+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z-\frac{c_{-2}}{z}+\ldots, \qquad (7.2)$$

где *c* – произвольная постоянная. Величина циркуляции Γ должна быть задана – в этом состоит первое граничное условие задачи полного обтекания. Второе граничное условие относится к контуру *С*; в силу условия обтекания в любой точке контура *С* скорость потока должна быть направлена по касательной к *С*. Иными словами, контур *С* должен быть одной из линий тока, т.е. на контуре *С* должно выполняться условие

$$v\ (x,\ y)=\text{const}. \qquad (7.3)$$

Докажем единственность решения задачи при заданной скорости в бесконечности $V_\infty$ и заданной циркуляции Γ. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – комплексные потенциалы, соответствующие двум решениям задачи, и $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$. Функция $f(z)$, очевидно, однозначна и аналитична всюду в *D*, включая бесконечно удаленную точку. Ее мнимая часть $v(z)$ постоянна на *С* и гармонична всюду в *D* (включая бесконечно удаленную точку). По теореме единственности решения задачи Дирихле должно быть $v(z)\equiv\text{const}$ и, следовательно, $f(z)=\text{const}$. Таким образом, наши комплексные потенциалы отличаются лишь постоянным слагаемым, что не влияет на распределение скоростей.

Отметим, что в случае бесциркуляционного обтекания, когда Γ = 0, комплексный потенциал $w=f(z)$ реализует взаимно-однозначное отображение области *D* на внешность некоторого отрезка, параллельного оси *и*. В самом деле, из разложения $f(z)$ в окрестности бесконечности

$$w=f(z)=\overline{V}_\infty z+c-\frac{c_{-2}}{z}+\ldots$$

видно, что главный член разложения имеет вид $\overline{V}_\infty z$, следовательно, функция $w=f(z)$ реализует взаимно-однозначное отображение окрестностей бесконечно удаленных точек плоскостей *z* и *w* (это следует также из того, что существует $f'(\infty)=\overline{V}_\infty\neq 0$). Так как $f(z)$ имеет в области *D* один полюс первого порядка (в бесконечности), то по принципу аргумента для достаточно больших *a* имеем:

$$1-n(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}=0,$$



где $n(a)$ – число $a$-точек $f(z)$ в области *D* и кривая *С* проходится против часовой стрелки. Но $n(a)$ – целочисленная и непрерывная функция точки *a*, следовательно, она постоянна и $1-n(a)=0$ для всех значений *a*, которые не принимаются функцией $f(z)$ на контуре *С*. Таким образом, $f(z)$ в области *D* принимает и притом только один раз любое значение, которое она не принимает на контуре *С*, а этот контур, как видно из граничного условия (7.3), она переводит в отрезок, параллельный оси *и*. Утверждение доказано.

Задача распространяется на случай обтекания системы контуров (профилями). В этом случае, кроме скорости в бесконечности, следует задать значения циркуляций при обходе каждого контура.

2) *Поток в криволинейной полосе.* Пусть даны две линии $C_0$ и $C_1$, имеющие общими лишь свои концы, расположенные в точке $z=\infty$, и пусть *D* – область, заключенная между этими кривыми. В области *D* требуется построить безвихревой поток, обтекающий $C_0$ и $C_1$ и имеющий заданный расход *N*, т.е. поток скорости *V* через произвольную кривую γ, соединяющую линии $C_0$ и $C_1$.

Пусть $w=f(z)$ комплексный потенциал искомого поля. Условие обтекания $C_0$ и $C_1$ сводится к тому, что на этих кривых функция $v=\operatorname{Im} f(z)$ должна принимать некоторые постоянные значения, например:

$$v(x,y)=\begin{cases}v_0 \text{ на } C_0,\\ v_1 \text{ на } C_1.\end{cases}$$

По формуле потока через линию *С* расход

$$N=\int_\gamma\left(\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}^0\right)ds=v_1-v_0,$$

следовательно, разность $v_1-v_0$ известна. Так как $f(z)$ определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого, то всегда можно принять $v_0=0$, $v_1=N$.

Без дополнительных ограничений на поведение $f(z)$ в бесконечности задача неопределенна. Действительно, рассмотрим, например, полосу $0<y<N$, где $N$ – заданный расход; тогда всем поставленным условиям удовлетворяет функция $f_{n,\lambda}(z)=z+\lambda e^{2\pi iz/N}$, ибо при любом целом *n* и действительном $\lambda$ ее мнимая часть $y+\lambda e^{2\pi ix/N}\sin\dfrac{2\pi y}{N}$ принимает на границах полосы постоянные значения $v_0=0$, $v_1=N$. Поэтому мы предположим дополнительно, что: 1) кривые $C_0$ и $C_1$ обладают гладкой кривизной, 2) при $z\to\infty$ остается ограниченной ширина полосы *D*, а также кривизны кривых $C_0$ и $C_1$ и производные этих кривизн, 3) рассматриваются лишь течения с ограниченной в бесконечности скоростью.



Лучи $\arg z=\varphi$ (кроме $\varphi=0,\ \pm\dfrac{\pi}{2},\ \pi$) отображаются на соответствующие ветви гиперболы $\dfrac{u^2}{\cos^2\varphi}-\dfrac{v^2}{\cos^2\varphi}=1$, лучи $\arg z=0$, $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $\arg z=\pi$ отображаются на дважды пробегаемые бесконечные отрезки действительной или мнимой осей.

***Пример 11.*** Пользуясь функцией Жуковского, найти образ области $0<|z|<1,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$.

*Решение.* Подставим $z=re^{i\varphi}$ в функцию Жуковского $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ и выделим действительную и мнимую части; получим

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Обходя контур сектора в положительном направлении *OABO* (рис. 2.12), получим отрезок *OA*, который перейдет в бесконечный отрезок действительной оси, пробегаемый от $u=+\infty$ до $u=-1$ (рис. 2.13), дуга *AB* окружности $|z|=1$ перейдет в отрезок действительной оси *A'B'*, а отрезок *BO* перейдет в кривую

$$u=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad v=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right),\ u^2-v^2=\frac{1}{2}\ \textit{(уперобола)}.$$

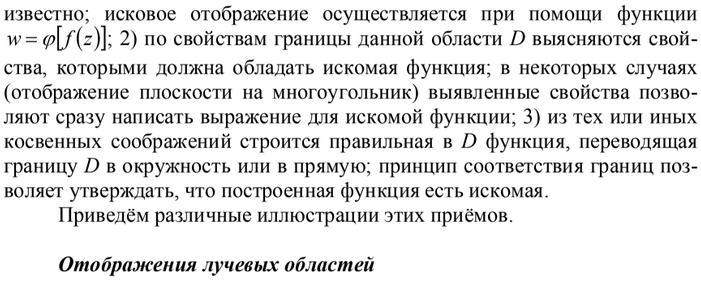



**Рис. 2.12** **Рис. 2.13**

Согласно принципу взаимно-однозначного соответствия границ получим, что заданной сетке переводится функцией Жуковского в область $u^2-v^2>\dfrac{1}{2},\quad u>\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad v<0$.



## 2.3. Примеры конформных отображений

При фактическом построении функции, реализующей конформное отображение данной области *D* на круг или на полуплоскость, наиболее часто применяются следующие три приёма: 1) при помощи одной из элементарных функций, однолистных в *D*, $\zeta=f(z)$, преобразуют область *D* в новую область $D_1$, конформное отображение $w=\varphi(\zeta)$ которой на круг уже известно; исковое отображение осуществляется при помощи функции $w=\varphi[f(z)]$; 2) по свойствам границы данной области *D* выясняются свойства, которыми должна обладать искомая функция; в некоторых случаях (отображение плоскости на многоугольник) выявленные свойства позволяют сразу написать выражение для искомой функции; 3) из тех или иных косвенных соображений строится правильная в *D* функция, переводящая границу *D* в окружность или в прямую; принцип соответствия границ позволяет утверждать, что построенная функция есть искомая.

Приведём различные иллюстрации этих приёмов.

***Отображения лучевых областей***

1) Функция

$$w=f(z)=\frac{z}{\left(1+e^{-i\alpha}z\right)^2},\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1$$

отображает единичный круг $|z|<1$ на область, получаемую удалением из *w*-плоскости луча $\arg w=\alpha,\ |w|>\dfrac{1}{4}$ (рис. 2.14, $\alpha=0$).

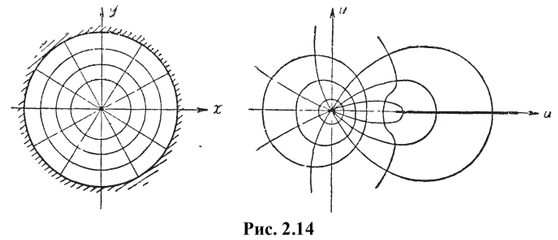



**Рис. 2.14**

2) Функция

$$w=f(z)=\frac{4ka}{1+k}\cdot\frac{z}{z^2-2\dfrac{1-k}{1+k}z+1},\quad f'(0)=0,\quad f''(0)>0$$

В пространстве ему соответствует поле в угле между плоскостями, образованное равномерно заряженной прямой, параллельной линии пересечения плоскостей.

Отобразим угол $D$ на верхнюю полуплоскость с помощью функции

$$\zeta = z^3,$$

заряд $q$ перейдет при этом в точку $\zeta_1 = a^3 i$. Задача свелась к определению комплексного потенциала поля точечного заряда в полуплоскости. Для ее решения мы заметим, что влияние проводящей прямой $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$ может быть заменено влиянием заряда величины $-q$, сосредоточенного в точке $\zeta_2 = -a^3 i$. В самом деле, для поля двух наших точечных зарядов прямая является одной из эквипотенциальных линий и, следовательно, в верхней полуплоскости поле двух точечных зарядов совпадает с полем одного точечного заряда и зарядов, индуцированных им на прямой $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$. Таким образом, комплексный потенциал вспомогательного поля определяется по формуле

$$w = 2qiLn\frac{\zeta + a^3 i}{\zeta - a^3 i}.$$

Искомый комплексный потенциал получим, заменяя в последней формуле $\zeta = z^3$:

$$w = 2qiLn\frac{z^3 + a^3 i}{z^3 - a^3 i}. \qquad (6.41)$$

Семейство эквипотенциальных линий поля определяется уравнением

$$\left|\frac{z^3 + a^3 i}{z^3 - a^3 i}\right| = c = const.$$

Вводя полярные координаты $z = re^{i\varphi}$, запишем это уравнение в виде

$$r^6 + 2a^3 r^3 \sin 3\varphi + a^6 = c^2\left(r^6 - 2a^3 r^3 \sin 3\varphi + a^6\right),$$

откуда $\dfrac{c^2 - 1}{c^2 + 1}\left(r^6 + a^6\right) = 4a^3 r^3 \sin 3\varphi$, и окончательно:

$$\sin 3\varphi = C\left(r^3 + \frac{a^6}{r^3}\right),$$

где $C$ – произвольная постоянная. В частности, при $C = 0$ эквипотенциальная линия состоит из лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/3$, ограничивающих поле.

Метод, которым пользовались при решении последней задачи (замена прямолинейного проводника точечным зарядом, симметричным данному заряду), называется *методом изображений*. Вместо того чтобы использовать вспомогательное конформное отображение $\zeta = z^3$, могли бы сразу применить этот метод, заменяя стороны угла системой зарядов



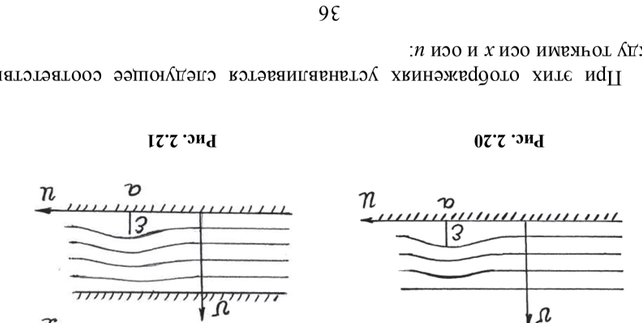



**Рис. 2.17**

5) Используя отображение (2.4), нетрудно построить конформное отображение единичного круга $|z| > 1$ на область $D(\varepsilon,\ \theta)$, получаемую из круга $|w| < 1$ удалением прямолинейного отрезка длины $\varepsilon$, выходящего из точки $e^{-i\theta}$ и принадлежащего радиусу нашего круга.

Искомая зависимость $w$ от $z$

$$w = f(z; h, \theta),\quad f(0; h; \theta) = 0,\quad f'(0; h, \theta) > 0$$

определится следующим уравнением:

$$(1+h)\left(ze^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{z}\right) + 2h = we^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{w}, \qquad (2.5)$$

где положено

$$h = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}.$$

Опишем получение формулы (2.5), например, для случая $\theta = 0$.

Функция

$$\zeta = (1+h)\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2h$$

реализует конформное отображение круга $|z| < 1$ на внешность отрезка $(-2{,}2+4h)$ в плоскости $\zeta$; с другой стороны, функция

$$\zeta = w + \frac{1}{w}$$

даёт конформное отображение круга на внешность отрезка $(-2,2)$, но та же функция преобразует область $D(\varepsilon,\ 0)$ – круг с удалённым из него отрезком $(1-\varepsilon, 1)$ на внешность отрезка $\left(-2{,}2 + \dfrac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}\right)$.



даёт конформное отображение на полуплоскость $y > 0$ области $D(\varepsilon, a)$, получаемой удалением из полуплоскости $v > 0$ отрезка $a, a + i\varepsilon$ (рис. 2.20).

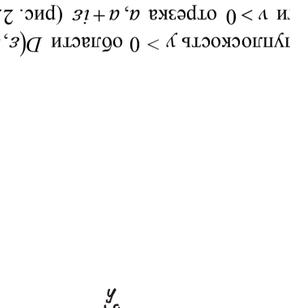



**Рис. 2.19**

Функция

$$w \equiv f(z) = z - \frac{\varepsilon^2}{4}cth\frac{\pi z - a}{2}$$

даёт отображение на полосу $0 < y < 1$ области $D_1(\varepsilon, a)$, получаемой удалением из полосы $0 < v < 1$ отрезка $a, a + i\varepsilon$ (рис. 2.21).

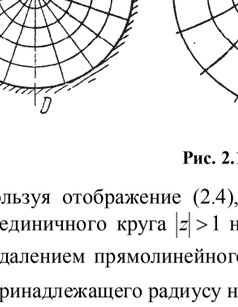



**Рис. 2.20**




**Рис. 2.21**

При этих отображениях устанавливается следующее соответствие между точками оси $x$ и оси $u$:



$\zeta = t(\omega),\ t(\infty) = \infty,\ t'(\infty) = 1$ внешности $C^*$ на внешность некоторого круга $|\zeta| > R$.

Тогда существования $t(\omega)$ и (6.38) $\zeta = t(\omega(z)) = g(z)$ осуществляет отображение внешности $C$ на внешность $|\zeta| > R$ с нормировкой $g(\infty) = \infty,\ g'(\infty) = t'(\infty)\cdot\omega'(\infty) = 1$. Поэтому искомым комплексным потенциалом служит функция (6.37). В острой кромке крыла $A$, где $z = 2$ (рис. 6.19), производная (6.38)

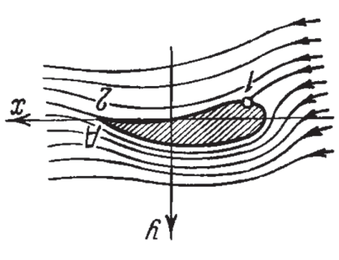



**Рис. 6.19**

$$\left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4}}\right)\Bigg|_{z=2} = \infty$$

(эффект остроты), а так как $\dfrac{d\zeta}{d\omega} = t'(\omega)$ конечна всюду на $C^*$, то и

$$\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=2} = t'(\omega)\left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=2} = \infty.$$

Однако, как показал известный русский ученый С. А. Чаплыгин, при обтекании профиля с острой кромкой $A$ под влиянием вязкости и вихреобразования точка схода потока смещается в точку $A$. В силу этого условия в точке окружности $|\zeta| = R$, соответствующей $A$, производная $\dfrac{dw}{d\zeta}$ обращается в нуль и результирующая величина скорости $\dfrac{\overline{dw}}{dz} = \dfrac{\overline{dw}}{d\zeta}\cdot\dfrac{\overline{d\zeta}}{dz}$ оказывается конечной.

Это условие называется условием Чаплыгина. Согласно условию Чаплыгина при обтекании контура с одной острой кромкой однозначно определяется положение точки схода потока, а следовательно, по (6.36) и величина циркуляции $\Gamma$ в формуле (6.37). Скорость в бесконечности $V_\infty$ остается комплексным параметром (изменение, например, направления вектора $V_\infty$ означает изменение угла атаки).

### 6.7. Другие методы

Приведем еще несколько примеров прикладных задач, решаемых иными методами, чем предложенные в предыдущих пунктах.

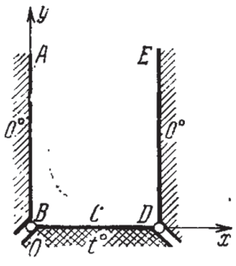



**Рис. 6.20**

***Пример 1.*** Распределение температур в пространстве, ограниченном двумя вертикальными стенками, на которых поддерживается температура 0°, и горизонтальным дном, нагретым до температуры t° (между стенками и дном имеется теплоизоляция). Задача сводится к определению комплексного потенциала $w = \Psi(z)$ в полуполосе $D$, изображенной на рис. 6.20 (расстояние между стенками принимаем равным π). Рассматриваемая задача принадлежит задаче 3, однако наличие изолирующих точек $B$ и $D$ несколько меняет дело. Будем считать физически очевидным, что решение задачи единственно. Как и в задаче 3, прежде всего преобразуем область $D$ в верхнюю полуплоскость; это осуществляет функция

$$\omega = \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z .$$

Изолирующие точки 0 и π перешли при этом в точки -1 и 1.

Постараемся теперь подобрать регулярную в верхней полуплоскости функцию $w = g(\omega)$, мнимая часть которой на отрезке (–1, 1), соответствующем дну $AD$, принимает значение t, а на лучах (–∞, –1) и (1,∞), соответствующих стенкам $AB$ и $DE$, – значение 0. Подобрав такую функцию заметим, что суперпозиция $w = g(-\cos z)$ служит искомым комплексным потенциалом.

Мнимую часть $g(\omega)$ естественно искать среди линейных комбинаций функций $\arg(\omega + 1)$ и $\arg(\omega - 1)$ :

$$\operatorname{Im} g(\omega) = c_1 \arg(\omega + 1) + c_2 \arg(\omega - 1) + c_3 .$$

Для определения трех постоянных $c_1$, $c_2$ и $c_3$ имеем следующие три условия:

1) при $-\infty < x < -1$, $\operatorname{Im} g(\omega) = c_1\pi + c_2\pi + c_3 = 0$;
2) при $-1 < x < 1$, $\operatorname{Im} g(\omega) = c_2\pi + c_3 = t$;
3) при $1 < x < \infty$, $\operatorname{Im} g(\omega) = c_3 = 0$.

Отсюда

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{t}{\pi}\{\arg(\omega - 1) - \arg(\omega + 1)\} = \frac{t}{\pi}\arg\frac{\omega - 1}{\omega + 1} .$$



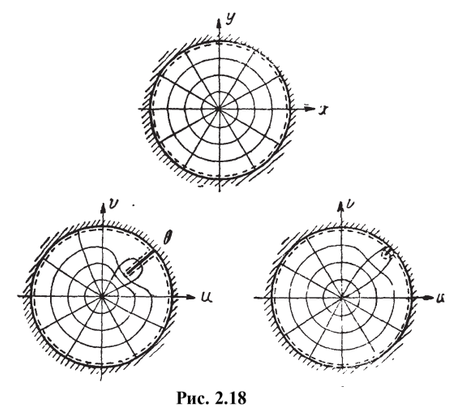



**Рис. 2.18**

6) Применяя к отображению (2.5) принцип симметрии Шварца, мы получим, что та же формула даёт конформное отображение внешности единичного круга $|z| > 1$ на область $\overline{D}(\varepsilon, \theta)$, получаемую удалением из области $|w| > 1$ куска радиуса $\arg w = \theta$, выходящего из точки $e^{i\theta}$ и длины $\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Для этого отображения также имеют место формулы [(2.5) – (2.10)].

7) Отображение круга $|z| < 1$ на полосу $0 < v < 1$. Его реализует функция

$$w = f(z) = \frac{1}{\pi}\ln i\frac{1+z}{1-z}, \quad z = \frac{e^{\pi w} - i}{e^{\pi w} + i} . \qquad (2.11)$$

Отметим, что при этом отображении пучок окружностей, проходящих через точки -1, +1, переходит в пучок прямых, параллельных оси $u$ (рис. 2.19). Отметим ещё выражение для производной $f'(z)$ рассматриваемого отображения $f'(z) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-z^2}$.

8) Отображая конформно круги $|z| < 1$, $|w| < 1$ на верхние полуплоскости и на единичные полосы [отображение (2.11)], получим из результатов п. 5° следующее:

$$w = f(z) \cong z - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{z-a}$$



Отсюда следует, что соотношение (2.5) (при $\theta = 0$) есть искомое.

Очевидно, $f(z;0,\theta) \equiv z$; найдём главную линейную часть приращения $f(z;h,\theta)$ конформного отображения при переходе от $h = 0$ к некоторому бесконечно малому значению $h$.

Начнём с простейшего случая $\theta = 0$, тогда (2.5) принимает вид:

$$(1+h)\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2h = w + \frac{1}{w} . \qquad (2.6)$$

Положим $w = z + \omega$ и подставим в (2.6), получим

$$(1+h)(z^2+1)(z+\omega) + 2hz(z+\omega) = z\{(z+\omega)^2 + 1\}.$$

Замечая, что $\omega$ и $h$ бесконечно малые одинаковых порядков, и отбрасывая малые высших порядков, переписываем последнее соотношение в виде

$$\omega(z^2+1) + hz(z^2+1) + 2hz^2 = 2\omega z^2 .$$

Отсюда окончательно

$$w = z + \omega = z + h\left\{z + 2 - \frac{2}{1-z}\right\} \qquad (2.7)$$

От (2.7) нетрудно подойти к общему случаю $\theta \neq 0$. Для этой цели, очевидно, достаточно в (2.7) вместо $z$ и $w$ подставить $ze^{i\theta}$ и $we^{i\theta}$

$$w = z + \omega = z + hz + 2he^{-i\theta} - \frac{2he^{-2i\theta}}{e^{-i\theta} - z} . \qquad (2.8)$$

Дифференцируя соотношение (2.8) по $z$, получим главную линейную часть производной

$$\frac{dw}{dz} = 1 + h - \frac{2he^{-2i\theta}}{\left(e^{-i\theta} - z\right)^2} . \qquad (2.9)$$

Наряду с формулами (2.8) и (2.9) для некоторых приложений полезно иметь зависимость между аргументами точек окружностей $|z| = 1$ и $|w| = 1$ при $h$ бесконечно малом. Ограничимся случаем $\theta = 0$; тогда, полагая $z = e^{i\varphi}$, $w = e^{i\psi}$, $\psi = \varphi + \Delta\varphi$, из (2.7) получим $\cos\psi = (1+h)\cos\varphi + h$ или после отбрасывания бесконечно малых высших порядков

$$\psi = \varphi - h\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} . \qquad (2.10)$$

Формулы (2.7) – (2.10), выведенные для бесконечно малых $h$, имеет смысл применять лишь для точек $z$, находящихся на конечном расстоянии $|z - e^{i\theta}|$ от граничного отрезка $D(\varepsilon, \theta)$ (рис. 2.18).



Регулярная функция с такой мнимой частью, это

$$w = \frac{t}{\pi}\ln\frac{\omega - 1}{\omega + 1} .$$

Подставляя $\omega = -\cos z$, получим искомый комплексный потенциал

$$w = \Psi(z) = \frac{t}{\pi}\ln\frac{\cos z - 1}{\cos z + 1} = \frac{2t}{\pi}\ln\left(i\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\right) .$$

Имеем

$$\Psi(z) = \frac{2t}{\pi}\ln\frac{sh\,y + i\sin x}{ch\,y - \cos x} .$$

Отсюда получаем выражение для температуры

$$v(x,y) = \operatorname{Im}\Psi(z) = \frac{2t}{\pi}\arg\frac{sh\,y + i\sin x}{ch\,y - \cos x} = \frac{2t}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{sh\,y} \qquad (6.39)$$

и для функции тока тепла

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\Psi(z) = \frac{2t}{\pi}\ln\left|\frac{sh\,y + i\sin x}{ch\,y - \cos x}\right| . \qquad (6.40)$$

Формулы (6.39) и (6.40) позволяют написать уравнения семейств изотермических линий и линий тока тепла:

$$\frac{\sin x}{sh\,y} = const, \quad \frac{\cos x}{ch\,y} = const.$$

Описанный метод применим и для решения задач из примеров 1 и 2 подраздела 6.4, если известно отображение области $D$ на полуплоскость, то вместо того, чтобы находить конформное отображение полуплоскости на полосу, удовлетворяющее условиям задачи, можно находить регулярную в этой полуплоскости функцию по ее свойствам.

Этот метод применим также для построения поля в любой односвязной области, на границе которой заданы кусочно-постоянные значения действительной или мнимой части комплексного потенциала. В частности, с его помощью хорошо решаются электростатические задачи, в которых на границе $C$ (односвязной) области $D$ задано некоторое число изолирующих точек, отделяющих участки $C$ с различными потенциалами.

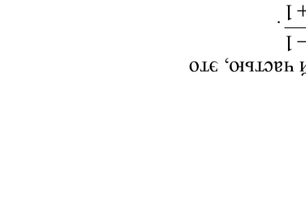



**Рис. 6.21**

***Пример 2.*** Электростатическое поле внутри угла $D$ $0 < \arg z < \pi/3$, образованное зарядом величины $q$, сосредоточенным в точке $z_0 = ae^{\pi/6}$ (рис. 6.21).

(черта – знак комплексного сопряжения). Пусть при этом точка $z_0$ переходит в точку $\zeta_0 = R\,e^{i\varphi_0}$; мы потребуем, чтобы было $|\varphi_0| \le \dfrac{\pi}{2}$, и построим по формуле (6.31) поток со скоростью 1 в $\infty$ и с точкой схода $\zeta_0$:

$$w = \Phi_1(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\,\zeta \tag{6.34}$$

(циркуляцию Γ в формуле (6.34) согласно (6.32) находим из соотношения $\Gamma = 4\pi \sin\varphi_0$). Суперпозиция $w = \Phi_1[f(z)]$ дает комплексный потенциал потока, обтекающего $C$ с точкой схода $z_0$, причем скорость в бесконечности

$$\left|\overline{\frac{dw}{dz}}\right|_{z=\infty} = \Phi_1'(\infty)\cdot f'(\infty) = V_\infty .$$

Следовательно, эта суперпозиция и дает решение задачи полного обтекания контура $C$.

***Пример 2.*** Полное обтекание окружности $|z| = R_0$ с заданной скоростью $V_\infty$ в бесконечности. Функцией (6.33) здесь служит $\zeta = V_\infty z$ радиус $R$ в формуле (6.34), следовательно, $|V_\infty| R_0$, и последняя формула принимает вид:

$$w = V_\infty z + \frac{R_0^2 |V_\infty|^2}{V_\infty z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\, z = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R_0^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\, z . \tag{6.35}$$

(опускаем постоянное слагаемое $\dfrac{\Gamma}{2\pi i} Ln\,\overline{V}_\infty$).

Уравнения (6.32), связывающие циркуляцию и критические точки потока, заменятся здесь уравнением

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \theta), \tag{6.36}$$

где $v_\infty = |V_\infty|$, $\theta = \arg V_\infty$ и $\varphi_0$ – аргумент точки схода потока.

*Замечание.* Вместо (6.33) можно рассматривать конформное отображение $\zeta = g(z)$ внешности Сна внешность круга $|\zeta| > R$ с нормировкой $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$ и затем строить поток со скоростью $V_\infty$ в $\infty$ по формуле (6.35). Тогда решение задачи полного обтекания будет давать функция

$$w = \overline{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\, g(z). \tag{6.37}$$

***Пример 3.*** Полное обтекание профиля Жуковского $C$.

Функция

$$\omega = \omega(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4}\right) \tag{6.38}$$

осуществляет конформное отображение внешности $C$ на внешность некоторого круга $C$*. Построим еще линейное отображение



$$u = x - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{1}{x-a},$$

$$u = x - \frac{\varepsilon^2}{4} cth\frac{\pi x - a}{2}.$$

***Отображения круговых луночек***

9) Круговой луночкой мы будем называть область, ограниченную дугами окружностей $C_0$ и $C_1$ (рис. 2.22). Комбинируя элементарные функции, нетрудно получить отображение внешности круговой луночки на внешность круга, играющее важную роль в теории крыла аэроплана. Пусть $-a, a$ – угловые точки луночки, $\alpha$ – её угол, θ – угол между дугой $C_1$ и осью $x$; преобразование $\zeta = \dfrac{z+a}{z-a}$ переводит внешность луночки в угловую область Δ с углом $2\pi - \alpha$. Используя степенную функцию, а затем линейную, последовательно отобразим Δ на полуплоскость, а затем на внешность круга. Проделывая описанные преобразования, мы получим искомое отображение в виде

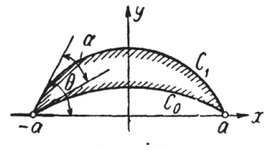


**Рис. 2.22**

$$w = f(z) = \frac{e^{-\frac{\theta\pi i}{2\pi-\alpha}}(z+a)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} + i(z-a)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}{e^{-\frac{\theta\pi i}{2\pi-\alpha}}(z+a)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} - i(z-a)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}}. \tag{2.12}$$

Полагая в формуле (2.12) $\alpha = 0$, мы получим отображение внешности дуги γ окружности на внешность единичного круга

$$w = f(z) = \frac{e^{-\frac{\theta i}{2}}\sqrt{a+z} + \sqrt{a-z}}{e^{-\frac{\theta i}{2}}\sqrt{a+z} - \sqrt{a-z}}. \tag{2.13}$$

При отображении (2.13) угловые точки $-a, a$ луночки переходят в точки $-1, 1$. Проведём через точку $w = 1$ окружнось $C$, касающуюся единичной и лежащую вне единичного круга. При отображении (2.13) окружности $C$ соответствует некоторая линия Γ, охватывающая дугу γ и имеющая точку возврата в точке $a$ (рис. 2.23). Функция (2.13) даёт отображение внешности Γ на внешность круга $C$. На этом замечании основывается известный метод получения классов профилей крыльев аэроплана (профили Жуковского).



Замечтим, что в силу принципа симметрии Шварца формулы [(2.16) — (2.18)] справедливы также для отображения внешности области $D$ $(\sigma, \theta)$ на внешность круга $|w| > 1$.

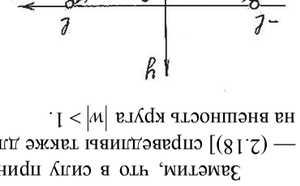


**Рис. 2.27**

11) Приведём ещё несколько формул, относящихся к отображениям криволинейных лучочек. Пусть лучочка $D(k_0,k,H)$ ограничена дугами окружностей $C_0$ и $C$ кривизн, соответственно, $k_0$ и $k$, причём $H$ означает длину принадлежащего $D$ отрезка общей нормали $C_0$ и $C$ (рис. 2.27).

Предположим, что угловые точки лучочки расположены в точках $z = \pm l$ и что окружности $C_0$ и $C$ пересекают мнимую ось, соответственно, в точках $i\lambda_1, i\lambda_2$. Тогда в силу свойства отображения (2.11), оно даёт конформное отображение лучочки, ограниченной $C_0$, $C$ на полосу $h_1 < v < h_2$, где

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{2}{\pi} arctg\lambda_1, \\ h_2 &= \frac{2}{\pi} arctg\lambda_2 . \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Таким образом, путём отображения (2.11) и дополнительного преобразования подобия плоскостей $z$ и $w$ мы можем достроить конформное отображение любой лучочки $D(k_0,k,H)$ на полосу $0 < v < h$.

Пусть угловые точки лучочки $D(k_0,k,H)$ расположены в точках $z = \pm l$; а $iH_1, iH_2$ суть точки пересечения дуг $C_0$ и $C$ с мнимой осью. При этих обозначениях функция

$$w = f(z) = \frac{1}{\pi}\frac{h}{h_2 - h_1}\left\{\ln\frac{l+z}{l-z} + \frac{1}{2}\right\} \tag{2.20}$$

будет давать конформное отображение лучочки $D$ на полосу $0 < v < h$, причём

$$\lambda_1 = \frac{H_1}{l},\ \lambda_1 = \frac{H_2}{l},$$

а $h_1$ и $h_2$ определяются по формуле (2.19). Геометрические параметры $k_0$, $k$, $H$ и $H_1$, $H_2$, $l$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$H = H_2 - H_1, k_0 = \frac{2\lambda_1}{(1+\lambda_1^2)\cdot l}, k = \frac{2\lambda_2}{(1+\lambda_2^2)\cdot l}.$$

Дифференцируя (2.20), получим

$$f'(z) = \frac{2}{\pi}\frac{h}{h_2 - h_1}\frac{l}{l^2 - z^2}. \tag{2.21}$$



ную контуром $ABC$, в прямой угол: линия $BC$ переходит в прямую $v = \sqrt{\dfrac{p}{2}}$, а линия $AB$ – в прямую $u = 0$. Поэтому функция

$$w = \left(\sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2 = z - p - i\sqrt{2pz - p^2}$$

осуществляет отображение области $D$ на верхнюю полуплоскость. Легко видеть, что скорость в бесконечности потока, определяемого последней формулой, равна единице, поэтому комплексным потенциалом течения со скоростью $v_\infty$ в бесконечно удаленной точке служит

$$w = v_\infty\left(z - p - i\sqrt{2pz - p^2}\right). \tag{6.30}$$

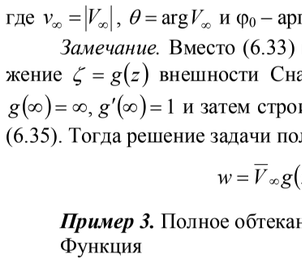


**Рис. 6.16**

Отметим, что производная (6.30) в вершине параболы

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = v_\infty\left(1 - i\frac{p}{\sqrt{2pz - p^2}}\right)\Bigg|_{z=0} = 0.$$

Таким образом, скорость построенного течения в этой точке обращается в нуль (такие точки называются критическими). Последний результат физически очевиден.

## 6.6. Задача полного обтекания. Условие Чаплыгина

***Пример 1.*** Рассмотрение задачи 4 начнем с частного случая, когда $C$ представляет собой окружность $|z| = R$, и будем вести его опять в гидродинамических терминах. Найдем сначала поток идеальной жидкости, обтекающий окружность $|z| = R$ и обладающий в бесконечности скорость $V_\infty = 1$, направленной вдоль положительной действительной оси (рис. 6.17).

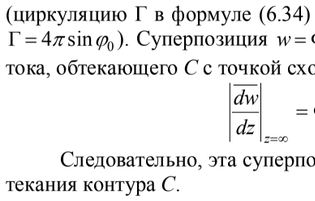


**Рис. 6.17**

Наложим дополнительное условие, чтобы поток был симметричен относительно действительной оси; тогда отрезки $(-\infty, -R)$ и $(R, \infty)$ этой оси принадлежат линии тока. По принципу

отвердения мы можем перейти к рассмотрению потока, обтекающего эти отрезки и верхнюю полуокружность $|z| = R$, т.е. к задаче 3.

Комплексным потенциалом поля является функция $w = \Phi(z)$, осуществляющая конформное отображение соответствующей области на полуплоскость с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = 1$. Этой функцией будет, очевидно,

$$w = \Phi(z) = z + \frac{R^2}{z},$$

ибо она преобразует полуокружность $|z| = R$ в отрезок $-2R < u < 2R$ и отрезки $-\infty < x < -R$, $R < x < \infty$, в отрезки $-\infty < u < -2R$, $2R < u < \infty$. Наряду с построенным симметричным потоком обтекание $|z| = R$ дает поток вихря, расположенного в точке $z = 0$, комплексный потенциал которого

$$w = \Phi_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\, z,$$

где $\Gamma$ – произвольная действительная постоянная. Так как скорость потока вихря в бесконечности равна нулю, то поток с комплексным потенциалом

$$w = \Phi(z) + \Phi_1(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} Ln\, z \qquad (6.31)$$

обтекает $|z| = R$ и обладает в бесконечности заданной скоростью 1. Величина скорости течения (6.31)

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \left|1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z}\right|,$$

следовательно, критические точки течения находятся из уравнения

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - R^2 = 0,$$

откуда

$$z_{kp} = \frac{\Gamma i}{4\pi} \pm \frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2 R^2 - \Gamma^2}.$$

Если $|\Gamma| \le 4\pi R$, то

$$|z_{kp}| = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 R^2 - \Gamma^2} = R;$$

при $|\Gamma| > 4\pi R$ имеем

$$|z_{kp}| = \frac{1}{4\pi}\left|\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 R^2}\right|.$$

Отсюда следует, что в первом случае критические точки лежат на окружности $|z| = R$, а во втором не лежат, причем одна из критических точек $z'_{kp}$ лежит вне окружности, а другая $z''_{kp}$ – внутри (по свойству корней



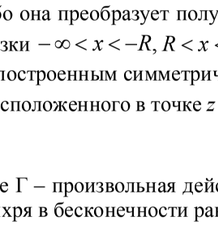
квадратного уравнения $z'_{kp} z''_{kp} = -R^2$). Мы ограничимся рассмотрением первого случая. Глядя на окружности $z = Re^{i\varphi}$, получим:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \left|1 - e^{-2i\varphi} - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\varphi}\right| = \left|2\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right|,$$

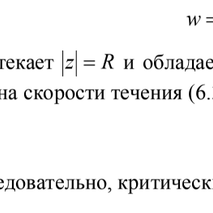
откуда для аргументов критических точек имеем:

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{\Gamma}{4\pi R}, \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin\frac{\Gamma}{4\pi R}. \qquad (6.32)$$

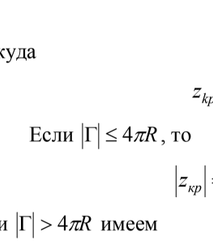
В точке $Re^{i\varphi_2}$ линия тока, подходящая к ней, разветвляется на две: одна обходит вершиною, а другая – нижнюю дугу окружности. В точке $Re^{i\varphi}$ обе линии снова соединяются (рис. 6.18, *а*). Первая из этих точек называется точкой разветвления, а вторая – точкой схода потока. Для симметричного потока ($\Gamma = 0$) критические точки совпадают с $R$. Поток вихря стремится сблизить эти точки – при возрастании $\Gamma$ обе точки поднимаются и при $\Gamma = 4\pi R$ сливаются в одну точку (рис. 6.18, *б*). Дальнейшее увеличение $\Gamma$ приводит к образованию замкнутых линий тока (рис. 6.18, *в*). Построение потока с заданной скоростью в бесконечности $V_\infty$ и с заданной величиной циркуляции $\Gamma$, обтекающего некоторый замкнутый контур, называется задачей полного обтекания. Формула (6.31) решает задачу полного обтекания окружности $|z| = R$ для случая, когда $V_\infty = 1$.



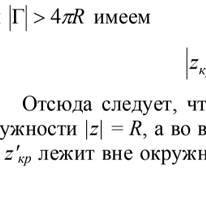
*а)*



*б)*



*в)*



*г)*

**Рис. 6.18**

Заметим, что вместо величины циркуляции $\Gamma$ можно задаваться (при достаточно малых $\Gamma$) точкой схода потока, ибо они связаны между собой формулой (6.32).

Пусть теперь задан произвольный замкнутый контур $C$, состоящий из конечных точек, на нем некоторая точка $z_0$ (точка схода потока) и комплексное число $V_\infty$ (скорость в $\infty$). Для решения задачи полного обтекания мы найдем конформное отображение

$$\zeta = f(z) \qquad (6.33)$$

внешности $C$ на внешность некоторого круга $|\zeta| > R$ с нормировкой

$$f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = \overline{V}_\infty$$



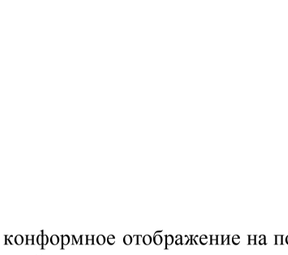


**Рис. 2.23**

10) Остановимся на получении ряда приближённых формул отображений круговых лучочек, которые получат важное применение в дальнейшем развитии теории. Начнём с отображения полуплоскости $y > 0$ с выключенной круговой лучочкой на полуплоскость $v > 0$; мы предположим малыми хорду $a$ дуги окружности и угол $\alpha$, образованный этой дугой с осью $x$ (рис. 2.24).

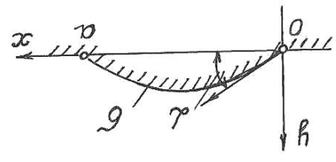


**Рис. 2.24**

Точно так же, как в 9°, непрерывно получить точную формулу для искомого отображения $w = f(z)$ с нормировкой $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$:

$$w = f(z) = \frac{z}{\sqrt[\pi]{\dfrac{\pi - \alpha}{\pi}}} + const. \qquad (2.14)$$

$$1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}}$$

Разлагая в ряд Тейлора по степеням $a$ и $\alpha$ элементарные функции, входящие в состав формулы (2.14), и замечая, что $\dfrac{a^2\alpha}{6} = \sigma$ с точностью до малых высших порядков выражает площадь выключенной лучочки, получим приближённую формулу

$$w = f(z) = z + \frac{\sigma}{\pi z} + const, \quad f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = 1.$$

Приведя к параллельному сдвигу, получим несколько более общий результат: функция

$$w = f(z) = z + \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{z - b} + const \qquad (2.15)$$



даёт конформное отображение на полуплоскость $v > 0$ области $D_1(\sigma,b)$, получаемой удалением из полуплоскости $y > 0$ площадки $\sigma$, ограниченной отрезком $b$, $b + a$ и дугой окружности малой кривизны. При этом между точками оси $x$ и $u$ устанавливается соответствие

$$u = x + \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{x - b} + const.$$

Отображая каждую из плоскостей на полосы, мы получим из доказанного следующие результаты. Функция

$$w = f(z) = z + \frac{\sigma}{\pi} cth\frac{z - b}{2} + const. \qquad f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = 1$$

даёт отображение на полосу $0 < v < 1$ области $D_2$ $(\sigma, b)$, получаемой из полосы $0 < y < 1$ удалением площадки $\sigma$ (рис. 2.25). Между точками прямых $y = 0$, $v = 0$ это отображение устанавливает соответствие

$$u = x + \frac{\sigma}{\pi} cth\frac{x - b}{2},$$

а между точками прямых $y = 1$ и $v = 1$

$$u = x + \frac{\sigma}{\pi} th\frac{x - b}{2}.$$

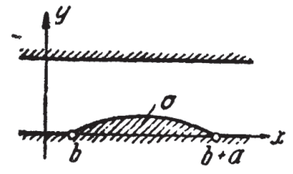


**Рис. 2.25**

Отметим, наконец, результат, получаемый из (2.15), с помощью вспомогательных дробно-линейных преобразований: функция

$$w = f(z) = z\left\{1 + \frac{\sigma}{2\pi}\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\right\} \qquad (2.16)$$

реализует конформное отображение на единичный круг круговой луночки $D(\sigma, \theta)$, образованной единичной окружностью и окружностью малой кривизны так, что угловые точки луночки близки к точке $e^{i\theta}$ (рис. 2.26). Отображение (2.16) устанавливает следующее соответствие точек окружностей $|z| = 1$, и $|w| = 1$:

$$\psi = \varphi - \frac{\sigma}{2\pi} ctg\frac{\varphi - \theta}{2}. \qquad (2.17)$$

Производная отображения (2.16) на границе

$$f'(e^{i\varphi}) = 1 - \frac{\sigma}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\varphi - \theta}{2}}, \qquad (2.18)$$

а производная в начале координат

$$f'(0) = 1 + \frac{\sigma}{2\pi}.$$

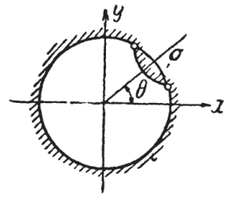


**Рис. 2.26**

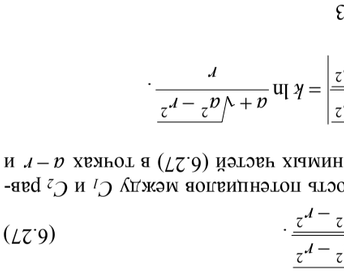



**Рис. 6.15**

$$w=\sqrt{z-\frac{p}{2}}. \qquad (6.29)$$

Полагая $w = u + iv$ и $z = x + iy$, найдем:

$$u^2-v^2=x-\frac{p}{2},\quad 2uv=y.$$

Подставляя $u=\dfrac{y}{2v}$ из второго уравнения в первое, получим:

$$\frac{y^2}{4v^2}-v^2=x-\frac{p}{2}.$$

Из последнего уравнения видно, что прямая $v=\sqrt{\dfrac{p}{2}}$ соответствует данной параболе. Функция (6.29) отображает область $D$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>\sqrt{\dfrac{p}{2}}$, модуль ее производной в точке $z = 0$ равен

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=0}=\left|\frac{1}{2\sqrt{z-\frac{p}{2}}}\right|_{z=0}=\frac{1}{\sqrt{2p}},$$

следовательно, комплексным потенциалом течения служит функция

$$w=v_0\sqrt{2pz-p^2}\,.$$

Величина скорости построенного течения в точке $z = x + i$ у параболы равна

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{pv_0}{\sqrt[4]{\left(2px-p^2\right)^2+4p^2y^2}}=\frac{\sqrt{pv_0}}{\sqrt{2x+p}}.$$

При удалении точки по параболе $y^2 = 2px$ в бесконечность она стремится к 0, скорость в вершине параболы максимальна. Линии тока представляют собой параболы, софокусные с $C$.

***Пример 3.*** Обтекание той же параболы; предполагается, что поток набегает на нее слева, причем этот поток симметричен относительно действительной оси (рис. 6.16). Из этих предположений следует, что отрицательная действительная ось является линией тока, и согласно принципу отвердения мы можем перейти к рассмотрению потока, обтекающего контур ABC (см. рис. 6.16). Функция (6.29) отображает область $D$, ограничен-



$$\frac{d}{ds}\arg\frac{dz}{d\zeta}=\frac{d}{ds}\operatorname{Im}2\ln(i+\zeta)=\frac{2\cos\theta}{1-m},\quad \frac{ds}{d\sigma}=\frac{k}{2}(1-m)^2.$$

Таким образом,

$$k_0=\frac{1}{2}Tk(1-m)^2+(1-m)k\cos\theta,$$

$$T=\frac{2}{(1-m)^2}\left\{\frac{k_0}{k}-1(1-m)\cos\theta\right\}.$$

Отправляясь от полученных выражений для $m$ и $T$, нетрудно получить искомую формулу (2.22). Согласно (2.23), имеем

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|\cdot\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=\frac{h}{m}\left(1+\frac{1}{6}mT+\frac{1}{3}\theta^2\right)\cdot\frac{k}{2}+\ldots=\frac{k}{n}\left\{1+\frac{n}{3}k+\frac{n}{6}k_0+\frac{n^2}{12}k^2+\frac{1}{3}\theta^2\right\}+\ldots$$

что и требовалось доказать.

## 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Описанные выше методы позволяют в большинстве случаев, встречающихся на практике, получить решать задачи об отображении. Однако часто приходится рассматривать области с настолько сложными границами, что отображающую функцию получить в явном виде, хотя ее существование обеспечивается теоремой Римана. Для этих случаев разработан ряд приближенных методов, важнейшие из которых коротко изложены ниже.

Приближенные методы делятся на группы. Одна группа методов без особой подготовительной работы и больших вычислений дает хотя и не очень точное, но для многих целей приемлемое приближение. Любая же попытка увеличения точности связана с настолько большой вычислительной работой, что метод теряет свои преимущества. Такие методы называются собственно приближенными методами.

Другую группу составляют методы, для которых зачастую требуется большие предварительные вычисления. Но коль скоро метод применен в действие, то не представляет большого труда достигнуть любой заданной точности. Поскольку все методы второй группы в той или иной мере основываются на теории интегральных уравнений, их называют методами интегральных уравнений. Эти методы особенно подходят для работы на вычислительных машинах.



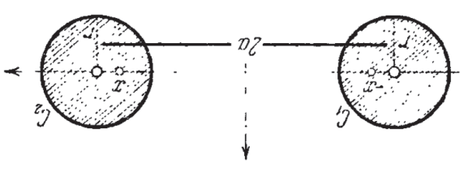


**Рис. 6.11**

***Пример 4.*** Поле двухпроводной линии является частным случаем поля предыдущей задачи (рис. 6.12). Абсциссы $x$ точек $z_1$ и $z_2$, симметричных одновременно относительно обеих окружностей, определяются из уравнения

$$(a+x)(a-x)=r^2.$$




**Рис. 6.12**

Откуда

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{a^2-r^2}\,.$$

Формула (6.25) принимает вид

$$w=ki\,Ln\frac{z+\sqrt{a^2-r^2}}{z-\sqrt{a^2-r^2}}. \qquad (6.27)$$

Зашишем условие того, что разность потенциалов между $C_1$ и $C_2$ равна $V_0$. Для этого вычислим разность мнимых частей (6.27) в точках $a-r$ и $-a+r$:

$$V_0=k\ln\left|\frac{a-r+\sqrt{a^2-r^2}}{a-r-\sqrt{a^2-r^2}}\right|=k\ln\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r}.$$



Из формулы (2.21) можно получить одну приближённую формулу, важную для приложений. Пусть $z_0$ − точка дуги $C$, $n$ − длина отрезка нормали к $C$ в точке $z_0$, расположенного в луночке $D$, и $\theta$ − угол между касательными к $C$ и $C_0$, проведёнными из концов отрезка $n$ (рис. 2.28).

Допустим теперь, что $h$ и вместе с ней величины $k$-$k_0$ и $n$ суть бесконечно малые первого порядкамалости, а кривизны $k_0$ и $k$ ограничены. При этих условиях имеет место формула

$$|f'(z_0)|=\frac{h}{n}\left(1+\frac{n}{3}k+\frac{n}{6}k_0+\frac{n^2}{12}k^2+\frac{1}{3}\theta^2\right)+\rho, \qquad (2.22)$$

где $\rho$ можно представить в виде однородного многочлена третьей степени относительно $n$, $|\theta|$, $|k-k_0|$ с ограниченными коэффициентами.

В формуле (2.22) кривизну $k_0(k)$ надо брать со знаком плюс, если $C_0(C)$ обращена к $D$ вогнутостью, и со знаком минус, если $C_0(C)$ обращена к $D$ выпуклостью (на рис. 2.28 $k_0$ − положительна, $k$ − отрицательна).

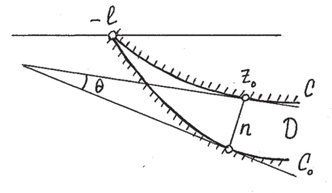



**Рис. 2.28**

Для вывода (2.21) из (2.22) в последней формуле надо выразить параметры $l$, $h_2$, $h_1$ и $z_0$ через $n$, $\theta$, $k_0$ и $k$ и затем разложить функцию $|f'(z_0)|$ по степеням параметров $n$, $\theta$, $k$–$k_0$ до членов второго измерения включительно. Однако фактическая реализация этого пути приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам. Значительно проще получить (2.22), отправляясь от частного случая, когда $C$ совпадает с осью $x$, а $l$ равно единице. В этом случае формула (2.21) нам даст при $z_0 = x$

$$A=|f'(z_0)|=f(x)=\frac{2h}{\varphi_0}\frac{1}{1-x^2},$$

где $2\varphi_0$ есть угловая мера дуги $C_0$,

$$\varphi_0=\arcsin k_0=k_0+\frac{1}{6}k_0^2+\ldots$$

Обозначая через $m$ длину отрезка нормали к действительной оси в точке $x$, заключённого в луночке (рис. 2.29), будем, очевидно, иметь

$$x=\frac{\sin\theta}{k_0},\ mk_0=\cos\theta-\cos\varphi_0,$$

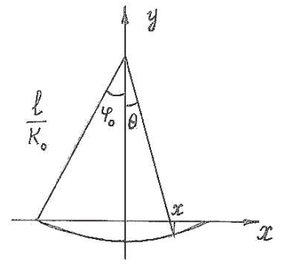



**Рис. 2.29**

Эта формула позволяет определить $k$ по заданной $V_0$:

$$k = \frac{V_0}{2\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{r}} \approx \frac{V_0}{2\ln\dfrac{2a}{r}},$$

если $r$ мало в сравнении с $a$.

***Пример 5.*** Распределение температуры между двумя эксцентричными цилиндрическими трубами, нагретыми до температур $t_1$ и $t_2$ (рис. 6.13).

Задача сводится к построению теплового потока в кольце между окружностями $C_1$ и $C_2$. Для решения ее, как и в предыдущих примерах, мы построим точки $z_1$ и $z_2$, симметричные одновременно относительно обеих окружностей $C_1$ и $C_2$. Это построение указано на рис. 6.13 (из концов диаметра $C_1$ восстанавливаются перпендикуляры к линии центров; их концы $a$ и $b$ соединяются прямой до пересечения с линией центров в $z_2$; прямая, соединяющая концы $b$ и $c$, в пересечении с линией центров даст $z_1$).

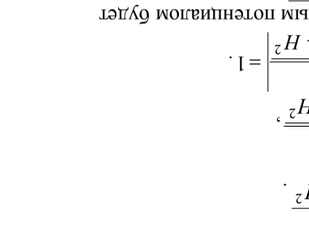



**Рис. 6.13**

После этого дробно-линейным преобразованием

$$\omega = \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

сводим задачу к определению температуры в кольце между концентрическими окружностями $C'_1$ и $C'_2$; ее решение дает мнимая часть комплексного потенциала теплового потока

$$v = \operatorname{Im}\Psi(\omega) = k\ln|\omega| + l,$$

причем, распоряжаясь постоянными $k$ и $l$, можно добиться заданных значений температуры на окружностях $C_1$ и $C_2$. Подставляя $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ вместо $\omega$, получим распределение температур в плоскости $z$.

### 6.5. Задача обтекания бесконечной кривой

При рассмотрении задачи 3 будем придерживаться гидродинамической терминологии. Область $D$ здесь снова оказывается односвязной, следовательно, комплексный потенциал поля $w = \Phi(z)$ является однозначной функцией.

Мнимая часть $\Phi(z)$ должна сохранять постоянное значение на линии тока $C$; кроме того, можно показать, что точке $z = \infty$ соответствует бесконечно удаленная точка $C$.



Перечисленным условиям удовлетворяет функция $w = \Phi(z)$, осуществляющая взаимно-однозначное конформное отображение области $D$ на верхнюю полуплоскость с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$. Если для кривой $C$ точка $z = \infty$ не является угловой, то мы дополнительно заключаем величина скорости в бесконечности $|\Phi'(\infty)| = v_\infty$. Можно показать, что такое отображение всегда существует и определяется с точностью до постоянного слагаемого. Если $z = \infty$ является угловой точкой $C$, то величина $|\Phi'(z)|$ обращается в ней в 0 или $\infty$ (эффект острия или тупого угла) и ее следует задавать в другой, правильной точке $C$.

***Пример 1.*** Обтекание плотины высоты $H$ бесконечно глубоким потоком жидкости с заданной скоростью $v_\infty$ (рис. 6.14).

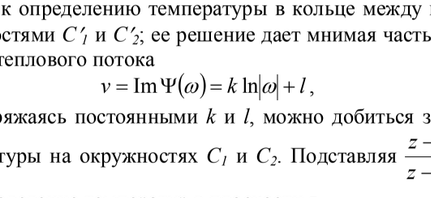



**Рис. 6.14**

Мы знаем функцию, осуществляющую отображение области $D$ на полуплоскость:

$$w = \sqrt{z^2 + H^2}.$$

Производная этой функции

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2+H^2}},$$

откуда

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{z}{\sqrt{z^2+H^2}}\right| = 1.$$

Следовательно, искомым комплексным потенциалом будет

$$w = v_\infty\sqrt{z^2+H^2}. \qquad (6.28)$$

Скорость течения (6.28) обращается в $\infty$ в точке $C$, где $z = iH$ (эффект острия), и в 0 в точках $B$ и $D$, где $z = 0$ (эффект тупого угла). Результат этот физически вполне наглядён.

***Пример 2.*** Обтекание параболы $y^2 = 2px$ потоком, величина скорости которого в точке z = 0 равна $v_0$ (рис. 6.15).

Найдем отображение области $D$ на верхнюю полуплоскость. Для этого, как вспомним, что функция $w = \sqrt{z}$ отображает на полуплоскости внешность параболы с фокусом в точке $z = 0$. Фокус нашей параболы находится в точке $z = p/2$, поэтому мы рассмотрим функцию



но тогда $f'(x) = \dfrac{h}{m}\dfrac{2(\cos\theta - \cos\varphi_0)}{\varphi_0\left(k_0 - \dfrac{\sin^2\theta}{k_0}\right)}$.

Разлагая по степени $k_0$ и $\theta$ числитель и знаменатель последней дроби, получим

$$2mk_0 = 2(\cos\theta - \cos\varphi_0) = \left(\varphi_0^2 - \theta^2\right) - \frac{1}{12}\left(\varphi_0^4 - \theta^4\right) + \ldots = k_0^2 - \theta^2 + \frac{1}{4}k_0^4 + \frac{1}{12}\theta^4 + \ldots$$

$$\varphi_0\left(k_0 - \frac{\sin^2\theta}{k_0}\right) = \left(k_0 + \frac{1}{6}k_0^3 + \ldots\right)\left(k_0 - \frac{\theta^2 - \frac{1}{3}\theta^4 + \ldots}{k_0}\right) =$$

$$= k_0^2 - \theta^2 + \frac{1}{6}k_0^4 + \frac{1}{3}\theta^4 - \frac{1}{6}k_0^2\theta^2 + \ldots$$

В этих разложениях мы сохраняем члены четвёртого порядка, ибо главные члены суть малые второго порядка, а нас интересует отношение разности до второго порядка малости включительно.

Отсюда с точностью до малых второго порядка включительно получим:

$$f'(x) = \frac{h}{m}\left\{1 + \frac{1}{12}k_0^2 + \frac{1}{4}\theta^2 + \ldots\right\},$$

или, подставляя $k_0^2 = 2mk_0 + \theta^2 + \ldots$, окончательно получим

$$A = f'(x) = \frac{k}{m}\left\{1 + \frac{1}{6}mk_0 + \frac{1}{3}\theta^2\right\} + \ldots \qquad (2.23)$$

Наш вывод мы провели в предположении, что длина хорды, стягивающей дугу $C_0$, равна 2, но в силу безразмерного характера элементов полученной формулы она будет справедлива для дуг $C_0$ с любой хордой.

Покажем теперь, каким образом при помощи дробно-линейного преобразования из формулы (2.23) можно получить искомую формулу (2.22).

Рассмотрим в плоскости $\zeta$ луночку $\Delta$, отраниченную действительной осью и дугой $\gamma$ окружности кривизны $T$. Пусть $(0,-im)$ есть отрезок мнимой оси, заключённый в $\Delta$, и $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ угол, образованный $\gamma$ с мнимой осью (рис. 2.30).

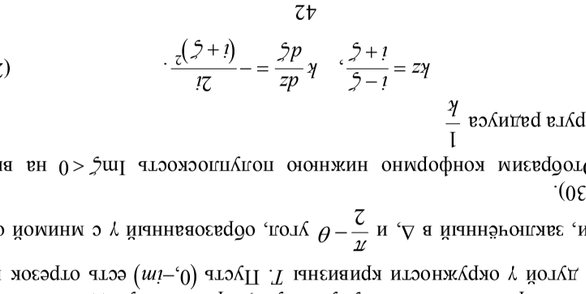



**Рис. 2.30**

Отображим конформно нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$ на внешность круга радиуса $\dfrac{1}{k}$

$$kz = \frac{i-\zeta}{i+\zeta}, \quad k\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2i}{(i+\zeta)^2}. \qquad (2.24)$$

При этом отображении луночка $\Delta$ перейдёт в круговую луночку $D$, ограниченную дугой $C$ окружности $|z| = \dfrac{1}{k}$ и дугой $C_0$ окружности некоторой кривизны $k_0$. Точка $\zeta = 0$ переходит в точку $z = \dfrac{1}{k}$, отрезок $m$ переходит в отрезок $n$ действительной оси:

$$kn = \frac{1+m}{1-m} - 1 = \frac{2m}{1-m}, m = \frac{nk}{2}\left(1 - \frac{1}{2}nk + \frac{1}{4}n^2k^2 + \ldots\right),$$

дуга $C_0$ образует с осью $x$ угол $\dfrac{\pi}{2} + \theta$.

Найдём теперь связь между кривизной $k_0$ и другими параметрами. Для этой цели обозначим через $d\sigma$ элемент дуги $C_0$, а через $\alpha = \alpha(\sigma)$, $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{2} + \theta$ – угол касательной к $C_0$ с осью $x$. Пусть при отображении (2.24) элемент $d\sigma$ соответствует элементу $ds$. Имеем $k_0 = \dfrac{d\alpha}{d\sigma}$.

С другой стороны, бесконечно малое приращение угла $d\alpha$ можно представить следующим образом:

$$d\alpha = Tds + \left\{\left[\arg\frac{dz}{d\zeta}\right]_{\zeta=-im+e^{i\theta}ds} - \left[\arg\frac{dz}{d\zeta}\right]_{\zeta=-im}\right\}.$$

Следовательно, $k_0 = T\dfrac{ds}{d\sigma} + \dfrac{d}{ds}\arg\dfrac{dz}{d\zeta}\cdot\dfrac{ds}{d\sigma}$,

но согласно (2.24) в точке $\zeta = im$ имеем

менно относительно обеих данных окружностей $C_1$ и $C_2$. В самом деле, окружность $C^*$ и прямая $a_1a_2$ ортогональны и к $C_1$, и к $C_2$.

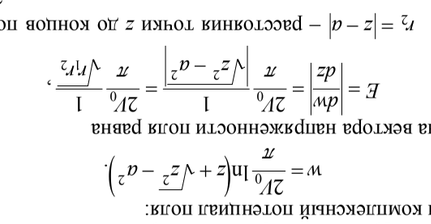



**Рис. 6.10**

Если мы теперь дробно-линейным отображением преобразуем точки $z_1$ и $z_2$ в точки 0 и ∞ вспомогательной плоскости $\omega$:

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

то окружности $C_1$ и $C_2$ перейдут в окружности $C'_1$ и $C'_2$, для которых точки $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ являются симметричными. Отсюда следует, что окружности $C'_1$ и $C'_2$ концентрические: их центр совпадает с точкой $\omega = 0$.

Комплексным потенциалом вспомогательного поля согласно (6.25) служит $w = ki\,Ln\,\omega$ (рис. 6.11), а для первоначального поля – функция

$$w = ki\,Ln\frac{z - z_1}{z - z_2}. \qquad (6.26)$$

Распоряжаясь константой $k$, мы можем добиться заданной разности потенциалов между $C_1$ и $C_2$.

Комплексный потенциал (6.26) совпадает с комплексным потенциалом (6.15) поля двух разноименных точечных зарядов, если считать постоянную $k = 2q$. Поэтому картина поля во внешности $C_1$ и $C_2$ совпадает с картиной поля. Эквипотенциальными линиями поля служат аполлониевы окружности, а силовыми линиями – окружности, проходящие через $z_1$ и $z_2$ (см. рис. 6.11). Окружности $C_1$ и $C_2$ принадлежат семейству эквипотенциальных линий.

Из этого примера видно, что картина поля не изменяется (по крайней мере, в части плоскости), если какие-либо из эквипотенциальных линий заменить проводниками. В этом состоит так называемый принцип отвердения. В гидромеханике согласно этому принципу можно заменять твердыми стенками линии тока жидкости.



### 3.1. Собственно приближенные методы

***Метод растяжения.*** Пусть односвязная область $G_0$ плоскости $z$ целиком лежит внутри единичного круга. Покажем сначала, что любую односвязную и однолистную область $G_\zeta$ на числовой плоскости или числовой сфере, имеющую более одной граничной точки, можно отобразить на область вида $G_0$ при помощи элементарных функций. Действительно, если область $G_\zeta$ имеет хотя бы одну внешнюю точку $\zeta = \zeta_a$, то существует круг $|\zeta - \zeta_a| < \varepsilon$, не содержащий ни одной точки $G_\zeta$. Отображая этот круг дробно-линейной функцией на внешность единичного круга, мы переведем область $G_\zeta$ целиком внутрь этого последнего. Если же $G_\zeta$ не имеет внешней точки, т. е. если ее граница представляет собой разрез, то можно прежде всего перевести линейным отображением две заданные граничные точки в точки $\zeta^* = \pm 1$. Преобразование $\zeta^* = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$ переводит внешность любого разреза между точками $\zeta^* = +1$ и $\zeta^* = -1$ во внешность некоторой области, так что образ $G_\zeta$ в плоскости $w$ уже имеет внешние точки.

Можно считать, что $G_0$ содержит точку $z = 0$, ибо этого всегда можно достигнуть, отображая единичный круг на себя дробно-линейным преобразованием. Тогда существует круг $|z| < \rho$, целиком лежащий в $G_0$; пусть $\rho_0$ – наибольшее значение $\rho$, обладающее этим свойством. Тогда найдется функция $w_1(z)$ (так называемая функция растяжения), которая отображает $G_0$ в область $G_1$, также лежащую внутри единичного круга и содержащую круг $|w_1| < \rho_1$, причем $\rho_1 > \rho_0$ и $w_1(0) = 0$. Таким образом, область $G_1$ заполняет единичный круг «лучше», чем $G_0$. Этот прием можно повторять, отображая $G_1$ на $G_2$ и вообще область $G_n$ на $G_{n+1}$, причем круг $|w_\nu| < \rho_1$ каждый раз лежит внутри $G_\nu$, $\rho_{n+1} > \rho_n$. Если выбирать функции растяжения подходящим образом, то $\rho_n$ при достаточно больших $n$ будет как угодно мало отличаться от 1, т.е. граница $G_n$ будет лежать как угодно близко к единичной окружности.

Согласно лемме Шварца, функция $w_n(z)$, отображающая $G_0$ на $G_n$, как угодно мало отличается от функции $w(z)$, отображающей $G_0$ на единичный круг. Таким образом, последовательность сходится к $w_n(z) = w(z)$, и поскольку функции растяжения можно задать явным образом, то мы получаем приближенный метод нахождения конформного отображения области $G_0$ на единичный круг.

Функции растяжения можно задавать различными способами. Одна из них, пригодная во всех случаях и поэтому особенно важна для теоретических исследований (доказательство теоремы Римана об отображении),



принимает наименьшее значение.

Решение этой задачи дается функцией

$$f^*(z) = \frac{w'(z)}{|w'(z_0)|} \qquad (3.4)$$

и определяется однозначно с точностью до множителя, равного по модулю единице. После этого отображающая функция $w(z)$ определяется интерполяцией. Значение минимума равно

$$I_1(f^*) = \frac{2\pi}{|w'(z_0)|}.$$

Эту вариационную задачу обычно решают методом Ритца. Положим

$$f(z) = \varphi^2(z), \text{ т.е. } |f(z)| = \varphi(z)\overline{\varphi(z)}$$

и примем в качестве $n$-го приближения выражение

$$\varphi_n(z) = w_0(z) + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu w_\nu(z), \qquad (3.5)$$

где $w_\nu(z)$ – соответствующим образом подобранные линейно независимые функции. Для того чтобы условие $f(z_0) = 1$ выполнялось при любых $\alpha_\nu$, должно быть $w_0(z_0) = 1$ и $w_\nu(z_0) = 0$ при $\nu > 0$. Определим скалярное произведение формулой

$$(w_\nu, w_\mu) = \int_C w_\nu(z)\overline{w_\mu(z)}|dz|.$$

Тогда среди всех функций (3.5) наименьшее значение интеграду $I_1(\varphi_n) = (\varphi_n, \varphi_n)$ принадлежит функция $\varphi_n^*(z)$, которая удовлетворяет условиям

$$(\varphi_n^*, w_\nu) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Относя получаемую систему линейных уравнений относительно $\alpha_\nu$.

Решение $\varphi_n^*(z)$ записывается в следующем виде:

$$\varphi_n^*(z) = \frac{\begin{vmatrix} w_0(z) & (w_0, w_1) & (w_0, w_2) & \ldots & (w_0, w_n) \\ w_1(z) & (w_1, w_1) & (w_1, w_2) & \ldots & (w_1, w_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_n(z) & (w_n, w_1) & (w_n, w_2) & \ldots & (w_n, w_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (w_1, w_1) & (w_1, w_2) & \ldots & (w_1, w_n) \\ (w_2, w_1) & (w_2, w_2) & \ldots & (w_2, w_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (w_n, w_1) & (w_n, w_2) & \ldots & (w_n, w_n) \end{vmatrix}}.$$

Наиболее подробно изучен случай, когда $\varphi_n(z)$ есть многочлен степени $n$. Тогда $\varphi_\nu(z) = (z - z_0)^\nu$ и последовательность $\varphi_n^*(z)$ сходится к значению). Потенциальная функция $V(x, y) = \mathrm{Im}\,F(z)$ сохраняет постоянные значения на линиях $C_1$ и $C_2$, причем разность ее значений $V_2 - V_1$ задана ($V_2$ и $V_1$ – соответственно значения потенциальной функции на линиях $C_1$ и $C_2$).

Отсюда следует, что функция $w = F(z)$ осуществляет однозначное отображение области $D$ на горизонтальную полосу в плоскости $w$, ширина которой равна $V_2 - V_1 = V_0$.

Далее, мы можем утверждать, что двум (различным) граничным точкам прямолинейной полосы в плоскости $w$, лежащим в бесконечно удаленной точке (мы будем их условно обозначать символами +∞ и -∞), соответствуют точки границы $D$, лежащие в бесконечности (которые мы будем обозначать теми же символами $\pm\infty$).

В самом деле, так как через точки $w = \pm\infty$ проходит бесчисленное множество эквипотенциальных линий $V = C$, то и через точки, им соответствующие, также проходит бесчисленное множество эквипотенциальных линий. Из физических соображений ясно, что такие точки не могут быть конечными граничными точками.

Всем перечисленным условиям удовлетворяет взаимно однозначное конформное отображение $w = F(z)$ области $D$ на полосу $0 < \mathrm{Im}\,w < V_0$ с соответствием бесконечно удаленных точек: $F(\pm\infty) = \pm\infty$, такое отображение всегда существует и определяется с точностью до постоянного слагаемого, т.е. что решение задачи 1 всегда возможно.

***Пример 1.*** Конденсатор, состоящий из двух шин в форме полуплоскостей. Одна из этих полуплоскостей составляет продолжение другой, расстояние между ними $2a$ и разность потенциалов $2V_0$.

Сечение конденсатора плоскостью, перпендикулярной к границам шин, изображено на рис. 6.8. Задача сводится к построению плоского поля двух полуграничных $-\infty < x < -a$, $a < x < \infty$ с заданной разностью потенциалов между ними. Она является частным случаем задачи 1: линии $C_1$ представляет собой двугранный разрез ABC, а $C_2$ – разрез DEF. Отображение области $D$ на полосу шириной $2V_0$ с нужной нормировкой осуществляет логарифмическая функция. Отбрасывая несущественное постоянное слагаемое, получим комплексный потенциал поля:

$$w = \frac{2V_0}{\pi}\ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right).$$

Величина вектора напряженности поля равна

$$E = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{2V_0}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}\right| = \frac{2V_0}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}},$$

где $r_1 = |z + a|$, $r_2 = |z - a|$ – расстояния точки $z$ до концов полуплоскости. Из последней формулы следует, что в начале координат $E = \frac{2V_0}{\pi a}$, т.е. мало

отличается от напряженности поля обычного плоского конденсатора $\frac{V_0}{a}$. При приближении к концам полупрямых $E$ неограниченно возрастает (эффект острия); при удалении точки $z$ в бесконечность $E$ стремится к нулю.

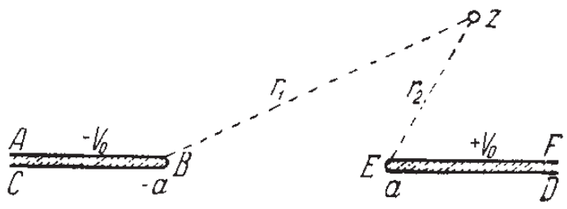



**Рис. 6.8**

***Пример 2.*** Поток идеальной жидкости в канале с параллельными прямолинейными берегами ширины $2H$, в котором имеется еще препятствие в виде стенки, перпендикулярной к берегам канала и занимающей половину его ширины (рис. 6.9). Расход жидкости $Q$ задан.

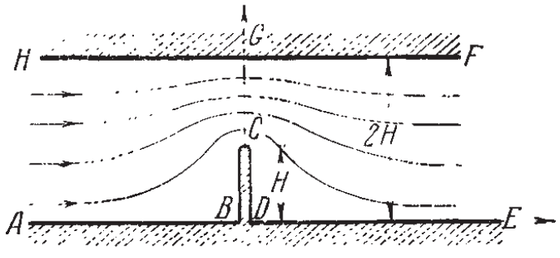



**Рис. 6.9**

Задача сводится к отображению области $D$ на полосу. Преобразованием подобия $\zeta = \frac{\pi}{2H} z$ сводим эту область к области, где $h = \pi/2$. Формула, отображающая $D$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$:

$$\omega = \sqrt{th^2 \frac{\zeta}{2} + tg^2 \frac{\pi}{4}} = \sqrt{th^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}.$$



1) Сходимость довольно медленная, особенно на границе области; в приложениях же наиболее важны именно граничные значения.

2) Функции растяжения сравнительно сложны, причем для каждого следующего шага необходимо заново выбирать очередную функцию. Это затрудняет применение указанного метода при использовании вычислительных машин. Метод применим только тогда, когда значения функции можно задать графически.

Ввиду этого он используется лишь при очень небольших требованиях точности или как подготовительный к методу Теодорсена.

Этот метод переносится и на отображения двусвязных областей на круговое кольцо. Функции растяжения определяются здесь так, чтобы то одна, то другая граничная кривая как можно точнее отображались на концентрические окружности.

***Вариационный метод***

Предлагаемый метод основывается на теореме о среднем. Если $F(w)$, $w = \rho e^{i\varphi}$ − аналитическая функция в единичном круге, непрерывная вплоть до границы, то имеет место равенство:

$$\int_0^{2\pi} F\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi = 2\pi F(0).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \left|F\left(e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \geq 2\pi \left|F(0)\right|,$$

причем равенство возможно лишь тогда, когда $F(w) = const$.

Пусть теперь $G$ − однолистная и односвязная область плоскости $z$ с кусочно-гладкой границей $C$. Пусть, далее, функция $w(z)$ конформно отображает эту область на единичный круг плоскости так, что точка $z = z_0$ переходит в точку $w = 0$. Если $f(z)$ − произвольная аналитическая в $G$ функция, непрерывная вплоть до границы, то

$$\int_C |f(z)||dz| = \int_0^{2\pi} |f(z(w))||z'(w)| d\varphi \geq 2\pi \left|\frac{f(z_0)}{w'(z_0)}\right|, \qquad (3.2)$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда $\frac{f(z)}{w'(z)} = const$, т.е. когда $f(z) = cw'(z)$. Поставим следующую вариационную задачу: среди всех аналитических в $G$ функций $f(z)$, непрерывных вплоть до границы и удовлетворяющих условию $f(z_0) = 1$, найти ту функцию, для которой интеграл

$$I_1(f) = \int_C |f(z)||dz| \qquad (3.3)$$



строится следующим образом. Пусть $z = a = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ − ближайшая к началу координат точка границы $G_0$. Тогда сначала при помощи функции

$$z^* = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

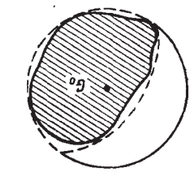
эта точка переводится в точку $z^* = 0$. Далее пусть

$$z^{**} = \sqrt{z^*},$$

и наконец,

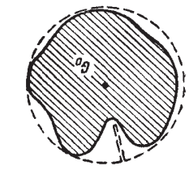
$$w_1 = \frac{\sqrt{a - z^{**}}}{1 - \sqrt{\bar{a}}z^{**}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{1 - \bar{a}z} - \sqrt{a - z}}{\sqrt{1 - \bar{a}z} - \sqrt{\bar{a}}\sqrt{a - z}}. \qquad (3.1)$$

Корни определяются здесь так, чтоб точка $z = 0$ переходила в $w_1 = 0$. Так как точка ветвления $z = a$ лежит на границе $G_0$, то отображение конформно всюду внутри $G_0$. Кроме того, $z(w_1)$ − однозначная функция, т.е. каждой точке $G_1$ соответствует только одна точка $G_0$, так что $G_1$ область однолистности на плоскости $w_1$. Более подробное исследование показывает также, что круг $|z| < \rho_0$ отображается функцией (3.1) на область, содержащую внутри себя круг $|w_1| < \rho_1$, $\rho_1 > \rho_0$. Тем самым доказано растягивающее свойство функции.




*Круговая луночка*

В конкретных случаях функции растяжения (3.1) сходятся слишком медленно. Поэтому был предложен целый ряд функций растяжения, сходящихся быстрее, которые хотя и не всегда, но в большинстве случаев пригодны для применений. Все эти функции обладают одним общим свойством, а именно они отображают некоторую подобласть $G^*$ единичного круга, содержащую $G_0$, на единичный круг, оставляя неподвижным начало координат. Область $G^*$ должна быть по возможности «ближе», и в то же время быть не слишком сложной, чтобы функцию можно было легко вычислить (рис. 3.1). В литературе подробнее остальных изучены следующие области:




*Круг с радиальным разрезом*

- круговая луночка;
- круг с радиальным разрезом;
- круговой треугольник с двумя прямыми углами.

*Круговой треугольник*

**Рис. 3.1**

При всех его достоинствах этот метод на практике обнаруживает следующие существенные недостатки:



При этом берегу ABCDE канала соответствует отрезок $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, а берегу FGH – полупрямые $\left(\sqrt{2}, \infty\right)$ и $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$. Мы преобразуем полуплоскость $\omega$ в себя так, чтобы точки A, H и E, F перешли в точки 0 и $\infty$:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2} + \omega}{\sqrt{2} - \omega} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{th^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}\right)^2}{1 - th^2 \frac{\pi z}{4H}} = \left(\sqrt{2} ch \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{ch \frac{\pi z}{2H}}\right)^2.$$

Так как точка $C = Hi$ переходит в точку $\omega = 0$, а затем в точку $\omega_1 = 0$, то берегу A...E соответствует положительная, а берегу F...H – отрицательная полуось. Остается преобразовать полуплоскость в полосу ширины $Q$, что осуществляется логарифмической функцией:

$$w = \frac{Q}{\pi} \ln \omega_1 = \frac{2Q}{\pi} \ln\left(\sqrt{2} ch \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{ch \frac{\pi z}{2H}}\right).$$

**Поле в кольце.** Задача 2 отличается от задачи 1 тем, что проводники $C_1$ и $C_2$ не имеют общих точек и область $D$ между ними двусвязна. Метод, предложенный в предыдущем пункте, здесь неприменим, ибо взаимно однозначное и конформное отображение области $D$ на полосу невозможно. Однако задача легко разрешается, если известно взаимно однозначное и конформное отображение $w = f(z)$ области $D$ на круговое кольцо $r < |\omega| < R$. Для кругового кольца комплексным потенциалом, очевидно, служит многозначная функция

$$w = k\, i\, Ln\, \omega, \qquad (6.25)$$

где $k$ – действительная постоянная (в самом деле, мнимая часть (6.25) $V = k \ln|\omega|$ на окружностях $|\omega| = r$ и $|\omega| = R$ принимает постоянные значения). Распоряжаясь постоянной k, мы можем добиться любой заданной разности потенциалов $V_0$ между окружностями кольца. Теперь остается лишь подставить $f(z)$ в (6.25) вместо ω, и получим комплексный потенциал в области $D$, дающий решение задачи 2: $w = k\, i\, Ln\, f(z)$.

Построенный потенциал является многозначной функцией (в силу многозначности его действительной части $U = -k\, Arg\, f(z)$). Физически это вполне допустимо, ибо его производная, определяющая поле, однозначна.

***Пример 3.*** Поле двух разноименно заряженных параллельных круговых цилиндров, расположенных вне друг друга. Задача построения такого поля сводится к задаче построения поля во внешности двух окружностей $C_1$ и $C_2$. Пусть $a_1$ и $a_2$ – центры этих окружностей. Построим на общей к ним касательной $b_1 b_2$, как на диаметре, полуокружность $C^*$ (рис. 6.10). Точки $z_1$ и $z_2$ пересечения $C^*$ с линией центров $a_1 a_2$ симметричны одновре-

$$\int_0^{2\pi} F(\psi) ctg\frac{\varphi-\psi}{2}d\psi = \int_0^{2\pi}[F(\psi)-F(\varphi)]ctg\frac{\varphi-\psi}{2}d\psi =$$
$$= -\int_0^{\pi}[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]ctg\frac{t}{2}dt. \qquad (3.9)$$

В частности, если $F(\varphi)$ непрерывно дифференцируема, то при малых $\varepsilon$ имеет место приближенное равенство

$$\int_0^{\varepsilon}[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]ctg\frac{t}{2}dt \approx 4\varepsilon F'(\varphi), \qquad (3.10)$$

а интеграл от $\varepsilon$ до $\pi$ вычисляется обычными приближенными методами.

Соответствующим образом измененная последовательность (3.8) сходится к решению $\theta(\varphi)$ исходной задачи, если

$$\left|\frac{d}{d\theta}\log\rho(\theta)\right| < \varepsilon < 1. \qquad (3.11)$$

Геометрически это условие означает, что граница $C$ области $G$ пересекает окружности $\rho = const$ под углами, меньшими 45°. В частности, любой луч, проведенный из начала координат, пересекает границу лишь один раз.

При этом погрешность $n$-го приближения $\theta^{(n)}(\varphi)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\left|\theta^{(n)}(\varphi)-\theta(\varphi)\right| \le C\frac{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^n}{1-\sqrt{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon$ – величина, определяемая неравенством (3.11).

Таким образом, последовательные приближения сходятся со скоростью геометрической прогрессии. Более точные оценки содержатся в соответствующей литературе.

Вычисления особенно упрощаются, если участвующие в них функции разложить в ряды Фурье и применить метод тригонометрической интерполяции. С этой целью выделим на единичной окружности плоскости $z$ $2N$ точек с аргументами

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{N},\ k = 0,1,\ldots,2N-1$$

и положим

$$\theta_k^{(\nu)} = \theta^{(\nu)}(\varphi_k), \quad F_k^{(\nu)} = \log\rho\left(\theta^{(\nu)}(\varphi_k)\right). \qquad (3.12)$$

Из выражения

$$F_k^{(\nu)} = \frac{a_0^{(\nu)}}{2} - \sum_{n=1}^{N}\left[a_n^{(\nu)}\cos n\varphi_k + b_n^{(\nu)}\sin n\varphi_k\right]$$

найдем приближенные значения коэффициентов Фурье



Линии уровня первой функции совпадают с траекториями движущихся частиц, т.е. с линиями тока жидкости. Эта функция называется функцией тока; имеем:

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (6.20)$$
$$\psi(x,y) = \int_{z_0}^{z} -V_y dx + V_x dy + c.$$

С помощью функции $\psi$ можно выразить поток жидкости через произвольную кривую $C$, лежащую в области $D$. Имеем

$$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}^\circ)ds = (\boldsymbol{V},-idz) = (V_x + iV_y, dy - idx) = V_x dy - V_y dx.$$

В силу (6.17) последнее выражение совпадает с $d\psi$ и поток

$$Q = \int_C (V,n^\circ)ds = \int_c d\psi = \psi(x_2,y_2) - \psi(x_1,y_1), \qquad (6.21)$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – концы $C$.

Функция

$$w = \Phi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

называется комплексным потенциалом течения. Уравнения (6.18) и (6.20) показывают, что комплексный потенциал является регулярной функцией в любой односвязной области $D$ течения, которая не содержит источников и вихрей.

На основании формулы (6.19) в случае многосвязной области циклическая постоянная функции $\varphi(x,y)$ при обходе некоторой дыры отлична от нуля, если при этом циркуляция $\Gamma \neq 0$ (т.е. если $\neq 0$ суммарная интенсивность вихрей, расположенных в дыре). На основании (6.21) циклическая постоянная $\psi(x, y)$ при обходе дыры отлична от нуля, если при этом поток $Q \neq 0$ (т.е. если $\neq 0$ суммарная интенсивность источников, расположенных в дыре).

Таким образом, в многосвязной области и действительная, и мнимая части комплексного потенциала $\Phi(z)$ могут оказаться многозначными. В этом состоит отличие комплексных потенциалов в электростатистике и гидромеханике.

Заметим, что и здесь однозначные непрерывные ветви $\Phi(z)$ всегда оказываются регулярными и $\Phi(z)$ снова дает пример многозначной аналитической функции. Как и в предыдущем подразделе, можно рассматривать производную $\Phi'(z)$, которая всегда оказывается однозначной.

С помощью комплексного потенциала выражаются все основные величины, связанные с плоским течением. Например, в силу (6.18) и (6.20) имеем:



концы, расположенные в точке $z = \infty$. Разность потенциалов между $C_1$ и $C_2$ считается заданной.

2) Определение поля в криволинейном кольце $D$ между двумя замкнутыми непересекающимися проводниками $C_1$ и $C_2$, состоящими из конечных точек. Разность потенциалов между $C_1$ и $C_2$ задана.

3) Определение поля в области $D$, ограниченной проводником $C$, проходящим через бесконечно удаленную точку. Считается заданной величина вектора напряженности поля в бесконечности (в предположении, что последняя не является угловой точкой $C$).

4) Определение поля во внешности $D$ замкнутого проводника $C$, состоящего из конечных точек. Вектор напряженности поля в бесконечно удаленной точке считается заданным по величине и направлению. Под проводником мы всюду понимаем кривую $C$, на которой сохраняет постоянное значение потенциальная функция поля (след от пересечения плоскости $z$ проводящим цилиндром с образующими, перпендикулярными к этой плоскости). Определение поля сводится к определению (с точностью до постоянного слагаемого) его комплексного потенциала. В гидродинамике соответствующие задачи ставятся как задачи обтекания. Они сводятся к построению потока идеальной жидкости без вихрей и без источников, обтекающего заданные кривые $C$. Кривые $C$ должны при этом служить линиями тока жидкости. Роль разности потенциалов между кривыми $C_1$ и $C_2$ в задачах 1 и 2 играет расход – количество жидкости, протекающее за единицу времени через любое поперечное сечение области $D$. В задаче 4 дополнительно задается вектор скорости течения в бесконечности, в задаче 3 – его величина.

Эти же задачи могут быть поставлены как задачи построения теплового потока. Роль проводников электричества играют тепловые проводники, на которых температура сохраняет постоянное значение, разность потенциалов заменяется разностью температур, а вектор напряженности – градиентом температуры. В следующих пунктах мы приведем конкретные примеры решения задач 1 – 4 с различным физическим содержанием.

В этих примерах мы будем всегда искать одно из возможных решений поставленных задач, покажем, что условия задачи 4 могут быть дополнены так, что будет обеспечена единственность ее решения.

То же самое справедливо и для других задач, однако на доказательстве мы не будем останавливаться, считая, что в рассматриваемых примерах единственность решения физически очевидна. Но тогда найденное любым способом решение задачи и будет служить ее единственным решением.

**Поле в полосе.** Начнем с рассмотрения задачи 1.

Предположим, что полоса $D$ свободна от зарядов, образующих поле. Тогда в $D$ существует комплексный потенциал поля $w = F(z)$, который является регулярной функцией (так как область $D$ односвязна, то $F(z)$ одно-

$$\int_0^{2\pi} F(\psi) ctg\frac{\varphi-\psi}{2}d\psi = \int_0^{2\pi}[F(\psi)-F(\varphi)]ctg\frac{\varphi-\psi}{2}d\psi =$$
$$= -\int_0^{\pi}[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]ctg\frac{t}{2}dt. \qquad (3.9)$$

В частности, если $F(\varphi)$ непрерывно дифференцируема, то при малых $\varepsilon$ имеет место приближенное равенство

$$\int_0^{\varepsilon}[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]ctg\frac{t}{2}dt \approx 4\varepsilon F'(\varphi), \qquad (3.10)$$

а интеграл от $\varepsilon$ до $\pi$ вычисляется обычными приближенными методами.

Соответствующим образом измененная последовательность (3.8) сходится к решению $\theta(\varphi)$ исходной задачи, если

$$\left|\frac{d}{d\theta}\log\rho(\theta)\right| < \varepsilon < 1. \qquad (3.11)$$

Геометрически это условие означает, что граница $C$ области $G$ пересекает окружности $\rho = const$ под углами, меньшими 45°. В частности, любой луч, проведенный из начала координат, пересекает границу лишь один раз.

При этом погрешность $n$-го приближения $\theta^{(n)}(\varphi)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\left|\theta^{(n)}(\varphi)-\theta(\varphi)\right| \le C\frac{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^n}{1-\sqrt{\varepsilon}},$$

где $\varepsilon$ – величина, определяемая неравенством (3.11).

Таким образом, последовательные приближения сходятся со скоростью геометрической прогрессии. Более точные оценки содержатся в соответствующей литературе.

Вычисления особенно упрощаются, если участвующие в них функции разложить в ряды Фурье и применить метод тригонометрической интерполяции. С этой целью выделим на единичной окружности плоскости $z$ $2N$ точек с аргументами

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{N},\ k = 0,1,\ldots,2N-1$$

и положим

$$\theta_k^{(\nu)} = \theta^{(\nu)}(\varphi_k), \quad F_k^{(\nu)} = \log\rho\left(\theta^{(\nu)}(\varphi_k)\right). \qquad (3.12)$$

Из выражения

$$F_k^{(\nu)} = \frac{a_0^{(\nu)}}{2} - \sum_{n=1}^{N}\left[a_n^{(\nu)}\cos n\varphi_k + b_n^{(\nu)}\sin n\varphi_k\right]$$

найдем приближенные значения коэффициентов Фурье



функции (3.3), если граница $C$ области $G$ – простая замкнутая кривая; для областей с разрезами это не так.

Что касается вычислений при применении этого метода, то следует заметить, что число операций при нахождении $\varphi_n(z)$ растет с ростом $n$, как $n^3$, так что выражение (3.5) становится непригодным, если для достижения заданной точности требуется большое число членов. Сами же вычисления несложны и легко программируются для вычислительных машин.

Описанный метод допускает видоизменение, состоящее в том, что вместо криволинейного интеграла (3.2) берется интеграл по площади. По теореме о среднем имеем

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} F\left(\rho e^{i\varphi}\right)\rho\, d\varphi\, d\rho = \pi F(0)$$

и, следовательно,

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|F\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\rho\, d\varphi\, d\rho \ge \pi\left|F(0)\right|,$$

причем знак равенства вновь достигается лишь для функции $F(w) = const$. Переходя к плоскости $z$, получаем, как и в (3.4):

$$\iint_G f(z)\overline{f(z)}dz\,\overline{dz} \ge \pi\left|\frac{f(z_0)}{w'(z_0)}\right|^2.$$

На основании этого соотношения можно сформулировать вариационную задачу: среди всех функций $f(z)$, аналитических в $G$, для которых $f(z_0) = 1$, найти такую, что интеграл

$$I_2(f) = \iint_G f(z)\overline{f(z)}dz\,\overline{dz}$$

принимает наименьшее значение. Решение этой задачи также дается формулой (3.3). Численно эту задачу можно решить, как и предыдущую, при помощи выражения

$$f_n(z) = \psi_0(z) + \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\psi_\nu(z).$$

Объем вычислений здесь примерно такой же, как и в случае криволинейных интегралов. Теоретическое преимущество второго метода состоит в том, что не нужно налагать никаких ограничений на гладкость границы области, хотя на практике это не играет роли.

***Графический метод***

Изотермическая сетка характеризуется следующими свойствами:
- кривые разных семейств взаимно ортогональны;
- ячейки являются «в малом» квадратными.

Эти свойства можно использовать для графического построения изотермических сеток.

На практике обычно задается некоторое граничное условие.

Первое приближение изотермической сетки строится произвольно, но с учетом граничных условий, а затем исправляется на основе геометрических свойств. Условие ортогональности проверяется, например, при помощи зеркальной линейки. Далее, при достаточно мелком и равномерном разбиении ячейки должны все более и более приближаться по форме к квадратам. Это свойство лучше всего проверяется проведением диагональной сетки (рис. 3.2), которая также должна быть изотермической, в частности ортогональной.

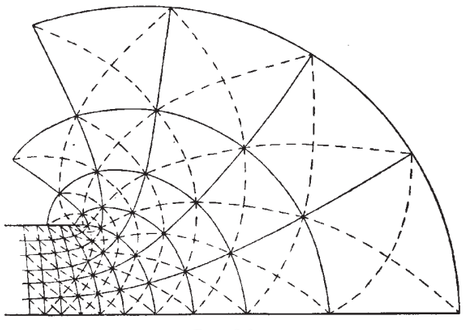


**Рис. 3.2**

При некотором навыке и умении чертить, можно быстро строить требуемые приближения, так что этот метод часто применяется на практике. Численным аналогом этого метода является разностный метод Либмана, который также применяется в таких задачах.

### 3.2. Методы интегральных уравнений

***Метод Теодорсена-Гаррика***

В основе этого широкоприменяемого ныне метода лежит следующая идея. Пусть функция *w(z)* конформно отображает единичный круг плоскости *z* на конечную однолистную область *G* плоскости *w*, причем $w(0)=0$ (так что начало координат лежит внутри *G*) и *w′(z)* − вещественное число. Тогда функция



$$\omega(z)=\log\frac{w(z)}{z} \tag{3.6}$$

аналитична в единичном круге.

Пусть, далее, границей $G$ является гладкая кривая $C$. Если $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\theta}$, то точки этой кривой определяются уравнением

$$\omega\left(e^{i\varphi}\right)=\rho(\varphi)e^{i\theta(\varphi)}.$$

На границе единичного круга функция $\omega(z)$ принимает значение

$$\omega\left(e^{i\varphi}\right)=\log\rho(\varphi)+i[\theta(\varphi)-\varphi],$$

т.е. $\log\rho(\varphi)$ и $\theta(\varphi)-\varphi$ служат вещественной и мнимой частями некоторой функции, аналитической в единичном круге. Согласно формуле Шварца, при $\rho=R=1$ и $V(0)=0$ эти величины связаны соотношением

$$\theta(\varphi)-\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\log\rho(\psi)ctg\frac{\varphi-\psi}{2}\,d\psi\,. \tag{3.7}$$

Если же задана не функция $w(z)$, а граница $C$ области $G$ своим уравнением $\rho=\rho(\theta)$, то (3.7) представляет собой интегральное уравнение с неизвестной функцией $\theta(\varphi)$:

$$\theta(\varphi)=\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\log\rho(\theta(\psi))ctg\frac{\varphi-\psi}{2}\,d\psi\,.$$

Определив из этого уравнения функцию $\theta(\varphi)$, можно легко найти с помощью формулы Шварца функцию $\omega(z)$, а затем и функцию $w(z)$, отображающую единичный круг на область $G$.

Для областей, близких к единичному кругу, т.е. таких, границы которых мало отличаются от единичной окружности, интегральное уравнение (3.20) решается методом последовательных приближений. С этой целью положим:

$$\theta^{(0)}(\varphi)=\varphi,$$

$$\theta^{(\nu)}(\varphi)=\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\rho\left(\theta^{(\nu-1)}(\psi)\right)ctg\frac{\varphi-\psi}{2}\,d\psi\,. \tag{3.8}$$

Эти интегралы, однако, лишены смысла благодаря особенности подынтегральной функции при $\psi=\varphi$. Для получения сходящихся интегралов применим во внимание, что мнимая часть аналитической функции не изменяется при добавлении постоянного слагаемого к граничным значениям вещественной части. Поэтому можно провести следующее преобразование:



$$\Phi'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=V_x-iV_y,$$

откуда вектор скорости течения

$$V=V_x+iV_y=\Phi'(z),$$

а величина скорости

$$V=|\Phi'(z)|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,.$$

На плоскости комплексного потенциала линиям тока соответствуют горизонтальные прямые $\mathrm{Im}\,w=\mathrm{const}$, а эквипотенциальным линиям – вертикальные прямые $\mathrm{Re}\,w=\mathrm{const}$.

***Пример 1.*** Для постоянного движения жидкости потенциальная функция и функция тока линейны:

$$\varphi=V_xx+V_yy+c_1,\quad \psi=-V_yx+V_xy+c_2.$$

Комплексный потенциал

$$w=\Phi(z)=\varphi+i\psi=x\left(V_x-iV_y\right)+iy\left(V_x-iV_y\right)=\overline{V}z\,,$$

где $\overline{V}=V_x-iV_y$ – комплексное число, сопряженное скорости, является линейной функцией $z$.

***Пример 2.*** Для точечного источника компоненты скорости равны

$$V_x=\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\quad V_y=\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2};$$

потенциальная функция и функция тока находятся по формулам (6.18) и (6.20):

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln|z|,\quad \psi=\frac{Q}{2\pi}Arg\,z\,,$$

и комплексный потенциал –

$$w=\Phi(z)=\frac{Q}{2\pi}Ln\,z\,. \tag{6.22}$$

***Пример 3.*** Для точечного вихря аналогично находятся

$$\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}Arg\,z,\quad \psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|,$$

и комплексный потенциал $w=\dfrac{\Gamma}{2\pi}Ln\,z$ отличается от (6.22) множителем $\dfrac{1}{i}$.

Поэтому линии тока и эквипотенциальные линии в примерах 2 и 3 меняются местами.

***Пример 4.*** Точечный диполь в гидромеханике вполне аналогичен диполю в электростатике. Вместо (6.17) для комплексного потенциала имеем выражение



$$w=-\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}, \tag{6.23}$$

где $M=Qh$ – момент диполя. Линии тока (6.23) совпадают с эквипотенциальными линиями (6.17), и эквипотенциальные линии (6.23) – с силовыми линиями (6.17).

Комплексный потенциал в теплотехнике строится аналогично. Для установившегося плоского теплового потока в области $D$, не содержащей тепловых источников, на основании (5.12) и (5.13) имеем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Q_y}{\partial x}-\frac{\partial Q_x}{\partial y}=0\,. \tag{6.24}$$

Роль потенциала $\varphi$ играет температура $v$:

$$Q=-k\ grad\ v;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{k}Q_x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{k}Q_y,$$

На основании первого соотношения (6.24) заключаем, что выражение $-\dfrac{1}{k}\left(Q_ydx-Q_xdy\right)$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$, которая называется функцией тока тепла и связана с температурой условиями Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{k}Q_y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{k}Q_x\,.$$

Функция $u(x, y)$ принимает постоянные значения на линиях тока тепла. Функция комплексного переменного

$$w=\Psi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

называется комплексным потенциалом теплового потока. Она регулярна в любой односвязной области $D$, в которой поток удовлетворяет условиям (6.24). Вектор потока тепла

$$Q=-k\ grad\ v=-k\frac{\partial v}{\partial x}-ik\frac{\partial v}{\partial y}=-ki\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-k\overline{i\Psi'(z)}\,.$$

### 6.4. Метод конформных отображений

Перечислим четыре типа прикладных задач, при решении которых особенно удобно применение конформных отображений. Сформулируем эти задачи в электростатических терминах, а затем укажем видоизменения, которые надлежит в них сделать при рассмотрении других физических задач.

Вот эти ***задачи:***

1) Определение электростатического поля в криволинейной полосе $D$ между двумя проводниками $C_1$ и $C_2$, которые имеют общими лишь свои

$$a_n^{(\nu)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} F_k^{(\nu)} \cos n\varphi_k, \quad n = 0,1,...,N,$$
$$b_n^{(\nu)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{2N-1} F_k^{(\nu)} \sin n\varphi_k, \quad n = 1,2,...,N-1. \qquad (3.13)$$

Сопряженная с $F_k^{(\nu)}$ гармоническая функция определяется равенством:

$$\theta_k^{(\nu+1)} - \varphi_k = \sum_{n=1}^{N}\left(-b_n^{(\nu)}\cos n\varphi_k + a_n^{(\nu)}\sin n\varphi_k\right)$$

с точностью до погрешности за счет замены ряда Фурье его частичной суммой. Подставляя значения коэффициентов (3.13), получим формулу

$$\theta_k^{(\nu+1)} - \varphi_k = -\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(F_{k+n}^{(\nu)} - F_{k-n}^{(\nu)}\right) ctg\frac{\varphi_n}{2}, \qquad (3.14)$$

в которой следует положить $F_{1\pm 2N} = F_1$. Вместе с (3.12) и начальным значением $\theta_k^{(0)} = \varphi_k$ это равенство определяет каждое следующее приближение $\theta_k^{(\nu)}$ и $F_k^{(\nu)}$, причем следует заметить, что конечная сумма (3.14) имеет вид, в точности соответствующий интегралу (3.10). Если этот метод сходится, то с помощью пределов

$$\theta_k = \lim_{\nu\to\infty}\theta_k^{(\nu)}, \quad F_k = \lim_{\nu\to\infty}F_k^{(\nu)}$$

и соотношений (3.13) вычисляются коэффициенты Фурье $a_n$ и $b_n$. В качестве приближения $\widetilde{\omega}(z)$ для функции (3.6) получаем функцию

$$\widetilde{\omega}(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - ib_n)z^n + a_N z^N,$$

а для отображающей функции $w$ – функцию $\widetilde{w}(z) = ze^{\widetilde{\omega}(z)}$.

Функция $\widetilde{w}(z)$ отображает единичный круг на область $G$, граница которой $\widetilde{C}$ пересекает кривую $C$ в $2N$ точках, соответствующих точкам $z = e^{i\varphi_k}$. В промежуточных точках легко определить точность приближения. Если последняя недостаточна, то этот метод следует повторить с большим числом точек, например $4N$, причем в качестве первого приближения можно принять уже найденные значения $\theta_k$ и $F_k$.

Описанный здесь метод приближения с помощью рядов Фурье особенно выгоден для областей с гладкими и аналитическими границами. Напротив, отрезки нерегулярности кривой лучше учитывать прямым вычислением видоизмененного интеграла (3.8) [соответственно (3.9)]. Особенно выгоден тот случай, когда граница частично совпадает с единичной окружностью, так что $\log\rho(\theta)$ отличен от нуля только на частичном интервале.



Таким образом, полагая $z = re^{i\varphi}$, $\quad w = \rho e^{i\theta}$, имеем

$$U(z^*) = \theta - \varphi, \quad V(z^*) = \log r.$$

и интегральное уравнение (3.18) принимает вид:

$$\theta(z^*) - \varphi(z^*) = \gamma(z^*) + \frac{1}{\pi}\int_C[\theta(\zeta) - \varphi(\zeta)]d\psi_{z^*}, \qquad (3.22)$$

где $$\gamma(z^*) = \frac{1}{\pi}\int_C \log r(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}}.$$

Интеграл (3.22) можно несколько преобразовать. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_C\left[\log r(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}} - \varphi(\zeta)d\psi_{z^*}\right] = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_C \log\zeta\,\frac{d\zeta}{\zeta - z^*}\right].$$

Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $\zeta = 0$ и $\zeta = z^*$, поэтому путь интегрирования $C$ можно заменить контуром, указанным на рис. 3.4, состоящим из дважды проходимого прямолинейного отрезка между точками $\zeta = 0$ и $\zeta = z^*$, малой окружности с центром $\zeta = 0$ и двух круговых дуг с центром $\zeta = z^*$. На прямолинейных участках величина $d\zeta/(\zeta - z^*)$ вещественна, а вещественная часть функции $\log\zeta$ однозначна, так что интегралы по этим участкам взаимно уничтожаются. Точно так же обращается в нуль интеграл по малой окружности с центром $\zeta = 0$. На оставшихся двух дугах $\sigma_{z^*} = const$, так что $d\sigma_{z^*} = 0$, и, устремляя их радиус к нулю, получаем

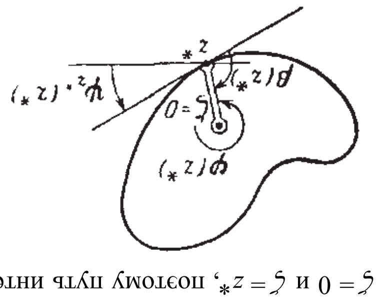


Рис. 3.4

$$\frac{1}{\pi}\int_C\left[\log r(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}} + \varphi(\zeta)d\psi_{z^*}\right] =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\int_{\psi_{z^*}(z^*)}^{\psi_{z^*}(z^*)+\pi-\beta(z^*)}\varphi(z^*)d\psi_{z^*} + \int_{\psi_{z^*}(z^*)+\pi-\beta(z^*)}^{\psi_{z^*}(z^*)+\pi}[\varphi(z^*)+2\pi]d\psi_{z^*}\right] = -\varphi(z^*) - 2\beta(z^*),$$

где $\beta(z^*)$ – угол между касательной в точке $z^*$ и отрезком $[0, z^*]$ (см. рис. 3.4). Таким образом,

$$\gamma(z^*) = \frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\zeta)d\psi_{z^*} - \varphi(z^*) - 2\beta(z^*),$$



Обратно, если в какой-либо односвязной области $D$ задана регулярная функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, то ей соответствует поле, заряды которого лежат вне $D$ и для которого $F(z)$ служит комплексным потенциалом.

В самом деле, рассмотрим поле векторов $\boldsymbol{E} = -i\overline{F'}(z)$; из условий Коши-Римана для $F(z)$ вытекает, что оно соленоидально и потенциально в области $D$ и, следовательно, является электростатическим полем. Его комплексный потенциал равен, очевидно, $F(z)$. Таким образом, в только что указанном смысле между плоскими электростатическими полями и регулярными функциями имеется полное соответствие.

***Пример 1.*** Рассмотрим поле точечного заряда величины $q$, расположенного в начале координат. Зная потенциальную и силовую функции поля (6.5) и (6.10), сразу получаем его комплексный потенциал

$$w = F(z) = 2qArgz + 2qi\ln\frac{1}{|z|} = 2qi\left\{\ln\frac{1}{|z|} + iArg\frac{1}{z}\right\} = 2qiLn\frac{1}{z}.$$

Картина этого поля изображена на рис. 5.3. Комплексный потенциал осуществляет отображение двусвязной области (открытой плоскости с исключенным началом координат) на односвязную (открытую плоскость). Если заряд расположен не в начале координат, а в точке $z = z_0$, то комплексный потенциал

$$w = 2qiLn\frac{1}{z - z_0}.$$

***Пример 2.*** Для системы двух разноименных точечных зарядов $\pm q$, расположенных соответственно в точках $z_1$ и $z_2$, комплексный потенциал

$$w = 2qiLn\frac{1}{z - z_1} - 2qiLn\frac{1}{z - z_2} = 2qiLn\frac{z - z_2}{z - z_1}. \qquad (6.15)$$

Эквипотенциальными линиями поля служат кривые, на которых

$$\mathrm{Im}\,w = 2q\ln\left|\frac{z - z_2}{z - z_1}\right| = const$$

или, что то же самое,

$$\left|\frac{z - z_2}{z - z_1}\right| = const.$$

Это аполлониевы окружности, для которых точки $z_1$ и $z_2$ являются симметричными. Силовые линии

$$\mathrm{Re}\,w = -2qArg\frac{z - z_2}{z - z_1} = const$$

представляют собой окружности, проходящие через точки $z_1$ и $z_2$. На рис. 6.5 эквипотенциальные линии изображены сплошными линиями, а силовые линии – пунктиром.



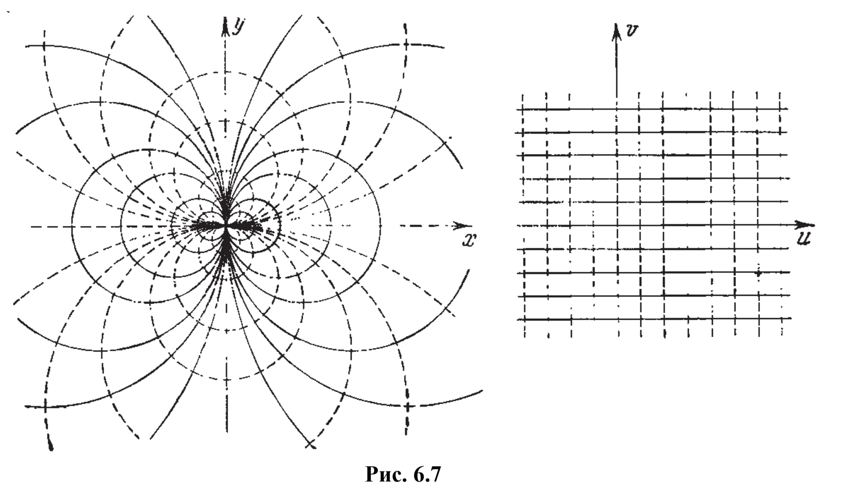


Рис. 6.7

### 6.3. Комплексный потенциал в гидромеханике и теплотехнике

Условия отсутствия в области $D$ источников и вихрей плоского установившегося течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$$

позволяют утверждать, что в $D$ выражения $-V_y dx + V_x dy$ и $V_x dx + V_y dy$ являются полными дифференциалами некоторых функций:

$$-V_y dx + V_x dy = d\psi(x, y); \quad V_x dx + V_y dy = d\varphi(x, y). \qquad (6.17)$$

Вторая из этих функций называется потенциальной; имеем:

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad V = grad\,\varphi(x, y); \qquad (6.18)$$

$$\varphi(x, y) = \int_{z_0}^{z} V_x dx + V_y dy + c.$$

С помощью функции $\varphi$ можно выразить циркуляцию вектора скорости вдоль замкнутого контура $C$. Имеем

$$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^\circ)ds = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{dz}) = (V_x + iV_y, dx + idy) = V_x dx + V_y dy.$$

В силу (6.17) последнее выражение совпадает и, следовательно, циркуляция скорости

$$\Gamma = \oint_C (V, s^\circ)ds = \oint_C d\varphi(x, y). \qquad (6.19)$$

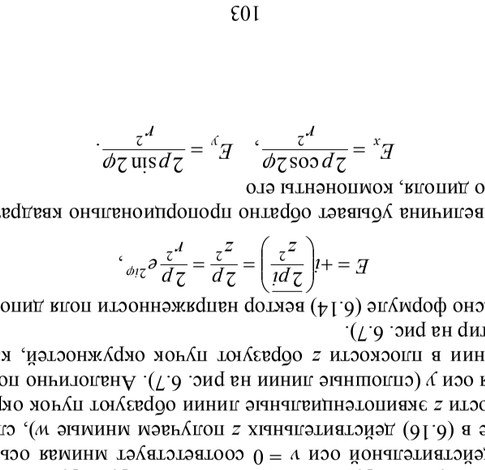


**Рис. 6.5**

***Пример 3.*** Для системы одноименных зарядов величины $q$ вместо (6.15) имеем:

$$w = 2qiLn\frac{1}{z-z_1} + 2qiLn\frac{1}{z-z_2} = 2qiLn\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Эквипотенциальными линиями поля служат кривые, называемые лемнискатами:

$$|z-z_1||z-z_2| = c = const.$$

Каждая из них представляет собой геометрическое место точек, произведение расстояний которых до $z_1$ и $z_2$ постоянно. При c = 0 лемниската вырождается в пару точек, при $0 < c < \frac{|z_1-z_2|^2}{4}$ распадается на две кривые овальной формы, при $c = \frac{|z_1-z_2|^2}{4}$ представляет собой обычную лемнискату Бернулли и при $c > \frac{|z_1-z_2|^2}{4}$ состоит из одной кривой (рис. 6.6).

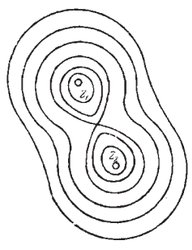


**Рис. 6.6**

***Пример 4.*** Для системы точечных зарядов $q_1, q_2, ..., q_n$, расположенных в точках $z_1, z_2, ..., z_n$, комплексный потенциал



Так как, по предположению, граничные значения $V(z^*)$ известны, (3.18) представляет собой интегральное уравнение относительно $U(z^*)$. Это уравнение можно решить методом последовательных приближений. Положим $\gamma(z^*) = \frac{1}{\pi}\int_C V(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}}$ и построим последовательность функций (ряд Неймана)

$$U_0(z^*) = \gamma(z^*),\ U_{\nu+1}(z^*) = \gamma(z^*) + \frac{1}{\pi}\int_C U_\nu(\zeta)d\psi_{z^*}, \qquad (3.19)$$

$$U(z^*) = \lim_{\nu\to\infty} U_\nu(z^*).$$

Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма, сходимость последовательных приближений существенно зависит от собственных значений однородного уравнения

$$U(z^*) = \frac{\lambda}{\pi}\int_C U(\zeta)d\psi_{z^*}. \qquad (3.20)$$

В нашем случае это уравнение имеет собственное значение 1, которому соответствует собственная функция $U(z^*) = 1$. Отсюда следует, что функция $\gamma(z^*)$ не может быть выбрана произвольно, а должна удовлетворять определенным условиям, сводящимся к условию однозначности $V(z^*)$. Поэтому решение неоднородного уравнения (3.18) определяется с точностью до аддитивной постоянной. Все остальные собственные значения уравнения (3.20) по модулю больше 1. Стало быть, последовательность (3.19) сходится с быстротой геометрической прогрессии. Если $\lambda^*$ – наименьшее по модулю собственное значение уравнения (3.18), большее 1, то погрешность $n$-го приближения $U_n(z^*)$, определенного формулой (3.19), удовлетворяет оценке $\left|U_n(z^*) - U(z^*)\right| \le C\frac{\lambda^{*-n}}{1-\lambda^{*-1}}$.

Собственное значение $\lambda^*$ будет тем больше, чем ближе область $G$ к кругу. Так, для эллипса с полуосями $a$ и $b$ имеем $\lambda^* = \frac{a+b}{a-b}$.

Для установления связи между граничной задачей, сформулированной в начале этого пункта, и задачей об отображении можно вновь воспользоваться функцией, определенной равенством (3.6).

Пусть в наших обозначениях $w(z)$ – функция, отображающая область $G$ на единичный круг, причем точка $z = 0$ (предполагается, что она является внутренней точкой области $G$) переходит в точку $w = 0$. Положим тогда

$$W(z) = i\log\frac{z}{w(z)}. \qquad (3.21)$$



***Интегральное уравнение Гершгорина и Лихтенштейна***

Пусть $G$ – односвязная область плоскости $z$ с кусочно-гладкой границей $C$ (рис. 3.3). Требуется определить функцию $W(z) = U(z) + iV(z)$, аналитическую в этой области, по заданным граничным значениям функции $V(z)$ на $C$. Решим эту задачу с помощью интегральной формулы Коши, которую запишем в виде

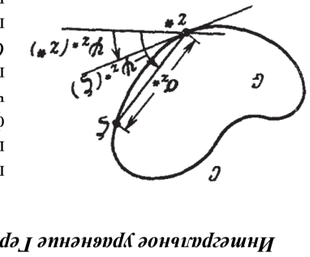


**Рис. 3.3**

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C W(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (3.15)$$

Введем полярные координаты с центром $\zeta = z$, положив

$$\zeta - z = \sigma_z e^{i\varphi_z}. \qquad (3.16)$$

Рассматривая вещественную часть равенства (3.15) и принимая во внимание, что $\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\sigma_z}{\sigma_z} + id\psi_z$, получаем

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[U(\zeta)d\psi_z + V(\zeta)\frac{d\sigma_z}{\sigma_z}\right]. \qquad (3.17)$$

Здесь $z$ – точка внутри $G$. Если $z$ стремится изнутри к граничной точке $z^*$, в которой $C$ имеет непрерывно вращающуюся касательную [с направлением, определяемым, согласно (3.16), величиной $\psi_{z^*}(z^*)$], то первый интеграл (3.17) распадается на два интеграла. Один из них берется в пределах от $\psi_{z^*}(z^*)$ до $\psi_{z^*}(z^*) + \pi$ (т.е. контур $C$ обходится полностью), а второй – от $\psi_{z^*}(z^*) + \pi$ до $\psi_{z^*}(z^*) + 2\pi$ с постоянной подынтегральной функцией $U(z^*)$, так что его значение равно $\pi U(z^*)$. Таким образом, для граничной точки $z^*$ с непрерывно вращающейся касательной имеем

$$U(z^*) = \frac{1}{\pi}\int_C \left[U(\zeta)d\psi_{z^*} + V(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}}\right]. \qquad (3.18)$$

Если $z^*$ – угловая точка $C$ с внутренним углом $\pi\delta$, то соответствующие рассуждения дадут

$$U(z^*) = \frac{1}{\pi\delta}\int_C \left[U(\zeta)d\psi_{z^*} + V(\zeta)\frac{d\sigma_{z^*}}{\sigma_{z^*}}\right].$$

Сюда включается при $\delta = 1$ и предыдущий случай. Для простоты будем в дальнейшем считать кривую $C$ всюду гладкой.



$$w = 2i\sum_{k=1}^{n} q_k Ln\frac{1}{z - z_k}.$$

***Пример 5.*** Электростатическое поле диполя. Для системы разноименных зарядов $\pm q$, расположенных в точках $z_1 = 0$, $z_2 = -h$, по формуле (6.15) комплексный потенциал

$$w = 2qiLn\frac{z+h}{z} = 2qiLn\left(1+\frac{h}{z}\right) = 2piLn\left(1+\frac{h}{z}\right)^{\frac{1}{h}},$$

где $p = qh$. Будем теперь неограниченно сближать заряды ($h \to 0$), одновременно увеличивая их так, чтобы произведение $qh = p$ оставалось постоянным. В пределе мы получим так называемый точечный диполь с моментом $p$, сосредоточенным в начале координат.

Комплексный потенциал поля диполя

$$w = 2pi\lim_{h\to 0} Ln\left(1-\frac{h}{z}\right)^{\frac{1}{h}} = 2pi\,Ln\,e^{\frac{1}{z}} = \frac{2pi}{z}, \qquad (6.16)$$

представляет собой дробно-линейную функцию. Картина поля диполя представляет собой прообраз сетки декартовых координат плоскости $w$ при отображении

$$w = \frac{2pi}{z}.$$

Эквипотенциальные линии $V = c$ образуют на сфере $w$ пучок окружностей, касающихся друг друга в точке $w = \infty$, этому пучку в плоскости $z$ соответствует пучок окружностей, касающихся друг друга в точке $z = 0$. При этом действительной оси $v = 0$ соответствует мнимая ось $x = 0$ (при подстановке в (6.16) действительных $z$ получаем мнимые $w$), следовательно, в плоскости $z$ эквипотенциальные линии образуют пучок окружностей, касающихся оси $y$ (сплошные линии на рис. 6.7). Аналогично получим, что силовые линии в плоскости $z$ образуют пучок окружностей, касающихся оси $x$ (пунктир на рис. 6.7).

Согласно формуле (6.14) вектор напряженности поля диполя

$$E = +i\left(\frac{2pi}{z^2}\right) = \frac{2p}{z^2} = \frac{2p}{r^2}e^{2i\varphi},$$

где $z = re^{i\varphi}$ величина убывает обратно пропорционально квадрату расстояния точки до диполя, компоненты его

$$E_x = \frac{2p\cos 2\varphi}{r^2}, \quad E_y = \frac{2p\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Этот метод легко переносится на случай большего числа областей. Таким образом, охватывается широкий класс областей, среди которых многие важны для практики. Форма граничной кривой, в отличие от рассматриваемой методом Теодорсена-Гаррика и методом Гершгорина и Лихтенштейна, далеко не произвольна, зато отпадает требование, чтобы область $G$ была близкой к круговой. Поэтому метод особенно удобен для сложных многоугольных областей.

Основная работа при вычислениях заключается в нахождении функции Грина. Поэтому следует ограничиваться частичными областями $G_\nu$ с возможно более простыми функциями Грина; к ним относятся круг, круговой двуугольник (в частности, полукруг и угловая область) и круговой сектор. Следует также разбивать область на части, которые как можно больше перекрываются, с тем чтобы ускорить сходимость итераций. От выбора частичных областей существенно зависит объем вычислений. Стоит также сначала проверить, какой из методов более выгоден для вычислений: данный метод или изложенный в следующем пункте.

***Метод Неймана для пересечения областей***

Как показал Нейман, альтернирующий метод следующим образом переносится на пересечение областей. Пусть, как и ранее, заданы две области $G_1$ и $G_2$ (рис. 3.6) с границами $C_1$ и $C_2$ и $C$ − граница области $G = G_1 \cup G_2$. Граничные кривые разлагаются также на части $C_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu$, где $\alpha_\nu = C_\nu \cap C$. Пусть для каждой из областей $G_\nu$ известна функция Грина $\Gamma_\nu(\zeta, z)$, при помощи которой будем решать краевую задачу для пересечения $G^* = G_1 \cap G_2$. Пусть $C^*$ − граница $G^*$; требуется определить функцию $U(z)$, гармоническую в $G^*$ и принимающую на $C^*$ заданные граничные значения $U(C^*) = F(C^*)$. Для этого представим $U(z)$ в виде

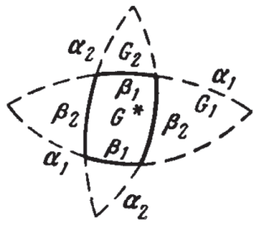



**Рис. 3.6**

$$U(z) = U_1(z) + U_2(z). \tag{3.27}$$

Функции $U_\nu(z)$ гармоничны в соответствующих областях $G_\nu$ и принимают на границах $\alpha_\nu$ определенные граничные значения $U_\nu(\alpha_\nu) = f_\nu(\alpha_\nu)$. Эти значения $f_\nu(\alpha_\nu)$ можно выбирать произвольно, но так, чтобы на участках $\alpha_\nu$, принадлежащих $C^*$, выполнялось равенство

$$f_1(\alpha_\nu) + f_2(\alpha_\nu) = F(\alpha_\nu). \tag{3.28}$$



где интеграл берется по любому пути $L$, соединяющему в $D$ фиксированную точку $z_0$ с переменной точкой $z$, а $C$ – произвольная постоянная.

Из (6.7) следует, что в каждой точке линии $U(x,y) = C$ уровня функции $U$ угловой коэффициент касательной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = \frac{E_y}{E_x},$$

т.е. совпадает с угловым коэффициентом прямой действия вектора $\boldsymbol{E}$. Таким образом, линии $U(x,y) = C$ тока оказываются силовыми линиями и $U(x, y)$ называется поэтому силовой функцией поля.

Через силовую функцию можно выразить суммарный заряд поля, заключенный внутри произвольного замкнутого контура $C$.

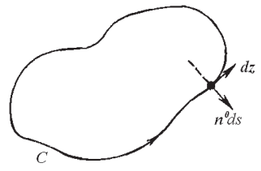



**Рис. 6.1**

Так как по (6.7) $\boldsymbol{E} = \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} - i\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}$ и вектор $\boldsymbol{n}^\circ$ внешней нормали к $C$ получается из вектора $dz = dx + idy$, касательного к $C$, поворотом на 90° по часовой стрелке (рис. 6.1), т.е. $\boldsymbol{n}^0 ds = -idz = dy - idx$, то

$$\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0\right) ds = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} dx = d\boldsymbol{U}(x, y).$$

По теореме Гаусса суммарный заряд поля, заключенный внутри $C$:

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_C \left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0\right) ds = \frac{1}{4\pi} \oint_C d\boldsymbol{U}(x, y). \tag{6.9}$$

***Пример 4.*** Для плоского поля точечного заряда компоненты вектора напряженности

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2}, \quad E_y = -\frac{2qy}{x^2 + y^2},$$

откуда согласно (6.8)

$$U(x, y) = 2q \int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2qArctg\,\frac{y}{x} + c = 2qArg\ z + c, \tag{6.10}$$

где $L$ – произвольный путь, соединяющий $z_0$ с $z$ и не проходящий через точку $z = 0$. В формуле (6.10) будем считать $z_0 = 1$ и под Arg $z$ понимать то значение аргумента, которое получается из главного значения arg $z_0 = 0$ при непрерывном продолжении вдоль кривой $L$. Это значение, очевидно, не изменится, если заменить путь $L$ любым другим путем $L'$, соединяющим $z_0$ с $z$, и таким, что между $L$ и $L'$ не лежит точка $z = 0$. Следовательно, путь $L$ без изменения значения интеграла может быть заменен путем $l$, соеди-





$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x} = -E_y - iE_x = -i\left(E_x - iE_y\right),$$

откуда $E_x - iE_y = iF'(z)$. Переходя к комплексно-сопряженным величинам, получим выражение для вектора напряженности поля

$$E = E_x + iE_y = -i\overline{F'(z)}. \tag{6.14}$$

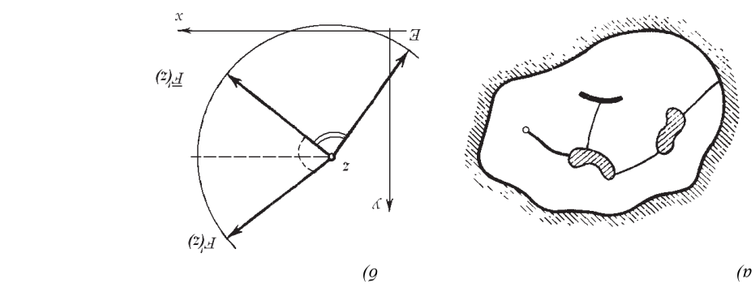



**Рис. 6.4**

Формула показывает, что для получения вектора $\boldsymbol{E}$ из вектора $\boldsymbol{F'(z)}$ достаточно зеркально отразить последний относительно действительной оси и затем повернуть изображение на 90° по часовой стрелке (рис. 6.4, б). Из этой формулы следует также, что величина вектора напряженности

$$\boldsymbol{E} = \left|\boldsymbol{F}'(z)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}.$$

Комплексный потенциал осуществляет отображение плоскости поля $z$ на плоскость $w$, конформное во всех точках области $D$, в которых напряженность отлична от нуля. В силу определения на плоскости комплексного потенциала силовым и эквипотенциальным линиям поля соответствуют прямые, параллельные координатным осям $U$ и $V$. Следовательно, зная комплексный потенциал поля, мы можем (по крайне мере, принципиально) найти его эквипотенциальные и силовые линии, т.е. определить картину этого поля.

Как указано выше, комплексный потенциал определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого. Так как изменение этого постоянного не влияет ни на картину поля, ни на вектор напряженности, мы в дальнейшем будем его опускать. Любому плоскому электростатическому полю в односвязной области, свободной от зарядов, соответствует регулярная функция – его комплексный потенциал.

При этом нужно особенно следить за правильным выбором ветви многозначной функции $\varphi(\zeta)$. При нашем определении пути интегрирования $\varphi(\zeta)$ меняется от $\varphi(z^*)$ до $\varphi(z^*) + \pi$. Эту трудность можно обойти, вычитая из $\varphi(\zeta)$ функцию $2\psi_{z^*}(\zeta)$ и сделав тем самым подынтегральную функцию однозначной. Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_C \varphi(\zeta)\,d\psi_{z^*} = \frac{1}{\pi}\int_C \left[\varphi(\zeta) - 2\psi_{z^*}(\zeta)\right] d\psi_{z^*} + \frac{1}{\pi}\int_{\psi_{z^*}(z^*)}^{\psi_{z^*}(z^*)+\pi} 2\psi_{z^*}\,d\psi_{z^*} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_C \left[\varphi(\zeta) - 2\psi_{z^*}(\zeta)\right] d\psi_{z^*} + 2\psi_{z^*}(z^*) + \pi$$

и, учитывая, что $\psi_{z^*}(z^*) - \beta(z^*) = \varphi(z^*)$, получаем

$$\gamma(z^*) = \varphi(z^*) + \pi + \frac{1}{\pi}\int_C \left[\varphi(\zeta) - 2\psi_{z^*}(\zeta)\right] d\psi_{z^*}.$$

Уравнение (3.22) можно, таким образом, написать в виде

$$\theta(z^*) = 2\varphi(z^*) + \pi + \frac{1}{\pi}\int_C \left[\theta(\zeta) - 2\psi_{z^*}(\zeta)\right] d\psi_{z^*}. \tag{3.23}$$

Это с некоторым видоизменением форма интегрального уравнения, данная Теодорсеном. Следует заметить, что как $\theta(z^*)$, так и $\varphi(z^*)$ – многозначные функции на $C$. Чтобы следить их однозначными, можно потребовать, чтобы в некоторой точке $z^* = z_1$ обе они имели скачок, равный $2\pi$. Тогда функцию $\psi_{z^*}(\zeta)$ следует выбрать так, чтобы подынтегральная функция стала непрерывной, т.е. со скачком, равным $\pi$ в той же точке. Оставшуюся постоянную в $\theta(z^*)$ можно выбрать так, чтобы было $\theta(z_1) = 0$; при этом точка $z^* = z_1$ перехолит в $w = 1$. Этим $\theta(z^*)$ однозначно определяется.

Численное интегрирование при этом методе становится весьма простым независимо от того, исходим ли из уравнения (3.22) или (3.23). В качестве переменной интегрирования имеет смысл выбрать длину дуги; тогда получим

$$d\psi_{z^*} = \mathrm{Im}\frac{d\zeta}{\zeta - z^*} = \frac{\sin\left[\psi_\zeta(\zeta) - \psi_{z^*}(\zeta)\right]}{\left|\zeta - z^*\right|} ds.$$

При помощи $N$ точек деления $\zeta_n$, $n = 1,2,\ldots,N$ разобьем границу кривую на $N$ равных по длине дуг. Если $C$ всюду гладкая и $F(\zeta)$ однозначная и непрерывна на $C$, т.е. периодична как функция длины дуги, то простейшая приближенная формула

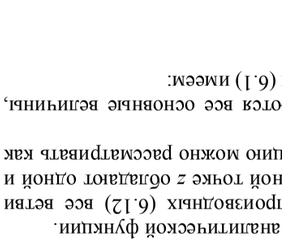



**Рис. 6.2**

няющим точку $z_0 = 1$ с $z$ и лежащим целиком в верхней или нижней полуплоскости, и окружностью $C$, проходящей некоторое число $n$ раз в определенном направлении (рис. 6.2, где $n = 2$).

Интеграл вдоль пути $l$ дает значение главной ветви arg $z$, а вдоль $C$ – значение: $2\pi n$, где знак зависит от направления обхода $C$, поэтому

$$U(x, y) = 2q \arg z = 2n\pi q + C.$$

Таким образом, в нашем примере функция $U(x,y)$ оказывается многозначной.

*Замечание.* При построении силовых и потенциальных функций электростатических полей весьма часто приходится рассматривать именно многосвязные области (рис. 6.3). Это объясняется тем, что $E_x$ и $E_y$ терпят разрыв в точках (на линиях или в областях), где расположены заряды поля, и такие точки (линии или области) приходится исключать из области $D$, вырезая из нее некоторое количество дыр.

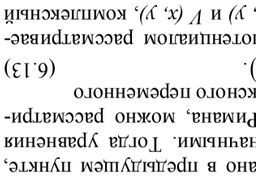



**Рис. 6.3**

Тогда, как и в только что рассмотренном примере, значение функции $u(x,y)$, восстанавливаемой по полному дифференциалу ее однозначных ветвей с помощью криволинейного интеграла не изменяется, если путь интегрирования $L$ непрерывно деформируется внутри оставшейся многосвязной области. Но при обходе исключенной из области дыры значение $u(x,y)$ изменится, если интеграл

$$c_k = \oint_{C_k} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \qquad (6.11)$$

взятый по замкнутому контуру, окружающему эту дыру, отличен от нуля, и останется неизменным, если этот интеграл равен нулю. Как и в рассмотренном примере, можно показать, что все значения (вообще, многозначной) функции $u(x, y)$ в фиксированной точке содержатся в формуле

$$u(x, y) = u_0(x, y) + n_1 c_1 + n_2 c_2 + ... + n_m c_m,$$

где $u_0(x,y)$ – некоторое определенное значение функции, а $c_1, c_2, ..., c_m$ – интегралы, взятые по всем контурам, окружающим дыры, и $n_1, n_2, ..., n_m$ – произвольные целые числа (положительные, отрицательные или равные нулю), показывающие, сколько раз и в каком направлении обходятся дыры.



Интегралы (6.11) называются циклическими постоянными функции $u(x,y)$ в области $D$. Формула (6.11) показывает, что функция $u(x,y)$ тогда и только тогда оказывается однозначной, если все ее циклические постоянные равны нулю. Этот случай имеет место для потенциальной функции, т.к. работа сил поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Таким образом, потенциальная функция плоского электростатического поля всегда однозначна.

Напротив, как показывает (6.9), циклическая постоянная силовой функции при обходе дыры, в которой расположен сгруппированный заряд величины $q$, равна $4\pi q$. Следовательно, силовая функция плоского электростатического поля, вообще говоря, многозначна.

## 6.2. Комплексный потенциал в электростатике

Сравнивая формулы (6.1) и (6.7), видим, что в области $D$, не содержащей зарядов поля, силовая и потенциальная функции связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (6.12)$$

Если область $D$ односвязна, то, как указано в предыдущем пункте, функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ будут в ней однозначными. Тогда уравнения (6.12), которые являются уравнениями Коши-Римана, можно рассматривать как условия регулярности функции комплексного переменного

$$w = F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \qquad (6.13)$$

Эта функция называется комплексным потенциалом рассматриваемого электростатического поля. Так же как $U(x, y)$ и $V(x, y)$, комплексный потенциал определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. В многосвязной области $D$ комплексный потенциал (6.13) оказывается, вообще говоря, многозначной функцией (вследствие многозначности своей действительной части). Однако, в любой односвязной области, в которую отображается $D$, если провести в ней надлежащую систему разрезов (рис. 6.4, *а*), и вообще в любой односвязной части $D$ комплексный потенциал допускает выделение регулярных ветвей. Комплексный потенциал снова доставляет пример многозначной аналитической функции.

Заметим, что в силу однозначности производных (6.12) все ветви комплексного потенциала $F(z)$ в фиксированной точке $z$ обладают одной и той же производной. Эту однозначную функцию можно рассматривать как производную комплексного потенциала.

Через комплексный потенциал выражаются все основные величины, связанные с полем. Например, в силу (6.12) и (6.1) имеем:



$$\int_C F(\zeta)d\bar{s} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F(\zeta_n) \qquad (3.24)$$

(где $l$ – длина кривой $C$) являются наилучшей. Действительно, если снабдить отдельные слагаемые суммы в правой части (3.24) различными множителями, как, например, в формуле Симпсона, то затем квадратура равносильность точек деления $\zeta_n$. Итак, приближенное решение уравнения (3.23) можно найти с помощью следующих формул:

$$\theta_k^{(0)} = \varphi_k,$$

$$\theta_k^{(\nu+1)} = 2\varphi_k + \pi + \sum_{n=1}^{N} \Delta_{kn}\left[\theta_n^{(\nu)} - 2\psi_{kn}\right] = \gamma_k^* + \sum_{n=1}^{N} \Delta_{kn}\theta_n^{(\nu)}, \qquad (3.25)$$

где

$$\varphi_k = \varphi(\zeta_k), \quad \psi_{kn} = \psi_{\zeta k}(\zeta_n), \quad \Delta_{kn} = \frac{1}{\pi N}\frac{\sin(\psi_{nn} - \psi_{kn})}{|\zeta_n - \zeta_k|}.$$

Наибольшую трудность составляет нахождение величин $\zeta_k$, $\varphi_k$, $\psi_{kn}$ и $\Delta_{kn}$. Эта подготовительная работа требует гораздо больше усилий, чем при методе Теодорсена, однако нахождение последовательных приближений здесь проще и может быть проведено точнее благодаря непрерывности подынтегральной функции. Нет надобности также в отсекательных ограничениях на характер границы. При мелкой сходимости можно вместо вычисления последовательных приближений решать непосредственно систему уравнений (3.25).

Разумеется, вместо (3.21) в качестве $W(z)$ можно выбирать и другие функции, если, как это часто бывает на практике, требуется решить граничную задачу, а не задачу об отображении. При подходящем выборе этой функции можно применить описанный метод и для отображения многосвязных областей.

### *Аналитический метод Шеффа*

В отличие от предыдущих этот метод выполняется в вещественной области и является методом решения краевой задачи теории потенциала. Он позволяет найти решение краевой задачи для односвязной области. Если известно общее решение для каждой из областей, то этим способом можно определить функцию Грина для этого объединения и получить, таким образом, его конформное отображение на единичный круг.

Будем исходить из следующих предположений. Пусть $G_1$ и $G_2$ – две области плоскости $z$ (которые для простоты предполагаются односвязными) и $G = G_1 \cup G_2$ – их объединение (рис. 3.5). Пусть $C_1$, $C_2$ и $C$ – соответственно границы этих областей; общую часть границ $C_1$ и $C$ обозначим через $\alpha_1 = C_1 \cap C$, а часть $C_1$, не принадлежащую $C$, – через $\beta_1$; таким образом, $C_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Точно также $C_2$ разлагается в сумму $\alpha_2 + \beta_2$. Будем предполагать, что дуги $\beta_1$ и $\beta_2$ нигде не касаются друг друга, а пересекаются под углами, отличными от нуля.

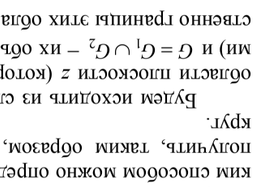



**Рис. 3.5**

Предположим теперь, что нам известно общее решение первой краевой задачи для каждой из областей $G_1$, $G_2$ и тем самым найдены функции Грина $\Gamma_1(\zeta, z)$ и $\Gamma_2(\zeta, z)$, так что для функции $U(z)$, гармонической в $G_\nu$, выполняется равенство:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} U(\zeta)d\Gamma_\nu(\zeta, z), \quad \nu = 1,2. \qquad (3.26)$$

Таким образом, для функции $U(z)$, гармонической в $G$, с заданными граничными значениями

$$U(C) = F(C)$$

имеем

$$\begin{aligned} U(\beta_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1} F(\alpha_1)d\Gamma_1(\alpha_1, \beta_2) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1} U(\beta_1)d\Gamma_1(\beta_1, \beta_2), \\ U(\beta_1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2} F(\alpha_2)d\Gamma_2(\alpha_2, \beta_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_2} U(\beta_2)d\Gamma_2(\beta_2, \beta_1). \end{aligned} \qquad (3.26а)$$

Получили систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $U(\beta_\nu)$. Решив эту систему, на основании (3.26) найдем функцию $U(z)$ всей области $G$, т.е. решим поставленную задачу.

Систему (3.26а) в данных предположениях можно решить методом итераций. Выбрав сначала произвольные граничные значения $U_0(\beta_1)$ на $\beta_1$, найдем из первого уравнения (3.26а) соответствующие значения $U_0(\beta_2)$. Подставляя последние во второе уравнение, найдем следующее приближение $U_1(\beta_1)$ и вообще

$$\begin{aligned} U_\nu(\beta_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1} F(\alpha_1)d\Gamma_1(\alpha_1, \beta_2) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1} U_\nu(\beta_1)d\Gamma_1(\beta_1, \beta_2), \\ U_{\nu+1}(\beta_1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2} F(\alpha_2)d\Gamma_2(\alpha_2, \beta_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_2} U_\nu(\beta_2)d\Gamma_2(\beta_2, \beta_1). \end{aligned}$$

Итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии, причем тем быстрее, чем меньше влияет $U_\nu(\beta_1)$ на $U_\nu(\beta_2)$ и $U_\nu(\beta_2)$ на $U_{\nu+1}(\beta_1)$, т.е. чем больше перекрываются $G_1$ и $G_2$.

рим поле точечного заряда величины $q=\int_L \eta(\zeta)ds$, расположенного в конечной точке $\zeta_0$. Разность между потенциалами этих двух полей

$$V-V_0=\int_L 2\eta(\zeta)\ln\frac{1}{|z-\zeta|}ds-2\ln\frac{1}{|z-\zeta_0|}\int_L \eta(\zeta)ds=\int_L 2\eta(\zeta)\ln\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right|ds=\alpha.$$

Так как $\zeta_0$ и $\zeta$, лежат в ограниченной области, то при $z\to\infty$, $\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right|\to 1$ равномерно относительно $\zeta$, $\ln\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right|$ равномерно стремится к 0 и, следовательно, $\alpha\to 0$. Таким образом имеем:

$$V=V_0+\alpha=2q\ln\frac{1}{|\zeta_0-z|}+\alpha, \tag{6.6}$$

где $q$ – суммарный заряд $L$; $\zeta_0$ — произвольная конечная точка и $\alpha\to 0$ при $z\to\infty$.

Точно так же устанавливается справедливость соотношения (6.6) для плоского поля заряженной области и вообще для произвольной системы заряженных конечных точек, линий и областей, причем $q$ тогда означает суммарный заряд системы.

Из (6.6), в частности, вытекает, что при $q\neq 0$ потенциал поля неограниченно возрастает при $z\to\infty$. Поэтому потенциал плоского поля нельзя определять как работу перенесения в бесконечность заряда $q=+1$ (ср. формулу (6.2)). Если же суммарный заряд $q=0$, то из (6.6) вытекает, что потенциал поля при $z\to\infty$ стремится к 0.

Перейдем к рассмотрению силовой функции. Пусть дана односвязная область $D$ поля, свободная от зарядов, его образующих. Тогда в силу условия соленоидальности имеем:

$$div\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0.$$

Отсюда следует, что выражение $-E_y dx+E_x dy$ в области $D$ является полным дифференциалом некоторой функции $U$, так что в $D$

$$E_x=\frac{\partial U}{\partial y},\quad E_y=-\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{6.7}$$

Функция $U(x,y)$ восстанавливается в области $D$ по своему полному дифференциалу с помощью формулы

$$U(x,y)=\int_{z_0}^{z}-E_y dx+E_x dy+C, \tag{6.8}$$



$$\oint_C(\boldsymbol{V},\boldsymbol{s}^0)ds=\oint_C\frac{\Gamma}{2\pi r}ds=\frac{\Gamma}{2\pi r}\cdot 2\pi r=\Gamma.$$

Это и выясняет физический смысл константы $\Gamma$ в формуле (5.4). Величина ротора скорости в некоторой точке поля

$$(rot\boldsymbol{V})_n=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_C(\boldsymbol{V},\boldsymbol{s}^0)ds=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}$$

характеризует интенсивность завихрения поля вблизи этой точки. Точки поля, где $rot\boldsymbol{V}\neq 0$, называются вихревыми точками или вихрями.

Условие отсутствия вихрей в области $D$ для установившегося плоского течения жидкости выражается, следовательно, соотношением

$$(rot\boldsymbol{V})_n=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}=0.$$

Рассмотрим теперь установившийся плоский тепловой поток. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла, протекающее за единицу времени через элемент длины $ds$, пропорционально $ds$ и нормальной производной температуры $\frac{\partial v}{\partial n}$, т.е. равно

$$-k\frac{\partial v}{\partial n}ds=\left(-k\,grad\,v,\boldsymbol{n}^0\right)ds=(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{n}^0)ds.$$

Здесь $k$ – коэффициент внутренней теплопроводности, знак минус берется с учетом того, что тепло течет от высоких температур к низким, т.е. против направления $grad\,v$.

Таким образом, поток вектора $\boldsymbol{Q}$ через замкнутый контур $C$ означает количество тепла, протекающего за единицу времени изнутри $C$ наружу, и дивергенция $\boldsymbol{Q}$ в некоторой точке потока

$$div\boldsymbol{Q}=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\int_C(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{n}^0)ds=\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

характеризует интенсивность теплового источника, расположенного в этой точке.

Условие отсутствия источников в области $D$ для установившегося плоского потока тепла выражается равенством

$$div\boldsymbol{Q}=\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0. \tag{5.12}$$

С другой стороны, считая $k$ постоянным, мы видим, что

$$rot\boldsymbol{Q}=-k\,rot\,grad\,v=0,$$

откуда следует, что в каждой точке потока

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x}-\frac{\partial Q_x}{\partial y}=0. \tag{5.13}$$



функцию можно представлять физически как потенциал некоторого поля. Поэтому и в общем случае гармонические функции часто называют *потенциалами*, а теорию гармонических функций – *теорией потенциала*.

***Свойства гармонических функций.*** Важнейшим, прежде всего, связь между понятиями аналитических и гармонических функций. Эта связь выражается в следующих двух простых теоремах:

***Теорема 1.*** Действительная и мнимая части произвольной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, однозначной и аналитической в области $D$, являются в этой области гармоническими функциями.

Две гармонические в области $D$ функции $u(x,y)$и $v(x,y)$, связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

***Теорема 2.*** Для всякой функции $u(x,y)$, гармонической в односвязной области $D$, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x,y)$.

Так как функция определяется своими частными производными с точностью до постоянного слагаемого, то совокупность всех гармонических функций, сопряженных с $u(x,y)$, дает формула

$$v(x,y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C, \tag{4.1}$$

где $C$ – произвольная (действительная) постоянная.

Заметим, что в многосвязной области $D$ интеграл (4.1)

$$v(x,y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$$

определяет, вообще говоря, многозначную функцию. Можно утверждать, что в многосвязной области сюда формула для значений функции $v(x,y)$, определяемой интегралом (4.1), имеет вид:

$$v(x,y)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+N_1\Gamma_1+N_2\Gamma_2+\cdots+N_n\Gamma_n+C, \tag{4.2}$$

где $N_k$ – произвольные целые числа и $\Gamma_k$ – интегралы вдоль замкнутых контуров $\gamma_k$, каждый из которых содержит внутри себя одну связную часть границы $D$:

$$\Gamma_k=\int_{\gamma_k}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Постоянные $\Gamma_k$ называются *периодами* интеграла (4.1), или *циклические постоянными*.

Если в некоторой области $D'$, лежащей в $D$, можно выделить однозначную и непрерывную ветвь функции $v(x,y)$, определяемой формулой (4.2), то эта ветвь, очевидно, является гармонической функцией, сопряженной с $u(x,y)$. Поэтому функции $v(x,y)$ считают *многозначной гармо-*



Условиями (3.27) − (3.28) функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ определяются однозначно. Действительно, если бы существовало второе разложение

$$U(z)=U_1(z)+U_2(z)=U_1^*(z)+U_2^*(z),$$

то в $G^*$ было бы

$$U_1(z)-U_1^*(z)=U_2(z)-U_2^*(z)$$

и, согласно теореме единственности аналитических функций, это равенство выполнялось бы в $G_1$ и в $G_2$. Тогда функция $U_1(z)-U_1^*(z)$ аналитически продолжалась бы из $G_1$ в $G_2$ и представляла собой гармоническую функцию во всей области $G$. Эта функция должна тождественно равняться нулю, так как равны нулю ее граничные значения на $C$. Таким образом, $U_1(z)=U_1^*(z)$ и $U_2(z)=U_2^*(z)$, т.е. разложение (3.27) единственно.

Неизвестные пока граничные значения $U_\nu(\beta_\mu)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}U_1(\beta_2)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}f_1(\alpha_1)d\Gamma_1(\alpha_1,\beta_2)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1}U_1(\beta_1)d\Gamma_1(\beta_1,\beta_2),\\ U_2(\beta_1)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2}f_2(\alpha_2)d\Gamma_2(\alpha_2,\beta_1)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_2}U_2(\beta_2)d\Gamma_2(\beta_2,\beta_1).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Вместе с уравнениями

$$U_1(\beta_\nu)+U_2(\beta_\nu)=F(\beta_\nu),$$

которые следуют из (3.27), уравнения (3.29) определяют функции $U_\nu(\beta_\mu)$ однозначно. Эта система уравнений решается методом итераций, как и система (3.28). Задавая произвольно нулевые приближения $U_1^{(0)}(\beta_1)$ и $U_2^{(0)}(\beta_2)$, вычисляем следующие приближения по схеме

$$\begin{aligned}U_1^{(\nu)}(\beta_2)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}f_1(\alpha_1)d\Gamma_1(\alpha_1,\beta_2)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1}U_1^{(\nu)}(\beta_1)d\Gamma_1(\beta_1,\beta_2),\\ U_2^{(\nu)}(\beta_1)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_2}f_2(\alpha_2)d\Gamma_2(\alpha_2,\beta_1)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_2}U_2^{(\nu)}(\beta_2)d\Gamma_2(\beta_2,\beta_1).\\ U_1^{(\nu+1)}(\beta_1)&=F(\beta_1)-U_2^{(\nu)}(\beta_1),\\ U_2^{(\nu+1)}(\beta_2)&=F(\beta_2)-U_1^{(\nu)}(\beta_2).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Итерации сходятся при следующем предположении: пусть $\widetilde{U}_1(z)$ – функция, гармоническая в $G_1$; с граничными значениями $\widetilde{U}_1(\alpha_1)=0$, $\widetilde{U}_1(\beta_1)=1$; тогда должно быть $\widetilde{U}_1(\beta_2)\le M<1$; для соответствующим образом определенной в $G_2$ функции $\widetilde{U}_2(z)$ должно выполняться то же неравенство $\widetilde{U}_2(\beta_1)\le M<1$. В этом случае итерации вновь сходятся со скоро-

## 6. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

### 6.1. Силовая и потенциальная функции

Рассмотрим произвольное электростатическое поле в некоторой односвязной области $D$. Тогда в силу условия потенциальности

$$(rot\boldsymbol{E})_n = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad (6.1)$$

в этой области существует функция $V=V(x, y)$, полный дифференциал которой

$$dV = -E_x dx - E_y dy,$$

или, что то же самое,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \qquad (6.2)$$

В самом деле, известно, что выражение $Pdx + Qdy$ тогда и только тогда является полным дифференциалом, если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для выражения $-E_x dx - E_y dy$ последнее условие и выражается равенством (6.1): $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$. Функция $V(x, y)$ восстанавливается по своему полному дифференциалу с помощью формулы

$$V(x, y) = -\int_L E_x dx + E_y dy + C, \qquad (6.3)$$

где интеграл берется по любому пути $L$, соединяющему в области поля $D$ фиксированную точку $z_0$ с переменной точкой $z = x + iy$, а $C$ – произвольная постоянная. Равенства (6.2) можно записать одним векторным равенством:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = -grad\ \boldsymbol{V}. \qquad (6.4)$$

Функция $V = V(x,y)$ называется *потенциальной функцией* или потенциалом поля, ее линии уровня $V(x,y) = const$ – эквипотенциальными линиями. Из уравнения (6.4) следует, что в каждой точке поля вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ направлен по нормали к проходящей через эту точку эквипотенциальной линии.

Нетрудно выразить через потенциал *работу*, которая затрачивается при перенесении точечного заряда $q = +1$ из точки $z_1 = x_1 + iy_1$ в $z_2 = x_2 + iy_2$, она не зависит от пути $C$, соединяющего $z_1$ и $z_2$. В самом деле,



Выход заключается в том, чтобы сделать одну из областей − например $G_1$, − двусвязной областью $\widetilde{G}_1$ с известной функцией Грина. Можно этого достигнуть, отобразив $G_1$ на единичный круг плоскости $w$ так, чтобы некоторая внешняя для $G^*$ точка $z = z_0$ перешла в точку $w = 0$. Достаточно малый круг $|w| = \rho_0$ перейдет в плоскости $z$ в кривую $\widetilde{C}_1$, также лежащую вне $G^*$. В двусвязной области $\widetilde{G}_1$, ограниченной кривыми $C_1$ и $\widetilde{C}_1$, краевая задача решается при помощи функции Грина для кольца $\rho_0 < |w| < 1$. Рассматривая теперь $G^*$ как пересечение $\widetilde{C}_1$ и $G_2$ и полагая $f_1(\widetilde{C}_1) = 0$, мы опять добьемся сходимости метода Неймана и получим решение.

Приводит к цели также более простое разложение

$$U(z) = U_1(z) + U_2(z) + C\,\mathrm{Re}\,\Gamma_1(z, z_0).$$

Здесь $U_1(z)$ и $U_2(z)$ − гармонические функции в соответствующих односвязных областях, а $\Gamma_1(z, z_0)$ − функция Грина для $G_1$; причем $z_0$ − точка, внешняя к $G^*$. Постоянная $C$ определяется (заново при каждом итерационном шаге) так, чтобы для некоторой точки $z_1 \in C_2$ имело место равенство

$$U_1(z) + C\,\mathrm{Re}\,\Gamma_1(z_1, z_0) = 0.$$

## 4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 4.1. Гармонические функции и их свойства

***Гармонической в области D функцией*** называется действительная функция $u(x, y)$ двух действительных переменных, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ – символ дифференциального оператора). Это уравнение обычно называют ***уравнением Лапласа***. В силу линейности уравнения Лапласа любая линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(x, y)$$

гармонических функций $u_k(x, y)$ с действительными постоянными коэффициентами $\alpha_k$ снова является гармонической функцией.

Потенциалы важнейших векторных полей, рассматривающихся в физике, являются гармоническими функциями, и любую гармоническую



стью геометрической прогрессии со знаменателем $M$. Это условие всегда выполняется, если дуги $\alpha_\nu$ существуют, а дуги $\beta_\nu$ не касаются друг друга. Величина $M$ тем меньше – и, следовательно, тем больше скорость сходимости, – чем больше перекрываются области $G_1$ и $G_2$. Практические вычисления аналогичны *альтернирующему методу Шварца*. Метод также непосредственно переносится на случай большего числа областей.

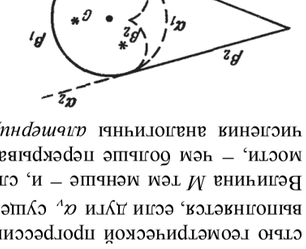


Рис. 3.7

Условие, состоящее в том, что $G^*$ есть пересечение двух областей, можно несколько ослабить. Рассмотрим для этого область $G^*$, изображенную на рис. 3.7, состоящую из круга и описанного угла. В качестве $G_1$ возьмем круг, а в качестве $G_2$ – угол; таким образом, $G^*$ не есть пересечение $G_1$ и $G_2$. Если выбрать на $\alpha_1$ граничное значение $f_1(\alpha_1) = 0$, то на основании принципа симметрии Шварца функция $U_1(z)$ аналитически продолжается через дугу $\alpha_1$, причем $U_1(\beta_2) = -U_1(\beta_2^*)$, где $\beta_2^*$ – дуга, симметричная с $\beta_2$ относительно $\alpha_1$. При помощи этого продолжения можно представить $U(z)$ в виде (3.27) везде в $G^*$, и метод итераций (3.30) вновь сходится. Как метод Шварца, так и метод Неймана вполне пригодны для конформных отображений двусвязных областей. Связь между конформным отображением и краевой задачей легко устанавливается. А именно если $C_1$ и $C_2$ – граничные кривые двусвязной области $G$ и заданы граничные значения $U(C_1) = -\frac{\pi}{4}$, $U(C_2) = \frac{\pi}{4}$, то функция $W(z) = U(z) + iV(z)$, построенная на основе решения этой краевой задачи, отображает область $G$ на параллельную полосу.

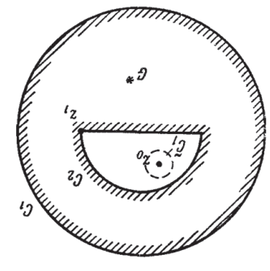


Рис. 3.8

При применении метода Шварца несущественно, является ли область $G = G_1 \cup G_2$ односвязной. При применении же метода Неймана для двусвязной области $G^*$ требуются дополнительные рассуждения. Примером служит область $G^*$, изображенная на рис. 3.8, являющаяся пересечением круга $G_1$ с границей $C_1$ и внешности $G_2$ полуокружности $C_2$. Функцию, гармоническую в $G^*$, вообще говоря, нельзя представить в виде суммы функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$, гармонических соответственно в $G_1$ и $G_2$. Сопряженные им функции $V_1(z)$ и $V_2(z)$ однозначны в $G^*$, тогда как $V(z)$, вообще говоря, многозначна.



так как $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}$ и $\boldsymbol{s}^0 ds = dx + idy = dz$ вектор длины $ds$, направленный по касательной к $C$, то $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0)ds = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy = -dV(x, y)$, и эта работа

$$A = -\int_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0)ds = \int_C dV(x, y) = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1)$$

равна разности потенциалов в точках $z_2$ и $z_1$.

***Пример 1.*** Для плоского поля точечного заряда величины $q$ компоненты вектора напряженности суть

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2},\quad E_y = \frac{2qy}{x^2 + y^2},$$

следовательно, согласно (6.3), потенциал такого поля дается формулой

$$V = -2q\int_{z_0}^{z} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = -q\ln(x^2 + y^2) + c - 2q\ln\frac{1}{|z|} + C,$$

где $L$ – любой путь, соединяющий $z_0$ с $z$ и не проходящий через точку $z = 0$, а $C$ – произвольная постоянная. При $z = \infty$ он обращается в бесконечность. Эквипотенциальными линиями поля являются концентрические окружности $|z| = r$. Если заряд $q$ расположен в точке $\zeta$, то потенциал его поля равен, очевидно,

$$V = 2q\ln\frac{1}{|z - \zeta|} + C. \qquad (6.5)$$

***Пример 2.*** Потенциал поля заряженной линии $L$ выражается формулой

$$V = \int_L 2\eta(\zeta)\ln\frac{1}{|z - \zeta|}ds,$$

где $\zeta$ – переменная точка $L$, действительная функция $\eta(\zeta)$ – линейная плотность заряда в точке $\zeta$ и $ds$ – элемент длины.

***Пример 3.*** Потенциал поля заряженной области $D$ выражается формулой

$$V = \iint_D 2\rho(\zeta)\ln\frac{1}{|z - \zeta|}d\sigma,$$

где $z$ – переменная точка $D$, $\rho(\zeta)$ – поверхностная плотность заряда в точке $\zeta$ и $d\sigma$ – элемент площади.

Остановимся на поведении потенциала плоского поля в бесконечности. Рассмотрим для конкретности поле линии $L$, состоящей из конечных точек и заряженной с линейной плотностью $\eta(\zeta)$. Наряду с ним рассмот-

$$\boldsymbol{Q} = \oint_C \left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0\right) ds$$

физически означает количество жидкости, протекающее за единицу времени изнутри $C$ наружу. Например, для плоского поля точечного источника вдоль окружности $|z| = r$ имеем

$$\left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0\right) = \pm|V| = \frac{Q}{2\pi r}$$

и

$$\oint_C \left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0\right) ds = \oint_C \frac{Q}{2\pi r} ds = \frac{Q}{2\pi r} 2\pi r = Q.$$

Это и выясняет физический смысл константы $Q$ в формуле (5.3). Если для некоторого контура $C$ поток отличен от нуля, то в силу несжимаемости жидкости, которую мы предполагаем, отсюда следует, что внутри $C$ расположены источники (или стоки).

Величина дивергенции скорости в некоторой точке поля

$$div\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C \left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0\right) ds = \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

характеризует интенсивность источника (или стока), который расположен в этой точке. Таким образом, условие отсутствия в некоторой области $D$ источников (стоков) установившегося плоского течения несжимаемой жидкости выражается соотношением

$$div\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Циркуляция вектора скорости $V$ вдоль замкнутого контура $C$ равна

$$\Gamma = \oint_C \left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0\right) ds \qquad (5.11)$$

интегралу от проекции $\boldsymbol{V}$ на направление касательной к $C$. Если для некоторого контура $C$ она отлична от нуля, то это означает, что в интеграле (5.11) проекции $V_s$ одного знака превалируют над проекциями другого знака, т.е. что жидкость как бы «завихряется» вдоль $C$ (рис. 5.6; здесь положительные $V_s$ превалируют над отрицательными, $\Gamma > 0$). Например, для плоского поля точечного вихря вдоль окружности $|z| = r$ имеем

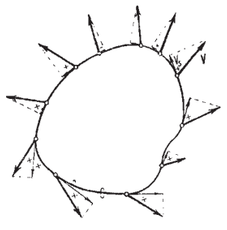


**Рис. 5.6**

$$\left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0\right) = \pm|V| = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

и





$$\boldsymbol{V} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad (5.3)$$

где $Q$ – действительная константа, физический смысл которой выяснится в дальнейшем. Линии тока образуют пучок прямых с центром в начале координат (рис. 5.5). При $Q > 0$ векторы $\boldsymbol{V}$ направлены от начала, при $Q < 0$ – к началу. В обоих случаях величина скорости убывает обратно пропорционально расстоянию точки до начала.

Такое поле называется плоским полем точечного источника (в случае $Q < 0$ говорят

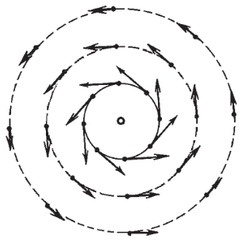


**Рис. 5.5**

ряда, а не квадрату расстояния как в пространстве. Отличие плоского поля от пространственного сказывается и в других формулах, в чем мы убедимся ниже.

***Пример 2.*** Для поля, создаваемого системой $n$ точечных зарядов величин $q_1, q_2, ..., q_n$, расположенных в точках $z_1, z_2, ..., z_n$, вектор напряженности

$$\boldsymbol{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k\left(\bar{z} - \bar{z}_k\right)}{\left|z - z_k\right|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k\left(x - x_k\right)}{\left(x - x_k\right)^2 + \left(y - y_k\right)^2} + i\sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k\left(y - y_k\right)}{\left(x - x_k\right)^2 + \left(y - y_k\right)^2}. \qquad (5.2)$$

В самом деле, если точечный заряд $q_k$ помещен не в начале координат, а в точке $z = z_k$, то вместо формулы (5.3) будем, очевидно, иметь:

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{2q_k\left(\bar{z} - \bar{z}_k\right)}{\left|z - z_k\right|^2}.$$

На основании принципа суперпозиции напряженность поля системы зарядов равна сумме напряженностей $\boldsymbol{E}_k$. Это и приводит к формуле (5.2).

***Пример 3.*** Вектор скорости $\boldsymbol{V}$ поступательного движения жидкости постоянен по величине и направлению. Мы выбираем в качестве $S_0$ любую плоскость, параллельную $\boldsymbol{V}$; тогда движение описывается плоским полем постоянного вектора:

$$\boldsymbol{V} = V_x + iV_y,$$

( $V_x = const$, $V_y = const$ ). Линии тока (сплошные линии вектора $\boldsymbol{V}$) образуют пучок параллельных прямых (рис. 5.4).

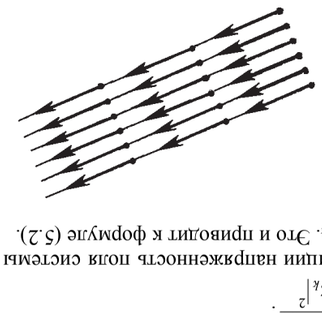


**Рис. 5.4**

***Пример 4.*** Рассмотрим течение жидкости, характеризуемое вектором скорости

Представление того же типа справедливо и в случае $\Gamma = 0$, ибо в этом случае однозначна функция $f(z) = u + iv$ и, полагая $e^{f(z)} = g(z)$, мы найдем:

$$u(z) = \ln|g(z)| \qquad (4.6)$$

На формулах (4.5) и (4.6) основывается классификация изолированных особых точек однозначных гармонических функций. Возможные случаи поведения таких функций в окрестности особых точек исчерпываются следующими **теоремы:**

***Теорема 1.*** Если $u(z)$ ограничена в окрестности точки $a$, то существует $\lim_{z \to a} u(z) = b$; полагая $u(a) = b$, мы получаем функцию, гармоническую и в точке $a$ (*устранимая особая точка*).

В самом деле, в этом случае функция $g(z)$ в выражении (4.5) или (4.6) имеет в точке $a$ устранимую особенность, т.е. существует $\lim_{z \to a} g(z)$; этот предел, очевидно, отличен от нуля – отсюда и следует утверждение.

***Теорема 2.*** Если $u(z)$ стремится к бесконечности при $z \to a$, то в окрестности точки $a$ она допускает представление вида

$$u(z) = k \ln|z - a| + U(z), \qquad (4.7)$$

где $k \neq 0$ – некоторая постоянная, а $U(z)$ – гармоническая в точке $a$ функция (полюс).

Действительно, в этом случае функция $g(z)$ может иметь в точке $a$ лишь полюс или нуль (если $u \to -\infty$), следовательно, ее можно представить в виде

$$g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

где $n$ – положительное или отрицательное число и $\varphi(z)$ – аналитическая в точке $a$ функция, причем $\varphi(a) \neq 0$. Логарифмируя это выражение (4.5) или (4.6), получаем искомое представление (4.7).

***Теорема 3.*** Если $u(z)$ не стремится при $z \to a$ ни к какому пределу, то она имеет в точке $a$ полную неопределенность: для любого действительного $b$ можно найти последовательность точек $z_n \to a$, для которой $\lim_{n \to \infty} u(z_n) = b$ (существенно особая точка).

В самом деле, в этом случае $g(z)$ может иметь в $a$ лишь существенно особую точку, и утверждение является непосредственным следствием теоремы Ю. В. Сохоцкого.

*Пример:* $g(z) = e^{1/z}$, $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Все сказанное относится и к бесконечно удаленной точке, только окрестность $0 < |z - a| < R$ надо заменить окрестностью $R < |z| < \infty$ и представление (4.7) представлением

$$u(z) = k \ln|z| + U(z).$$

Гармоничность функции в бесконечности означает, что $z = \infty$ является устранимой особой точкой этой функции.



*нической функцией*. Заметим, что частные производные этой функции однозначны: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$; это вытекает из формулы (4.2).

Теорему 2 можно, очевидно, сформулировать так:

***Теорема 2'.*** Любую гармоническую в области $D$ функцию можно рассматривать как действительную или мнимую часть некоторой аналитической функции $f(z)$; эта последняя определяется с точностью до постоянного слагаемого, соответственно мнимого или действительного.

Не исключаем случая многосвязных областей, поэтому аналитическая функция $f(z)$ может оказаться многозначной.

*Пример*. Подсчет частных производных показывает, что функция

$$u = \ln(x^2 + y^2) = 2\ln|z|$$

является гармонической в кольце $0 < |z| < \infty$. Интеграл (4.1) имеет вид:

$$v(x, y) = 2\int_{z_0}^{z} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} + C = 2\,Arg\,z + C$$

и представляет в кольце $0 < |z| < \infty$ бесконечнозначную функцию. Соответствующая аналитическая функция

$$f(z) = u + iv = 2\ln|z| + 2i\,Arg\,z + iC = 2\ln z + iC$$

также бесконечнозначна.

***Теорема 3.*** Любая гармоническая функция $u(x, y)$ является аналитической функцией своих аргументов $x$ и $y$, т.е. в окрестности каждой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ области $D$ она представляется в виде суммы абсолютно сходящегося ряда

$$u(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n.$$

Из теоремы вытекает, что гармонические функции обладают частными производными всех порядков. Основываясь на теореме 3, можно получить практически удобный способ восстановления аналитической функции $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0. \qquad (4.3)$$

Формула (4.3) получена для точек $z$, близких к $z_0$, но по теореме единственности, очевидно, сохраняет силу во всей области определения *f(z)*, ибо в этой области обе части (4.3) являются аналитическими функциями $z$.

В частности, если *f(z)* аналитична в начале координат, то можно положить $z_0 = 0$, и формула (4.3) принимает особенно простой вид:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \bar{c}_0. \qquad (4.4)$$

Приведем несколько примеров применения формул (4.3) и (4.4):

1) $u = x + y$, $f(z) = z + \frac{z}{i} + c = (1 - i)z + c$ (формула (4.4));

также о стоке). Поле точечного источника следует представлять как плоскопараллельное поле прямой, источающей жидкость в пространство.

***Пример 5.*** Рассмотрим течение жидкости, характеризуемое вектором скорости

$$V = \frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{z}{|z|^2} = -\frac{\Gamma y}{2\pi\left(x^2+y^2\right)} + i\frac{\Gamma x}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}, \tag{5.4}$$

где Γ – действительная константа, физический смысл которой выяснится в дальнейшем. В каждой точке $z$ вектор скорости повернут относительно вектора $z$ на 90° (против часовой стрелки при $\Gamma > 0$ и по часовой – при $\Gamma < 0$), следовательно, линии тока представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

Величина скорости убывает обратно пропорционально $z$ (см. рис. 5.5). Такое поле называется плоским полем вихря.

При $\Gamma > 0$ жидкость вращается против часовой стрелки, при $\Gamma < 0$ – по часовой.

*Пример 6.* Вектор теплового потока точечного источника

$$\boldsymbol{Q} = \frac{q}{2\pi}\frac{\boldsymbol{z}}{|z|^2}, \tag{5.5}$$

где $q$ – действительная константа. Поле вектора (5.5) вполне аналогично плоскому полю точечного источника жидкости (5.3).

### 5.3. Свойства плоских векторных полей

Рассмотрим сначала плоское электростатическое поле, порожденное произвольной системой зарядов (точечных, линейных и плоских). По теореме Гаусса, которую мы предполагаем известной, поток вектора напряженности поля через произвольную замкнутую кривую $C$ равен умноженному на 4π полному заряду, заключенному внутри $C$:

$$N = \oint\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0\right)ds = 4\pi q \tag{5.6}$$

(здесь $\boldsymbol{n}^0$ – единичный вектор внешней нормали к $C$). Теорема Гаусса выясняет физический смысл потока вектора напряженности электростатического поля. Если для некоторого замкнутого контура $C$ поток отличен от нуля, то это означает, что внутри $C$ расположены заряды поля. Поверхностную плотность распределения заряда в некоторой точке поля характеризует величина дивергенции вектора напряженности, которая, как известно, равна

$$div\boldsymbol{E} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_C\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0\right)ds = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}, \tag{5.7}$$



где $\Delta\sigma$ – площадь, ограниченная контуром $C$, охватывающим рассматриваемую точку, и пределе берется в предположении, что контур $C$ стягивается к этой точке. По формуле (5.6) поток $\oint_C\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0\right)ds$ через $C$ равен умноженному на $4\pi$ суммарному заряду $\Delta q$, заключенному внутри $C$, и следовательно:

$$div\boldsymbol{E} = 4\pi\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\sigma} = 4\pi\rho,$$

где $\rho$ – поверхностная плотность заряда в точке $z$. Отсюда следует, что если в некоторой точке $z$ плотность заряда равна нулю, то в этой точке

$$div\boldsymbol{E} = 0. \tag{5.8}$$

Поле, дивергенция которого в каждой точке $z$ области $D$ равна нулю, называется соленоидальным в этой области.

В силу (5.7) и (5.8) условие соленоидальности поля в некоторой области $D$ выражается равенством

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Циркуляция вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ вдоль замкнутого контура $C$

$$A = \oint_C\left(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0\right)ds, \tag{5.9}$$

где $\boldsymbol{s}^0$ – единичный вектор касательной к $C$, физически означает работу сил поля при перемещении по $C$ положительного единичного заряда. Так как для поддержания электростатического поля не требуется затраты энергии, то работа сил поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. В противном случае существовал бы контур, обход которого зарядом в определенном направлении сопровождался выделением некоторой конечной и не равной нулю работы; обход контура неограниченное число раз давал бы неограниченный источник энергии (вечный двигатель!).

Поэтому в любой точке поля

$$\left(rot\boldsymbol{E}\right)_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_C\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0\right)ds = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \tag{5.10}$$

В формуле (5.10) *(rotE)n* означает проекцию ротора на нормаль к площадке $\Delta\sigma$, ограниченной контуром $C$ (единственная отличная от нуля компонента ротора плоского поля), и пределе берется в предположении, что контур $C$, охватывающий рассматриваемую точку, стягивается к этой точке. Поле, ротор которого в каждой области $D$ равен нулю, называется потенциальным в этой области. Формула (5.10) показывает, что электростатическое поле всюду потенциально.

Рассмотрим другие типы полей. Для плоского течения жидкости поток вектора скорости через замкнутый контур $C$



2) $u = \ln(x^2+y^2)$, $f(z) = 2\ln\left\{\frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{4}\right\} + c = 2\ln z + c$
(формула (4.3), $z_0 = 1$);

3) $u = \frac{\sin 2x}{ch\,2y - \cos 2x}$, $f(z) = \frac{2\sin(z+\frac{\pi}{2})}{ch\,i\left(\frac{\pi}{2}-z\right) - \cos(z+\frac{\pi}{2})} + c = ctg\,z + c$
(формула (4.3), $z_0 = \frac{\pi}{2}$).

Во всех формулах $C$ – число минимая постоянная.

***Теорема 4 (о среднем).*** Если функция $u(z)$ непрерывна в замкнутом круге радиуса $r$ с центром в точке $z$ и гармоничная внутри этого круга, то

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

***Теорема 5.*** Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.

***Теорема 6.*** Если гармоническая во всей открытой плоскости функция $u(z)$ ограничена хотя бы сверху или снизу, то она постоянна.

Следующие две теоремы устанавливают характер *линий уровня* гармонических функций, т.е. совокупностей точек, для которых

$$u(z) = const.$$

***Теорема 7.*** Если отличная от постоянной гармоническая функция $u(z)$ имеет замкнутую линию уровня $u(z) = u_0$, то внутри линии находится хотя бы одна особая точка этой функции.

***Теорема 8.*** Любая достаточно малая окрестность точки $z_0$ линии уровня $u(z) = u_0$ разбивается этой линией на четное число $2n$ $(n \geq 1)$ секторов, в которых $u(z)$ попеременно принимает значения, большие и меньше $u_0$.

Из теоремы 8 вытекает, что линия уровня гармонической функции может иметь лишь простые точки ($n = 1$) или кратные точки[1] с различными касательными ($n > 1$) – случаи изолированных точек, концевых точек или точек возврата исключаются.

Сформулируем теорему, обратную теореме о среднем.

***Теорема 9.*** Если функция $u(z)$ непрерывна в области $D$ и в любой точке $z$ для достаточно малых $r$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

то функция $u(z)$ гармонична в $D$.

Приведем теорему, аналогичную теореме Бенедиктраcса.

[1] В любой замкнутой области гармоничности функции $u(z)$ может находиться конечное число кратных точек линии уровня (в каждой такой точке $f'(z) = 0$); в противном случае по теореме единственности должно быть $f'(z) \equiv 0$.



***Теорема 10.*** Пусть задана последовательность функций $u_0(z), u_1(z), \cdots, u_n(z), \cdots$, гармонических в области $D$ и непрерывных в $\overline{D}$. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится на границе $D$, то он равномерно сходится и внутри $D$, причем его сумма является гармонической в $D$ функцией.

В заключение отметим еще две полезные для дальнейшего теоремы. Первая из них выражает, что свойство функции быть гармонической не нарушается при аналитическом преобразовании независимого переменного.

***Теорема 11.*** Если функция $u(z)$ гармонична в области $D$ и $z = g(\zeta)$ – аналитическая в некоторой области Δ функция, значения которой лежат в $D$, то сложная функция $u[g(\zeta)] = U(\zeta)$ гармонична в Δ.

Вторая теорема выражает свойство интеграла от нормальной производной гармонической функции:

***Теорема 12.*** Если функция $u(z)$ гармонична в односвязной области $D$ и непрерывна вместе со своими частными производными в $\overline{D}$, то

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds = 0,$$

где $C$ – граница области $D$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную в направление нормали к $C$, а $ds$ – дифференциал дуги.

Рассмотрим вопросы об особых точках, теоремах единственности и аналитическом продолжении гармонических функций. Начнем с изучения поведения однозначной гармонической функции *u(z)* в окрестности ее изолированной особой точки. Пусть функция *u(z)* однозначна и гармонична в окрестности $0 < |z - a| < R$ точки *a*. Обозначим через Γ циклическую постоянную гармонической функции *v (z),* сопряженной с *u(z)* в этой окрестности. Так как приращение любой ветви функции *iv(z)* при обходе в положительном направлении замкнутого контура, окружающего точку *a*, равно *i*Γ, а приращение при том же обходе любой ветви *Ln(z – a)* равно $2\pi i$, то функция

$$f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi}Ln(z-a)$$

будет в нашей окрестности распадаться на совокупность однозначных аналитических функций, значения которых в любой фиксированной точке отличаются друг от друга на целое кратное iΓ. Поэтому функция

$$e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = (z-a)e^{\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)} = g(z)$$

является однозначной аналитической, и мы получаем представление однозначной гармонической функции *u* в окрестности изолированной особой точки *a*:

$$u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi}ln|g(z)|. \tag{4.5}$$

По закону Кулона величина элементарной напряженности $d\boldsymbol{E}$ поля точечного заряда $qdh$, расположенного на высоте $h$, равна

$$|d\boldsymbol{E}| = \frac{qdh}{MP^2} = \frac{qdh}{r^2 + h^2},$$

где $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ – расстояние точки $P$ до начала координат. Так как вектор $\boldsymbol{E}$ лежит в плоскости $S_0$, то его величина равна сумме проекций на $S_0$ элементарных напряженностей $d\boldsymbol{E}$:

$$|\boldsymbol{E}| = \int \cos\varphi |d\boldsymbol{E}| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\cos\varphi}{r^2 + h^2} dh,$$

где $\varphi$ – угол между вектором $d\boldsymbol{E}$ и плоскостью $S_0$. Из прямоугольного треугольника $MOP$ имеем $h = r\,tg\varphi$ и $\frac{1}{r^2 + h^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r^2}$, следовательно,

$$|\boldsymbol{E}| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\cos\varphi}{r} d\varphi = \frac{2q}{r}. \quad (5.1)$$

Так как вектор $\boldsymbol{E}$ направлен по вектору $\overline{OP} = z$, а единичный вектор этого направления равен $\frac{z}{|z|}$, то

$$\boldsymbol{E} = \frac{2q}{r} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{2qz}{|z|^2} = \frac{2qx}{x^2 + y^2} + i\frac{2qy}{x^2 + y^2}.$$

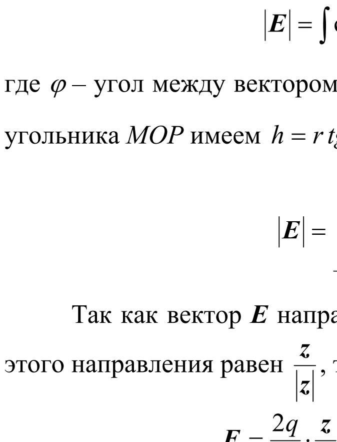


Рис. 5.3

Рассматриваемое электростатическое поле вполне определяется распределением векторов $\boldsymbol{E}$ в плоскости $S_0$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать плоское поле точечного заряда величины $q$, подразумевая при этом, что рассматривается плоскопараллельное поле равномерно заряженной прямой $L$. Величина $q$ означает линейную плотность заряда, т.е. заряд куска $L$ высоты $l$. Силовые линии такого поля (линии, которые в каждой своей точке касаются вектора поля, проходящего через эту точку) образуют пучок прямых с центром в начале координат (рис. 5.3).

Для положительного заряда $q$ векторы $\boldsymbol{E}$ направлены от начала координат, для отрицательного заряда $q$ – к началу.

Формула (5.1) показывает, что величина напряженности плоского поля точечного заряда обратно пропорциональна расстоянию точки от за-



Мы не рассматриваем особые точки многозначного характера (примером такой точки является точка $z = 0$ для функции $u = Arctg\frac{y}{x}$), а также неизолированные особые точки.

Перейдем к вопросу о теоремах единственности для гармонических функций. Внутренняя теорема единственности теории аналитических функций не переносится полностью на гармонические функции, ибо гармонические функции, совпадающие на линиях, вовсе не обязаны совпадать в области. Действительно, гармонические функции принимают каждое свое значение на некоторых линиях (линиях уровня) и, следовательно, совпадают с постоянными на линиях, не будучи постоянными в области.

***Теорема 4***. Если две функции, гармонические в области $D$, совпадают в какой-либо области $D_o$, лежащей в $D$, то они совпадают и во всей области $D$.

Граничная теорема единственности теории аналитических функций, выражающая, что функция, аналитическая в области, определяется своими значениями на границе, переносится на гармонические функции. Для гармонических функций эта теорема является непосредственным следствием принципа экстремума. Чтобы получить ее в достаточно общих для практики предложениях, мы предварительно докажем обобщенный принцип экстремума.

***Теорема 5.*** Если гармоническая и ограниченная в области $D$ функция $u(z)$ принимает [2] на границе $C$ этой области значения $u(\zeta)$, кусочно-непрерывные с конечным числом точек разрыва первого рода, то значения $u(z)$ внутри $D$ заключены между максимальным и минимальным ее граничными значениями (значения $u(\zeta)$ в точках разрыва не учитываются).

Пусть $M = \sup u(\zeta)$ на $C$, а $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ – точки разрыва $u(\zeta)$ и $\delta$ – диаметр области $D$, т.е. максимум расстояния между двумя точками из $D$. Зафиксируем произвольное положительное число $\varepsilon$ и рассмотрим функцию

$$U(z) = M + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} ln \frac{\delta}{|z-\zeta_k|}. \quad (4.8)$$

Функция (4.8), очевидно, гармонична в области $D$, везде больше $M$ и непрерывна в $\overline{D}$ всюду, кроме точек $\zeta_k$, при приближении к которым она стремится к $+\infty$. Из каждой точки $\zeta_k$, как из центра, опишем круг достаточно малого радиуса $r$ и обозначим через $D_r$ область, получаемую из области $D$ удалением всех таких кругов.

Функция $U(z) - u(z)$ неотрицательна на общей части границ $D$ и $D_r$, а при достаточно малых $r$ и на окружностях $|z - \zeta_k| = r$, ибо функция $u(z)$

[2] Говорят, что функция $u(z)$, определенная в области $D$, принимает значение $u(\zeta)$ в граничной точке $\zeta$ этой области, если при $z \to \zeta$ по точкам области существует $\lim_{z\to\zeta} u(z) = u(\zeta)$.



Переходя к общему случаю, предположим, что дуга $\gamma$ задана параметрическим уравнением $z = z(t)$, где $z(t)$ – аналитическая на отрезке$(\alpha, \beta)$действительной оси функция и $z'(t) \neq 0$. По условию функция $u(z(t)) = U(t)$ также аналитична на этом отрезке. Продолжим функцию $z = z(t)$ в комплексную область значений $t$, содержащую отрезок $(\alpha, \beta)$; комплексные значения $t$ мы обозначим через $\zeta$, а полученное продолжение − через $z = z(\zeta)$. Функция $u\{z(\zeta)\} = U(\zeta)$ гармонична с одной стороны отрезка $(\alpha, \beta)$ и на самом отрезке, где $\zeta = t$, принимает аналитические значения $U(t)$. Следовательно, по доказанному частному случаю $U(\zeta)$ продолжается через отрезок $(\alpha, \beta)$ и, возвращаясь к переменной[4] $z$, мы получим аналитическое продолжение функции $u(z)$ через кривую $\gamma$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что при заданных областях $D_1$ и $D_2$ и заданном общем участке $\gamma$ их границы аналитическое продолжение гармонической функции $u_1(z)$ через $\gamma$ в $D_2$ определяется единственным образом. Это следует из **теоремы 4**, примененной к областям $D_0 = D_1$ и $D = D_1 + \gamma + D_2$.

## 4.2. Задача Дирихле

Совокупность гармонических функций – это совокупность всех решений уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, которое является одним из простейших дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Подобно тому как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений для выделения одного определенного решения задают дополнительные условия, так и для полного определения решения уравнения Лапласа требуются дополнительные условия. Для уравнения Лапласа они формулируются в виде так называемых краевых условий, т.е. заданных соотношений, которым должно удовлетворять искомое решение на границе области.

Простейшее из таких условий сводится к заданию значений искомой гармонической функции в каждой точке границы области. Таким образом, мы приходим к первой краевой задаче или ***задаче Дирихле***.

*Найти гармоническую в области $D$ и непрерывную в $\overline{D}$ функцию $u(z)$, которая на границе $D$ принимает заданные непрерывные значения $u(\zeta)$.*

В задаче Дирихле приводится, например, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой об-

[4] Для того чтобы перейти к переменной $z$, надо в $U(\zeta)$ подставить $\zeta = \zeta(z)$, где $\zeta(z)$ – функция, обратная $z(\zeta)$. Функция $\zeta(z)$однозначна и аналитична в некоторой окрестности $\gamma$, ибо на $(\alpha, \beta)$ по условию $z'(t) \neq 0$.



Докажем единственность решения задачи Неймана. Заметим, прежде всего, что с помощью вспомогательного конформного отображения $z = f(z_1)$ верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z_1 > 0$ на область $D$ задача Неймана для $D$ сводится к такой же задаче для верхней полуплоскости. В самом деле, пусть $u(z)$ – решение задачи Неймана для области $D$ с заданной граничной функцией $g(\zeta)$. Функция

$$u_1(z_1) = u[f(z_1)]$$

гармонична в верхней полуплоскости. Так как при конформном отображении направление внутренней нормали к C переходит в направление положительной оси $y_1 = Im\, z_1$ (всюду, кроме угловых точек контура C, которых по нашему обычному предположению конечное число) и отношение элемента длины нормали $dn$ к соответствующему элементу $dy_1$ равно растяжению отображения, т.е. равно $|f'(x_1)|$, то на оси $x_1 = Re z_1$ имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{f(x_1)} \cdot |f'(x_1)| = g[f(x_1)] \cdot |f'(x_1)| = g_1(x_1).$$

Функция $g_1(x_1)$ непрерывна на оси $x_1$, всюду, кроме конечного числа точек, соответствующих угловым точкам кривой C, и конечного числа точек разрыва функции $g[f(x_1)]$; она вполне определяется конформным отображением и заданной граничной функцией. Если теперь, не зная $u(z)$, решить задачу Неймана для верхней полуплоскости $Imz_1 > 0$ и граничной функции $g_1(x_1)$, то очевидно $u_1[\varphi(z)]$, где $z_1 = \varphi(z)$ – отображение, обратное к $z = f(z_1)$, будет являться решением задачи Неймана для области $D$.

Приведенное рассуждение показывает, что при доказательстве единственности решения задачи Неймана можно ограничиться случаем, когда область $D$ представляет собой полуплоскость. Предположим, что имеются два решения задачи Неймана $u_1(z)$ и $u_2(z)$; тогда их разность $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ будет гармонической в верхней полуплоскости функцией, причем на оси $x$ ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ и в некоторой точке $z_0$ будет $u(z_0) = 0$. Функция $\frac{\partial u}{\partial y}$ гармонична и ограничена в верхней полуплоскости и равна нулю на оси $x$, т. е. решает для верхней полуплоскости и нулевых граничных значений задачу Дирихле. Так как эту же задачу решает функция, тождественно равная нулю, то $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$. Но тогда $u(z)$ должна быть постоянной и равной нулю в силу условия $u(z_0) = 0$. Единственность решения задачи Неймана доказана.

В дополнительном предположении непрерывности частных производных в $\overline{D}$ *решение задачи Неймана сводится к решению задачи Дирихле для сопряженной гармонической функции.*

Действительно, пусть $v\ (z)$ – гармоническая функция, сопряженная с $u(z)$. В силу условий Коши-Римана, записанных в точках кривой С для направлений $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{n}$, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = g(\zeta).$$

## 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПЛОСКОГО ПОЛЯ

### 5.1. Плоские векторные поля

Под векторным полем понимают часть пространства, с каждой точкой которой связано значение некоторого вектора. Особый интерес для нас будут представлять следующие три примера векторных полей:

1) Поле скоростей движения жидкости. В каждый момент времени в любой точке области $D$, занятой движущейся жидкостью, вполне определенное значение имеет вектор скорости $V$ движения жидкости. Совокупность всех точек $D$ вместе со связанными с ними векторами $V$ и образует наше поле.

2) Электростатические поле. В пространстве, окружающем заряд, действуют электрические силы, которые обнаруживаются при внесении в поле «пробных» зарядов.

Сила, действующая на единичный пробный заряд, внесенный в некоторую точку пространства, называется напряженностью поля в этой точке. Совокупность точек пространства, окружающего заряд, вместе со связанными с ними векторами $\boldsymbol{E}$ напряженности и образует наше поле.

3) Поле вектора потока тепла. В пространстве, окружающем нагретое тело, где различные точки $M$ имеют различные температуры $v(M)$, происходит движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Вектором потока тепла называется вектор

$$\boldsymbol{Q} = -k\ grad\ v(M),$$

где $k$ – коэффициент внутренней теплопроводности. Вектор $\boldsymbol{Q}$ направлен по нормали к изотермической поверхности в сторону более низких температур (т.е. в ту сторону, куда течет тепло). Совокупность векторов $\boldsymbol{Q}$ и образует рассматриваемое поле.

Наши дальнейшие рассмотрения относятся к векторным полям произвольной физической природы, но для конкретности мы будем иметь в виду, прежде всего, эти три примера полей.

В общем случае приходится рассматривать векторные поля, изменяющиеся с течением времени. Аналитическое задание таких полей сводится к заданию трех скалярных функций (компонент вектора поля) в зависимости от четырех скалярных аргументов (трех координат точки поля $x$, $y$, $z$ и времени $t$).



ляется гармонической, ибо в точках диаметра $y = 0$ она не имеет производной. Однако принципы симметрии и аналитического продолжения остаются в силе.

***Теорема 7.*** *(Принцип симметрии).* Пусть функция $u_1(z)$ гармонична в области $D_1$, граница которой содержит отрезок $(\alpha, \beta)$ действительной оси, и равна нулю на этом отрезке. Тогда функция

$$u_2(z) = -u_1(\bar{z}) \qquad (4.10)$$

гармонична в области $D_2$, симметричной с $D_1$ относительно действительной оси, и дает аналитическое продолжение функции $u_1(z)$ в $D_2$.

Действительно, гармоничность $u_2(z)$ в области $D_2$ очевидна.

Она следует из условия (4.10), записанного в виде

$$u_2(x, y) = -u_1(x, -y),$$

ибо отсюда

$$\frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x,-y)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x,-y)}{\partial y^2}.$$

Остается показать, что функция

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z) \text{ в } D_1, \\ 0 \text{ на} (\alpha, \beta), \\ u_2(z) \text{ в } D_2 \end{cases}$$

гармонична в области $D = D_1 + (\alpha, \beta) + D_2$. Функция $u(z)$ непрерывна в $D$ и ее значение в любой точке $z$ равно среднему арифметическому значению на окружности достаточно малого радиуса с центром в $z$. Для точек областей $D_1$ и $D_2$ это следует из гармоничности $u_1(z)$ и $u_2(z)$, а для точек отрезка $(\alpha, \beta)$, где $u(z) = 0$, – из соображений симметрии. Но тогда по **теореме 9** функция $u(z)$ гармонична в D.

***Теорема 8.*** *(Принцип аналитического продолжения).* Если функция $u(z)$ гармонична в области $D$, граница которой содержит аналитическую дугу $\gamma$, и значения $u(z)$ на этой дуге образуют действительную аналитическую функцию параметра, то $u(z)$ можно аналитически продолжить через дугу $\gamma$.

Пусть сначала $\gamma$ представляет собой отрезок действительной оси $x$. Так как действительная функция $u(x)$ по условию аналитична на $\gamma$, то она может быть аналитически продолжена в комплексную область. Обозначим это продолжение через $f_1(z)$ – это (комплексная) аналитическая функция в окрестности $\Delta$ отрезка $(\alpha, \beta)$ и ее действительная часть $u_1(z)$ – гармоническая в $\Delta$ функция, равная $u(x)$ на отрезке $\gamma$. По **теореме 7** разность $u(z) - u_1(z)$ можно аналитически продолжить за отрезок именно в область, симметричную с пересечением областей $D$ и $\Delta$ относительно отрезка $\gamma$. Так как $u_1(z)$ уже определена в этой области, то такое продолжение даст и аналитическое продолжение функции $u(z)$ в ту же область. Для нашего частного случая теорема доказана.



Мы ограничимся рассмотрением стационарных полей, т.е. предположим, что векторы поля не меняются с течением времени и зависят лишь от координат точек поля.

Это ограничение позволяет задавать и изучать поля с помощью трех скалярных функций. Это означает, что все векторы поля параллельны некоторой одной плоскости $S$, причем во всех точках, расположенных на любой прямой, перпендикулярной к $S$, векторы поля одинаковы по величине и направлению. Такое поле полностью определяется плоским полем векторов в любой плоскости $S_0$, параллельной $S$ (рис. 5.1). Для описания плоскопараллельных стационарных полей достаточно двух скалярных функций (двух компонент вектора плоского поля) от двух аргументов (двух координат точки на плоскости). Компоненты вектора $\boldsymbol{A}$ по осям $x$ и $y$ мы будем обозначать через $A_x$ и $A_y$, так что

$$\boldsymbol{A} = A_x + iA_y.$$

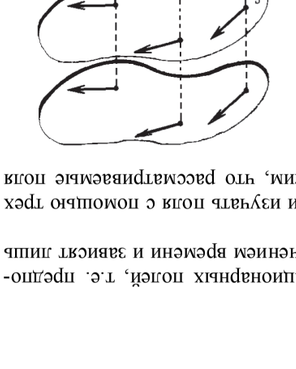



**Рис. 5.1**

### 5.2. Примеры плоских полей

***Пример 1.*** Рассмотрим электрическое поле равномерно заряженной прямой $L$. Это поле, очевидно, плоскопараллельно, и в качестве $S_0$ можно принять любую плоскость, перпендикулярную к $L$. Обозначим через $q$ линейную плотность заряда на прямой $L$ (т.е. величину заряда, рассчитанную на единицу длины $L$) и найдем выражение для вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности нашего поля в произвольной точке $P$ плоскости $S_0$. Для подсчета подберем прямоугольную декартовую систему координат $(x, y, h)$, как на рис. 5.2.

На основании известного из физики принципа суперпозиции мы можем рассматривать вектор $\boldsymbol{E}$ как векторную сумму напряженностей $d\boldsymbol{E}$ элементарных зарядов $qdh$, сосредоточенных на элементах $dh$ прямой $L$.

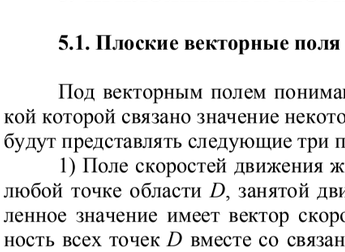



**Рис. 5.2**



по условию ограничена, а при $r \to 0$ значения $U(z)$ на окружностях неограниченно возрастают. Отсюда на основании обычного принципа экстремума заключаем, что в любой точке из $D_r$, а следовательно, и в любой точке из $D$[3], функция $U(z)$-$u(z)$ не отрицательна. Но так как при фиксированном $z$ и $\varepsilon \to 0$ функция $U(z) \to M$, то отсюда вытекает, что в любой точке $D$ имеем $|u(z)| \le M$. Но функция $u(z)$ не может принимать внутри $D$ значения, равного ее максимальному значению $M$, следовательно, всюду в $D$ имеет место строгое неравенство $u(z) < M$. Аналогично доказывается, что всюду в $D$ справедливо неравенство $u(z) > m$, где $m = \inf u(\zeta)$ на $C$.

*Замечание.* Для неограниченных функций $u(z)$ теорема не имеет места. Например, функция

$$u(z) = \frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2} = Re\left(1 - \frac{2}{z}\right) \qquad (4.9)$$

гармонична в круге $x^2 + y^2 < 2x$, равна нулю всюду на окружности этого круга, кроме точки $z = 0$, и тем не менее внутри круга отлична от нуля.

Теперь легко доказывается граничная теорема единственности, о которой мы говорили выше.

***Теорема 6.*** Пусть на границе $C$ области $D$ задана функция $u(\zeta)$ кусочно-непрерывная с конечным числом точек разрыва первого рода $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$. Существует не более одной функции $u(z)$, гармонической и ограниченной в области $D$, которая в точках $\zeta \ne \zeta_k$ границы принимает заданные значения $u(\zeta)$.

В самом деле, пусть существуют две функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Их разность

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z)$$

гармонична в области $D$, ограничена и принимает значения, равные нулю во всех граничных точках $\zeta \ne \zeta_k$. По **теореме 5** все значения $u(z)$ внутри $D$ заключены между максимальным и минимальным ее значением в точках $\zeta \ne \zeta_k$, т.е. равны нулю. Теорема доказана.

Заметим, что в **теореме 6** область $D$ может содержать бесконечно удаленную точку внутри или на границе. Для ограниченных функций теорема, конечно, неверна. Например, в случае круга $x^2 + y^2 < 2x$ и нулевых (всюду, кроме $z = 0$) граничных значений существуют две гармонические функции, принимающие заданные значения, – функция $u \equiv 0$.

В заключение вывлекм вопрос об аналитическом продолжении гармонических функций. Принцип непрерывного продолжения не переносится на гармонические функции. Например, пусть $u_1(z) = y$ в верхнем единичном полукруге, $u_2(z) \equiv 0$ в нижнем; тогда $u_1 = u_2$ на отрезке (-1,1), однако функция $u(z)$, равная $u_1$ в верхнем полукруге и $u_2$ в нижнем, не является гармонической, ибо в точках диаметра $y = 0$ она не имеет производной. Однако принципы симметрии и аналитического продолжения остаются в силе.

***Теорема 7.*** *(Принцип симметрии).* Пусть функция $u_1(z)$ гармонична в области $D_1$, граница которой содержит отрезок $(\alpha, \beta)$ действительной оси, и равна нулю на этом отрезке. Тогда функция

$$u_2(z) = -u_1(\bar{z}) \qquad (4.10)$$

гармонична в области $D_2$, симметричной с $D_1$ относительно действительной оси, и дает аналитическое продолжение функции $u_1(z)$ в $D_2$.

Действительно, гармоничность $u_2(z)$ в области $D_2$ очевидна.

Она следует из условия (4.10), записанного в виде

$$u_2(x, y) = -u_1(x, -y),$$

ибо отсюда

$$\frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x,-y)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x,-y)}{\partial y^2}.$$

Остается показать, что функция

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z) \text{ в } D_1, \\ 0 \text{ на} (\alpha, \beta), \\ u_2(z) \text{ в } D_2 \end{cases}$$

гармонична в области $D = D_1 + (\alpha, \beta) + D_2$. Функция $u(z)$ непрерывна в $D$ и ее значение в любой точке $z$ равно среднему арифметическому значению на окружности достаточно малого радиуса с центром в $z$. Для точек областей $D_1$ и $D_2$ это следует из гармоничности $u_1(z)$ и $u_2(z)$, а для точек отрезка $(\alpha, \beta)$, где $u(z) = 0$, – из соображений симметрии. Но тогда по **теореме 9** функция $u(z)$ гармонична в D.

***Теорема 8.*** *(Принцип аналитического продолжения).* Если функция $u(z)$ гармонична в области $D$, граница которой содержит аналитическую дугу $\gamma$, и значения $u(z)$ на этой дуге образуют действительную аналитическую функцию параметра, то $u(z)$ можно аналитически продолжить через дугу $\gamma$.

Пусть сначала $\gamma$ представляет собой отрезок действительной оси $x$. Так как действительная функция $u(x)$ по условию аналитична на $\gamma$, то она может быть аналитически продолжена в комплексную область. Обозначим это продолжение через $f_1(z)$ – это (комплексная) аналитическая функция в окрестности $\Delta$ отрезка $(\alpha, \beta)$ и ее действительная часть $u_1(z)$ – гармоническая в $\Delta$ функция, равная $u(x)$ на отрезке $\gamma$. По **теореме 7** разность $u(z) - u_1(z)$ можно аналитически продолжить за отрезок именно в область, симметричную с пересечением областей $D$ и $\Delta$ относительно отрезка $\gamma$. Так как $u_1(z)$ уже определена в этой области, то такое продолжение даст и аналитическое продолжение функции $u(z)$ в ту же область. Для нашего частного случая теорема доказана.

[3] Действительно, любая точка $z$ области $D$ принадлежит некоторой области $D_r$ при достаточно малом $r$.

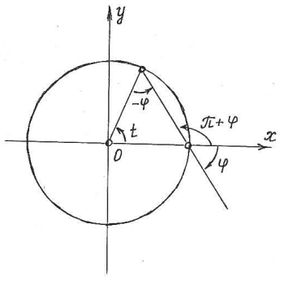



**Рис. 4.4**

(рис. 4.4, где $arg(1-z)=\varphi$). Поэтому действительная часть правильной в круге $|z|<1$ функции

$$g(z)=-i\ln\left[-i(1-z)^2\frac{d\varpi}{dz}\right] \quad (4.32)$$

на окружности $|z|=1$ совпадает с $\vartheta$. Если функция $\vartheta(t)$ известна, то функция $g(z)$ восстанавливается с помощью интеграла Шварца

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vartheta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iA,$$

где A – действительная постоянная. Зная $g(z)$, мы из (4.32) находим и искомое конформное отображение

$$\varpi=f(z)=i\int_{z_0}^{z}\frac{e^{ig(z)}dz}{(1-z)^2}+\varpi_0. \quad (4.33)$$

Вообще говоря, функция $\vartheta(t)$ неизвестна и формула Чизотти (4.33) не дает эффективного решения задачи конформного отображения. Однако эта формула оказывается полезной всякий раз, когда $\vartheta(t)$ можно найти из каких-либо соображений. Например, в задаче отображения круга на многоугольник $\vartheta(t)$ равна известной постоянной на каждой дуге окружности, соответствующей стороне многоугольника, поэтому формула Шварца-Кристоффеля легко получается из формулы Чизотти.

### 4.8. Задача Неймана

Наряду с задачей Дирихле для некоторых приложений важно рассмотреть так называемую *вторую краевую задачу*, или *задачу Неймана*:

*Найти гармоническую в области D функцию* $u(z)$*, зная значения ее нормальной производной на границе* C:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha=g(\zeta) \quad (4.34)$$

*и значение* $u(z_0)$ *в какой-либо точке* $z_0$ *области* $\overline{D}$.

Для определенности мы будем предполагать, что в (4.34) рассматривается внешняя нормаль, $\alpha$ означает угол, образованный этой нормалью с осью $x$. Функция $g(\zeta)$ может иметь на C конечное число точек разрыва первого рода, функция $u$ и ее частные производные первого порядка предполагаются ограниченными.

Для разрешимости задачи Неймана необходимо выполнение соотношения

$$\int_C g(\zeta)ds=0.$$





$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}U(z,\zeta)dt\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}U(z,\zeta)dt<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z,\zeta)dt=\varepsilon. \quad (4.15)$$

Теперь предположим, что $|\varphi-t_0|<\delta$, тогда для всех значений $t$ из интервала $|t-t_0|>2\delta$ будем иметь $|\varphi-t|>\delta$ и в силу условия 3) найдется такое число $\rho<1$, что для этих $t$ и $r>1-\rho$ выполняется неравенство $U(z,\zeta)<\varepsilon$). Таким образом, для всех $z$ из области, заштрихованной на рис. 4.2 (для которых $|\varphi-t_0|<\delta$, $r>1-\rho$), будем иметь:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|T-t_0|>2\delta}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}U(z,\zeta)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot 2M(2\pi-2\delta)<2\varepsilon M, \quad (4.16)$$

где $M$ – максимум $|u(\zeta)|$ на окружности. Объединяя полученные неравенства (4.15) и (4.16), найдем, что для всех $z$ из заштрихованной области $|\Delta|\le(1+2M)\varepsilon$, и наша лемма доказана.

Перейдем к решению задачи Дирихле для круга. Для этого заметим, что функцию $U(z,\zeta)$ теми же методами можно получить геометрически, как действительную часть конформного отображения круга $|z|<1$ на правую полуплоскость $Re\,\omega>0$:

$$U(z,\zeta)=Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}.$$

В самом деле, справедливость свойств 1) и 3) для нее очевидна, а 2) получается отделением действительных частей равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}=1,$$

которое просто доказывается по теореме о вычетах (функция $\frac{\zeta+z}{(\zeta-z)\zeta}$ при $z\neq 0$ имеет в единичном круге два полюса: $\zeta=0$ с вычетом -1 и $\zeta=z$ с вычетом 2; при $z=0$ равенство тривиально).

Теперь уже нетрудно доказать, что *решение обобщенной задачи Дирихле для единичного круга дает интеграл* (С. Пуассона, 1823 г.)

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt\left(z=re^{i\varphi}\right). \quad (4.17)$$

В самом деле, функция $u(z)$, определяемая интегралом (4.17), является действительной частью функции

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt+iC\ (\zeta=e^{it}), \quad (4.18)$$

которая аналитична в единичном круге, следовательно, $u(z)$ гармонична в единичном круге. Она ограничена, ибо из (4.18) следует

$$|u(z)|\le\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt=M,$$

ласти при заданной температуре или потенциале на границе области. К ней, как мы увидим ниже, сводятся и краевые задачи других типов.

В приложениях условие непрерывности граничных значений $\bar{u}(\zeta)$ является слишком стеснительным и приходится рассматривать ***обобщенную задачу Дирихле***:

На границе $C$ области $D$ задана функция $u(\zeta)$, непрерывная всюду, кроме конечного числа точек $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$, где она имеет точки разрыва первого рода. Найти гармоническую и ограниченную в области $D$ функцию $u(z)$, принимающую значения $u(\zeta)$ во всех точках непрерывности этой функции[5].

Теорему 6 предыдущего подраздела можно теперь формулировать как теорему единственности решения обобщенной задачи Дирихле.

***Теорема 1***. В данной области при заданной граничной функции $u(\zeta)$существует не более одного решения обобщенной задачи Дирихле.

Решение обобщенной задачи Дирихле с помощью одного приема можно свести к решению обычной задачи; для простоты мы ограничимся случаем односвязных областей. Обозначим через $u^-(\zeta_k)$ и $u^+(\zeta_k)$ предельные значения граничной функции $u(\zeta)$ при $\zeta$, стремящейся к точке $\zeta_k$ вдоль C соответственно в положительном и отрицательном направлениях, через $h_k=u^+(\zeta_k)-u^-(\zeta_k)$ мы обозначим скачок $u(\zeta)$ в точке $\zeta_k$. Для общности предположим, что $\zeta_k$ является угловой точкой контура $C$ и через $\varphi_k^-$ и $\varphi_k^+$ обозначим углы между осью $x$ и касательными к $C$ в точке $\zeta_k$ (рис. 4.1); пусть еще $\alpha_k=\varphi_k^+-\varphi_k^-$ (если $\zeta_k$не является угловой точкой, то $\alpha_k=-\pi$ ). Возьмем функцию $u_k(z)=\frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z-\zeta_k)$, где arg обозначает надлежащим образом выбранную ветвь аргумента. Эта функция, очевидно, гармонична в области D и непрерывна в $\overline{D}$ всюду, кроме точки $\zeta=\zeta_k$. Если $z\to\zeta_k$ по пути, касательная к которому в точке $\zeta_k$ составляет с осью $x$ угол $\theta$ (значение $\theta$ заключено между $\varphi_k^-$ и $\varphi_k^+$), то эта функция стремится к пределу $\frac{h_k}{\alpha_k}\theta$. При переходе по кривой $C$ в положительном направлении через точку $\zeta_k$ функция $u_k(\zeta)$ испытывает, следовательно, скачок $\frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+-\frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_{k=h_k}^-$.

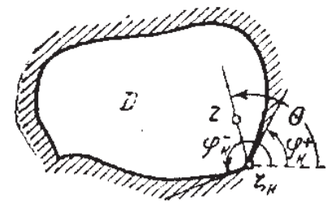



**Рис. 4.1**

[5] Если заданная функция $u(\zeta)$ непрерывна, то обобщенная задача Дирихле совпадает с обычной, ибо условие ограниченности функции $u(z)$ следует автоматически из условия ее непрерывности в $\overline{D}$





Дифференцируя последнее равенство, находим $e^{it}dt=\frac{2y}{(t-\bar{z})^2}dt$, откуда $dt=\frac{2ydt}{(t-\bar{z})(t-z)}=\frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}$; перейдя в (4.25) к старым переменным $z$ и $t$, найдем окончательно *интеграл Пуассона для верхней полуплоскости*:

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}. \quad (4.26)$$

Так как, очевидно,

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=Re\frac{1}{i(t-z)},$$

то можно написать и *интеграл Шварца для полуплоскости*:

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{dt}{t-z}+iC, \quad (4.27)$$

где $C$ – действительная постоянная. Следует, однако, иметь в виду, что в то время как интеграл (4.26) сходится для ограниченных функций $u(t)$, для сходимости интеграла (4.27) недостаточно ограниченности $u(t)$[7]. Для сходимости этого интеграла достаточно, например, чтобы функция $u$ при $|t|\to\infty$ стремилась к нулю не медленнее, чем $1/|t|^{\alpha}$, где $\alpha>0-$ произвольная постоянная.

Приведем несколько примеров. Непосредственно по формуле (4.26) получаем гармоническую в верхней полуплоскости функцию, равную 1 на отрезке $(\alpha,\beta)$ действительной оси и 0 на остальной части этой оси:

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{\beta-x}{y}-arctg\frac{\alpha-x}{y}\right).$$

Если ввести углы $\varphi_\alpha$ и $\varphi_\beta$ образованные векторами $z-\alpha$ и $z-\beta$ действительной осью $x$, то можно написать:

$$u(z)=\frac{\varphi_\beta-\varphi_\alpha}{\pi}=\frac{\omega}{\pi} \quad (4.28)$$

(из рис. 4.3 видно, что $\varphi_\beta=\varphi_\alpha+\omega$). Таким образом, функция $u(z)$ равна доле угла $\alpha\beta$ виден из точки $z$. Формула Шварца здесь также применима и она дает

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}ln\frac{\beta-z}{\alpha-z}.$$

Пусть теперь заданы точки $a_1,a_2,\cdots,a_n\ (-\infty<a_1<\cdots<a_n<\infty)$ действительной оси и требуется найти гармоническую в верхней полуплоскости

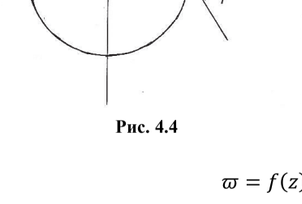



**Рис. 4.3**

[7] Это объясняется тем, что интеграл от мнимой части подынтегральной функции в (4.27) сходится уже интеграла (4.26).

функцию $u(z)$, принимающую на отрезках $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, \infty)$ постоянные значения $u_0, u_1, \ldots, u_n$ соответственно. Задача решается применением формулы (4.28):

$$u(z) = \frac{\varphi_1 u_0}{\pi} + \frac{u_1}{\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ \ldots + \frac{u_n}{\pi}(\pi - \varphi_n),$$

или, после перегруппировки членов,

$$u(z) = \frac{\varphi_1}{\pi}(u_0 - u_1) + \frac{\varphi_2}{\pi}(u_1 - u_2) + \ \ldots + \frac{\varphi_n}{\pi}(u_{n-1} - u_n) + u_n. \quad (4.29)$$

### 4.5. Вывод интеграла Шварца-Кристоффеля

В качестве примера применения полученных формул приведем вывод интеграла Шварца-Кристоффеля. Рассмотрим гармоническую в верхней полуплоскости функцию

$$u(z) = \arg f'(z) = Im \ln f'(z).$$

Из геометрического смысла производной конформного отображения мы заключаем, что на отрезках $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_n, \infty)$ эта функция принимает постоянные значения $u_0, u_1, \ldots, u_n$, ибо эти отрезки переходят в прямолинейные отрезки-стороны многоугольника. На отрезках $(-\infty, a_1)$ и $(a_n, \infty)$, $u_0 = u_n = \alpha - \pi = \theta$, где $\alpha$ – угол отрезка $A_1A_n$ с осью $u$.

При переходе через точку $a_k$ функция $u(t)$ увеличивается на $(1 - \alpha_k)\pi$, ибо отрезок $A_kA_{k+1}$ получается из отрезка $A_{k-1}A_k$ поворотом на этот угол против часовой стрелки, следовательно,

$$u_{k-1} - u_k = (\alpha_k - 1)\pi.$$

По формуле (4.29) находим тогда:

$$u(z) = (\alpha_1 - 1)\varphi_1 + (\alpha_2 - 1)\varphi_2 + \ \ldots + (\alpha_n - 1)\varphi_n + \theta = \theta + \\ + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1)\arg(z - \alpha_k).$$

По известной мнимой части легко восстанавливается и аналитическая функция

$$\ln f'(z) = \ln C_0 + i\theta + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1)ln\ (z - \alpha_k),$$

откуда потенцированием и интегрированием находится искомое конформное отображение

$$f(z) = C_0 e^{i\theta}\int_{z_0}^{z}(z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}dz + C_1$$

($C_0$ – положительная, $C_1$ – комплексная постоянная).

### 4.6. Интеграл Шварца для полосы $-h < Imz < h$

Интеграл Шварца для круга $|\varpi| < 1$ имеет вид:

$$F(\varpi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\omega)\frac{\omega + \varpi}{\omega - \varpi}d\tau + iC, \quad (4.30)$$

где $\omega = e^{i\tau}$. Рассмотрим конформное отображение $\varpi = \varpi(z) = th\frac{\pi z}{4h}$ круга $|\omega| < 1$ на полосу $-h < Im\, z < h$, переводящее нижнюю и верхнюю полуокружности соответственно в нижний и верхний берега полосы, и обозначим $F[\varpi(z)] = f(z)$, $U[\varpi(z)] = u(z)$. На нижнем берегу полосы при $\zeta = t - hi$ имеем:

$$\omega = e^{i\tau} = th\frac{\pi}{4h}(t - hi) = \frac{sh\frac{\pi t}{2h} - i}{ch\frac{\pi t}{2h}}, \ (-\pi < \tau < 0),$$

откуда $\tau = \frac{1}{i}ln\frac{sh\frac{\pi t}{2h} - i}{ch\frac{\pi t}{2h}}$ и $d\tau = \frac{\pi dt}{2h\ ch\frac{\pi t}{2h}}$. Аналогично на верхнем берегу

$$\omega = e^{i\tau} = th\frac{\pi}{4h}(t + hi) = \frac{sh\frac{\pi t}{2h} + i}{ch\frac{\pi t}{2h}}, \ (0 < \tau < \pi),$$

откуда $d\tau = -\frac{\pi dt}{2h\ ch\frac{\pi t}{2h}}$. Подставляя это в формулу (4.30), будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{4h}\left\{\int_{-\infty}^{0} u_-(t)\frac{sh\frac{\pi}{2h}(t - t_z)c_t}{sh\frac{\pi}{2h}(t - t_z)c_t}\frac{dt}{c_t} + \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t)\frac{sh\frac{\pi}{2h}(t + t_z)c_t}{sh\frac{\pi}{2h}(t + t_z)c_t}\frac{dt}{c_t}\right\} + iC,$$

где $u_\pm(t)$ обозначают значения $u(\zeta)$ в точках $\zeta = t \pm th$, $s_t$ и $c_t$ – гиперболические синус и косинус $t_z = th\frac{\pi z}{4h}$. После простых преобразований получаем окончательно:

$$f(z) = \frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t) + u_-(t)}{ch\frac{\pi}{2h}(t - z)}dt - \frac{1}{4h}sh\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_+(t) - u_-(t)}{ch\frac{\pi t}{2h}ch\frac{\pi(t - z)}{2h}}dt + iC\ . \quad (4.31)$$

Для полосы $0 < y < 1$ формулу (4.31) можно переписать также в виде:

$$f(z) = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_0\ (t)cth\frac{\pi(t - z)}{2}dt + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_1\ (t)th\frac{\pi(t - z)}{2}dt + iC_1.$$

### 4.7. Формула Чизотти

Формула Чизотти (1921 г.) дает выражение для конформного отображения $\omega = f(z)$ круга $|z| < 1$ на произвольную односвязную область $D$, ограниченную контуром $C$, если в каждой точке $z = e^{it}$ окружности изве-стен угол наклона $\vartheta = \vartheta(t)$ касательной к $C$ в точке $\omega$, соответствующей $z$. Пусть $dz = ie^{it}dt$ и $d\varpi = |d\varpi|e^{i\vartheta}$ – элементы окружности и кривой $C$, соответствующие друг другу при нашем конформном отображении, тогда на окружности $i\frac{d\varpi}{dz} = e^{i(\vartheta - t)}\frac{|d\varpi|}{dt}$. Так как $f(z)$ реализует конформное отображение, то $\frac{d\varpi}{dz} \neq 0$ и функция $-iln\left[i\frac{d\varpi}{dz}\right]$ правильна в круге $|z| < 1$, причем по предыдущему ее действительная часть на окружности $|z| = 1$ равна $\vartheta - t$. С другой стороны, из элементарных геометрических соображений ясно, что на окружности

$$Re\{-i\ln[-(1 - z)^2]\} = \pi + 2\arg(1 - z) = t$$



Отсюда и следует утверждение теоремы 2 (рис. 4.2).

Перейдем к решению задачи Дирихле для произвольной односвязной области $D$, причем сначала рассмотрим случай, когда $D$ представляет собой единичный круг $|z| < 1$. Для этого случая решение основывается на следующей лемме:

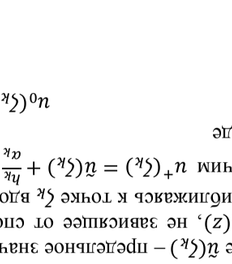



**Рис. 4.2**

***Лемма.*** Пусть действительная функция $U(z, \zeta)$, где

$z = re^{i\varphi}, \zeta = e^{it}, 0 \le r < 1, 0 \le \varphi, t < 2\pi,$

1) непрерывна и неотрицательна,

2) для любого $z$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z, \zeta)dt,$$

3) при $z \to \zeta_0 = e^{it_0}$ ($\zeta_0$ – любая точка окружности) и $\zeta \neq \zeta_0$ функция $U(z, \zeta)$ стремится к нулю, причем равномерно относительно $\zeta$[6].

Тогда для любой действительной функции $u(\zeta)$, кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода, в любой точке ее непрерывности $\zeta_0$ существует предел

$$\lim_{z \to \zeta_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)U(z, \zeta)dt = u(\zeta_0). \quad (4.14)$$

Для доказательства мы, прежде всего, воспользуемся условием 2) и представим разность между интегралом в левой части (4.14) и его предполагаемым пределом в виде

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(\zeta) - u(\zeta_0)\}U(z, \zeta)dt.$$

Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью $u(\zeta)$в точке $\zeta_0$, выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|t - t_0| < 2\delta$ было $|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon$ (рис. 4.2). Имеем:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t - t_0| < 2\delta} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t - t_0| \ge 2\delta},$$

где интегралы берутся по тем дугам единичной окружности, для аргументов точек которых выполнены соответствующие неравенства. Применяя к первому из них известную из анализа теорему о среднем и снова пользуясь условиями 1) и 2), мы получим:

[6] Точный смысл условия 3) следующий: для любого $\varepsilon < 0$ найдутся числа $\rho < 1$ и $\delta > 0$ такие, что при $r > 1 - \rho$ и $|\varphi - t_0| < \delta$ для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| > 2\delta$, справедливо неравенство $0 \le U(z, \zeta) < \varepsilon$.



Пусть теперь $u(z)$ будет решением обобщенной задачи Дирихле при заданных граничных значениях $u(\zeta)$. Рассмотрим функцию

$$U(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k),$$

она гармонична в области $D$ и непрерывна в $\bar{D}$. В самом деле, $u(z)$ и все функции $u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k)$ гармоничны в $D$.

Далее, предельные значения $U(z)$ при $z \to \zeta \neq \zeta_k$ равны

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k\ (\zeta) \quad (4.11)$$

и функция $U(\zeta)$ остается непрерывной при переходе через каждую точку $\zeta_k$, ибо при построении $U(\zeta)$ мы вычитаем из функции $u(\zeta)$, имеющей скачок $h_k$ в точке $\zeta_k$, функцию $u_k(\zeta)$, имеющую тот же скачок, а остальные члены суммы (4.11) непрерывны в этой точке.

Таким образом, действительно, решение обобщенной задачи Дирихле $u(z)$ можно представить как сумму функции $U(z)$, решающей задачу Дирихле с непрерывными граничными значениями

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta),$$

и функции $\sum_{k=1}^{n} u_k\ (z)$:

$$u(z) = U(z) + \sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k). \quad (4.12)$$

По теореме 1 найденное решение единственно.

Из формулы (4.12) вытекает следующая теорема, выясняющая поведение обобщенного решения в окрестности точек $\zeta_k$.

***Теорема 2***. При приближении $z$ к точке разрыва $\zeta_k$ граничной функции $u(\zeta)$ вдоль различных путей решение $u\ (z)$ обобщенной задачи Дирихле может стремиться к любому пределу, заключенному между $u^-(\zeta_k)$ и $u^+(\zeta_k)$.

Действительно, пусть $z \to \zeta_k$ вдоль пути, касательная к которому в точке $\zeta_k$ составляет с осью $x$ угол $\theta$. Из формулы (4.12) следует, что $u\ (z)$ при этом стремится к пределу

$$u_0(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\theta, \quad (4.13)$$

где $\tilde{u}(\zeta_k)$ – предельное значение суммы $U\ (z)$ и всех функций $u_v(z)$, кроме $u_k(z)$, не зависящее от способа приближения $z$ к точке $\zeta_k$. В частности, приближаясь к точке $\zeta_k$ вдоль кривой $C$ в отрицательном направлении, получим $u^+(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+$, так что формулу (4.13) можно переписать в виде

$$u_0(\zeta_k) = u^+(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}(\theta - \varphi_k^+).$$

Отделяя в интеграле Шварца мнимые части, мы получим *выражение гармонической функции $v\,(z)$ через граничные значения сопряженной к ней функции:*

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{2r\sin(\varphi - t)}{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2}.$$

Если мы воспользуемся методом для восстановления аналитической функции по ее действительной части, то получим интеграл, решающий ту же задачу, что и интеграл Шварца, но несколько отличающийся от него. Положим $z = 0$; тогда будем иметь:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0,$$

$$2r\cos(\varphi - t)\frac{re^{i\varphi}}{e^{it}} + \frac{re^{it}}{r^{i\varphi}} = \frac{z}{\zeta} + \frac{r^2\zeta}{z} = \frac{z}{\zeta}, \qquad dt = -i\frac{d\zeta}{\zeta}$$

(как и выше, мы считаем $z = re^{i\varphi}, \zeta = e^{it}$). Подставляя это в интеграл Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(e^{it}\right)\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - t)}dt,$$

по формуле (4.4) получим:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{f(0)} = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=1} u(\zeta)\frac{-id\zeta}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} - \overline{f(0)},$$

или окончательно

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \overline{f(0)}.$$

### 4.4. Задача Дирихле для полуплоскости

Пусть на действительной оси задана функция $u(t)$, ограниченная и с конечным числом точек разрыва; пусть еще пределы $u\,(t)$ при $t \to \pm\infty$ существуют и конечны. Для того чтобы найти значение в точке $z$ гармонической в верхней полуплоскости функции $u\,(z)$, принимающей заданные значения на оси, мы совершим конформное отображение

$$\omega = \frac{\zeta - z}{\zeta - z}$$

полуплоскости $Im\,\zeta > 0$ на круг $|\omega| < 1$. Так как точка $z$ переходит при этом в $\omega = 0$, то по теореме о среднем

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)d\tau, \qquad (4.25)$$

где $u[\zeta(\omega)] = U(\omega)$ – аргумент точки на окружности:



где $M$ – максимум $|u(\zeta)|$ на окружности (свойство 2) функции (4.17). Наконец, по предыдущей лемме, при $z$, стремящемся к любой точке $\zeta$ непрерывности $u(\zeta)$, функция $u(z)$ стремится к $u(\zeta)$, что и требуется.

Теперь нетрудно доказать разрешимость обобщенной задачи Дирихле и для произвольной односвязной области.

***Теорема 3.*** *Для любой односвязной области $D$ и любой кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода граничной функции $u(\zeta)$ решение обобщенной задачи Дирихле существует.*

В самом деле, существует конформное отображение $\varpi = \varpi\,(z)$ области $D$ на единичный круг $|w| < 1$. Заданные на границе $D$ кусочно-непрерывные значения $u(\zeta)$ переходят в кусочно-непрерывные на единичной окружности значения $u[z(\omega)] = U(\omega)$, где $z = z(\varpi)$ – функция, обратная к $\varpi = \varpi\,(z)$. По этим граничным значениям с помощью интеграла Пуассона можно построить гармоническую в круге $|\varpi| < 1$ функцию $U(\varpi)$. Тогда функция

$$u(z) = U[\varpi(z)] \qquad (4.19)$$

будет гармонической в области $D$. Она ограничена вместе с $U(\varpi)$, и при $z$, стремящемся к точке $\zeta$ непрерывности заданной функции $u(\zeta)$, стремится к значению $u(\zeta) = U\,[\varpi\,(\zeta)]$, ибо при этом точка $\varpi = \varpi\,(z)$ стремится к точке $\varpi = \varpi\,(\zeta)$ непрерывности функции $U(\omega)$. Таким образом, функция (4.19) дает решение обобщенной задачи Дирихле для области $D$, и теорема 3 доказана.

Если граница $C$ области $D$ не имеет бесконечных ветвей и обладает непрерывной кривизной, то решение обобщенной задачи Дирихле можно выразить замкнутой формулой. Для получения этой формулы фиксируем произвольную точку $z_0$ области $D$ и обозначим через

$$\varpi = f(z, z_0);\ f(z_0, z_0) = 0 \qquad (4.20)$$

функцию, реализующую отображение $D$ на единичный круг $|\varpi| < 1$. Переходя, как при доказательстве теоремы 3, к плоскости $\varpi$, мы можем представить решение задачи Дирихле с помощью интеграла Пуассона. В частности, пользуясь обобщенными значениями, введенными в этом доказательстве, в центре круга $\omega = 0$ мы получим:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} U(\omega)d\sigma, \qquad (4.21)$$

где $\omega = e^{i\tau}$ и $d\sigma = d\tau$ - элемент длины окружности $|\omega| = 1$.

В наших условиях функция (4.20) обладает непрерывной производной на границе и, следовательно,

$$d\sigma = |f'(\zeta; z_0)|ds,$$

где $ds$ – элемент длины $C$, соответствующий $d\sigma$. Обозначим через $dn$ элемент внутренней нормали к $C$ и через $-d\rho$ соответствующий ему элемент радиуса окружности $|\omega| = 1$; тогда будем иметь $|f'(\zeta; z_0)|dn = -d\rho$. Так

как $\rho = |f'(\zeta; z_0)| = 1$ на $C$, то можно написать $d\rho = \frac{d\rho}{\rho} = dln\rho$ и $|f'(\zeta; z_0)| = -\frac{d\rho}{dn} = -\frac{dln\rho}{dn} = \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho}$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную в направлении внутренней нормали к $C$. Подставляя это в найденное выше выражение для $d\sigma$, находим:

$$d\sigma = \frac{\partial}{\partial n} ln \frac{1}{|f'(\zeta; z_0)|} ds. \qquad (4.22)$$

Теперь остается в формуле (4.21) возвратиться к переменной $z$. Учитывая нормировку (4.27), по которой точке $\omega = 0$ соответствует $z_0$, и соотношение (4.22), мы получаем:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n} ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|} ds. \qquad (4.23)$$

Функция

$$g(z; z_0) = ln\frac{1}{|f(z; z_0)|}$$

называется *функцией Грина* для области $D$, она, очевидно, гармонична всюду в $D$, кроме точки $z_0$, где имеет полюс. Вводя в (4.23) эту функцию и заменяя $z_0$ на $z$, мы получаем искомую формулу для решения обобщенной задачи Дирихле:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ – производная в направлении внутренней нормали).

Формула Грина выражает решение задачи Дирихле для некоторой области $D$ через логарифм конформного отображения D на единичный круг, т.е. сводит решение задачи Дирихле к задаче конформного отображения. Оказывается и обратно, если для некоторой области $D$ известно решение задачи Дирихле, то можно построить конформное отображение этой области на единичный круг.

В самом деле, по основной теореме такое отображение $\omega = f(z; z_0)$, $f(z_0; z_0) = 0$ существует. Предположим сначала, что мы знаем это отображение, и рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{f(z, z_0)}{z - z_0}, \qquad F(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z, z_0)}{z - z_0} = f'(z_0, z_0).$$

Она, очевидно, аналитична и отлична от нуля всюду в области $D$ (функция $f(z, z_0)$ равна 0 лишь при $z = z_0$, а $f'(z, z_0) \neq 0$ в силу комформности отображения). Поэтому функция $U(z) = ln|F(z)|$ гармонична в области $D$. Ее значения на границе $C$ этой области

$$U(\zeta) = ln\left|\frac{f(\zeta, z_0)}{\zeta - z_0}\right| = ln\frac{1}{|\zeta - z_0|}$$

не зависят от вида функции $f(z, z_0)$, ибо $|f'(\zeta; z_0)| = 1$ на $C$.



Предположим теперь, что функция $f(z, z_0)$ неизвестна. По заданным граничным значениям гармонической функции $U(\zeta)$ мы можем однозначным образом восстановить значения $U(z)$ внутри $D$ (задача Дирихле). Затем с помощью интегрирования восстанавливаем сопряженную гармоническую функцию $V(z)$; она находится с точностью до постоянного слагаемого $\alpha$. Таким образом, мы находим функцию

$$lnG(z) = U(z) + iV(z) + ia,$$

а затем и искомое конформное отображение

$$f(z, z_0) = (z - z_0)e^{C(z)} = e^{i\alpha}(z - z_0)e^{U(z)+iV(z)}.$$

Оно определяется с точностью до поворота, что соответствует принятым условиям нормировки.

*Итак, задача конформного отображения области на единичный круг и задача Дирихле для той же области эквивалентны; они сводятся друг к другу с помощью простых операций дифференцирования и интегрирования.*

Задача отображения области $D$ на полосу $0 < v < 1$:

$$w = f(z);\ f(z_1) = -\infty;\ f(z_2) = 0, f(z_3) = \infty,$$

еще более просто сводится к обобщенной задаче Дирихле. Мы находим гармоническую функцию $v(z)$ по условиям: $v(\zeta) = 0$ на дуге $z_1z_2z_3$ границы $C$ и $v(\zeta) = 1$ на остальной части $C$, затем находим сопряженную к ней функцию $u(z)$, удовлетворяющую условию $u(z_2) = 0$. Функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ и есть искомая.

### 4.3. Интеграл Шварца

Рассмотрим интеграл

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt + iC,\ \left(\zeta = e^{it}\right), \qquad (4.24)$$

где C – действительная постоянная, решает следующую задачу: *найти аналитическую в круге* $|z| < 1$ *функцию, действительная часть которой на окружности принимает заданные значения* $u(\zeta)$ *в каждой точке непрерывности функции* $u(\zeta)$ *(Г. Шварц, 1869 г.).*

Действительно, по теореме единственности решения задачи Дирихле действительная часть $u(\zeta)$ функции $f(z)$ вполне определяется своими граничными значениями, а из уравнений Коши-Римана следует, что тогда мнимая часть $v(z)$ этой функции определена с точностью до постоянного слагаемого. Таким образом, формула (4.24) при различных C содержит все решения поставленной задачи.

Полагая в этой формуле $z = 0$ и пользуясь теоремой о среднем, получим, что член с интегралом равен $u(0)$; мы можем, следовательно, утверждать, что постоянная $C = v(0)$.